En résumé, le mémoire de M. Cahen est un travail d'une réelle valeur. La Faculté ne peut qu'acceuillir avec une grande satisfaction ces recherches difficiles qui côtoient à la fois la théorie des fonctions et la théorie des nombres.

Rapport de Kœnigs (sans date) sur la thèse de **A. Grévy**, ***Etudes sur les équations fonctionnelles***, soutenue le 10 avril 1894

Dans diverses publications datant de 1884 et 1885, M. Kœnigs s'est occupé de réitération de l'opération $\varphi(z)$, où φ désigne une fonction uniforme de z, et a étudié les points limites auxquels peut conduire la réitération indéfinie. Si x est un tel point limite, x est racine de l'équation $x-\varphi(x)=0$, et rend le module de $\varphi'(x)$ inférieur à l'unité. Dans certains cas, au lieu d'un point limite, on obtient un cycle de points limites que l'on parcourt indéfiniment par la réitération de l'opération $\varphi(z)$. Dans les recherches de M. Kœnigs intervient une fonction B(z) qui joue dans la question le rôle d'élément simple ; cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle $B(\varphi(z))=aB(z)$, elle intervient dans une série d'autres équations fonctionnelles. Dans un travail récent, M. Appell a utilisé cette fonction dans l'étude des équations du second ordre :

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0$$

qui se reproduisent par certaines transformations. Brioschi et Kummer avaient réduit la question à une certaine équation fonctionnelle de la nature de celle dont M. Kœnigs s'est occupé. M. Appell a montré que la fonction B(z) permet d'effectuer l'intégration complète des équations du second ordre considérés. Le travail de M. Grévy constitue une contribution et une généralisation des précédentes recherches. Il a tout d'abord généralisé le problème traité par M. Kœnigs, de l'intégration des équations fonctionnelles :
$F(\varphi(z)) = mF(z)$, $F(\varphi(z)) = \psi(F(z))$ où φ et ψ sont données et F est la fonction inconnue, en considérant l'équation fonctionnelle beaucoup plus générale

$$p_0(z)\psi(z)+p_1(z)\psi(\varphi(z))+...+p_n(z)\psi((\varphi_n(z))=0,$$

où $p_0, p_1 ..., p_n$ sont des fonctions de z connues, φ_n représente le résultat de $\varphi(z)$ répété n fois, et enfin, ψ la fonction inconnue.
En employant des calculs des limites, introduit avec tant de succès par Cauchy dans les équations ordinaires, l'auteur parvient à une proposition d'une grande généralité qui tient dans ce genre d'équation le même rang que le théorème de Cauchy pour les équations ordinaires. Ce théorème dont l'auteur fait plusieurs applications, lui permet de traiter à fond le problème qu'il s'est proposé, et même d'aborder un cas intéressant laissé de côté par MM. Appell et Kœnigs dans leurs recherches, celui où le point limite x annule la dérivée $\varphi'(x)$. L'auteur prouve qu'une certaine fonction C(z) joue alors un rôle analogue à celui de la fonction B(z) et il complète en ce point les résultats obtenus par M. Appell sur les équations du second ordre. En résumé nous estimons que le travail de M. Auguste Grévy apporte un complément important à la théorie générale, peu étudiée jusqu'ici, des équations fonctionnelles, et qu'il est digne d'être soutenu comme thèse devant la Faculté des sciences de Paris.

Rapport de Poincaré (sans date) sur la thèse de **E. Borel**, ***Sur quelques points de la théorie des fonctions***, soutenue le 14 juin 1894

La thèse présentée par M. Borel a pour objet l'étude des fonctions développables en séries de la forme :

$$\varphi(x)=\Sigma \frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$$

Déjà les analystes avaient eu l'occasion de s'occuper de beaucoup de séries de cette forme et, pour quelques unes d'entre elles, on avait remarqué qu'elles représentent deux fonctions différentes dans deux régions différentes du plan. Cependant, l'étude systématique de ces développements reste à faire et le travail de M. Borel contribuera à combler cette lacune. L'auteur établit d'abord que si les points a sont sur une ligne fermée L et la série $\Sigma|A|$ converge, la série $\varphi(x)$ ne peut être identiquement nulle à l'intérieur de L sans l'être également à l'extérieur de L et il déduit de ce théorème une définition non équivoque du prolongement analytique d'une fonction de la forme de $\varphi(x)$ au delà d'une ligne singulière telle que L. Les mêmes conclusions ne s'appliqueraient plus s'il y avait en dehors de la ligne L une infinité de points a se rapprochant indéfiniment de cette ligne. M. Borel obtient cependant même dans ce cas un autre résultat intéressant. Si les points a remplissent une certaine région R, et si par exemple $\alpha=1$, si la série $\Sigma|\sqrt{A}|$ est convergente, on pourra joindre deux points extérieurs à R, par une infinité de lignes qui traversent cette région et le long desquelles la série $\varphi(x)$ converge uniformément, le long desquelles par conséquent, la fonction est continue. Si la série $S|^{k+1}\sqrt{A}|$ converge, non seulement la fonction $\varphi(x)$ est continue le long de ces lignes, mais il en est de même de ses k premières dérivées. Enfin toutes les dérivées sont continues si la série $\Sigma 1/\log|A|$ converge. Enfin, si l'on suppose que α est égal à 1, que les points a_n remplissent une région annulaire R et qu'il n'y en ait par conséquent ni à l'intérieur de l'anneau R, ni à l'extérieur de cet anneau, si enfin la série $\Sigma A_n z^n$ converge pour toutes les valeurs de z la fonction $\varphi(x)=\Sigma A_n/(x-a_n)$ ne pourra être identiquement nulle à l'intérieur de l'anneau sans l'être également à l'extérieur de cet anneau.

Toutes ces propriétés sont fort curieuses et de nature à éclaircir nos idées sur un des points les plus délicats de la théorie des fonctions.

Dans la deuxième partie de sa thèse, M. Borel étudie une fonction qui dans un intervalle donné est continue ainsi que toutes ses dérivées, mais qui en aucun point de cet intervalle n'est susceptible d'être développée par la formule de Taylor. Il montre qu'elle peut être égalée à la somme d'une série de Taylor et d'une série de Fourier et de telle façon qu'une dérivée d'ordre quelconque s'obtienne en différentiant ces deux séries terme à terme. Il est ainsi amené à résoudre une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues ; le procédé qu'il emploie et qui, comme l'auteur le montre, est susceptible de généralisation, met en pleine lumière ce fait déjà signalé que la résolution de semblables équations peut se ramener à celle d'un système d'inégalités. Enfin, dans une note, M. Borel revenant sur un point de détail, nous donne un théorème intéressant relatif à la théorie des ensembles de M. Cantor. La thèse de M. Borel est donc un travail remarquable où quelques unes des questions les plus difficiles de l'analyse sont abordées avec succès et qui contient plusieurs résultats importants. Nous estimons qu'il y a lieu de l'autoriser à imprimer et à soutenir cette thèse.

Rapport de Picard (13 mars 1894) sur la thèse de **E. Cartan**, ***Sur la structure des groupes de transformations finis et continus***, soutenue le 28 juin 1894

Le travail de M. Cartan se rapporte à un des points les plus intéressants de la théorie des groupes continus, celui de leur structure. Celle-ci dépend essentiellement, comme l'a montré M. Lie, de l'ensemble d'un système de constantes se présentant dans les identités fondamentales auxquelles satisfont les transformations infinitésimales. Dans diverses applications faites de la théorie des groupes au calcul intégral, c'est leur structure qui joue le rôle principal. Aussi a-t-on senti depuis longtemps le besoin d'en faire une étude approfondie. Cette étude, commencée par M. Lie, a fait l'objet de nombreux mémoires d'un géomètre distingué