CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HENRI POINCARÉ

La correspondance avec des mathématiciens de J à Z

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, tome 10 (1989), p. 83-229.
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1989__10__83_0>

HENRI POINCARÉ

LA CORRESPONDANCE AVEC DES MATHÉMATICIENS*

DE J À Z

* Voir les *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 7(1986), 59-219.

LETTRES DE CAMILLE J O R D A N[1]

I.

Paris, le 27 janvier 1880

Mon cher Camarade,

Les mémoires de Korkine et Zolotareff se trouvent dans les *Mathematische Annalen*, t.6 et 11[2] ; ils sont à mon avis extrêmement intéressants, et vous feriez bien de les lire. Si vous n'avez pas de moyen facile de vous les procurer, je pourrai vous les prêter.

Je ne crois pas que rien ait été fait sur la composition des formes quadratiques à plus de 2 variables sauf pour celles qu'Hermite a considérées[3], et qui ne sont au fond que des formes binaires. Je me souviens qu'Hermite, qui doit s'y connaître, m'a dit dans le temps qu'une généralisation de ces résultats lui semblait impossible, et m'a dissuadé de la chercher, conseil que j'ai suivi.

Les questions que vous avez traitées,et dont vous me donnez les énoncés dans votre lettre, sont certainement intéressantes, surtout si vos solutions permettent, non seulement de trouver, pour une forme une fois donnée, d'assigner le groupe des substitutions qui la reproduisent à un facteur près, mais de former, pour un nombre donné de variables, ces divers groupes, avec les formes correspondantes[4]. Cette question est assez à l'ordre du jour en ce moment. M. Klein y a consacré de nombreux mémoires dans les *Mathematische Annalen*[5]. Mais il se borne aux groupes d'un nombre fini de substitutions entre deux variables. Il trouve que ces groupes se réduisent à ceux qui superposent à lui-même une pyramide régulière, une double pyramide régulière, ou l'un des polyèdres réguliers[6]. Quant aux formes binaires correspondantes, elles se réduisent (au moins pour les groupes des polyèdres réguliers) aux fonctions entières d'un petit nombre de formes indépendantes. De mon côté, j'ai réussi à former les groupes finis pour trois variables, dans le *Journal* de Borchardt de l'année dernière[7] ; mais je ne sais rien sur les formes correspondantes, non plus que sur les groupes où le nombre des substitutions serait infini.

Qu'entendez-vous par vos réduites, pour une forme ternaire , par exemple ? Votre lettre ne me donne pas d'éclaircissement à cet égard. Ces réduites ne forment-elles toujours qu'une seule période ? Dans la méthode de réduction *arithmétique* que donne Hermite pour les formes quadratiques à plus de 2 variables il n'en est pas ainsi, chaque réduite étant en général contigüe à plusieurs autres .

Veuillez agréer, mon cher Camarade, l'expression de mes sentiments dévoués.

C. Jordan

II.

Paris, le 5 novembre 1880

Mon cher Camarade,

Le problème de déterminer les polyèdres réguliers dans l'hyperespace à 4 dimensions n'a pas encore été résolu, que je sache. Tout ce que j'ai pu faire a été de démontrer que leur nombre est limité. Je vous envoie le mémoire qui contient ce résultat[8], car vous pourriez avoir quelque peine à vous le procurer. Je ne connais aucun autre travail sur cette question.

M. Laussedent m'a communiqué votre Mémoire sur les formes cubiques[9], qui m'a bien vivement intéressé.

Tout à vous.

C. Jordan

NOTES

1 Les lettres d'Henri Poincaré à Jordan ne se trouvent pas dans la correspondance de Camille Jordan donnée à l'Ecole Polytechnique par Gaston Julia.

2 A. Korkine et G. Zolotareff, *Sur les formes quadratiques* (Math. Annalen, 6(1873), 366-389) ; *Sur les formes quadratiques positives* (11(1877), 242-292).

3 C. Hermite, *Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres* (Journal reine und angew. Math., 41(1851), 191-216) = *Oeuvres*, t.I, p.164-192 ; *Sur la théorie des formes quadratiques* (Journal reine und angew. Math., 47(1854), 307-368) = *Oeuvres*, t.I, p.193-263.

4 Les résultats obtenus par Poincaré sont exposés dans son mémoire *Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires* (Journal de l'Ecole Polytechnique, 50e cahier, 1881, 190-253) = *Oeuvres*, t.V, p.28-72.

5 F. Klein, *Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* (Math. Annalen, 9(1875-1876)) = *Gesamm. Math. Abh.*, t.II, p.275-301 ; *Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder* (12(1877)) = *Gesamm. Math. Abh.*, t.II, p.320-380.

6 P.286-300 de l'article cité dans la note 5.

7 C. Jordan, *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* (Journal reine und angew. Math., 84(1878), 89-215) = *Oeuvres*, t.II, p.13-139. Voir le commentaire de J. Dieudonné, p.XXIV du t.I des *Oeuvres* de Jordan.

8 C. Jordan, *Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire* (Atti R. Accademia sci. fis. mat. Napoli, 8(1879), n° 11) = *Oeuvres*, t.II, p.177-217. Voir les commentaires de J. Dieudonné,p.XXIV-XXIX du t.I des *Oeuvres* de Jordan.

9 Le mémoire cité dans la note 4.

LETTRE DE DJORDJE KARADJORDJEVIĆ

Belgrade, le 12. III. 1911[2]

Palais de Belgrade.

Monsieur le Professeur[1],

Je vous suis très reconnaissant de l'amabilité que vous avez eue de vous occuper de la question que je me suis permis de vous soumettre et de m'avoir éclairci sur le nombre de valeurs A_j de $f(z)$ pour les arguments $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$.

M'est-il permis de vous demander encore une bonté ? Je possède votre portrait ci-joint ; puis-je vous prier de vouloir bien y poser votre signature et de me le renvoyer ?

Veuillez, Monsieur le Professeur, excuser mes importunités et agréer l'expression de ma respectueuse reconnaissance.

Georges

NOTES

1 Dragan Trifunović nous écrit le 21 janvier 1985 :

"Georges est le prince serbe Djordje Karadjordjević (1887-1974), fils du roi serbe Pierre Ier.

Les résultats de H. Poincaré, mentionnés dans la lettre du 12 mars 1911, ont été publiés à Belgrade par Mihailo (Michel) Petrović (1868-1943) : *Prilog istoriji jednoga problema teorije funkcija* (Contribution à l'histoire d'un problème de la théorie des fonctions), Srpska kraljevska akademija, Glas knj.CXXXIV, Prvi razred knj.63, Beograd 1929, p.85-90.

Ce travail a été communiqué à l'Académie Serbe des Sciences le 21 janvier 1929.

Sur le travail mentionné, voir :
Karamata J., *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t.55(1929), p.18 ;
Revue semestrielle des publications mathématiques, t.36(1932), p.133 ;
Dragan Trifunović : Letopis života i rada Mihaila Petrovića (Chronique de la vie et de l'oeuvre de Mihailo Petrović), Srpska akademija nauka i umetnosi, 1969, p.627."

D. Trifunović a eu également l'amabilité de nous envoyer l'article de M. Petrović où est publiée la lettre de Poincaré. M. Petrović écrit (p.87) qu'il possède la lettre en question et il résume ainsi son article (p.90) :

"Dans une lettre inédite du Mars 1911, Henri Poincaré indique un exemple intuitif de fonction entière prenant les valeurs $A_1,\ldots,A_n$ arbitrairement choisies et en nombre quelconque n , lorsque la variable indépendante croît indéfiniment,avec différents arguments $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$. Cet exemple fait l'objet de la présente Note."

2 D. Trifunović nous a envoyé le 25 février 1985 la première lettre du prince Karadjordjević, du 3 mars 1911 :

"En ayant appris, en amateur, quelques éléments de la théorie des fonctions qui m'intéresse vivement et de plus en plus, et en ayant rencontré une question sur laquelle je n'ai pu trouver nulle part les renseignements précis, veuillez bien excuser la liberté que je prends en m'adressant directement au Maître pour m'éclairer sur les résultats acquis par les recherches modernes relatives à la question.

La question est la suivante :

Quel est le nombre de valeurs limites que puisse avoir une fonction entière $F(z)$ lorsque la variable z augmente indéfiniment suivant différents rayons vecteurs dans son plan."

Voir D. Trifunović, *Contribution à l'histoire d'un problème de la théorie des fonctions* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 8(1987), 19-24).

CORRESPONDANCE AVEC FELIX K L E I N[1]

I.

Leipzig, le 12 juin 1881

Monsieur, 127

Vos trois Notes dans les *Comptes Rendus* : "Sur les fonctions fuchsiennes"[2], dont j'ai d'abord pris connaissance hier et aussi alors seulement rapidement, sont en relation si étroite avec les réflexions et les efforts qui m'ont occupé au cours des dernières années, que je me sens obligé de vous écrire. Je voudrais, en premier lieu, me rapporter aux différents travaux que j'ai publiés dans les tomes XIV[3], XV[4] et XVII[5] des *Mathematischen Annalen* sur les fonctions elliptiques. Il ne s'agit, avec les fonctions elliptiques modulaires, que d'un cas particulier du rapport de dépendance que vous avez considéré ; mais un examen plus poussé vous montrera qu'en effet j'avais un point de vue général. A cet égard, je voudrais attirer votre attention sur certains points particuliers :

P.128 du tome XIV[6] traite des fonctions générales qui peuvent être représentées par des fonctions modulaires, sans être rattachées aux fonctions doublement périodiques. Il en résulte, d'abord comme un cas particulier, l'importante théorie du polygone fondamental.

P.159-160 du tome XIV[7] il est exposé qu'on peut représenter toutes les séries hypergéométriques par des fonctions uniformes des fonctions modulaires convenables.

P.428 et ss du tome XIV[8] contiennent un tableau qui illustre la disposition mutuelle [[*Aneinanderlagerung*]] des triangles d'arcs circulaires avec les angles $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ (ce qui est aussi un exemple des classes de fonctions particulières étudiées par Halphen[9]), à propos de quoi je dois remarquer maintenant que M. Schwarz avait déjà expliqué les cas $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ dans le tome LXXV du *Journal de Crelle*[10].

Dans le tome XVII, p.62 et ss[11], je présente ensuite une vue d'ensemble rapide des conceptions approfondies, que, dans l'intervalle, j'ai préparées avec la théorie des fonctions modulaires elliptiques.

Je n'ai rien publié sur ces conceptions, mais je les ai présentées, pendant l'été 1879, dans un cours à l'Ecole d'enseignement technique général de Munich. Mon fil des idées, qui se rapproche sur beaucoup de points de celui que vous avez exposé, était à l'époque le suivant :

1. Fonctions périodiques et doublement périodiques ne sont que des exemples de fonctions uniformes à transformations linéaires en soi [[*mit linearen Transformationen in sich*]]. C'est la tâche de l'analyse moderne de déterminer toutes ces fonctions.

2. Le nombre de ces transformations peut être fini ; cela donne les équations de l'icosaèdre, de l'octaèdre, ... que j'ai étudiées autrefois (*Math. Annalen* IX[12], XII[13]) et qui ont servi de point de départ de tout cet ensemble de notions.

3. Groupes d'un nombre infini de transformations linéaires, qui donnent lieu à des fonctions utilisables (groupe discontinu, d'après votre terminologie), s'obtiennent *par exemple* en partant d'un polygone d'arcs circulaires, dont les cercles coupent orthogonalement un cercle fixe et dont les angles sont des parties exactes de π .

4. On devait s'occuper de toutes ces fonctions (comme vous l'avez commencé en fait maintenant) mais pour atteindre des objectifs concrets ; limitons nous aux triangles d'arcs circulaires et, en particulier, aux fonctions modulaires elliptiques.

Depuis, je me suis beaucoup occupé, aussi en discutant avec d'autres mathématicines, de ces questions, mais, abstraction faite que je n'ai pas encore obtenu aucun résultat définitif, cela n'a pas, finalement, sa place ici. Je veux me borner à ce que j'ai publié ou exposé dans des cours. Peut-être aurais-je dû me mettre en rapport avec vous plus tôt, ou avec un de vos amis, comme par exemple Monsieur Picard. (Voudriez-vous, à l'occasion, attirer l'attention de Monsieur Picard sur les *Annales*, XIV, p.122, § 8 ![14]) En effet votre démarche, celle qui conduit vos travaux depuis 2-3 ans, est, en réalité, très proche de la mienne. Aussi je serais heureux si cette première lettre donne lieu à une correspondance suivie. Il est vrai que, en ce moment, d'autres engagement m'éloignent de ces travaux, mais je suis d'autant plus incité à les reprendre que je dois faire, l'hiver prochain, un cours sur les équations différentielles.

Voulez-vous présenter mes compliments à Monsieur Hermite. J'ai souvent pensé prendre un contact épistolaire avec lui, et je l'aurais fait depuis longtemps - et je ne doute pas pour mon plus grand profit - s'il n'y avait pas le problème de la langue. Comme vous le savez peut-être, je suis resté suffisamment longtemps à Paris pour parler et écrire le français ; mais, entre-temps, cette disposition, faute de pratique, s'est fortement appauvrie.

Veuillez agréer l'assurance de ma considération distinguée.

Prof. Dr. F. Klein

Adresse : Leipzig, Sophienstraße 10/II.

II.

[[Caen, le]] 15 juin [[1881]] [112]

Monsieur,

Votre lettre me prouve que vous aviez aperçu avant moi quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans la théorie des fonctions fuchsiennes. Je n'en suis nullement étonné ; car je sais combien vous êtes versé dans la connaissance de la géométrie non-euclidienne qui est la clef véritable du problème qui nous occupe[15].

Je vous rendrai justice à cet égard quand je publierai mes résultats ; j'espère pouvoir me procurer d'ici là les tomes 14, 15 et 17 des *Mathematische Annalen* qui n'existent pas à la bibliothèque universitaire de Caen. Quant à la communication que vous avez faite au Polytechnicum de Munich[16], je vous demanderai de vouloir bien me donner quelques détails à ce sujet, afin que je puisse ajouter à mon mémoire une note vous rendant pleine justice ; car, sans doute, je ne pourrai me procurer directement votre travail.

Comme je ne pourrai sans doute me procurer *immédiatement* les *Mathematische Annalen*, je vous prierais aussi de vouloir bien me donner quelques explications sur quelques points de votre lettre. Vous parlez de *die elliptischen Modulfunktionen*[17].

Pourquoi ce pluriel ? Si la fonction modulaire est le carré du module exprimé en fonction du rapport des périodes, il n'y en a qu'une ; il faut donc entendre autrement l'expression *Modulfunctionen*.

Que voulez-vous dire par ces fonctions algébriques qui sont susceptibles d'être représentées par des fonctions modulaires ? Qu'est-ce aussi la *Theorie der Fundamentalpolygone*[18] ?

Je vous demanderai aussi de m'éclairer sur les points suivants : Avez-vous trouvé tous les *Kreisbogenpolygone*[19] qui donnent naissance à un groupe discontinu ?

Avez-vous démontré l'existence des fonctions qui correspondent à chaque groupe discontinu ?

J'ai écrit à M. Picard pour lui communiquer votre remarque[20].

Je me félicite, Monsieur, de l'occasion qui me met en rapport avec vous ; j'ai pris la liberté de vous écrire en français, car vous me dites que vous connaissez cette langue.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération.

Poincaré

III.

Leipzig, le 19 juin 1881

Monsieur,

Au reçu,hier, de votre lettre, je vous ai envoyé immédiatement les tirés à part, dans la mesure où j'en possédais encore, des travaux se rapportant à notre sujet. Permettez-moi d'y ajouter, aujourd'hui, quelques lignes d'explications. A dire vrai, la question ne sera pas épuisée en une seule lettre, mais il nous faudra en échanger plusieurs, jusqu'à ce que nous ayons, mutuellement, un bon contact. Je voudrais faire ressortir, aujourd'hui, les points suivants :

1. Parmi les travaux envoyés il manque les trois les plus importants : celui du tome XIV des *Annalen*[21], de même mes recherches sur l'icosaèdre dans les tomes IX et XII[22], ainsi que mon deuxième mémoire sur les équations différentielles linéaires (qui semble également inconnu à M. Picard) aussi dans le tome XII[23]. Je vous prie de vous les procurer quelque part. J'ai envoyé divers tirés à part à Paris, par exemple à Hermite.

2. Les travaux de mes élèves Dyck[24] et Gierster[25] complètent les miens. Je leur demande à l'un et à l'autre de vous envoyer leurs tirés à part. Une thèse de doctorat de M. Hurwitz[26], en relation avec ces mêmes théories, va être imprimée et elle vous parviendra d'ici quelques semaines.

3. Un de vos compatriotes, dont le nom vous est sans doute connu, puisqu'il a étudié avec Picard et Appell : M. Brunel (adresse : Liebigstraße 4/II)[27] est ici depuis l'automne dernier. Peut-être seriez vous aussi intéressé d'entrer en correspondance avec lui ; il pourra, mieux que moi, vous parler de l'organisation du Séminaire que nous avons ici, et du rôle que les fonctions uniformes à transformations linéaires en soi ont joué là.

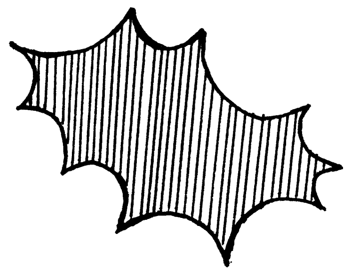
4. J'ai fait rédiger par M. Gierster un cahier de mon cours du semestre d'été 1879. Pour le moment je l'ai prêté, mais je dois le ravoir dans les prochains jours, et l'examiner ensemble avec M. Brunel, après quoi nous vous en ferons un compte rendu.

5. Je rejette la désignation *fonctions fuchsiennes*, bien que je comprenne que vous ayez été conduit à ces idées par les travaux de Fuchs. Au fond, toutes ces recherches se fondent sur les travaux de Riemann. Ma propre évolution a été fortement influencée par les considérations de Schwarz, intimement liées à celles de Riemann, dans le tome 75 du *Journal de Borchardt*[28] (que je vous recommande vivement si vous ne les connaissiez pas encore). Le mémoire de M. Dedekind sur les fonctions

modulaires elliptiques a été seulement publié dans le tome 83 du *Journal de Borchardt*[29], alors que la représentation géométrique des fonctions modulaires était déjà évidente pour moi (automne 1877). Les mémoires de Fuchs sont en opposition délibérée avec ce mémoire de Dedekind, à cause de leur forme non-géométrique . Je ne nie pas les grands services que M. Fuchs a rendus à d'autres parties de la théorie des équations différentielles, mais ses travaux nous mettent ici d'autant plus dans l'embarras que, pour la seule fois où il s'est expliqué sur les fonctions modulaires elliptiques dans une lettre à Hermite[30],il a laissé passer une faute fondamentale que Dedekind n'a critiqué que légèrement dans la revue citée.

6. On peut définir notamment une fonction linéaire à transformations linéaires en soi par le fait qu'elle applique le *demi-plan* sur un polygone à arcs circulaires quelconque. C'est alors à vrai dire seulement un cas particulier du cas général (je ne sais pas, pour le moment, si vous ne vous limitez pas seulement à ce cas particulier). Le groupe des transformations linéaires est alors caractérisé par le fait qu'il est contenu dans un groupe d'opérations deux fois plus grand [[*doppelt so grossen Gruppe von Operationen*]], qui, à côté des transformations linéaires, contient aussi les réflexions [[*Spiegelungen*]] (transformations par rayons réciproques). Dans ce cas, l'existence de la fonction a été établie rigoureusement par les travaux de longue date de Schwarz et de Weierstrass, si l'on ne veut pas faire appel aux principes généraux de Riemann. Voir Schwarz, tome 70 de *Borchardt* : Application du demi-plan sur des polygones à arcs circulaires[31].

7. Même dans ce cas particulier, je n'ai pas encore établi complètement tous les *groupes discontinus* ; j'ai seulement constaté qu'il y en avait beaucoup pour lesquels il n'existe aucun cercle fondamental déterminé et auxquels par conséquent ne s'applique pas l'analogie avec la géométrie non-euclidienne (qui m'est, d'ailleurs, très familière). Prenons, par exemple, un polygone quelconque, dont les côtés sont



formés de cercles adjacents *quelconques*, alors l'engendrement [[*Vervielfältigung*]] par symétrie conduira aussi à un *groupe discontinu*.

8. Vous trouverez, sans doute, une réponse aux autres questions posées dans votre lettre dans les mémoires envoyés, en particulier à celles concernant le pluriel des "fonctions modulaires" et, principalement, les "polygones fondamentaux".

Dans l'espoir d'avoir bientôt de vos nouvelles, je vous prie de croire à mes sentiments dévoués.

F. Klein

IV.

Caen, le 22 juin 1881

Monsieur,

Je n'ai pas encore reçu les envois que vous m'annoncez et que je ne tarderai sans doute pas à voir arriver à leur adresse. Mais je ne veux pas attendre ce moment pour vous remercier de vos promesses, ainsi que de votre lettre que j'ai lue avec le plus grand intérêt. Aussitôt après l'avoir reçue, j'ai couru à la bibliothèque pour y demander le 70^{e} volume de *Borchardt* ; malheureusement ce volume était prêté et je n'ai pu y lire le mémoire de M. Schwarz. Mais je crois pouvoir reconstituer d'après ce que vous m'en dites et y reconnaître certains résultats que j'avais trouvés sans me douter qu'ils avaient fait l'objet de recherches antérieures. Je crois donc comprendre que les fonctions fuchsiennes que les recherches de M. Schwarz et les vôtres permettent de définir sont celles dont je me suis occupé plus particulièrement dans ma note du 23 mai[32]. Le groupe particulier dont vous me parlez dans votre dernière lettre me semble fort intéressant et je vous demanderai la permission de citer ce passage de votre lettre dans une communication[33] que je ferai prochainement à l'Académie et où je chercherai à généraliser votre résultat.

Quant à la dénomination de fonction fuchsiennes, je ne la changerai pas. Les égards que je dois à M. Fuchs ne me le permettent pas. D'ailleurs, s'il est vrai que le point de vue du savant géomètre d'Heidelberg est complètement différent du vôtre et du mien, il est certain aussi que ses travaux ont servi de point de départ et de fondement à tout ce qui s'est fait depuis dans cette théorie. Il n'est donc que juste que son nom reste attaché à ces fonctions qui y jouent un rôle si important.

Veuillez agérer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération.

Poincaré

V.

Leipzig, le 25 juin 1881

Cher Monsieur,

Envoyez-moi, je vous prie, sans tarder une carte postale pour me dire si mon envoi des tirés à part ne vous est pas encore parvenu ; je l'ai porté moi-même à la poste il y a aujourd'hui huit jours. Vous vous exprimerez différemment sur F. [[Fuchs]] quand vous connaîtrez toute la bibliographie. La théorie sur l'application [[*Abbildung*]] des polygones à arcs circulaires est absolument indépendante du mémoire de F. dans le t.66[34] ; leur seul point commun est d'avoir été inspirés par Riemann.

Veuillez agréer l'assurance de ma considération distinguée.

Prof. Dr. F. Klein

VI.

Caen, le 27 juin 1881

Monsieur,

Au moment où j'ai reçu votre carte, j'allais précisément vous écrire pour vous remercier de votre envoi et vous en annoncer l'arrivée. S'il a été retardé c'est par suite d'une erreur de la poste qui l'a envoyé d'abord à la Sorbonne, puis au Collège de France, bien que l'adresse eût été parfaitement bien mise.

En ce qui concerne M. Fuchs et la dénomination de fonctions fuchsiennes, il est clair que j'aurais pris une autre dénomination si j'avais connu le travail de M. Schwarz ; mais je ne l'ai connu que par votre lettre, après la publication de mes résultats de sorte que je ne peux plus changer maintenant le nom que j'ai donné à ces fonctions sans manquer d'égards à M. Fuchs. J'ai commencé la lecture de vos brochures qui m'ont vivement intéressé, principalement celle qui a pour titre *Ueber elliptische Modulfunktionen*[35]. C'est au sujet de cette dernière que je vous demanderai la permission de vous adresser quelques questions.

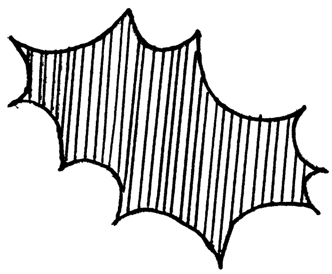
1° Avez-vous déterminé les *Fundamentalpolygone* de tous les *Untergruppen*[36] que vous appelez *Kongruenzgruppen* et en particulier de ceux-ci :

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \ , \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \quad \text{mod } n \ .$$

2° Dans mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes, j'ai partagé les groupes fuchsiens d'après divers principes de classification et entre autres d'après un nombre que j'appelle leur genre. De même vous partager les *Untergruppen* d'après un nombre que vous appelez leur *Geschlecht*[37]. Le *genre* (tel que le l'entends[38]) et le *Geschlecht* sont-ils un seul et même nombre ? Je n'ai pu le savoir, parce que je ne sais pas ce que c'est que le *Geschlecht im Sinne der Analysis situs*[39]. Je vois seulement que ces nombres s'annulent à la fois. Auriez-vous donc l'obligeance de me dire ce que c'est que ce *Geschlecht im Sinne der Analysis situs* ou, si cette définition est trop longue pour être donnée dans une lettre, dans quel ouvrage je pourrais la trouver ? Dans votre dernière lettre, vous me demandiez si je ne suis renfermé dans le cas particulier où *Die Gruppe der linearen Transformationen ist dadurch particularisirt, dass sie in einer doppelt so grossen Gruppe von Operationen enthalten ist, welche neben linearen Transformationen auch Spiegelungen umfasst*[40]. Je ne me suis pas renfermé dans ce cas, mais j'ai supposé que toutes les transformations linéaires conservaient un certain cercle fondamental. Je pense d'ailleurs pouvoir aborder par une méthode analogue le cas le plus général.

A ce propos, il me semble que tous les *Untergruppen* relatifs aux fonctions modulaires ne rentrent pas dans ce cas spécial.

Au sujet de ce groupe discontinu dont vous me parlez et que l'on obtient par des *Spiegelungen*[41] et par la *Vervielfältigung*[42] d'un polygone limité par des arcs



de cercles se touchant deux à deux il me semble qu'il y a une condition supplémentaire dont vous n'avez pas parlé bien qu'elle ne vous ait sans doute pas échappé : deux arcs de cercle quelconques prolongés ne doivent pas se couper. Serait-ce abuser de votre complaisance que de vous poser encore une question.

Vous dites : *in diesem Falle ist die Existenz der Funktion durch Arbeiten von Schwarz sichergestellt*[43], et vous ajoutez : *sofern man nicht auf die allgemeinen Riemann'schen Principien rekurriren will*[44]. Qu'entendez-vous par là ?

J'ai écrit dernièrement à M. Hermite[45] ; je lui ai fait part succinctement du contenu de vos lettres, et je lui ai envoyé les compliments dont vous m'aviez chargé pour lui.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma reconnaissance et de mon respect.

Poincaré

VII.

Leipzig, le 2 juillet 1881

Cher Monsieur,

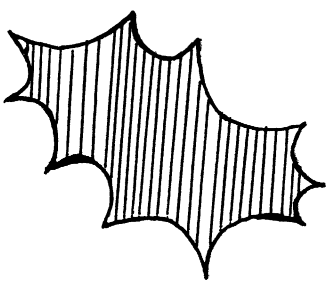
Laissez moi, sans tarder, répondre aux différentes questions que vous me posez dans votre lettre, qui arrive à propos, du 27 juin.

1. J'ai décrit en détail, dans le tome 14[46], les polygones fondamentaux des groupes de congruences $\alpha \equiv \delta \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ (mod n) pour $n = 5$ (où par déformation simultanée des arêtes on obtient l'icosaèdre) et pour $n = 7$. Le cas général n = nombre premier fait l'objet du mémoire de Dyck, actuellement sous presse[47]. Je n'ai pas encore terminé l'étude lorsque n est un nombre composé.

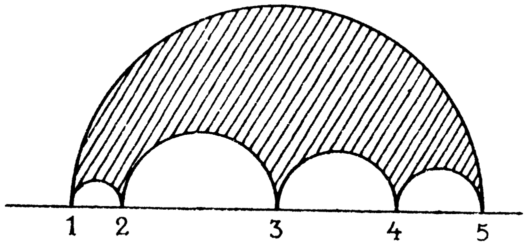
2. "Genre au sens de l'*Analysis situs*" est attaché à toute surface fermée. Il est égal au nombre maximum de courbes fermées [[*in sich zurückkehrender Schnitte*]] que l'on peut tracer sur la surface sans la morceler. Si l'on considère maintenant la surface en question comme image d'un ensemble de nombres w , z d'une équation algébrique $f(w,z) = 0$, alors son genre est aussi celui de l'équation. Votre *genre* et mon *Geschlecht* sont donc *en fait le même nombre* ; on trouve seulement chez moi vraisemblablement une interprétation plus libre de la surface de Riemann et de la définition de p qu'elle engendre.

3. Il existe, il est vrai, dans le groupe des fonctions modulaires des sous-groupes qui possèdent un polygone fondamental asymétrique auxquels appartiennent, comme je le démontre dans le tome 14[48], en particulier les sous-groupes correspondants aux résolvantes de l'équation modulaire pour $n = 7$ et $n = 11$.

4. Je connais bien le fait que dans le cas du polygone les cercles, prolongés vers l'extérieur, ne doivent pas se couper, si l'on doit avoir une fonction uniforme. C'est justement sur ce point, d'après moi, que l'on doit porter l'attention, si l'on veut démontrer que les coordonnées w , z du point d'une courbe algébrique quelconque peuvent être représentées par une fonction uniforme à transformation linéaire en soi. Je vais vous indiquer jusqu'où j'ai avancé dans cette question. D'après les travaux de Schwarz et ceux de Weierstrass, on peut toujours appliquer [[*abbilden*]] le demi-plan sur un polygone à arcs circulaires de façon que les points I, II, III,

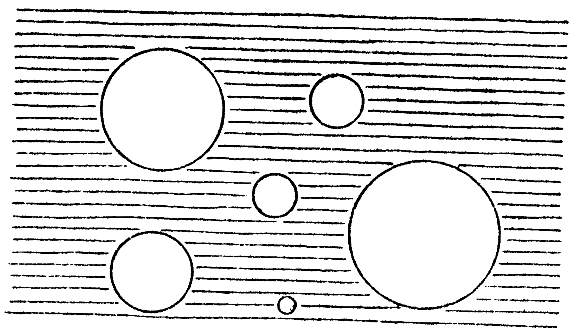


IV, V qui correspondant aux points 1, 2, 3, 4, 5 de la frontière du demi-plan



aient une position quelconque. Supposons maintenant que I, II, III, IV, V, ... soient des points de ramification [[*Verzweigungspunkte*]] d'une fonction algébrique $w(z)$; et que cette fonction algébrique ne possède *aucun autre* point de ramification. Alors il est évident que w et z sont des fonctions uniformes du type considéré des variables auxiliaires dans le plan desquelles se trouve le polygone. *Si donc tous les points de ramification d'une fonction algébrique* $w(z)$ *sont situés sur un cercle du plan des* z , *alors, indubitablement, la réponse est positive.* Et si, maintenant, ce n'est pas le cas ? Alors j'arrive, en fait, à des polygones que je vous citais la dernière fois[49]. Si la figure ne présente aucune symétrie, j'arrive au moins (en établissant des équations différentielles appartenant au type que j'ai traité : $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}(\frac{\eta''}{\eta'})^2 = R(z)$) à un espace fondamental [[*Fundamentalraum*]] formé d'une manière analogue, dont les arêtes pour des angles nuls se rencontrent, et qui, de plus, se groupent ensemble deux à deux par des substitutions linéaires. *Mais je ne peut pas démontrer que cet espace fondamental ensemble avec ses répétitions* [[*Wiederholungen*]] *recouvre seulement un partie du plan complexe.* Et cette difficulté m'arrête déjà depuis longtemps.

5. De plus, on obtient d'autres cas remarquables des groupes discontinus si on prend un nombre quelconque de cercles deux à deux disjoints et on les réfléchit



par des rayons réciproques [[*durch reziproke Radien spiegelt*]]. Pour plus de clarté, j'ai hachuré la partie du plan extérieure à tous les cercles et qui donc représente le demi-polygone fondamental. Schottky (*Journal de Borchardt*, t.83, p.300-

351) a étudié, occasionnellement, ces groupes[50], sans que là ait été soulevée leur signification fondamentale.

6. Les principes de Riemann ne donnent d'abord aucun moyen pour construire effectivement une fonction dont on démontre l'existence. On a donc tendance à les considérer comme peu sûrs, bien que l'on puisse être certain que les résultats qui en découlent soient exacts. Par contre, au sujet du problème que j'avais mentionné de l'application des polygones à arcs circulaires, Weierstrass et Schwarz ont une détermination effective des constantes considérées par des procédés convergents. Si l'on veut utiliser les principes de Riemann, alors on peut établir le théorème très général suivant. Soit donné un polygone ayant un ou aussi plusieurs contours séparés [[*getrennten Peripherien*]]. Le polygone peut être à plusieurs feuillets [[*mehrblättrig*]], dont les feuillets sont reliés par des points de ramification. Chaque contour est composé de plusieurs morceaux [[*Stücken*]] ; chaque morceau se transforme en un autre par une substitution linéaire déterminée. On peut, alors, toujours construire une fonction, qui possède à l'intérieur du polygone des discontinuités arbitraires [[*beliebige vorgeschriebene Unstetigkeiten*]], et dont la partie réelle prend certains modules de périodicité [[*Periodizitätsmoduln*]] donnés, lorsqu'on passe d'un morceau de la frontière [[*Begränzung*]] au morceau correspondant[[*zugehörig*]] en traversant l'intérieur du polygone. A ces fonctions appartiennent, en particulier, celles qui, à l'intérieur du polygone, sont constamment uniformes et qui prennent la même valeur pour deux points correspondants quelconques de la frontière [[*Rand*]][51]. La démonstration est exactement semblable à celle donnée par Riemann dans le § 12 de la première partie des ses *Fonctions abéliennes*[52] pour le polygone particulier constitué par p parallélogrammes empilés les uns sur les autres, reliés par $2p-2$ points de ramification. Ce théorème, que je n'ai d'ailleurs mis en forme qu'au cours des derniers jours, englobe, me seble-t-il, toutes les preuves d'existence,dont vous parlez dans vos notes, comme des cas particuliers ou déductions faciles. Du reste, mon théorème, comme bon nombre de ce que j'écris aujourd'hui, n'est pas encore formulé d'une façon précise; il me faudrait être beaucoup plus complet si je voulais l'éviter ; vous discernerez facilement ma pensée.

7. Laissez moi encore ajouter une remarque sur une autre de vos publications[53]. Vous mentionnez que les fonctions θ, qui résultent de l'inversion des intégrales algébriques sur les courbes de genre p , ne sont pas les fonctions θ générales. Vous ne pouvez pas savoir que justement ces raisonnements [[*Überlegungen*]] sont généralement connus: un grand nombre de jeunes mathématiciens travaillent sur ce sujet, pour trouver les conditions permettant de distinguer les fonctions θ dites de Riemann des fonctions θ générales. Par contre, je suis étonné que vous indiquiez que la constante [[*Konstantenzahl*]] des fonctions θ de Riemann soit égale à

$4p+2$, alors qu'elle doit être égale à $3p-3$. N'avez-vous pas lu les explications correspondantes de Riemann ? Ne connaissez-vous pas toute la discussion que Brill et Nöther ont achevée dans le tome 7 des *Math. Annalen* p.300-307[54] ?

Dans l'espoir d'avoir bientôt de vos nouvelles, je vous prie de croire à l'assurance de ma considération distinguée.

F. Klein

VIII.

Caen, 5 juillet 1881

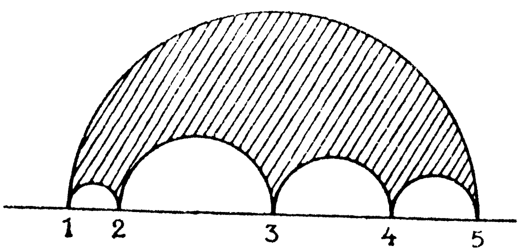
Monsieur,

J'ai reçu votre lettre que j'ai lue avec le plus vif intérêt. Je vous demande mille pardons de la question que je vous ai posée au sujet du *Geschlecht im Sinne der Analysis Situs*. J'aurais pu vous éviter la peine de m'y répondre, puisque je trouvais l'explication à la page suivante de votre mémoire. Vous vous rappelez sans doute que, dans une de mes dernières lettres, je vous demandais l'autorisation d'en citer une phrase dans une communication où je me proposais de généraliser vos résultats. Vous ne m'avez pas répondu à ce sujet et j'ai pris votre silence pour un acquiescement. J'ai fait cette communication[55] en deux fois, dans les séances du 27 juin et du 4 juillet.

Vous trouverez que nous nous sommes rencontrés sur quelques points. Mais la citation que j'ai faite de votre phrase vous sera, je pense, une garantie suffisante.

Permettez-moi, Monsieur, encore une question ; où trouverai-je les travaux de MM. Schwarz et Weierstrass dont vous me parlez ; d'abord au sujet de ce théorème que :

Man kann immer die Halbebene so auf ein Kreisbogenpolygon abbilden, dass die Punkte I, II, III, IV, V, welche den 1, 2, 3, 4, 5 auf der Begränzung der Halbebene



entsprechen, beliebige Lage haben.[56] Ce théorème ne m'était pas inconnu, car je l'ai démontré dans ma communication[57] du 23 mai. Mais où le trouverai-je dans les travaux de mes devanciers ? Est-ce au tome 70 de *Crelle* ? Où trouverai-je aussi les développements dont vous parlez dans la phrase suivante : *Demgegenüber haben Weierstrass und Schwarz bei der von mir berührten Frage der Abbildung von Kreisbogenpolygonen* *wirkliche Bestimmungen der in Betracht kommenden Konstanten durch konvergente Prozesse gegeben.*[58]

Le théorème que vous me dites avoir découvert m'a beaucoup intéressé. Il est clair que, comme vous me le dites, votre résultat contient comme cas particulier *alle meine Existenzbeweise*[59]. Mais il arrive après.

J'arrive à votre remarque relative aux fonctions abéliennes. Quand j'ai parlé de $4p+2$ constantes, il ne s'agissait pas du nombre des modules. J'ai dit ceci[60] : Une relation algébrique de genre p peut toujours être ramenée au degré $p+1$. Une relation de degré $p+1$ et de genre p dépend de $4p+2$ paramètres ; car une relation *générale* de degré $p+1$ dépend de

$$\frac{(p+1)(p+4)}{2}$$

paramètres. Mais il y a :

$$\frac{p(p-1)}{2} - p$$

points doubles. Il reste donc $4p+2$ paramètres indépendants. J'ai ainsi, non le nombre des modules, mais une limite supérieure de ce nombre, ce qui me suffisait pour mon objet.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération.

Poincaré

IX.

Leipzig, le 9 juillet 1881

Cher Monsieur,

Dans une réponse rapide à votre lettre, j'ai à dire, à peu près, les choses suivantes :

1. Il me convient que vous ayez cité ce passage de ma lettre. Jusqu'à présent, je ne suis en possession que de votre Note du 27 juin[61]. En ce qui concerne le nom que vous avez donné à cette classe de fonctions, j'ai été passablement étonné ; car je n'ai, en réalité, fait rien d'autre que de reconnaître l'existence de ces groupes. Pour ma part, je n'utiliserai ni *fuchsiennes* ni *kleinéennes*, mais m'en tiendrai à mes "fonctions à transformations linéaires".

2. Ce que j'ai dit des principes de Riemann n'était pas assez précis. Il ne fait

aucun doute que le principe de Dirichlet doit être abandonné, parce que nullement concluant [[*konklusiv*]][62]. Mais on peut le remplacer complètement par des méthodes de démonstration plus rigoureuses. Vous trouverez cela exposé plus en détail dans un travail de Schwarz, que j'ai examiné justement ces jours-ci (en vue de mon cours), et dans lequel vous trouverez des informations sur la détermination des constantes, qui étaient seulement indiquées dans le *Journal de Borchardt* (toutefois, il vous faudra examiner les mémoires publiés dans les tomes 70, 74 et 75 du *Journal de Borchardt*[63]) ; ce travail de Schwarz se trouve dans les *Berliner Monatsberichten* 1870, p.767-795[64].

3. La démonstration générale d'existence, que j'ai mentionnée la dernière fois, reste, naturellement, valable pour les groupes formés de substitutions analytiques quelconques (non nécessairement linéaires). Il est remarquable que, dans ce sens, tout groupe d'opérations définisse des fonctions qui restent inchangées par lui. Les *groupes discontinus* ont seulement l'avantage qu'ils engendrent des fonctions *uniformes*, ce qui est d'ailleurs tout à fait fondamental. Pourra-t-on maîtriser les cas plus difficiles [[*die höheren Fälle*]] par des fonctions *uniformes* de *plusieurs* variables, comme on a coutume de le faire, en particulier, dans le cas traité par Riemann dans le § 12[65] grâce au problème d'inversion de Jacobi ?

Voilà pour aujourd'hui. Entre temps, j'ai parcouru avec Monsieur Brunel mes travaux, notamment aussi les cahiers des cours de 1877-1878 et 1878-1879 (que, à l'époque, j'avais fait remanier), et M. Brunel vous en écrira prochainement.

Veuillez agréer l'assurance de ma considération distinguée et de mes sentiments dévoués.

Prof. Dr. F. Klein

X.

Leipzig, le 4 décembre 1881
Sophienstrasse 10/II

Monsieur,

Après avoir longtemps réfléchi seulement de temps à temps aux problèmes auxquels nous nous intéressons tous les deux, j'ai saisi l'occasion ce matin de lire l'ensemble de différentes communications que vous avez publiées à la suite dans les *Comptes Rendus*. Je vois que maintenant vous avez réellement démontré (8 août) : *que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébrique s'intègre par les fonctions zêtafuchsiennes* et *que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire*[66]. Tout en vous félicitant pour les résultats que vous avez obtenus, je voudrais vous faire une proposition qui respecte, à la fois, votre intérêt et le mien. Je vous demande de m'envoyer, pour les *Mathematische Annalen*, un article, plus ou moins long, ou, si vous ne trouvez pas le temps de le rédiger, une *lettre* dans laquelle vous exposerez, à grands traits, vos points de vue et vos résultats. J'accompagnerai alors cette lettre avec une note dans laquelle j'exposerai comment je vois la question, et comment justement le programme, que vous accomplissez en ce moment, a servi de fondement du principe d'orientation [[*hodegetisches Prinzip*]] de mes travaux sur les fonctions modulaires. Naturellement, cette note vous sera soumise, pour avis, avant l'envoi à l'imprimeur. - Par une telle publication nous obtiendrons un double effet : d'une part, ce que probablement vous souhaitez, l'attention des lecteurs des *Math. Annalen* serait attirée définitivement sur vos travaux ; d'autre part, vos travaux seraient présentés au grand public, en lui montrant ainsi les liens qui existent réellement avec les miens. Vous avez l'intention, comme vous me l'avez écrit, d'analyser ces relations dans votre *Mémoire* détaillé ; mais sa rédaction demandera du temps, et je tiens que ce soit dit aussi dans les *Annalen*.

Pour ma part, j'ai, entre temps, rédigé un petit traité sur la "théorie de Riemann"[67], qui pourrait vous intéresser, car il présente une conception de la surface de Riemann avec laquelle, d'après moi, Riemann lui-même avait réellement travaillé. Peut-être M. Brunel vous a-t-il informé à ce sujet. Je me suis occupé de plus, ces derniers temps, de différentes preuves d'existence que l'on avait élaborées pour remplacer le principe de Dirichlet, et je suis convaincu que les méthodes exposées par Schwarz dans les *Berliner Monatsberichten*, 1870, p.767 et ss, suffisent en effet complètement pour démontrer, par exemple, le théorème général, sur lequel j'ai écrit, occasionnellement, cet été.

Veuillez agréer l'assurance de ma considération distinguée.

F. Klein

XI.

8 décembre 1881
Paris, rue Gay-Lussac 66

Monsieur,

Je vous remercie infiniment de l'offre obligeante que vous voulez bien me faire et je suis tout disposé à en profiter. Je vous enverrai prochainement la lettre que vous me demandez ; je vous prierai pourtant de me dire quelle place vous pouvez lui consacrer dans les Annales. Je sais que la clientèle de votre journal est nombreuse et que l'étendue que vous pouvez permettre à chaque travail est forcement limitée et je ne voudrais pas abuser de votre bienveillance. Quand je saurai quelle longueur je puis donner à ma lettre, je vous l'écrirai immédiatement.

J'aurai prochainement l'honneur de vous envoyer diverses notes relatives à la théorie générale des fonctions, si vous voulez bien les accepter.

J'ai lu dernièrement le mémoire de Schwarz dans les *Monatsberichte* et ses démonstrations m'ont paru rigoureuses.

Veuillez agréer, Monsieur, mes remerciements et l'expression de ma grande considération.

Poincaré

XII.

Leipzig, le 10 décembre 1881

Monsieur,

Que ma proposition vous ait été agréable, voilà qui me réjouit : *voilà une loi de réciprocité*. En ce qui concerne la question que vous me posez, je voudrais vous répondre, avant tout, que votre article sera d'autant plus à propos qu'il me parviendra *rapidement*. Si je le reçois avant le 20 courant, je l'incluerai dans le fascicule 4 du tome 19 des *Annalen* qui est en train de paraître ; il sera donc publié au début de mars (au plus tard). En ce qui concerne son étendue, je peux prévoir, si vous le souhaitez, environ un placard (16 pages). Cela est assez pour que vous puissiez exprimer nettement l'essentiel, et sans être aussi trop long pour un lecteur rapide. Je voudrais, de plus, vous demander de donner notamment aussi des indications nécessaires sur les *méthodes* de vos démonstrations, c'est-à-dire comment vous construisez réellement les fonctions considérées, etc. Cependant je vous laisse juge, étant donné que je ne puis vous prescrire quoi que ce soit à ce sujet.

Encore une question. Votre adresse permanente est-elle maintenant à Paris ? Et quelle est l'adresse actuelle de Picard ? Je serais heureux si vous pouviez obtenir également de lui une contribution pour les *Annalen*.

Veuillez agréer l'assurance de ma considération distinguée et dévouée.

F. Klein

XIII.

Paris, le 17 décembre 1881

rue Gay-Lussac 66

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous adresser le petit travail en question[68] ; je n'ai pas, comme vous me le demandiez, exposé succinctement mes méthodes de démonstration. Je n'aurais pu le faire sans dépasser de beaucoup les limites que vous m'aviez fixées. Je sais que ces limites n'avaient rien d'absolu. Mais d'un autre côté je ne crois pas qu'une démonstration puisse être résumée ; on ne peut en retrancher sans lui enlever sa rigueur et une démonstration sans rigueur n'est pas une démonstration. Je préférerais donc vous adresser de temps en temps une série de courtes lettres où je démontrerais successivement les résultats énoncés où du moins les principaux. Ces lettres, vous en feriez ce que bon vous semblerait.

J'habite en effet Paris, je suis maître de conférences à la Faculté des Sciences.

Voici l'adresse de Picard : Professeur Suppléant à la Faculté des Sciences, rue Michelet 13, Paris.

Je vous donne par la même occasion celle d'Appell : Maître de Conférences à l'Ecole Normale Supérieure, rue Soufflot 22, Paris.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

XIV.

Leipzig, le 13 janvier 1882

Monsieur,

Je ne vous ai pas encore remercié personnellement pour l'envoi de votre article, pour lequel je me sens en effet votre obligé. Nous allons pouvoir l'imprimer dans quelques jours. Vous en recevrez des épreuves, que je vous demanderai de renvoyer, après correction, à l'imprimerie Teubner à Leipzig. Voulez vous examiner à cette occasion, en particulier, le court commentaire[69] que j'ai joins à votre article, dans le sens précédemment spécifié, et dans lequel je proteste, autant que je peux, contre les deux dénominations : *fuchsiennes* et *kleinéennes* en citant Schottky en ce qui concerne cette dernière et désignant, au demeurant, Riemann comme étant celui qui est à l'origine de toutes ces recherches. Je me suis efforcé de conserver à ce commentaire un caractère aussi mesuré que possible, mais je vous prie de m'écrire immédiatement si vous souhaitez encore y apporter des modifications. Je n'ai voulu aucunement diminuer le mérite de vos travaux. - En outre, j'ai rédigé maintenant encore un petit article[70] qui doit être imprimé à la suite du votre. Il expose, également sans démonstration, quelques-uns des résultats appartenant au domaine concerné, avant tout celui-ci : *que toute équation algébrique* $f(w,z) = 0$ *peut être résolue d'une manière et d'une seule par* $w = \varphi(\eta)$, $z = \psi(\eta)$, *du moment qu'ont été tracées sur la surface de Riemann correspondante* p *coupures de rebroussement* [[*Rückkehrschnitte*]] *indépendantes, où* η *est un groupe discontinu, tels ceux dont vous m'avez entretenu à la suite de ma lettre*. Ce théorème est d'autant plus beau que ce groupe a exactement $3p-3$ paramètres essentiels [[*wesentliche Parameter*]], c'est-à-dire autant que les équations du p donné possèdent de *modules* [[*Moduln*]]. Ici se greffent quelques réflexions supplémentaires qui me paraissent intéressantes. Afin de vous en faire part, aussi complètement que possible, j'ai donné des ordres à l'imprimerie de vous envoyer également les épreuves de mon article, que vous pouvez ensuite conserver.

En ce qui concerne la *démonstration*, elle est difficile. J'opère toujours avec des idées de Riemann, respectivement avec la *geometria situs*. C'est très difficile à rédiger clairement. Je vais m'efforcer de le faire ultérieurement. En attendant, je souhaite très vivement correspondre avec vous à ce sujet et aussi au sujet de vos démonstrations. Soyez persuadé que j'étudierai avec le plus grand intérêt les lettres à ce sujet que vous me laissez espérer et y répondrai rapidement. Si vous désirez les publier, sous une forme ou une autre, les *Annalen* sont naturellement à votre disposition.

Veuillez agréer l'assurance de ma considération distinguée et dévouée.

F. Klein

XV.

[[Paris, janvier 1882]]

Monsieur,

J'ai reçu les épreuves de Teubner, et je vais les lui renvoyer. J'ai lu votre note et je ne vois pas qu'il y ait lieu d'y changer quoi que ce soit. Vous me permettrez cependant de vous adresser quelques lignes pour chercher à justifier mes dénominations. J'attends avec impatience le théorème que vous m'annoncez et qui me paraît des plus intéressants.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

XVI.

Paris, 28 mars 1882

Monsieur,

Vous avez ajouté à mon travail : *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires*, une note où vous exposez les raisons qui vous ont fait rejeter mes dénominations. Vous avez eu la bonté de m'en envoyer les épreuves imprimées en me demandant si j'y désirais quelque changement. Je vous remercie de la délicatesse de votre procédé, mais je ne pouvais en abuser pour vous demander de taire la moitié de votre pensée.

Vous comprenez cependant que je ne puis laisser les lecteurs des Annales sous cette impression que j'ai commis une injustice. C'est pourquoi je vous ai écrit, vous vous le rappelez peut-être, que je ne vous demandais aucun changement à votre note, mais que je vous demanderais la permission de vous adresser quelques lignes pour justifier mes dénominations.

Voici ces lignes[71] ; peut-être jugerez-vous convenable de les insérer. A mon tour, je vous demanderai si vous désirez que je fasse quelque changement à la rédaction de cette petite note. Je suis prêt à faire tous ceux qui n'altéreraient pas ma pensée.

Veuillez excuser mon importunité et me pardonner ce petit plaidoyer *pro domo*.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

Je vous serais obligé si vous voulez bien me dire l'adresse de M. Hurwitz à qui je désirerais faire hommage d'un exemplaire de mon travail.

Je vous serais bien reconnaissant aussi, si vous pouviez m'indiquer les traits généraux de la démonstration par laquelle vous établissez le théorème énoncé dans votre dernier travail : *Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich*[72].

XVII.

Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires[73].

(Extrait d'une lettre adressée à M. F. Klein)

Par H. Poincaré à Paris

... Vous avez eu dernièrement la bonté de faire insérer aux *Mathematische Annalen* (t.XIX, p.553-564) mon travail sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires et vous l'avez fait suivre d'une note où vous exposez les raisons qui vous font trouver peu convenables les noms que j'ai donnés à ces transcendantes. Permettez-moi de vous adresser quelques lignes pour défendre mes dénominations, que je n'ai pas choisies au hasard[74].

Si j'ai cru devoir donner aux fonctions nouvelles le nom de M. Fuchs, ce n'est pas que je méconnaisse la valeur des travaux de M. Schwarz et des vôtres, je suis le premier, au contraire, à en apprécier la haute importance. Mais il ne m'était pas possible d'oublier les découvertes si remarquables que le savant professeur d'Heidelberg a publiées dans le *Journal de Crelle*. Elles sont le fondement de la théorie des équations linéaires et, sans elles, je n'aurais pu aborder l'étude de mes transcendantes qui se lient directement à cette théorie. Dans ses premiers travaux, M. Fuchs se place, il est vrai, à un point de vue un peu différent du mien et ne se préoccupe ni de la discontinuité des groupes, ni de l'uniformité des fonctions. Mais M. Schwarz, dans ses Mémoires des tomes 70 et 74 du *Journal de Crelle* ne s'en préoccupe pas non plus ; il en dit quelques mots dans un cas très particulier, dans le mémoire du tome 75 que j'ai cité dans ma note[75]. C'est là seulement qu'il se trouve *Auf dem Gebiete*[76] *des fonctions fuchsiennes*. Dans vos belles recherches sur les fonctions modulaires votre façon d'envisager les choses différait peu de la mienne, mais vous aviez plutôt en vue alors l'étude des fonctions elliptiques que celle des équations linéaires. Quant à M. Fuchs, dans ses mémoires des tomes 83 et 89 du *Journal de Crelle*[77], il s'est élevé à un point de vue nouveau et a mis en lumière le lien étroit qui unit la théorie des équations différentielles à celle de certaines fonctions uniformes. Ce fut la lecture de ces mémoires qui devint le point de départ de mes recherches[78].

En ce qui concerne les fonctions kleinéennes, j'aurais cru commettre une injustice, si je leur avais donné un autre nom que le vôtre. C'est M. Schottky qui a découvert la figure qui faisait l'objet de votre lettre, mais c'est vous qui avez *ihre prinzipielle Wichtigkeit betont*[79] ; comme vous dites à la fin de votre savant travail : *Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich*[80].

Quant à ce que vous dites de Riemann, je ne puis qu'y souscrire pleinement. C'était un de ces génies qui renouvellent si bien la face de la Science qu'ils impriment leur cachet, non seulement sur les oeuvres de leurs élèves immédiats, mais sur celles de tous leurs successeurs pendant une longue suite d'années. Riemann a créé une théorie nouvelle des fonctions, et il sera toujours possible d'y retrouver le germe de tout ce qui s'est fait et se fera après lui en analyse mathématique. ...

Paris, le 30 mars 1882

XVIII.

Düsseldorf, le 3 avril 1882
Adresse : Bahnstrasse 15

Monsieur,

Votre envoi, qui m'a été retransmis de Leipzig, m'est parvenu hier au moment où j'allais vous écrire afin d'accompagner de quelques mots ma dernière note des *Annalen*[81], dont une épreuve doit être déjà entre vos mains. Entre temps, j'ai reçu la note de Prof. Fuchs des *Göttinger Nachrichten*. Si je devais dire deux mots de cette dernière, ce serait que je la juge complètement manquée. J'ai simplement indiqué que Fuchs n'avais jamais rien publié sur les *fonctions fuchsiennes*. Il en résulte que le second mémoire qu'il cite (que d'ailleurs je vais me procurer pour l'étudier de plus près) est sans objet. Le premier se rapporte bien sûr aux *fonctions fuchsiennes* en ce qu'il traite des fonctions modulaires, mais Fuchs, faute d'intuition géométrique, n'a pas reconnu le caractère propre de ces dernières qui réside dans la nature des lignes singulières, ainsi que Dedekind l'a montré dans le tome 83 de *Borchardt*[82]. Quant, enfin, aux insinuations à la fin de la note, que mes propres travaux ont été profondément influencés par ceux de Fuchs, c'est tout simplement historiquement faux. Mes recherches ont débuté en 1874 par la détermination de tous les groupes finis de transformations linéaires d'une variable[83]. Ensuite, j'ai montré en 1876 que le problème soulevé, à l'époque, par Fuchs, à savoir la détermination de toutes les équations différentielles linéaires algébriques du second ordre intégrables, était, par la même, résolu[84]. La réalité est à l'opposé de ce que présente Fuchs[85]. Ce n'est pas moi qui ai puisé des idées dans son mémoire, mais j'ai montré que son sujet devait être traité avec *mes* idées.

Je ne suis pas, comme vous pouvez le penser, d'accord avec votre présentation. S'il s'agissait d'une appréciation générale de l'oeuvre de Fuchs, je serais volontiers prêt à donner son nom à une *nouvelle* classe quelconque de fonctions que personne n'aurait encore étudiée, ou même, par exemple, aux fonctions de plusieurs variables que Fuchs a proposées. (Sont-elles réellement *uniformes* ? Je comprends seulement que, dans tout ensemble de valeurs qu'elles prennent, elles sont sans ramifications [[*unverzweigt*]]. Pourtant, je peux me tromper.) Mais les fonctions, auxquelles vous donnez le nom de Fuchs, appartenaient déjà à d'autres, avant même que vous ayez proposé de les dénommer. Je suis aussi persuadé que vous n'auriez pas fait cette proposition si, à l'époque (au début), vous aviez eu connaissance de la bibliographie. Vous m'offrez alors, un peu à titre de dédommagement, les *fonctions kleinéennes*. Autant je reconnais l'intention amicale qui est la votre, autant il m'est impossible de l'accepter, car cela justement impliquerait une contre-vérité historique. Si mon mémoire dans le tome XIX peut donner l'impression que je me suis occupé maintenant particulièrement des *kleinéennes*[86], mon récent article dans le tome XX[87] montre que, avant comme après, je considère aussi les *fuchsiennes* comme étant de mon domaine.

Mais assez sur ce sujet. J'ai envoyé, sans tarder, votre note à l'imprimerie, en y joignant seulement une remarque : j'en reste, pour ma part, à ma présentation précédente (et à cette occasion j'attire expressément l'attention du public sur la note de M. Fuchs). Vous allez recevoir, incessamment, les épreuves et je vous prie donc de me les retourner rapidement ici (où je passe les vacances de Pâques), après quoi je ferai le nécessaire avec l'imprimerie. (Votre note paraîtra immédiatemment après la mienne.) En ce qui concerne le passage sur Schottky, je voudrais attirer votre attention sur un mémoire posthume dans les oeuvres de Riemann, p.413[88], où sont développées exactement les même idées. Il est vrai, il est difficile de déterminer l'apport éventuel de l'éditeur M. le Prof. Weber. Les oeuvres de Riemann sont parues en 1876, la thèse de Schottky en 1875, puis en 1877 sous la forme d'un mémoire dans le *Journal de Borchardt*[89]. Mais la thèse de 1875 ne représente qu'une partie du mémoire de 1877 et je ne me souviens pas si la figure concernée se trouvait déjà dans le texte de 1875.

Je dois ajouter que, pour ma part, je n'ai pas l'intention de prolonger le débat au sujet de la *dénomination* (après avoir joint la note dont il a été question ci-dessus à votre explication). Pourtant, si j'étais conduit à intervenir à nouveau, je donnerai, c'est sûr, une présentation très complète et franche de l'état des choses. Laissez-nous plutôt rivaliser pour savoir lequel de nous sera le mieux à même de faire avancer la théorie en question ! Je pense, pour ma part, avoir réalisé un certain progrès par ma nouvelle note. Toute une suite de théorèmes sur les fonctions algébriques se démontre immédiatement grâce à la nouvelle fonction η, par exemple le théorème, que j'ai seulement d'abord indiqué comme vraisemblable dans mon livre sur Riemann, qu'un surface $p > 0$ ne peut jamais posséder une infinité de transformations en soi uniformes *discrètes* (car elle pourrait alors se décomposer en un nombre ∞ de "polygones fondamentaux équivalents")[90].- Mais aussi le théorème que les différents théorèmes donnés par Picard pour $p=0$ peuvent être généralisés pour p quelconque, etc.

En ce qui concerne les méthodes, par lesquelles je démontre mes théorèmes, je vous en écrirai dès que je les aurai un peu plus clarifiées. Entre temps, pourriez-vous m'exposer les idées que vous poursuivez actuellement ? Je n'ai pas besoin de vous préciser que nous aurons plaisir à publier dans les *Mathematischen Annalen* tout article que vous voudrez nous adresser. Il me tient à coeur de rester en liaison active avec vous. Un contact vivant avec les mathématiciens travaillant dans le même domaine a toujours constitué, pour moi, une condition préalable pour mes propres travaux mathématiques.

Veuillez agréer l'assurance de ma considération distinguée et dévouée.

F. Klein

L'adresse du Dr. Hurwitz est jusqu'à nouvel ordre : *Hildesheim*, Langer Hagen.

XIX.

Paris, 4 avril 1882

Monsieur,

Je viens de recevoir votre lettre et je m'empresse de vous répondre. Vous me dites que vous désirez clore un débat stérile pour la Science et je ne puis que vous féliciter de votre résolution. Je sais qu'elle ne doit pas vous coûter beaucoup puisque, dans votre note ajoutée à ma dernière lettre, c'est vous qui dites le dernier mot, mais je vous en sais gré cependant. Quant à moi, je n'ai ouvert ce débat et je n'y suis entré que pour dire une fois et une seule mon opinion qu'il m'était impossible de taire. Ce n'est pas moi qui le prolongerai, et je ne prendrais de nouveau la parole que si j'y étais forcé ; d'ailleurs je ne vois pas trop ce qui pourrait m'y forcer.

Si j'ai donné votre nom aux fonctions kleinéennes, c'est pour les raisons que j'ai dites et non pas, comme vous l'insinuez, *zur Entschädigung*[91] ; car je n'ai à vous dédommager de rien ; je ne reconnaîtrai un droit de propriété antérieur au mien que quand vous m'aurez montré que l'on a avant moi étudié la discontinuité des groupes et l'uniformité des fonctions dans un cas tant soit peu général et qu'on a donné de ces fonctions des développements en séries. Je réponds à une interrogation que je trouve en note à la fin d'une page de votre lettre. Parlant des fonctions définies par M. Fuchs au tome 89 de *Crelle*, vous dites : *Sind diese Funktionen wirklich* *eindeutig ? Ich verstehe nur daß sie in jedem Wertsysteme welches sie erreichen, unverzweigt sind*[92]. - Voici ma réponse, les fonctions étudiées par M. Fuchs se partagent en trois grandes classes ; celles des deux premières sont effectivement uniformes ; celles de la troisième ne sont en général que *unverzweigt* ; elles ne sont uniformes qui si on ajoute une condition à celles énoncées par M. Fuchs. Ces distinctions ne sont pas faites dans le premier travail de M. Fuchs ; on les trouve dans deux notes additionnelles, malheureusement trop concises et insérées l'une au *Journal de Borchardt* 90, l'autre aux *Göttinger Nachrichten* 1880[93].

Je vous remercie beaucoup de votre dernière note[94] que vous avez eu la bonté de m'envoyer. Les résultats que vous énoncez m'intéressent beaucoup, voici pourquoi ; je les avais trouvés il y a déjà quelque temps, mais sans les publier parce que je désirais éclaircir un peu la démonstration ; c'est pourquoi je désirerais connaître la vôtre quand vous l'aurez éclaircie de votre côté.

J'espère que la lutte, à armes courtoises, d'ailleurs, à laquelle nous venons de nous livrer à propos d'un nom, n'altérera pas nos bonnes relations. Dans tous les cas, ne vous en voulant nullement pour avoir pris l'offensive, j'espère que vous ne m'en voudrez pas non plus de m'être défendu. Il serait ridicule,d'ailleurs, de nous disputer plus longtemps pour un nom. *Name ist Schall und Rauch*[95] et après tout ça m'est égal, faites comme vous voudrez, je ferai comme je voudrai de mon côté.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

XX.

Paris, 7 avril 1882

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous renvoyer corrigée l'épreuve de ma lettre[96]. Maintenant que ce petit débat est terminé et je l'espère pour ne plus se renouveler, permettez-moi de vous remercier de la courtoisie dont vous n'avez cessé de faire preuve pendant tout le temps qu'il a duré. Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

XXI.

Leipzig, le 7 mai 1882
Sophienstrasse 10

Monsieur,

Il y a peu, j'ai lu votre Note dans les *Comptes Rendus* du 10 avril[97]. Elle m'a d'autant plus intéressé que, je crois, vos considérations actuelles se rapprochent des miennes, même quant à la méthode. Je démontre mes théorèmes à l'aide de la *continuité* en m'appuyant sur les deux lemmes suivants : 1) à tout *groupe discontinu* appartient une surface de Riemann et 2) à une surface de Riemann convenablement découpée [[*zerschnittene*]] ne peut appartenir qu'*un* seul de ces groupes (dans la mesure même où elle appartient à un groupe). Jusqu'à présent, je n'ai pas encore pris du tout en considération les développements en série tels que vous les établissez. Comment démontrez-vous en effet l'existence du nombre m pour lequel $\Sigma \frac{1}{(\gamma_i\eta+\delta_i)^m}$ converge absolument ? Et avez-vous pour celui-ci une borne inférieure *exacte* ou seulement approximative ?

Moi-même, j'ai, entre temps, donné une forme encore plus générale aux théorèmes considérés, et je vous écris de nouveau à ce sujet, car la rédaction d'une note pour les *Annalen* se fera attendre; pour le moment, j'ai trop peu de temps pour la faire. Dans le cas de mon premier théorème, toute la sphère [[*Gesamtkugel*]] η , à l'exception d'une infinité de *points*, sera recouverte par des images du recouvrement [[*wiedererhaltene Reproduktionen*]] du domaine fondamental. Dans le cas du second théorème, l'intérieur d'une surface circulaire, et d'une *seule*, n'est pas recouvert. Maintenant j'ai établi l'existence des représentations (qui existent toujours aussi, pour les surfaces de Riemann déterminées, de façon unique) qui excluent *une infinité de surfaces circulaires*. Dans cette direction, je formule ici seulement le théorème le plus simple (dans lequel je suppose essentiellement [[*durchaus*]] une représentation sans ramifications de la surface de Riemann)[98]. Soit $p = \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_m$, où d'abord aucun des μ n'est égal à 1 . Prenons sur la surface de Riemann m points $O_1,\ldots,O_m$, et effectuons à partir de O_1 , de la manière connue, $2\mu_1$ coupures transversales [[*Querschnitte*]] $A_1,B_1 ; A_2,B_2 ; \ldots ; A_{\mu_1},B_{\mu_1}$; à partir de O_2 $2\mu_2$ coupures transversales, etc. D'autre part, on construit sur la sphère η m cercles disjoints et à l'intérieur de l'espace limité par ces derniers un polygone à arcs circulaires qui est limité par $4\mu_1$ cercles normaux au premier cercle fondamental, puis ensuite $4\mu_2$ cercles qui sont normaux au deuxième cercle fondamental, etc. (ainsi un polygone à arcs circulaires est *m*-fois connexe [[*das m-fachen Zusammenhang hat*]]). Les cercles limites [[*die begrenzenden Kreise*]] seront ordonnés ensemble par couples dans l'ordre connu $A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, A_2, B_2, \ldots$, à savoir par des substitutions linéaires de η , qui laissent chaque fois invariant le cercle fondamental. Supposons, en outre, que le produit des substitutions linéaires correspondantes, à savoir par exemple $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_{\mu_1}^{-1} B_{\mu_1}^{-1}$, soit toujours égal à l'identité. *Alors il existe toujours une fonction analytique, et une seule, qui applique la surface de Riemann découpée* [[*zerschnittene*]] *sur un polygone à arcs circulaires engendré de cette façon.* - Le cas où un des μ est égal à 1 ne diffère que par le fait que le cercle fondamental correspondant se réduit à un *point* et que les substitutions linéaires correspondantes se transforment en "paraboliques", qui laissent fixe ce point. - Donc assez pour aujourd'hui. Serait-il possible d'obtenir une collection complète des tirés à part de vos travaux à ce sujet ? Je dois commencer, après Pentecôte, dans mon séminaire, une série de conférences sur les fonctions uniformes à transformations linéaires en soi[99] et je souhaiterais pouvoir, si cela est possible, mettre à la disposition de mes auditeurs une telle collection.

Veuillez agrér l'assurance de ma considération distinguée et dévouée.

F. Klein

XXII.

Paris, 12 mai 1882

Monsieur,

J'ai bien tardé à vous répondre et je vous prie de m'en excuser, car j'ai été forcé de faire une petite absence. Je crois comme vous que nos méthodes se rapprochent beaucoup et diffèrent moins par le principe général que par les détails. Pour les lemmes dont vous me parler, le premier, je l'ai établi par les considérations des développements en séries et vous, à ce que je pense, à l'aide du théorème dont vous m'avez parlé dans une de vos lettres de l'année dernière. Pour le second lemme, il ne présente pas de difficulté et il est probable que nous l'établissons de la même manière. Une fois ces deux lemmes établis, et c'est en effet par là que je commence, ainsi que vous le faites vous même, j'emploie comme vous la *continuité*, mais il y a bien de manières de l'employer et il est possible que nous différions dans quelques détails.

Vous me demandez comment j'établis la convergence de la série $\Sigma \frac{1}{(\gamma_i n+\delta_i)^{2m}}$.

J'en ai deux démonstrations mais qui sont toutes deux trop longues pour tenir dans une lettre ;je les publierai prochainement[100]. La première est fondée en principe sur ce fait que la surface du cercle fondamental est finie. La seconde exige la même hypothèse, mais elle est fondée sur la géométrie non-euclidienne. Quelle est maintenant la limite inférieure du nombre m ? C'est $m = 2$. Ici si l'on suppose m entier on a une limite exacte. En ce qui concerne les séries rèlatives aux fonctions *zétafuchsiennes*, je n'ai au contraire qu'une limite approximative. Ce qui m'a le plus intéressé dans votre lettre c'est ce que vous me dites au sujet des fonctions qui admettent comme espaces lacunaires une infinité de cercles. J'ai rencontré aussi de semblables fonctions et j'en ai donné un exemple dans une ou deux de mes notes. Mais j'y suis arrivé par une voie absolument différente de la vôtre. Il est probable que vos fonctions et les miennes doivent avoir une étroite parenté ; cependant il n'est nullement évident qu'elles soient identiques. Je croirais volontiers que votre méthode ainsi que la mienne est susceptible d'une généralisation très étendue et qu'elles conduiraient toutes deux à une grande classe de transcendantes comprenant comme cas particuliers celles que nous avons déjà rencontrées.

Vous me parlez de tirages à part de mes travaux. Voulez-vous parler de mes notes des *Comptes Rendus* ? Je n'en ai pas fait faire de tirages à part et il serait malheureusement difficile maintenant d'en obtenir, au moins pour les premières d'entre elles.

Je vous enverrai prochainement et dès que je les aurai reçus les tirages à part de deux travaux plus récents ; le premier *Sur les courbes définies par les équations différentielles*[101]. Il s'agit d'étudier la forme géométrique des courbes définies par les équations différentielles du 1er ordre. Malheureusement la première partie de ce mémoire est seule imprimée jusqu'ici et ne contient que les préliminaires. Le second travail a pour objet les formes cubiques ternaires, dont je veux faire l'étude arithmétique. J'ai voulu rappeler d'abord certains résultats algébriques qui remplissent la 1ère partie du mémoire. Cette 1ère partie a seule été imprimée dans le 50^{e} cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, le reste devant paraître dans le 51^{e} cahier[102]. Cette 1ère partie ne vous intéressera donc pas beaucoup. Il y a cependant une étude sur les transformations linéaires et sur certains groupes *continus* contenus dans le groupe linéaire à 3 et 4 variables.

A propos, je ne me souviens plus si je vous ai envoyé ma thèse, ainsi que des travaux plus anciens sur les équations différentielles et un travail sur les fonctions à espaces lacunaires.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

XXIII.

Leipzig, le 14 mai 1882

Monsieur,

En réponse à votre lettre, que je viens de recevoir, je voudrais, en deux mots, vous expliquer comment j'utilise la "continuité". En principe, bien sûr ; car l'exposé en détail, dont la rédaction coûterait de gros efforts, peut de toute façon être modifié de bien de manières. Je veux me limiter au cas des fonctions η de deuxième espèce sans ramifications, comme je les ai appelées dans ma note. Il s'agit ici, avant tout, de démontrer que les deux ensembles [[*Mannigfaltigkeiten*]] que l'on compare : l'ensemble des systèmes de substitutions considérés et, d'autre part, l'ensemble des surfaces de Riemann effectivement existantes, possèdent non seulement le même nombre de dimensions ($6p-6$ dimensions réelles), mais qu'ils sont des ensembles *analytiques* avec des frontières [[*Grenze*]] *analytiques* (au sens de la terminologie introduite par Weierstrass). Ces deux ensembles sont liés maintenant l'un à l'autre de façon $(1-x)$-forme [[$(1-x)$-*deutig*]], en raison du premier lemme énoncé dans ma précédente lettre, où x ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 pour les différentes parties du second ensemble, en vertu du second lemme. Mais maintenant cette relation s'avère être une relation *analytique* et même, comme il ressort des deux propositions, une relation analytique *dont le déterminant fonctionnel ne s'annule nulle part.* J'en déduis que x doit avoir toujours la valeur 1 . S'il existait, en effet, un passage [[*Übergang*]] d'un domaine avec $x = 0$ à un domaine avec $x = 1$, alors aux points du domaine de passage devraient correspondre, à cause du caractère analytique de la correspondance [[*Zuordnung*]], des points déterminés (effectivement atteints) de l'autre ensemble et pour ceux-ci, contrairement à ce qui a été noté, le déterminant fonctionnel de la relation devrait s'annuler. Telle est ma démonstration. M. Schwarz m'a communiqué une autre toute différente, bien qu'également basée sur des considérations de continuité, lors de la visite que je lui ai rendue récemment (le 11 avril) à Göttingen. Sans avoir reçu de lui une autorisation explicite, je pense tout de même devoir vous écrire à ce sujet. Schwarz se représente une surface de Riemann découpée [[*zerschnitten*]] d'une manière appropriée, ensuite recouverte une infinité de fois et les différents recouvrements liés dans les sections [[*Querschnitten*]] de telle sorte qu'il en résulte une surface totale qui correspond à l'ensemble des polygones placés les uns à côté des autres dans le plan. Cette surface totale, pour autant que l'on puisse donner un tel nom à une surface infiniment étendue (ce qu'il faut justement éclaircir), est dans le cas d'une fonction η de seconde espèce (cas auquel Schwarz s'est d'abord limité) *simplement connexe et à contour simple* [[*einfach zusammenhängend und einfach berandet*]], et il ne s'agit donc maintenant que de voir si on peut appliquer, de manière habituelle, aussi une telle surface simplement connexe et à contour simple sur l'intérieur d'un cercle.- Ce cheminement de la pensée de Schwarz est en tout cas très beau.

Vous m'interrogez au sujet des tirés à part. Je ne voudrais pas, naturellement, vous déranger avec cela, et d'autant moins que je peux me procurer tous vos travaux, à l'exception de votre *thèse*. Mais, à dire vrai, je préférerais disposer d'une collection aussi complète que possible des tirés à part. Si donc vous pouvez m'envoyer quelque chose (je n'en possède aucun) cela me serait très agréable.

Avez-vous eu l'occasion de lire la théorie des groupes de transformations de Lie ? Lie se représente toujours le paramètre qui intervient dans ses groupe comme un nombre complexe ; il serait intéressant de voir comment ses résultats pourraient être complétés, si on considère également des groupes engendrés seulement par une itération *réelle* de certaines opérations ∞ petites.

Hermite m'a envoyé, il y a quelque temps, un fascicule de son *Cours d'analyse* litographié. Serait-il possible (naturellemnt contre paiement) d'obtenir tous les fascicules ? Cela me ferait un plaisir particulier pour mon séminaire, en raison des buts que je poursuis actuellement.

Je vous prie de croire à l'assurance de mes sentiments les plus dévoués.

F. Klein

XXIV.

Paris, 18 mai 1882

Monsieur,

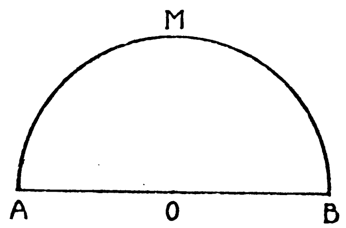
Je n'ai pas besoin de vous dire combien votre dernière lettre m'a intéressé. Je vois clairement maintenant que votre démonstration et la mienne ne peuvent différer que par la terminologie et par des détails ; ainsi il est probable que nous n'établissons pas de la même manière le caractère analytique de la relation qui lie les deux *Mannigfaltigkeiten* dont vous parlez ; pour moi, je relie ce fait à la convergence de mes séries, mais il est évident qu'on peut arriver au même résultat sans passer par cette considération.

Les idées de M. Schwarz ont une portée bien plus grande[103] ; il est clair que le théorème général en question, s'il était démontré, aurait son application dans la théorie d'un très grand nombre de fonctions et en particulier dans celle des fonctions définies par des équations différentielles *non linéaires*. C'est en étudiant de pareilles équations que j'avais été conduit de mon côté à chercher si une surface de Riemann à une infinité de feuillets pouvait être étendue sur un cercle, et j'avais été amené au problème suivant, qui permettrait de démontrer la possibilité de cette extension :

On donne une équation aux différences partielles

$$X_1 \frac{d^2u}{dx^2} + X_2 \frac{d^2u}{dxdy} + X_3 \frac{d^2u}{dy^2} + X_4 \frac{du}{dx} + X_5 \frac{du}{dy} = 0$$

et une demi-circonférence $AMBO$. X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont des fonctions données de x



et de y ; ces fonctions sont analytiques à l'intérieur de la demi-circonférence et cessent de l'être sur son périmètre. Peut-on trouver toujours une fonction u de x et de y satisfaisant à l'équation, analytique à l'intérieur de la demi-circonférence, tendant vers 1 quand le point x,y se rapproche de la demi-circonférence et vers 0 quand il se rapproche du diamètre AOB ? Tous mes efforts dans ce sens ont été jusqu'ici infructueux, mais j'espère que M. Schwarz,qui a si bien résolu le problème dans le cas le plus simple, sera plus heureux que moi.

Je vous envoie les tirages à part de mes travaux anciens, et j'espère pouvoir vous adresser d'ici peu les autres mémoires plus récents que je vous ai annoncés et dont je ne saurais tarder à recevoir le tirage à part.

Quant au cours lithographié de M. Hermite il est édité chez Hermann, Librairie des Lycées, rue de la Sorbonne ; le prix de l'abonnement est 12 Francs. Je ne crois pas que l'éditeur envoie de tirage à part à M. Hermite.

Veuillez agréer l'assurance de mes sentiments les plus dévoués et de mon estime sincère.

Poincaré

XXV.

Leipzig, le 19 septembre 1882
Sophienstrasse 10/II

Monsieur,

Pour ma part, sur le point de terminer un travail assez long sur les nouvelles fonctions[104], j'ai relu justement encore une fois votre article dans le tome 19 des *Annalen*. Il y a là un point que je ne comprends pas. Vous mentionnez, en deux endroits (au milieu de la page 558 et en bas de la page 560[105]), les *fonctions fuchsiennes* qui n'existent que dans un espace limité par une infinité de cercles normaux au cercle principal. Je connais en effet très bien ces fonctions (ainsi que je vous l'ai écrit il y a trois mois) qui ont comme frontière naturelle une infinité de cercles. Mais au groupe correspondant appartiennent toujours les substitutions qui laissant invariant seulement un seul cercle limite, choisi au hasard. Vous désignez maintenant par *fuchsiennes* les fonctions dont *toutes* les substitutions sont réelles (p.554 [[= p.93 du t.II]]), et cette définition ne se trouve pas sensiblement modifiée par la généralisation à la page 557 [[= p.96 du t.II]], où vous remplacez l'axe réel par un cercle quelconque.Les fonctions que je connais ne rentrent pas dans votre définition des fonctions *fuchsiennes*. Y a-t-il, de ma part, une mauvaise interprétation, ou, de votre part, une imprécision dans la formulation ? En ce qui concerne mon travail, je me suis limité à l'exposé de la conception géométrique, grâce à laquelle je pense avoir défini les nouvelles fonctions au sens de Riemann. On y trouve, comme il est dans l'ordre des choses, beaucoup de points de contact avec votre conception géométrique du sujet. Les groupes les plus généraux que je considère sont engendrés par un nombre quelconque de substitutions "isolées" et par un certain nombre de groupes "avec un cercle principal" (qui peut être réel ou imaginaire, ou aussi réduit à un point) qui sont "emboîtés les uns dans les autres" [[*Ineinanderschiebung*]].Les théorèmes de mes deux notes des *Annalen* deviennent alors des cas particuliers d'un théorème général, que l'on énonce ainsi : *à chaque surface de Riemann avec ramification quelconque donnée et coupure* [[*Zerschniedung*]] *correpond une fonction* η , *et une seule, du type concerné.*

J'ai appris par Mittag-Leffler[106] que vous êtes justement aussi occupé par d'importants travaux[107]. Je n'ai pas besoin de vous dire combien je serai intéressé d'en savoir davantage à leur sujet. Si vous êtes dans un mois à Paris, vous ferez la connaissance de mon ami S. Lie, qui vient justement de passez quelques jours chez moi, et qui, bien que lui-même jusqu'à présent n'était pas un théoricien des fonctions, s'intéresse vivement aux progrès faits ces derniers temps par la théorie des fonctions.

Je vous prie de croire à l'assurance de mes sentiments distingués et dévoués.

F. Klein

XXVI.

Nancy, le 22 septembre 1882

Monsieur,

Voici quelques détails sur ces fonctions dont j'ai parlé dans ma note des *Annalen* et dont la limite naturelle est formée d'une infinité de cercles. Pour plus de simplicité dans l'exposition, je prendrai pour exemple un cas très particulier. Supposons quatre points a, b, c, d sur le cercle fondamental et quatre cercles coupant orthogonalement celui-ci : le 1^er^ en a et en b, le 2^d^ en b et en c ; le 3^e^ en c et en d ; le 4^e^ en d et en a. On obtient ainsi un quadrilatère curviligne. Considérons deux substitutions (hyperboliques ou paraboliques) la 1^ère^ changeant le cercle ab dans le cercle ad ; la 2^de^ changeant le cercle cb dans le cercle cd. Les *Wiederholungen*[108] de notre quadrilatère vont recouvrir la surface du cercle fondamental, ou une portion seulement de cette surface ; mais dans tous les cas le groupe sera évidemment discontinu. On reconnaît aisément que le cercle fondamental ne sera recouvert tout entier que dans un seul cas ; lorsque les quatre points $abcd$ seront harmoniques et que les deux substitutions (ab, ad) et (cb, cd) seront paraboliques. On a affaire alors à la fonction modulaire. Dans tous les autres cas, on trouve que les *Wiederholungen* en question ne recouvrent qu'un domaine limité par une infinité de cercles. Maintenant le plan tout entier peu être *abgebildet*[109] sur notre quadrilatère et de telle façon que deux points *correspondants* du périmètre correspondent au même point du plan. Cette *Abbildung* définit une fonction n'existant que dans le domaine recouvert par les *Wiederholungen*. Mais ici il faut faire une remarque importante. Le groupe dérivé des deux substitutions (ab, ad) et (cb, cd) peut être considéré comme engendré d'une autre manière. Considérons quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 coupant tous quatre orthogonalement le cercle fondamental et ne se coupant pas entre eux de façon à être extérieurs les uns aux autres. Soit deux substitutions changeant C_1 en C_2 et C_3 en C_4 ; le groupe qui en dérive est évidemment discontinu et si les quatre cercles sont convenablement choisis, il peut être identique au groupe dont il a été question plus haut. La portion du plan extérieure aux quatre cercles est une sorte de quadrilatère qui peut être *abgebildet* sur une surface de Riemann de genre 2 et qui engendre ainsi une fonction existant dans tout le plan. Voilà donc le même groupe donnant naissance à deux fonctions essentiellement différentes. On peut se poser à ce sujet une foule de questions délicates que je ne puis aborder ici.

En résumé, vous voyez qu'il s'agit bien de fonctions n'existant que dans un domaine limité par une infinité de cercles et cependant de "fonctions fuchsiennes" puisque toutes les substitutions du groupe conservent le cercle fondamental. Chacun des cercles de la frontière est conservé par une des substitutions du groupe, laquelle conserve en même temps le cercle fondamental. Vous savez en effet que toute substitution hyperbolique conserve tous les cercles qui passent par les deux points doubles.

J'apprends avec plaisir que vous préparez un grand travail sur l'objet qui nous intéresse tous deux. Je le lirai avec le plus grand plaisir. Comme vous l'a dit M. Mittag-Leffler je prépare moi-même un travail sur ce sujet ; mais vu sa longueur je l'ai partagé en cinq mémoires[110] ; le 1er, qui va paraître cette année, sur les groupes à substitutions réelles (que j'ai appelés groupes fuchsiens) ; le 2^{d} sur les fonctions fuchsiennes ; j'en achèverai prochainement la rédaction ; le 3^{e} sur les groupes et fonctions plus générales que j'ai appelées kleinéennes.

Dans le 4^{e} j'aborderai un ordre de questions que j'ai laissées de côté dans le deuxième mémoire ; c'est-à-dire la démonstration de l'existence de fonctions satisfaisant à certaines conditions, par exemple la démonstration de ce fait qu'à toute surface de Riemann correspond une semblable fonction et la détermination des constantes correspondantes.

Enfin dans le 5^{e} je parlerai des fonctions zétafuchsiennes et de l'intégration des équations linéaires.

Je dois retourner à Paris après-demain ; je serai donc là au moment du passage de M. Lie. Je serais désolé de perdre l'occasion de voir ce célèbre géomètre. Vous avez dû recevoir la première partie de mon travail sur les courbes définies par les équations différentielles. Je vous en enverrai prochainement la seconde partie ; je vous enverrai en même temps mon mémoire sur les formes cubiques.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré[111]

XXVII.

[[1895]][113]

Mon cher Collègue,

Serez-vous à Göttingen dans le courant de la semaine prochaine ; dans ce cas, comme il est possible que je parte pour l'Allemagne samedi, j'irais probablement vous y voir.

Malheureusement on m'a dit que les vacances de la Pentecôte sont plus longues en Allemagne que chez nous et peut-être aussi devez-vous aller aux fêtes de Kiel.

S'il n'en était pas ainsi, je serais ravi d'avoir l'occasion de vous revoir.

Votre très dévoué Collègue.

Poincaré

Comme mon départ est proche, répondez-moi, je vous prie, le plus tôt possible à l'adresse suivante :

M. Poincaré, à Lozère, par Palaiseau, Seine et Oise.

XXVIII.

Mon cher Collègue,

Je suis très heureux d'apprendre que vous ne quitterez pas Göttingen ; je puis donc mettre mon projet à exécution.

Je ne puis malheureusement séjourner longtemps à Göttingen parce qu'à cette époque de l'année je ne dispose que de peu de temps et je voudrais encore aller à Leipzig et à Berlin.

Je compte arriver à Göttingen lundi matin venant de Hildesheim et partir mardi soir.

Je vous remercie beaucoup de votre offre obligeante d'hospitalité ; mais je ne puis l'accepter car je craindrais de vous causer trop de dérangement.

A bientôt, mon cher Collègue, et veuillez croire à mes sentiments les plus dévoués.

Poincaré

XXIX.

Mon cher Collègue,

Je suis de retour en France après mon voyage qui s'est fort bien passé et je veux vous remercier de l'accueil si cordial que vous m'avez fait et vous prier de vouloir bien me rappeler au souvenir de Madame Klein.

En passant à Nürnberg je suis entré dans une boutique pour acheter des jouets à mes enfants et j'ai pensé à profiter de l'occasion pour envoyer un souvenir à vos deux petites filles qui sont si gentilles.

Malheureusement je ne suis pas très compétent et j'étais privé des lumières de ma femme ; mon choix a sans doute été bien maladroit.

Votre bien dévoué Collègue et ami.

Poincaré

XXX.

[[1895]]

Cher Collègue et Ami,

J'espère que les congrès mathématiques que l'on projette d'organiser pourront rendre des services, ne serait-ce qu'en fournissant aux géomètres une occasion de se connaître. Aussi ai-je l'intention d'y prendre part personnellement si on parvient à les mettre en train.

D'après ce que j'ai compris, ces messieurs de Zurich se chargeraient de l'organisation des détails matériels. M. Wassilief[114] de Kazan qui s'est beaucoup occupé de ces congrès va venir prochainement à Paris ; je crois qu'il sera passé par Zurich ; quand je l'aurai vu, je vous écrirai plus au long.

J'ai reçu aussi diverses lettres de M. G. Cantor au sujet de ces congrès[115] ; ne fait-il pas partie du Conseil de l'Association.

Veuillez, mon cher Collègue, agréer l'assurance de ma sincère amitié et vous charger de transmettre à Madame Klein mes respectueux hommages.

Poincaré[116]

XXXI.

[[octobre 1901]]

Mon cher Collègue,

J'apprends par Darboux que le prix Bolyai vient de m'être décerné ; je tiens à vous remercier de la part que vous avez prise personnellement à cette décision[117].

Veuillez, je vous prie, présenter à Madame Klein mes respectueux hommages et croire à mes sentiments dévoués.

Poincaré

XXXII.

Göttingen 14. Januar 1902[118].

Sehr verehrter Freund und College !

Heute komme ich mit einer Bitte, die ich zugleich im Namen zahlreicher Collegen an Sie richte. Die (internationale) astronomische Gesellschaft hat, wie Sie jedenfalls wissen, in diesem Jahre ihre Hauptversammlung in *Göttingen*, und zwar sind dafür die Tage vom 5-8ten August in Ansicht genommen. Würde es Ihnen irgend möglich sein, dass Sie an dieser Versammlung teilnehmen ? Wir Göttinger wollen in der That versuchen, einen möglichst vielseitigen Besuch von seiten der *theoretischen* Astronomen herbeizuführen. Dies wird, so hoffen wir, nicht nur den Verhandlungen eine besondere Bedeutung geben, sondern auf den Betrieb der Astronomie, der bei uns etwas einseitig geworden ist, und ihre Beziehung zur Mathematik belebend zurückwirken (ich hoffe namentlich auch, dass der astronomische Teil unseren mathematischen Encyclopädie, der noch im Stadium der ersten Vorbereitung ist, dadurch eine wesentliche Förderung erhält). Sie finden hier in Göttingen jetzt den Boden dafür besonders vorbereitet, in dem neben *Brendel*[119], den Sie kennen, als neuberufener Direktor der Sternwarte *Schwarzschild*[120] steht, wir also mit jugendlichen Kräften einsetzen. Nach anderer Seite hoffen wir den astronomischen Nachlaß von Gauß geordnet vorlegen zu können. Diese allgemeineren Andeutungen mögen hier genügen ; welch besonderen Werth wir im Zusammenhang mit denselben Ihrer Anwesenheit beilegen würden, brauche ich nicht auszuführen. Ich möchte Sie bitten, möglichst auch Ihren Einfluß dahin verwenden zu wollen, dass von den zahlreichen jüngeren französischen theoretischen Astronomen der eine oder andere herkommt ! An Calladreau[121] werde ich noch direct schreiben.

Von mir selbst ist hier nicht viel zu beurteilen, dass es mir und den Meinigen gut geht. Ich bin in den letzten Jahren wesentlich mit Organisationsfragen beschäftigt gewesen und hoffe, dass Sie, wenn Sie herkommen, gewisse Fortschritte in unseren Instituten wie allgemeinen Einrichtungen wahrnehmen werden. Daneben hat Hilbert in ausgezeichneter Weise theoretisch weitergearbeitet. Die Festschriften zum 150. jährigen Jubilaeum unserer Akademie werden Sie ja neulich richtig bekommen haben, in denen Hilbert das Dirichlet'sche Princip auf eine neue Basis stellt[122], während ich Gauß'ursprüngliches wissenschaftliches Tagebuch publiciere[123].

Mit der Bitte, mich den werthen Ihrigen freundschaftlichst empfehlen zu wollen, Ihr sehr ergebener

F. Klein[124].

XXXIII.

[[avril 1906]]

Mon cher Collègue,

Je vous suis très reconnaissant de la peine que vous aviez prise jusqu'ici pour votre travail et je comprends très bien que vous ayez reculé devant une pareille tâche, qui venait s'ajouter à vos autres occupations si nombreuses. Je ne vous en remercie pas moins des efforts que vous aviez faits pour l'accomplir. J'ai reçu les papiers que vous m'avez renvoyés sous pli recommandé.

Ma femme est très touchée du mot de souvenir que vous nous adressez au sujet de nos noces d'argent[125].

Veuillez, mon cher Collègue, présenter à Madame Klein mes respectueux hommages et croire à ma sincère amitié.

Poincaré [126]

NOTES

1 Cette correspondance a été d'abord publiée, avec des notes, par N.E. Nörlund dans les *Acta Mathematica*, t.39(1923), p.94-132 : *Correspondance d'Henri Poincaré et de Felix Klein*. Elle a été reprise dans les *Gesammelte mathematische Abhandlungen* de F. Klein, t.III, p.587-621 : *Briefwechsel zwischen F. Klein und H.Poincaré in den Jahren 1881-1882*, ainsi que dans les *Oeuvres* de H. Poincaré, t.XI, p.26-65.

La traduction des lettres de F. Klein est de François Poincaré.

Sur Klein on peut lire l'article de W. Burau et B. Schoeneberg, *Klein, Christian Felix*, dans le *Dictionary of Scientific Biography*, t.VII, p.396-400 (voir en particulier p.399 sur l'histoire des fonctions automorphes).

On peut consulter également R. Fricke : *Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen*, t.II, 2e partie, p.349-470 de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig(Teubner), 1901-1921, article qui a été terminé en novembre 1913. Voir en particulier les pages 359-360, 362, 366-367, 384, 386, 395-397, 405, 407, 409-415, 433, 441-445, 447, 449, 452-453, 455-457 et 466.

Mais c'est l'étude de J. Dieudonné, *La découverte des fonctions fuchsiennes*, p.3-23 des *Actualités mathématiques, Actes du VIe congrès du regroupement des mathématiciens d'expression latine*, Paris(Gauthier-Villars),1982, qui éclaire bien le fond mathématique de cette correspondance.

Les lettres de Georges Brunel à Henri Poincaré donnent des informations précieuses sur les réactions de Felix Klein aux premières lettres de Poincaré.

H. Poincaré a décrit lui-même sa découverte des fonctions fuchsiennes p.50-53 de son article sur *L'invention mathématique* (p.43-63 de *Science et méthode*, Paris (Flammarion), 1912).

Quant à Felix Klein, il a exposé l'histoire des fonctions automorphes dans ses *Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlin(Springer), 1979, p.374-381 du tome I, ainsi que dans son exposé *Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen*, p.577-586 du tome III de ses *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin(Springer), 1923.

N.E. Nördlung donne dans les *Acta Mathematica*, t.39, p.95-97, le récit de F. Klein, en allemand, de sa découverte du "théorème central" (*Zentraltheorem*), dont il sera question dans les lettres XVIII et XIX, récit fait dans son cours de 1915-1916 à l'Université de Göttingen, *Die Etwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, dritter Teil, Funktionentheorie von 1850 bis circa 1900*, et repris en partie, p.584

du tome III de ses *Gesammelte mathematische Abhandlungen* :

"J'ai consacré l'automne 1881 à me reposer sur le bord de la Mer du Nord (à Borkum), où j'ai écrit mon livre sur Riemann [[*Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Leipzig(Teubner), 1882 = *Ges. math. Abh.*, t.3, p.499-573]] et trouvé le théorème fondamental du t.19 [[*Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich*, Math. Annalen, 19(1882), 565-568 = *Ges. math. Abh.*, t.3, p.622-626]] (que je n'ai rédigé que pendant les vacances de Noël). Pour suivre les conseils donnés à l'époque par les médecins, j'avais projeté de me rendre à nouveau à Pâques 1882 sur les bords de la Mer du Nord, cette fois à Norderney. Je voulais y rédiger, au calme, la deuxième partie de mon livre sur Riemann, c'est-à-dire rédiger, sous une nouvelle forme, le théorème d'existence des fonctions algébriques sur une surface de Riemann. En fait, je n'ai pas pu supporter ce séjour que huit jours, la vie y étant trop morose, car il n'était pas possible de sortir à cause des tempêtes et j'ai souffert de crises d'asthme. Aussi, j'ai décidé de rentrer rapidement à la maison à Düsseldorf. Pendant la dernière nuit de mon séjour, celle du 22 au 23 mars, que j'ai passé assis sur un divan à cause des crises d'asthme, m'est apparu subitement vers deux heures et demi le théorème central [[*Zentraltheorem*]], tel qu'il est ébauché dans la figure du 14-angle [[14-*Eck*]] du tome XIV des *Math. Annalen* [[p.126 de *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen*, p.90-135 du t.III des *Ges. math. Abh.* = Math. Annalen, 14(1879), 428-471]]. Le lendemain matin, dans la diligence qui à l'époque circulait entre Norden et Emden, j'ai réfléchi à ce que j'avais trouvé examinant encore une fois tous les détails. Je savais, maintenant, que j'avais trouvé un théorème important. Arrivé à Düsseldorf, j'ai rédigé le mémoire, daté du 27 mars, envoyé à Teubner [[Math. Annalen, 20(1882), 49-51 = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.627-629]] et fait transmettre les épreuves à Poincaré et à Schwarz, ainsi qu'à Hurwitz.

J'ai déjà raconté comment Poincaré a réagi dans les *Comptes Rendus* [[*Sur les fonctions fuchsiennes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 94(1882), 1038-1040 = *Oeuvres*, t.II, p.41-43, 1916]] le 10 avril. Mais, à moi,il m'a écrit : *Les résultats que vous énoncez m'intéressent beaucoup, voici pourquoi ; je les avais trouvés il y a déjà quelque temps* ... [[voir la lettre XIX]]. Il n'a jamais précisé comment et depuis quand il connaissait ces résultats. Il est facile de comprendre que nos relations sont devenues tendues. Schwarz, pour sa part, pensait d'abord, par suite d'un décompte des constantes [[*Konstantenzählung*]] insuffisant, que le théorème devait être faux ; mais, plus tard, il a apporté une contribution fondamentale aux nouvelles méthodes de démonstration.

Mais, en réalité, la preuve était très difficile. J'ai utilisé la dite méthode de continuité [[*Kontinuitätsmethode*]] qui fait correspondre à l'ensemble des surfaces de Riemann d'un p donné l'ensemble homologue des groupes automorphes avec cercle limite. Je n'ai jamais douté que la méthode de démonstration soit correcte, mais je me suis heurté partout à mon manque de connaissances en théorie des fonctions, ou à la théorie des fonctions elle-même, dont je ne pouvais, provisoirement, que postuler la réalisation et qui, en fait, n'a été obtenue que trente ans plus tard (1912) par Koebe [[P. Koebe, *Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung* (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1912, 879-886)]].

Cela ne m'a pas empêché d'établir, au cours de l'été 1882, des théorèmes fondamentaux encore plus généraux, qui forment un ensemble dans les tomes 19 et 20, et de préparer l'élaboration de toute la conception d'abord par des conférences au séminaire que Study a rédigées à l'époque. J'ai terminé ainsi la plupart de mes travaux : j'ai fait d'abord des conférences au séminaire ou des leçons et ensuite, pendant les vacances, la rédaction. C'est au cours des vacances d'automne 1882 à Tabarz (Thüringen) que pris naissance le mémoire du tome 21 et que j'avais terminé le 2 octobre 1882 [[*Neue Beiträge zur Riemannschen Functionentheorie* (Math. Annalen, 21(1883), 141-218) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.630-710 ; "le théorème fondamental général" se trouve p.699]]. Bien que très incomplète et inachevée, la structure du fil des idées a été conservée dans l'ensemble et n'a pas été modifiée par les mémoires de Poincaré qui se suivaient de façon rapprochée dans les tomes 1, 3, 4 et 5 des *Acta Mathematica* qui venaient justement d'être fondées [[*Théorie des groupes fuchsiens* (1(1882), 1-62) = *Oeuvres*, t.II, p.108-168 ; *Sur les fonctions fuchsiennes* (1(1882), 193-294) = *Oeuvres*, t.II, p.169-257 ; *Mémoire sur les groupes kleinéens* (3(1883), 49-92) = *Oeuvres*, t.II, p.258-299 ; *Sur les groupes des équations linéaires* (4(1884), 201-311) = *Oeuvres*, t.II, p.300-401 ; *Mémoires sur les fonctions zétafuchsiennes* (5(1884), 209-278)= *Oeuvres*, t.II, p.402-462]]."

2 Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 92(1881), 333-335 (14 février) ; 395-396 (21 février) ; 859-861 (4 avril) = *Oeuvres*, t.II, p.1-10.

3 *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades* (Math. Annalen, 14(1879), 111-172) ; *Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen* (417-427) ; *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* (428-471) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.13-135.

4 *Ueber Multiplicatorgleichungen* (15(1879), 86-88) ; *Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen* (533-555) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.137-165.

5 *Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen* (17(1880), 62-70) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.169-178.

6 P.30-31 du t.III des *Ges. math. Abh.*

7 P.64 du t.III des *Ges. math. Abh.*

8 P.126 du t.III des *Ges. math. Abh.*

9 *Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss* (Comptes Rendus, 92(1881), 856-858) = *Oeuvres*, t.II, p.471-474, Paris(Gauthier-Villars), 1918. Voir aussi p.129 du t.I de F. Klein : *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, Leipzig(Teubner), 1890.

10 *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 75(1873), 292-335) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.211-259, Berlin, 1890 (voir en particulier p.240).

11 P. 169 et ss du t.III des *Ges. math. Abh.*

12 *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* (Math. Annalen, 9 (1876), 183-208) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.275-301,Leipzig(Teubner), 1922.

13 *Ueber lineare Differentialgleichungen* (Math. Annalen, 12(1877), 167-179) ; *Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder* (503-560) = *Ges. math. Werke*, t.II, p.307-384.

14 P.24-25 du t.III des *Ges. math. Abh.*

15 J. Dieudonné écrit à propos de Klein, p.20 de *La découverte des fonctions fuchsiennes* : "Tout spécialiste de la géométrie non euclidienne qu'il fût, il était à cent lieues de l'idée de l'utiliser comme Poincaré."

16 Voir la lettre de Georges Brunel à Poincaré du 7 juillet 1881.

17 "Les fonctions modulaires elliptiques".

18 "Théorie du polygone fondamental".

19 "Polygones à arcs circulaires".

20 La correspondance d'Emile Picard,entreposée dans un garde-meuble après la mort de celui-ci en 1941, a été brulée quelques mois plus tard dans un incendie.

21 P.13-135 du t.III des *Ges. math. Abh.*

22 P.274-306, 321-380 du t.II, 1922, des *Ges. math. Abh.*

23 P.307-320 du t.II des *Ges. math. Abh.*

24 Voir la note 24), p.122-123, ainsi que celles des p.136 et 166 du t.III des *Ges. math. Abh.* de Klein.

25 Voir p.5, ainsi que la note 8) de la p.78 du t.III des *Ges. math. Abh.* de Klein.

26 *Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie*

der Multiplikatorgleichungen 1. Stufe, Leipzig, 1881 = (Math. Annalen, 18(1881), 528-592). Voir aussi note 2), p.137 du t.III des *Ges. math. Abh.* de Klein.

27 Voir les lettres de Brunel à Poincaré.

28 Voir la note 10.

29 *Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 83(1877), 265-292) = p.174-201, t.I, *Ges. math. Werke*, Braunschweig(Vieweg), 1930.

30 *Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 83(1877), 13-37) = *Ges. math. Werke*, t.II, p.85-111, Berlin, 1906. Voir aussi la note de L. Schlesinger p.112-114.

31 *Ueber einige Abbildungsaufgaben* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 70(1869), 105-120) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.65-83.

32 *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92(1881), 1198-1200) = *Oeuvres*, t.II, p.12-15.

33 P.21 de *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92(1881), 1484-1487 ; 27 juin) = *Oeuvres*, t.II, p.19-22.

34 *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 66(1866), 121-161) = *Ges. math. Werke*, t.I, p.159-204, Berlin, 1904.

35 P.169-178 du t.III des *Ges. math. Abh.* de Klein.

36 "Sous-groupes".

37 "Genre".

38 Voir *Comptes Rendus*, t.92(1881), p.860-861, 1199, 1276 = *Oeuvres*, t.II, p.9, 13, 18.

39 "Genre au sens de l'*Analysis situs*".

40 "Le groupe des transformations linéaires est alors caractérisé par le fait qu'il est contenu dans un groupe d'opérations deux fois plus grand, qui, à côté des transformations linéaires, contient aussi les réflexions."

41 "Réflexions".

42 "Engendrement".

43 "Dans ce cas, l'existence de la fonction a été établie rigoureusement par les travaux de Schwarz."

44 "Si l'on ne veut pas faire appel aux principes généraux de Riemann."

Ce que Klein exprime dans ce passage de sa lettre c'est la conviction de beaucoup de mathématiciens que seules les mathématiques enseignées par Weierstrass étaient rigoureuses. L. Koenigsberger, qui avait suivi les cours de Weierstrass à l'Université de Berlin, écrit dans *Mein Leben*, Heidelberg(Winter), 1919 (p.59) : "Jadis, nous, les jeunes mathématiciens, avions tous le sentiment que les idées et les méthodes de Riemann ne faisaient plus partie des mathématiques rigoureuses d'Euler, de Lagrange, de Gauss, de Jacobi et de Dirichlet." Encore dans son dernier cours à l'Université de Berlin en 1886 : *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre* (manuscrit, Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisches Institut), Weierstrass traitait la théorie des surfaces de Riemann de "fantaisie mathématique".

45 Voir la note 20 : la correspondance d'Hermite a été détruite avec celle de son gendre E. Picard.

46 *Über die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünfter Grades* (Math. Annalen, 14(1878-1879), 111-170) ; *Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* (Math. Annalen, 14(1878-1879), 428-471)= *Ges. math. Abh.*, t.III, p.13-75, 90-135.

47 *Versuch einer übersichtlichen Darstellung der Riemann'schen Fläche, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformationen der elliptischen Functionen entspricht* (Math. Annalen, 18(1881), 507-527). Voir aussi p.166-167 du t.III des *Ges. math. Abh.* de Klein.

48 *Über die Erniedrigung der Modulargleichungen* (Math. Annalen, 14(1879), 417-427) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.76-89.

49 C'est la première figure de cette lettre.

50 F. Schottky, *Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 83(1877), 300-351). Voir aussi l'article de Schottky : *Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich* (Math. Annalen, 20(1882), 299-300), ainsi que la note 10, p.626 du tome III des *Ges. math. Abh.* de Klein.

G. Mittag-Leffler écrit à C. Hermite le 3 août 1882 (Archives de l'Académie des Sciences de Paris) :

"Je lui [[Weierstrass]] ai demandé son opinion dans l'affaire Schwarz-Klein contre Poincaré-Fuchs, et il m'a déclaré expressément qu'il trouve que M. Poincaré a parfaitement raison. La seule chose qu'il me paraissait ne pas approuver c'était le nom "fonctions kleinéennes". Et c'est vrai que le nom est drôle. M. Poincaré l'avait introduit à cause d'une lettre de M. Klein, où M. Klein lui communiquait certaines choses. Mais ces choses n'étaient pas de Klein. Elles étaient de M. Schottky, ce que M. Klein avait oublié de dire. Je tiens cette histoire de M. Klein lui-même."

51 Comme le signale N.E. Nörlund, dont nous utilisons largement les notes, pour que ce théorème soit vrai, il faut encore ajouter une condition : voir p.131 du mémoire de Klein : *Über den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereichs* (Math. Annalen, 40(1892), 130-139) = p.712 du t.III des *Ges. math. Abh.*, où cet article figure p.711-720, ainsi que la note 18, p.598 de ce tome. Poincaré fait allusion à cette lettre dans son *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes* (Acta Math., 5(1884), 209-278), p.211 = *Oeuvres*, t.II, p.402-462, où il écrit p.404 :

"J'avais, il est vrai, dans les *Mathematische Annalen*, énoncé un résultat particulier sur ces équations irrégulières, mais ce résultat est inexact ; j'avais été trompé par une fausse interprétation d'un théorème de M. Klein dont je ne connaissais pas la démonstration."

52 *Theorie der Abel'schen Functionen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 54(1857), 115-155), p.133-136 = *Ges. math. Werke*, New York(Dover), 1953, p.88-142 ; le § 12 se trouve p.119-122 = *Théorie des fonctions abéliennes*, p.89-162, Paris (Gauthier-Villars), 1898 ; le § 12 occupe les p.131-134.

53 *Sur les fonctions abéliennes* (Comptes Rendus, 92(1881), 958-959) = *Oeuvres*, t.IV, 1950, p.299-301.

54 A. Brill und M. Noether, *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Math. Annalen, 7(1874), 269-310).

55 *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92(1881), 1484-1487) ; *Sur les groupes kleinéens* (Comptes Rendus, 93(1881), 44-46) = *Oeuvres*, t.II, p.19-25.

56 "On peut toujours appliquer le demi-plan sur un polygone à arcs circulaires de façon que les points I, II, III, IV, V qui correspondent aux points 1, 2, 3, 4, 5 de la frontière du demi-plan aient une position quelconque."

57 *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92(1881), 1198-1200) = *Oeuvres*, t.II, p.12-15.

58 "Par contre, au sujet du problème que j'avais mentionné de l'application des polygones à arcs circulaires, Weierstrass et Schwarz ont une détermination effective des constantes considérées par des procédés convergents."

59 "Toutes mes démonstrations d'existence."

60 P.299-300 de la Note mentionnée dans la note 53.

61 Comptes Rendus, 92(1881), 1484-1487 = *Oeuvres*, t.II, p.19-22.

62 Sur l'histoire du "principe de Dirichlet", voir p.37-39 du livre de J. Dieudonné : *History of Functional Analysis*, Amsterdam(North-Holland), 1981.

63 *Ueber einige Abbildungsaufgaben* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 70(1869), 105-120) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.65-83 ; *Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeder auf Oberfläche einer Kugel* (Journal reine angew. Math., 70 (1869), 121-136) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.84-101 ; *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Journal reine angew. Math., 74(1872), 218-253) = *Ges. math. Abh.*, t.II, 175-210 ; *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt* (Journal reine angew. Math., 75(1873), 292-335) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.211-259.

64 *Ueber die Integration der partiellen Differentiagleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen* (Monatsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1870, 767-795) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.144-171.

65 Voir la note 52.

66 *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 93(1881), 301-303) = *Oeuvres*, t.II, 29-31.

67 *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Leipzig, 1882 = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.499-573.

68 *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires* (Math. Annalen, 19(1882), 555-564) = *Oeuvres*, t.2, p.92-105.

69 F. Klein a ajouté la note suivante à l'article de Poincaré, note publiée p.564 des *Mathematische Annalen* et reproduite p.104-105 du tome II des *Oeuvres* de Poincaré :

"L'article de Monsieur Poincaré présenté ici résume certains des résultats que l'auteur a publiés cette année dans une série de notes des *Comptes Rendus*. Il n'est guère nécessaire de les recommander encore particulièrement à l'attention des mathématiciens. Il s'agit cependant des fonctions qui paraissent capables de concurrencer efficacement, dans la théorie des irrationalités algébriques, les fonctions abéliennes, et offrent, en outre, un aperçu tout à fait nouveau sur ces dépendances qui sont déterminées par des équations différentielles à coefficients algébriques. Pendant que je veux remercier vivement Monsieur Poincaré, au nom de la rédaction des *Annalen*, de nous avoir fait parvenir cet article, je dois pourtant marquer mon désaccord sur un point, à savoir la dénomination pour ces fonctions que je juge prématurée. C'est que, d'une part, toutes les recherches que M. Schwarz et moi-même avons publiées jusqu'à présent dans cette direction portent sur le domaine des *fonctions fuchsiennes*, sur lesquelles M. Fuchs lui-même n'a jamais rien publié. D'autre part, je n'ai jusqu'à présent rien publié sur les fonctions les plus générales que M. Poincaré associe à mon nom ; je me suis contenté d'attirer l'attention de Monsieur Poincaré sur l'existence de telles fonctions (voir *Comptes Rendus*, t.92 (1881), p.1484). Les circonstances sont d'autant moins appropriées que l'on trouve ailleurs l'étude d'un cas particulier de ces fonctions générales, à savoir dans le mémoire de M. Schottky dans le tome 83 du *Journal de Borchardt*. Il est question là (p.346 et ss) des fonctions qui se reproduisent par symétrie, lorsqu'un domaine plan, limité par des circonférences disjointes [[*von lauter getrennten Kreislinien begrenzt ist*]], se réfléchit [[*spiegelt*]] justement sur ces circonférences. De plus, je voudrais renvoyer aux mémoires de Dyck dans les tomes 17 et 18 de ces *Annalen*, et tout particulièrement à sa thèse d'habilitation qui paraîtra prochainement (dans le tome XX), dans laquelle les divisions du domaine [[*Gebietsteilungen*]] du genre général considéré ici seront appliquées à la théorie des groupes. - Il est peut-être bon d'ajouter à ces brèves remarques une plus générale, et de constater, en la circonstance, que toutes les recherches dont il est question ici concernant la résolutions des équations différentielles linéaires, aussi bien celles qui ont un caractère géométrique, que celles qui relèvent davantage de l'analyse, renvoient aux conceptions de Riemann. Le rapport est d'autant plus étroit que l'on peut prétendre qu'il s'agit, dans les recherches dans la direction de M. Poincaré, même d'un accomplissement du programme général de la théorie des fonctions que Riemann a établi dans sa thèse de doctorat."

70 *Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich* (Math. Annalen, 19 (1882), 565-568) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.622-626.

71 Lettre XVII.

72 Voir la note 70.

73 Cette lettre a été publiée dans les *Math. Annalen*, t.20 (1882), p.52-53, ainsi que dans les *Oeuvres* de Poincaré, t.II, p.106-107, mais elle a été supprimée dans les *Ges. math. Abh.* de Klein. Nous la reproduisons d'après les *Acta Mathematica* n'ayant pas pu encore voir l'original, s'il existe.

74 F. Klein a ajouté ici la note suivante :

"J'ai d'abord ajouté seulement une remarque aux explications de Monsieur Poincaré : que je me tiens, pour ma part, à l'opinion que j'ai exprimée à la p.564 du tome 19 des *Annalen*. Cependant, je ne veux pas omettre de signaler expressément la note dans laquelle M. Fuchs s'est opposé au passage en question de mon explication (*cf. Göttinger Nachrichten* du 4 mars 1882)."

Il s'agit de l'article de L. Fuchs : *Über Funktionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben* (Nach. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1882, 81-84) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.285-287.

75 Voir la note 63.

76 "Dans le domaine".

77 *Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces* (J. f. d. reine u. angewandte Math., 83(1877), 13-37) ; *Über eine Klasse von Funktionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koefizienten entstehen* (J. f. d. reine u. angewandte Math., 89(1880), 151-169) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.87-114, 191-212.

78 Voir la correspondance de Poincaré avec Fuchs dans les *Acta Mathematica*, t.38(1921), p.175-187 = *Oeuvres*, t.XI, p.13-25 ;ainsi que le mémoire de Poincaré : *Sur les fonctions fuchsiennes* (Acta Math., 39(1923), 58-93) = *Oeuvres*, t.I, p.336-373.

79 "Souligné leur importance comme fondement".

80 Voir la note 70.

81 *Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich* (Math. Annalen, 20 (1882), 49-51) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.627-629.

82 Voir la note 29.

83 *Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* (Math. Annalen, 9 (1876), 183-208) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.275-301 : voir, en particulier, les notes 4), p.276, et 6), p.280.

84 *Über lineare Differentialgleichungen* (Math. Annalen, 11(1877), 115-118 ; 12(1877), 167-179) = *Ges. math. Abh.*, t.II, p.302-320.

85 L'article de Fuchs est cité à la fin de la note 74.

86 *Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich* (Math. Annalen,19 (1882), 565-568) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.622-626.

87 *Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich* (Math. Annalen, 20 (1882), 49-51) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.627-629.

88 De la première édition. Il s'agit du mémoire : *Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen. Conforme Abbildung von durch Kreise begrenzten Figuren*, p.440-444 de la 2ème édition des *Ges. math. Werke*, New York(Dover) = *Sur l'équilibre de l'électricité sur les cylindres à section*

transverse circulaire et dont les axes sont parallèles. Représentation conforme des figures dont les contours sont des circonférences, p.378-383 des *Oeuvres mathématiques* de Riemann, Paris (Gauthier-Villars), 1898.

Voir aussi : F. Klein, *Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen*, p.577-586 du tome III des *Ges. math. Abh.*

89 *Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Fläche* (J.f.d. reine u. angewandte Math., 83(1877), 300-351).

90 H. Poincaré cite cette lettre p.17 de son mémoire *Sur un théorème de M. Fuchs*, p.4-31 du t.III des *Oeuvres* = (Acta Math., 7(1885), 1-32).

91 "Pour le dédommagement".

92 "Sont-elles réellement uniformes ? Je comprends seulement que, dans tout ensemble de valeurs qu'elles prennent, elles sont sans ramifications."

93 *Auszug aus einem Schreiben des Herrn L. Fuchs an C.W. Borchardt* (J.f.d. reine u. angewandte Math., 90(1881), 71-73) ; *Über die Funktionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen* (Göttinger Nachrichten, 1880, 445-453) = *Ges. math. Werke*, t.II, p.219-227. Voir aussi les articles cités dans la note 78, ainsi que p.583 de l'article de Klein *Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen*, p.577-586 du tome III des *Ges. math. Abh.*

94 *Über eindeutige Funktionen mit linearen Substitutionen in sich* (Math. Annalen, 20 (1882), 49-51) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.627-629.

95 "Nom est bruit et fumée."

96 La lettre XVII.

97 *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 94(1882), 1038-1040) = *Oeuvres*, t.II, 41-43. Voir aussi p.584-585 de l'article de Klein : *Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen*, p.577-586 du t.III des *Ges. math. Abh.*

98 Voir *Abschnitt IV : Das Fundamentaltheorem*, p.698-705 des *Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie*, p.630-710 du t.III des *Ges.math. Abh.* = (Math. Annalen, 21(1883), 141-218).

99 Voir p.585 de F. Klein : *Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen*, p.577-586 du t.III des *Ges. math. Abh.*

100 *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (Acta Math., 1(1882), 193-294) = *Oeuvres*, t.II, p.169-257.

101 (J. Math. pures et appliquées, (3), 7(1881), 375-422 ; 8(1882), 251-296) = *Oeuvres*, t.I, p.3-84.

102 *Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires* (J. Ecole Polytechnique, 50[e] Cahier, 1881, 199-253 ; 51[e] Cahier, 1882, 45-91) = *Oeuvres*, t.V, p.28-72, 293-334.

103 Voir p.585 de l'article de Klein : *Zur Vorgeschchte der automorphen Funktionen*, p.577-586 du t.III des *Ges. math. Abh.*

104 *Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie* (Math. Annalen, 21(1883), 141-218) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.630-710.

105 *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires* (Math. Annalen, 19(1882), 553-564) = *Oeuvres*, t.II, p.92-105. Les deux endroits se trouvent ici p.96 et 98.

Les éditeurs des *Ges. math. Abh.* de F. Klein écrivent dans la note 52), p.618 du t.III :

"Il s'agit là d'une introduction fautive des "pointes hyperboliques" [[*der "hyperbolischen Zipfel"*]] qui a été corrigée par Klein dans l'article CIV ci-dessous [[*Über den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereichs* (Math. Annalen, 40(1892), 130-139) = *Ges. math. Abh.*, t.III, p.711-720]] et par Nörlund dans les notes 25 et 30, p.621-622 et 623, du t.II des *Oeuvres* de Poincaré. H. Poincaré lui-même a rétracté son assertion, il est vrai sous une forme très succincte, en conclusion du § 1 de son *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes*, Acta Math., t.5(1885), p.211 = Oeuvres, t.II, p.404."

106 La correspondance de Klein avec Mittag-Leffler se trouve, d'une part, à l'Institut Mittag-Leffler à Djursholm, près de Stockholm, et, d'autre part, à la Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek à Göttingen.

107 Il s'agit des cinq mémoires suivants : *Théorie des groupes fuchsiens* (Acta Math., 1(1882), 1-62) ; *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (1(1882), 193-294) ; *Mémoire sur les groupes kleinéens* (3(1883), 49-92) ; *Sur les groupes des équations linéaires* (4(1884), 201-311) ; *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes* (5(1884), 209-278) = *Oeuvres*, t.II, p.108-462.

108 "Itérations".

109 "Appliqué".

110 Voir la note 107, ainsi que la p.586 de l'article de Klein : *Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen*, p.577-586 du t.III des *Ges. math. Abh.*

111 La publication de cette correspondance dans les *Ges. math. Abh.* de F. Klein, t.III, se termine par la "Remarque finale" de Klein (p.621) :

"Avec cette lettre, la correspondance, autrefois, prit fin. Je pus seulement finir encore le mémoire CIII [[voir la note 104]] et je dus, à cause des ennuis de santé, arrêter toute collaboration [[*Mitarbeit*]] ultérieure à la théorie des fonctions automorphes, comme il a été déjà exposé à la page 585, et à la page 258 du tome II de cette édition. Pour l'envoi de mon mémoire, je n'ai plus reçu aucune réponse de H. Poincaré. Même les relations personnelles ultérieures ont seulement peu clarifié les questions mentionnées ici."

112 Dr. Haenel, Directeur du Département des manuscrits de la Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen a bien voulu nous envoyer les photocopies de la correspondance de F. Klein avec Poincaré qui se trouve à la Bibliothèque universitaire de Göttingen sous la cote Cod. Ms. Klein 22K. Nous avons reçu, en particulier, les lettres de Poincaré à Klein, sauf la lettre XVII, de la correspondance publiée dans les *Acta Mathematica*. La lettre XVII doit se trouver dans les archives, si elles existent toujours, des *Mathematische Annalen*.

Toutes les lettres à partir du n° XXVII appartiennent à la Bibliothèque de Göttingen, sauf la lettre de Klein du 14 janvier 1902.

113 C'est la lettre II de G. Cantor qui nous fait dater ces quatre lettres qui suivent d'été 1895.

114 A.V. Vasiliev (1853-1929).

115 Voir les lettres II-IV de Cantor. Il aurait été intéressant de connaître la réponse de Klein sur le rôle de Cantor dans la préparation du premier Congrès international des mathématiciens qui aura lieu en 1897 à Zürich et sur la question de Poincaré s'il fait "partie du Conseil de l'Association", c'est à dire *die deutsche Mathematiker-Vereinigung*.

116 Il existe également à Göttingen une longue lettre de Poincaré du 23 août 1899 (date écrite de la main de Klein) à propos du "catalogue" en préparation donnant la bibliographie des différentes sciences. On y trouve également l'original de la réponse de Klein du 25 août 1899.

117 Le prix Bolyai de l'Académie Hongroise des Sciences a été voté le 13 octobre 1901 et décerné le 18 avril 1905, par une commission dont le président était G. Darboux et F. Klein le rapporteur.(Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^{e} série, t.30 (1906), 1^{e} partie, p.103-128).

118 La transcription et la traduction de cette lettre sont de François Poincaré.

119 Sur O. Brendel (1862-1939) voir [5], t.II, p.442.

120 Sur K. Schwarzschild (1873-1916) voir [5], t.XII, p.247-253.

Il existe une lettre de Schwarzschild à Poincaré du 22 avril 1902 l'invitant à venir à Göttingen pour la réunion du 5 au 8 août.

121 Sur P. Callandreau (1852-1904) voir [5], t.III, p.18-19.

122 D. Hilbert : *Über das Dirichletsche Prinzip*, Festschrift zur Feier des 150.jährigen Bestehens der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,1901 = (Math. Annalen, 59(1904), 161-186) = *Gesammelte Abhandlungen*, t.III, p.15-37, Berlin, 1935 = Bronx(Chelsea), 1965.

123 Publié dans le t.57(1903) des *Math. Annalen*, ainsi que dans le t.X, fasc. 1 des *Werke* de Gauss, Leipzig(Teubner), 1917. Une traduction française annotée du *Journal mathématique de Gauss* a été publiée par P. Eymard et J.P. Laffon, dans le tome 9(1956), p.21-51, de la *Revue d'Histoire des Sciences*.

124 "Göttingen, le 14 janvier 1902

Cher Ami et Collègue,

Aujourd'hui, je me présente à vous avec une demande que je vous adresse également au nom d'un grand nombre de collègues. L'association (internationale) d'astronomie tiendra, comme vous le savez certainement, cette année son assemblée à *Göttingen*, en principe du 5 au 8 août. Vous serait-il possible de prendre part à ce rassemblement ? Nous, à Göttingen, voulons essayer d'attirer, d'une manière aussi large que possible, les *théoriciens* de l'astronomie. Cela ne donnera pas seulement une signification particulière aux débats, du moins nous l'espérons, mais vivifiera le domaine de l'astronomie et de ses relations avec les mathématiques qui, chez nous, est resté un peu étroit (j'espère, en outre, aussi que la partie de notre encyclopédie des mathématiques consacrée à l'astronomie, qui est actuellement en préparation, y puisera un encouragement important). Vous trouverez ici, à Göttingen, le terrain particulièrement préparé puisque, à côté de *Brendel*, que vous connaissez, s'y trouve *Schwarzschild*, nouveau directeur de l'Observatoire, et que nous engageons de jeunes forces. D'autre part, nous espérons présenter en bon ordre les oeuvres astronomiques posthumes de Gauss. Ces considération générales pourraient suffire ici ; je n'ai pas besoin d'insister sur la valeur que nous attachons, dans ces circonstances, à votre présence. En outre, je me permets de vous demander d'user de votre influence pour que l'un ou l'autre de nombreux jeunes théoriciens français d'astronomie vienne ici ! J'écris directement à Callandreau.

A mon sujet, il n'y a pas grand chose à dire, moi-même et les miens nous allons bien. Ces dernières années j'ai été très impliqué dans des problèmes d'organisation et j'espère que, si vous venez ici, vous pourrez observer les progrès que nous avons faits dans nos instituts et dans leur équipement. De plus, Hilbert a continué les travaux théoriques d'une façon remarquable. Vous avez dû recevoir les publications en l'honneur du 150e anniversaire de notre Académie, dans lesquelles Hilbert établit le principe de Dirichlet sur de nouvelles bases, tandis que je publie le journal scientifique original de Gauss.

En vous priant de m'honorer de votre amitié, votre très dévoué.

F. Klein"

125 Le mariage de Poincaré a été célébré à Paris le 20 avril 1881.

126 Madame Henri Poincaré écrit à F. Klein le 26 août 1912 (après la mort de son mari survenue le 17 juillet de la même année) :

"Je veux, ainsi que mes enfants, vous dire combien nous avons été touchés des sentiments de condoléances que vous nous avez adressés et de l'amitié que vous aviez pour mon mari. Nous vous remercions d'avoir été pour lui depuis si longtemps un véritable ami. Le séjour qu'il avait fait à Göttingen avec sa fille lui avait laissé de très excellents souvenirs; il nous en parlait toujours, ainsi que Jeanne, avec plaisir."

127 Sur cette correspondance lire p.275-304 du livre de J. Gray : *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*, Boston (Birkhäuser), 1986.

Lettre de Diederik Johannes K O R T E W E G

[[1912]][1]

Monsieur et cher Collègue,

J'ai beaucoup hésité avant de me résoudre à vous déranger, mais si vous conaissez le travaux mathématiques du jeune Monsieur Brouwer je crois que vous vous intéressez pour sa personne et que vous exécuterez [[la]] démarche.

Vous pourriez vous renseigner d'ailleurs sur lui chez M. Hadamard qui le connait personnellement. Les travaux ont été publiés en partie dans les *Mathematische Annalen*, *67*, 246-267 ; *68*, 422-434 ; *69*, 169-175, 176-180, 181-203, en partie dans les *Proceedings* de notre Académie[2]. Ceux qui se rapportent aux distributions continues de vecteurs sur des surfaces, *Proceedings 11*, 1909, 850-858 ; *12*, 1910, 716-734 ; *13*, 1910, 171-186, touchent [[un]] peu particulièrement à un de vos travaux (voir le § 4 du dernier article).

Il s'agit de lui procurer une place qui lui convient à une de nos universités[3] ; ce qui ne sera pas facile, vu sa personnalité très distinguée mais très particulière, et puis il serait bien dommage de le charger de trop de leçons.

Le meilleur moyen pour y avoir [[le]] succès peut être de le faire nommer dans notre Académie ; mais il y a de ce côté une grande difficulté, qui consiste dans ce que le nombre des mathématiciens qui y siègent est déjà plutôt hors de proportion.

Ainsi sa candidature, que nous poserons probablement cette année, ne pourra réussir que si nous savons convaincre nos collègues qu'il s'agit d'un talent bien extraordinaire qui s'est déjà révélé par des travaux qui comptent dans la science.

Dans le cas que vous partagez cette opinion, voulez-vous m'aider avec votre autorité incontestable en me communiquant votre opinion sur les travaux de M. Brouwer.

Je ferais un usage très discret de votre lettre, et je compte aussi sur votre discrétion et sur celle de M. Hadamard si vous lui parlez, surtout à l'égard de M. Brouwer lui-même qui[4] complètement mes démarches.

Veuillez agréer, Monsieur et cher Collègue, l'assurance de mon grand respect et de mon dévouement complet.

D.J. Korteweg

NOTES

1 Cette lettre, que D. van Dalen a bien voulu transcrire pour nous, se trouve dans les archives de D.J. Korteweg. La réponse de Poincaré aurait été transmise à l'Académie Néerlandaise des Sciences.

Sur D.J. Korteweg (1848-1941) voir [5], t.VII, p.465-466.

2 Voir L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, t.II, édité par H. Freudenthal, Amsterdam (North Holland) 1976, p.118-139, 352-366, 377-383, 244-249, 156-178, 273-281, 283-301, 303-318.

3 Brouwer a été nommé en 1912 professeur à l'Université d'Amsterdam et élu membre de l'Académie Néerlandaise des Sciences.

4 Il manque un mot ; probablement : ignore.

CORRESPONDANCE AVEC SOFYA VASILIEVNA KOVALEVSKAYA

Sur S.V. Kovalevskaya (1850-1891) voir [5], vol. VII, p.477-480.

La première lettre de cette correspondance, datée du 25 octobre[2], que nous situons en 1884, est la réponse de S. Kovalevskaya à la lettre de Poincaré du 14 septembre 1884, lettre qui se trouve dans la 1e boîte contenant les lettres de Poincaré à Mittag-Leffler[4].

Elle écrit :

"M. et Mme Mittag-Leffler et moi nous demeurons tous ensemble dans une petite maison de campagne aux environs de Stockholm [[à Djursholm]] et nous ne venons en ville que deux fois par semaine pour nos cours. [[...]][1]

Nous avons lu avec grand intérêt votre note dans les *Comptes Rendus* concernant le mémoire de Fuchs sur les équations différentielles jouissant de la même propriété fondamentale que les équations différentielles linéaires [[*Sur un théorème de M. Fuchs* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 99(1884), 75-77 ; 15 juillet)]] ; mais je dois vous avouer que nous ne sommes point parvenus à bien saisir votre démonstration. Monsieur Leffler me charge de vous demander en son nom si vous ne voulez point avoir l'obligeance de rédiger la remarque intéressante que vous avez faite d'une manière un peu plus détaillée et de la lui envoyer pour les *Acta*."

La deuxième lettre de S. Kovalevskaya est du 1er mai 1887 et elle écrit :

"Ayant parcouru le mémoire de M. Humbert, que vous avez eu la complaisance[3] d'envoyer à M. Leffler, je me permets de vous demander si vous connaissez la manière dont M. Weierstrass traite cette même question. Je ne crois malheureusement pas que la démonstration de Weierstrass soit publiée quelque part, mais elle fait partie de son cours sur les intégrales abéliennes et elle est bien connue de tous ses élèves. Au cas que vous n'ayez pas eu l'occasion de voir cette démonstration, je me permets de vous la communiquer."

Poincaré répond à cette lettre le 5 mai 1887 (cette lettre porte le n° 33 dans la 1e boîte des lettres de Poincaré à Mittag-Leffler à l'Institut Mittag-Leffler ; elle nous a été envoyée par Jesper Lützen) :

"Je n'ai pas assez présente à la mémoire la démonstration de M. Humbert pour pouvoir reconnaître si elle diffère assez de celle de M. Weierstrass pour en justifier la publication. C'est à vous et à M. Mittag-Leffler de juger s'il y a lieu d'imprimer le mémoire que je vous ai adressé.

Je ne connaissais pas la démonstration de M. Weierstrass, et je crois qu'elle n'est pas connue en France, de même malheureusement que beaucoup d'autres découvertes du géomètre allemand qui n'ont pas été imprimées."

S. Kovalevskaya répond le 12 mai 1887 :

"M. Mittag-Leffler va publier prochainement le mémoire de M. Humbert dans les *Acta mathematica*, en y joignant seulement une petite note."

En effet, le mémoire de G. Humbert : *Sur les intégrales algébriques de différentielles algébriques* a été publié dans le t.10(1887), p.281-298, accompagné, p.281, d'une note due au "rédacteur en chef".

NOTES

1 G. Mittag-Leffler écrit à Poincaré le 13 août 1884 (Institut Mittag-Leffler) :

"J'ai réussi, après bien des efforts, à fonder une nouvelle chaire de mathématiques à notre Université pour Madame Kowalevski qui est maintenant, comme moi, professeur ordinaire de mathématiques à l'Université de Stockholm. Vous savez peut-être que les cours sont libres à notre Université. Nous lisons tout ce que nous voulons. Seulement nos cours doivent être à la hauteur de la science. Ainsi, par exemple, je lirai le semestre prochain sur vos mémoires dans les *Acta*. Madame Kowalevski lira"sur les équations différentielles partielles". Le semestre suivant elle lira "sur les fonctions abéliennes"."

2 Il doit s'agir du 25 septembre, car Poincaré écrit à Mittag-Leffler le 30 septembre 1884 :

"Je viens de recevoir de Mme Kowalevski une aimable lettre où elle me demande si je pourrais envoyer aux *Acta* le développement de ma dernière note des *Comptes Rendus*. Cela est facile et je vous l'enverrai dès mon retour à Paris."

3 Poincaré écrit à Mittag-Leffler le 18 mars 1887 (cachet de la poste) :

"J'ai l'honneur de vous adresser un mémoire de M. Humbert qui me semble intéressant et que vous pourriez peut-être insérer."

4 Cette lettre nous a été communiquée par Monique Fleinert-Jensen. Poincaré écrit :

"J'ai reçu dernièrement les épreuves de votre mémoire sur la réduction des intégrales abéliennes du 3^{e} rang et je les ai lues avec le plus vif intérêt. J'y trouve énoncés deux théorèmes de M. Weierstrass. La démonstration en a-t-elle été publiée ; je ne le crois pas.C'est pourquoi, bien qu'elle ne soit pas bien difficile à trouver, j'ai cru être utile à mes compatriotes en la publiant dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* [[t.12(1884), p.124-143 : *Sur la réduction des intégrales abéliennes*]]. Car il est très difficile en France de se procurer ces démonstrations que M. Weierstrass communique à quelques amis, mais ne fait pas imprimer.

Pourriez-vous me renseigner au sujet de la marche qu'a employé l'illustre géomètre pour démontrer ces deux théorèmes. Car j'ai lieu de croire que celle que j'ai suivie est différente, non pas quant au fond, mais quant à la forme et au mode d'exposition. Pourriez-vous me dire également si M. Weierstrass vous a communiqué des généralisations de ces deux théorèmes, pour le cas où au lieu d'une intégrale réductible aux fonctions elliptiques on a μ intégrales linéairement indépendantes réductibles au rang μ . Ayez l'obligeance de me répondre à Nancy, rue de Serre 9, où je vais aller pour quelques semaines chez mon père.

Veuillez agréer, Madame, les compliments de ma femme, ainsi que l'expression de mon respect et de mon admiration pour votre talent."

S. Kovalevskaya écrit dans sa lettre du 25 septembre 1884 :

"Je vous prie de vouloir bien m'excuser si je ne le fait que dans une quinzaine à peu près. Dans ce moment-ci je n'ai pas les papiers en question sous la main."

Nous ne savons pas si finalement elle a envoyé à Poincaré les démonstrations de Weierstrass.

Sur les relations de S.V. Kovalevskaya avec H. Poincaré on peut voir R. Cooke : *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*, New York(Springer-Verlag), 1984.

LETTRE DE LEOPOLD KRONECKER

Berlin W. Bellevuestrasse 13
14 février 1883

Monsieur,

Ayant lu votre dernière communication dans les *Comptes Rendus*[1] je désirerais appeler votre attention à un mémoire que j'ai publié en 1869 et que je prends la liberté de vous envoyer. J'y ai ajouté quelques autres de mes mémoires et en outre je me suis permis d'adresser à Mr Tannery un petit paquet destiné pour vous, contenant tous les exemplaires de mes mémoires, que j'ai à ma disposition. Le mémoire cité de 1869 (mois de mars) est intitulé : *Systèmes de fonctions de plusieurs variables*[2]. J'y ai développé la généralisation de cet important théorème de Cauchy[3], qui me semble contenir le vrai fondement de la théorie des fonctions. Il est très remarquable, qu'il existe un théorème tout à fait analogue pour un nombre quelconque de variables, et mes recherches m'ont montré qu'on ne peut reconnaître les propriétés des fonctions pour lesquelles $\Delta F = 0$ sans traiter les fonctions plus générales où $\Delta F \gtrless 0$.

Votre très dévoué

L. Kronecker[4]

NOTES

1 *Sur les fonctions de deux variables* (Comptes Rendus, 96(1883), 238-240 ; 22 janvier) = *Oeuvres*, t.IV, p.144-146.

2 *Über Systeme von Functionen mehrer Variablen* (Monatsberichte K. Preuss. Akad. Wissenschaften zu Berlin, 1869, 159-193) = *Werke*, t.I, p.175-212.

3 P.190-198.

Poincaré a cité Kronecker (p.148) dans son mémoire *Sur les fonctions de deux variables* (Acta Math., 2(1883), 97-113 ; imprimé le 19 mars 1883) = *Oeuvres*, t.IV, p.147-161.

4 H.M. Edwards nous écrit (le 26 juin 1984) qu'à sa connaissance il n'existe pas de lettre de Poincaré à Kronecker dans le *Nachlass* de Kronecker déposé à la *Library of the Imperial College of Science and Technology* de Londres (voir *Historia Mathematica*, t.5(1978), p.420).

On peut encore remarquer que cette lettre de Kronecker se situe dans un plan d'ensemble pour replacer son oeuvre mathématique par rapport à celle de Weierstrass, et nous pensons que les revendications de Kronecker n'étaient pas toujours injustifiées.

LETTRE D'EDMOND LAGUERRE

[[février 1886]] [1]

Mon cher Poincaré,

Je regrette de vous demander de venir me voir, mais je suis en ce moment fortement grippé et le médecin m'a interdit de sortir. Si vous ne pouvez venir me voir aujourd'hui Samedi ou Dimanche dans la matinée, je serai obligé d'écrire à Hermite pour lui dire que je ne peux faire le Rapport qui vous concerne. Veuillez me répondre un petit mot, afin que je sache à quoi m'en tenir et que je prévienne Hermite.

Bien à vous.

E. Laguerre

Je pense que vous avez bien reçu ma lettre ?

NOTE

1 Sur E. Laguerre (1834-1886) voir [5], t.VII, p.573-576.

Laguerre a été élu à l'Académie des Sciences de Paris le 11 mai 1885 et il est mort le 14 août 1886. Nous pensons qu'il s'agit du rapport pour la candidature de Poincaré à la place vacante par le décès de Bouquet. Les *Comptes Rendus* du 8 mars 1886 ont publié la liste établie par le Comité Secret de l'Académie qui a placé Poincaré 2^{e} *ex aequo* avec Appell et Picard.

LETTRES DE HERMANN LAURENT

Sur H. Laurent (1841-1908) voir [5], vol. VIII, p.61-62.

La première lettre, du 20 novembre 1883, est une demande d'éclaircissements à propos du mémoire de E. Picard : *Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable, liées par une relation algébrique* (Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris, 91(1880), 724-726) = *Oeuvres*, t.I, p.65-67, Paris(C.N.R.S.), 1978.

La seconde, du 21 mai 1887, concerne le mémoire de Poincaré : *Sur les résidus des intégrales doubles* (Acta Math., 9(1887), 321-380) = *Oeuvres*, t.III, p.440-489. Laurent écrit :

"Bien avant Mr Stieltjes, j'ai déduit la formule de Lagrange généralisée de la théorie des intégrales multiples."

LETTRES D'EMILE LEMOINE

La première lettre, du 26 février 1887, félicite Poincaré pour son élection à l'Académie des Sciences.

La seconde, non datée, et pratiquement illisible, de quatre pages très serrées, semble concerner les problèmes des fondements de la géométrie "élémentaire".

Sur E. Lemoine (1840-1912) voir [5], vol. VIII, p.175-176.

CORRESPONDANCE AVEC TULLIO LEVI-CIVITA

Sur T. Levi-Civita voir [5], vol. VIII, p.284-285.

Les deux lettres de Poincaré nous ont été aimablement communiquées par Pier Vittorio Cecherini.

La première lettre de Poincaré date de 1896, elle doit concerner probablement une note que Levi-Civita voulait faire paraître dans les *Comptes Rendus* :

"Les considérations que vous me présentez me paraissent fort intéressantes ; il est fâcheux que vous n'ayez pas pu démontrer la convergence."

T. Levi-Civita fait, dans sa lettre du 11 décembre 1901, "une petite remarque à propos de la dernière expérience de M. Crémieu."

Il ajoute à la fin de sa lettre :

"Je comprends bien que c'est très indiscret de mon côté de vous avoir entretenu avec une remarque si peu originale. Votre temps est si précieux pour la Science ! Fort heureusement que le *Princeps Mathematicorum* est à nos jours un souverain constitutionnel et qu'il ne nie pas une audience bienveillante au plus humble de ses sujets."

Giorgio Ferrarese nous écrit dans sa lettre du 22 octobre 1984 que cette lettre est significative "pour souligner la dévotion démesurée de Levi-Civita (lui-même un illustre) à Poincaré".

La réponse de Poincaré à cette lettre est du 14 décembre 1901 (cachet de la poste).

CORRESPONDANCE AVEC SOPHUS L I E

LETTRES DE SOPHUS L I E

I.

Lieber Poincaré ![1]

Es wird mir ein grosses Vergnügen sein Ihrer freundlichen Einladung zu folgen. Ich versuchte neuerdings Ihnen zu Hause zu treffen, legte indess keine Karte, da es meine Absicht war meine Visite zu wiederholen.

Mit ausgezeichneter Hochachtung ergebenst

Sophus Lie.

Paris 15 Novbr. 1882.

II.

[[mars 1883]]

Lieber Poincaré ![2]

Schon lange war es meine Absicht Ihnen einige Zeilen zu schreiben. Zunächst meinen herzlichsten Dank für das ausgezeichnete Wohlwollen, das Sie mir während meines Aufenthaltes in Paris zeigten. Sodann meinen innigsten Dank für die glänzenden Arbeiten die Sie mir successiv geschickt haben. Ich kannte ihre alten Arbeiten ausgenommen ihre Dissertation, die ich schon längst bei Gauthier-Villars ohne Erfolg bestellt hatte[3]. Ihre Abhandlung in *Acta*, I,1[4], habe ich mit wahrem Genuss gelesen. Was ich meist bewundere (neben der Allgemeinheit des Resultats) ist die einfachen Mitteln vermöge deren Sie ein so schwieriges Problem bewältigt haben. Wenn nur Ihre weitere Arbeiten, deren Veröffentlichung auch ich wie die ganze mathematische Welt mit Spannung entgegen sehe, nicht grössere Kenntnisse in der modernen Funktionentheorie als ich besitze verlangen werden ! Ich hoffe es wird mir gelingen in Ihre Theorien einzudringen. Denn für mich hat die Funktionentheorie eben durch Ihre neue Funktionen ein ganz neues concretes Interesse erhalten.

Ich erlaube mich Ihnen ein Bischen über einige Resultate, die ich in den letzten Monate erhalten habe, zu schreiben. Es war nämlich überhaupt mein Wunsch Ihre Aufmerksamkeit auf *les groupes continus* (ich sage kurz : Transformationsgruppe) zu lenken. Ich glaube dass auch sie eine gewisse Rolle in der Theorie der Differentialgleichungen spielen werden.

Les groupes discontinus zerfallen in zwei Hauptkategorien, jenachdem die Zahl der Substitutionen endlich oder unendlich. Dementsprechend giebt es zwei Classen groupes continus jenachdem die Zahl der Parameter begrenzt oder unbegrenzt ist. Zu der ersten Categorie gehört die lineare Gruppe

$$\mathfrak{x}' = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{y} + \mathfrak{c}}{\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma} \quad , \quad \mathfrak{y}' = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}}{\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma}$$

mit 8 wesentlichen Parametern. Zu der zweiten Categorie gehört z.B. der Inbegriff aller conformen Transformationen der Ebene. Dieselben sind ja bestimmt durch Gleichungen

$$\mathfrak{x}' + i\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}) \quad , \quad \mathfrak{x}' - i\mathfrak{y}' = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}-i\mathfrak{y})$$

mit zwei arbiträren Funktionen. Ein zweites Beispiel ist der Inbegriff aller Transformationen, die alle Flächenräume invariant lassen.

Ich habe nun längst allgemeine Methoden zur Bestimmung aller groupes continus mit einer begrenzten Anzahl Parametern eines $\mathfrak{n}$-fach ausgedehnten Raumes. Ich habe gezeigt z.B. dass alle derartige Transformationsgruppen der Ebene sich durch Anwendung von zweckmässigen Coordinaten auf gewisse canonische Formen bringen lassen.

Was dagegen die continuirlichen Gruppen mit unendlich vielen Parametern betraf, so hatte ich keine allgemeine Methode zu ihrer Bestimmung, wenn ich auch wichtige Classen derartiger Gruppen längst eingehend untersucht hatte. Es war mir sogar nicht klar wie ich das betreffende Problem exact formuliren könnte. Jetzt bin ich hier vorwärts gekommen. Ich behandle continuirliche Gruppen mit unendlich vielen Parametern ebenso leicht wie diejenigen mit einer begrenzten Zahl.

Insbesondere habe ich alle unendliche und continuirliche Gruppen der Ebene vollständig bestimmt.

Beschränke ich mich auf Gruppen von Punkttransformationen (d.h. Transformationen zwischen $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{y}_1$, bei denen $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{x}_1$ nur von $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ und nicht von $\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{y}}{\mathfrak{d}\mathfrak{x}}$ abhängen) so habe ich u.A. der Satz :

Enthält eine continuirliche Gruppe unendlich viele Parameter, so sind zwei Hauptfälle möglich, jenachdem die Gruppe eine Differentialgleichung $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{y}' \ldots \mathfrak{y}^{(\mathfrak{m})}) = 0$ invariant lässt oder nicht. Giebt es eine invariante Differentialgleichung, so ist dieselbe von erster Ordnung. Giebt es keine invariante Gleichung $\mathfrak{f} = 0$, so kann die Gruppe durch Einführung von zweckmassigen Variabeln auf die eine unter zwei canonischen Formen gebracht werden. Die eine canonische Form besteht von denjenigen Transformationen, welche alle Flächenräume invariant lassen. Die zweite canonische Form besteht von denjenigen Transformationen, welche alle Flächenräume nach constantem Verhältnisse ändern.

Sucht man andererseits alle continuirliche Gruppen von unendlich vielen Transformationen zwischen $x\ y$, die eine Differentialgleichung $f(x\ y\ y'\ \ ) = 0$ invariant lassen, so erhält man eine Reihe canonische Formen, die ich hier nicht aufzählen werde. Ich bemerke nur dass die Gruppe aller conformen Transformationen der Ebene eine solche canonische Form ist. - Sie entschuldigen hoffentlich, dass ich soviel über meine Untersuchungen schreibe !

Soeben erhalte ich das dritte Heft von Acta. Ich habe Ihre grosse Arbeit bis jetzt nur durchgeblättert[5]. Ich habe aber schon den Eindruck, dass ich Ihre Untersuchungen ziemlich leicht verstehen werde. Die Mathematiker können Ihnen nicht hinlänglich danken, dass Sie Ihre Arbeiten so schnell, so ausführlich und so klar publiciren.

Ich schicke Ihnen gleichzeitig eine Photographie Abels, die ich versäumt habe Ihnen früher zu schicken. Ich bedaure dies um so mehr, da Abels Bild ja Acta mitfolgen wird. Ich hatte aber das betreffende Bild für Sie bestellt lange früher als Leffler mir über das Bild in Acta schrieb.

Indem ich schliesse darf ich Sie bitten meine Grüsse an Ihre liebenswürdige Frau überzubringen.

Mit ausgezeichneter Hochachtung Ihr ergebener

Sophus Lie.

III.

[[Avril 1883]]

Lieber Poincaré !

Meinen herzlichsten Dank für Ihre Photographie wie auch für die begleitenden freundlichen Zeilen. Ich werde versuchen Ihre Fragen zu beantworten. Im Uebrigen verweise ich auf die begleitenden Bogen, auf denen ich eine wenn auch sehr unvollkomne Zusammenstellung der Principien meiner Theorie gebe[6].

Also zu Ihrer Frage !

Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 + iy_1 &= F(x+iy) \\ x_1 - iy_1 &= \Phi(x-iy) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

in denen F und Φ arbiträre analytische Funktionen bezeichnen, bestimmen in meiner Terminologie eine unendliche und continuirliche Gruppe die zwei

Differentialgleichungen 1. O. nehmlich

$$\frac{dy}{dx} = +i \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -i$$

invariant lässt.

Es ist wohl zu bemerken, dass in den Gleichungen (1) die Grösse i überall *dieselbe* Quadratwurzel von -1 bezeichnet.

Füge ich zu den Gleichungen (1) noch die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x_2 + iy_2 &= x_1 - iy_1 \\ x_2 - iy_2 &= x_1 + iy_1 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

so bestimmt der Inbegriff von den Gleichungen (1) und (2) *alle* conforme Transformationen der Ebene. Ich hebe ausdrücklich hervor, dass der Inbegriff der Gleichungen (1) und (2) in meiner Terminologie *keine continuirliche Gruppe* bilden. Denn ich definire eine Gruppe durch ihre infinitesimale Transformationen und verlange dass die endlichen Transformationen der Gruppe durch Wiederholung von den infinitesimalen erzeugt sind.

Dementsprechend sage ich z.B. wohl, dass die linearen Transformationen

$$x_1 = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} \qquad y_1 = \frac{Ax + By + C}{\alpha x + \beta y + \gamma}$$

eine continuirliche Gruppe bilden ; dagegen ist der Inbegriff der linearen und der dualistischen Transformationen der Ebene nach meiner Terminologie keine continuirliche Gruppe.

Es ist selbstverständlicherweise wohl möglich den Begriff Gruppe noch mehr zu erweitern. Man erhielte dann Gruppen die auf einmal continuirlich und discontinuirlich wären. Ich habe mich nur in speciellen Fällen mit solchen Gruppen beschäftigt, in dem ich z.B. in diesem Sinne die Gruppe der Gleichung

$$rt - s^2 = \text{Const.}(1 + p^2 + q^2) \ ,$$

die alle Flächen constanter Krümmung definirt, bestimmt habe.

Ich glaube nicht zu irren, wenn ich behaupte, dass es möglich ist alle Gruppen zu bestimmen, die auf einmal continuirlich und discontinuirlich sind. Hierauf habe ich indess nur wenig gedacht.

Denn für meine Anwendungen auf die partiellen Differentialgleichungen sind es immer die infinitesimalen Transformationen, die Interesse darbieten.

Ich wäre sehr glücklich, wenn es mir gelänge, Ihnen durch die mitfolgenden

Entwickelungen eine Idee von meinen Untersuchungen zu geben.

In den späteren Monaten war ich beschäftigt mit der Redaction von meiner alten Theorie über Gleichungen $f(x\ y\ y' \dots y^{(m)}) = 0$, die eine Gruppe gestatten, welche eine begrenzte Zahl Parameter enthält. Ich habe da viele curiose Resultate. - Im Laufe des Sommers versuche ich dann eine vorläufige Redaction meiner Theorie der unendlichen Gruppen. Ich muss mich wohl bis weiter auf die Ebene beschränken, sonst wird die Exposition zu weitläufig.

Heute habe ich nur über meine eigene Untersuchungen geschrieben. Doch muss ich Ihnen schon in diesem Briefe die Bewunderung aussprechen, die Ihre letzte Arbeit in Acta bei mir erweckt haben.

Mit herzlichem Grusse Ihr

Sophus Lie.

IV.

Hochgeehrter Herr !

Sie sind so freundlich gewesen auch mir das Repertoir zuzuschicken. Dasselbe interessiert mich lebhaft ; es ist ja ein ebenso wichtiges als schwieriges Unternehmen. Ich habe nicht Zeit gefunden Ihnen früher darüber zu schreiben. Heute schicke ich endlich in aller Eile einige Bemerkungen.

Meine Bemerkungen beziehen sich besonders auf Substitutionsgruppen und Transformationsgruppen. Die ersten beschäftigen sich mit discreten Gegenständen ; die letzteren mit continuirlichen Gebieten. Wäre es nicht richtig diesem Wesensunterschied Rechnung zu tragen. Es ist kaum möglich den Begriff Transformationsgruppe vollständig zu erschöpfen ; ich kann es jedenfalls nicht machen. Die wichtigsten Categorien sind die discontinuirlichen und die continuirlichen. Dijenigen Transformationsgruppen die weder discontinuirlich noch continuirlich sind, können vorläufig unberücksichtigt bleiben. Weitere Eintheilungsprincipe sind endliche und unendliche Transformationsgruppen ferner Gruppen von Punkt und von Berührungstransformationen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehe ich zu den einzelnen Capitels.

Analysis.

Ad. Cl. A.

Die Nummer 4 wollte ich in zwei Nummer zerlegen.

4' Theorie der Galoisschen Substitutionsgruppen.

Hier gehören nach meiner Auffassung die Begriffe Transitivität, Primitivität ; Zusammensetzung einer *Substitutions*gruppe, *facteurs de composition*, u.s.w. Ferner substitutions *linéaires, groupe orthogonal, abélien*, ...

Dann käme als *selbstständige* Nummer

4". Theorie der Auflösung algebraischer Gleichung insbesondere durch Wurzel.

....

Ad. Cl. B. Die Nummer *substitutions linéaires* wollte ich streichen, da sie ungleichartige Gegenstände enthält.

Dagegen wollte ich eine besondere Nummer über :

Discontinuirliche Transformationsgruppen machen.

Hier ist die Begriffsbildung eine andre als in der Substitutionstheorie. Solange man nicht bestimmte invariante Schaaren von *discreten* Gebilden ins Auge fasst, so kann man z.B. nicht die Begriffe Transitivität Primitivität anwenden. In dieser Nummer müsste man zwischen *endlichen* und *unendlichen* Gruppen unterscheiden. Der Begriff *invariante* (ausgez.) Untergruppe spielt eine grosse Rolle. Ueberhaupt die Theorie der Zusammensetzung einer endlichen discontinuirlichen Gruppe führt sich ja ohne weiter auf denselben Begriff der Substitutionstheorie zurück. - Dagegen hat der Begriff unendliche discontinuirliche Transformationsgruppe kein Aequivalent in der Galoisschen Substitutionstheorie.

In dieser Nummer müssten natürlich die discont. *linearen Transformationsgruppen* die Hauptrolle spielen. Diese Theorie hat ja schon eine capitale Wichtigkeit gewonnen.

Ad. Cl. H. (S. 17). Nach Nummer 6 wollte ich eine Nummer einschalten.

Lineare totale und partielle Differentialgl. erster Ordnung.

a. Das *Pfaffsche* Problem

b. Vollständige Systeme von linearen partiellen oder linearen totalen Differentialgleichungen (Jacobi, Clebsch und Mayer).

c. Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, deren allgemeinste Lösungen nur eine begrenzte Anzahl Constante enthalten.

[Nach meiner Auffassung hat das Pfaffsche Problem und die Theorie der vollständigen Systeme eine ganz capitale Bedeutung. Die in Nummer c. angebrachte wichtige Theorie könnte auch unter b. angebracht werden.]

Ad. Cl. H. Nummer 7. (S. 17). In dieser Nummer scheint es mir, dass sowohl Jacobis *Vorgänger* wie Nachfolger zu wenig berücksichtigt werden.

a. *Lagrange's* Integration d. Gl. $F(x\ y\ z\ p\ q) = 0$. Monge's Interpretation.

b. Vollständige und singuläre Lösung.

c. *Pfaffs* allgemeine Theorie.

d. *Cauchys* Integration Methode.

e. *Jacobis* Integrationsmethode, Poisson-Jacobischer Satz. *Jacobische* Identität.

f. Neuere Integrationstheorien.

g. Theorie der Berührungstransformationen.

h. Specielle Gleichungen.

Ad. Cl. H, 8.

Ich wollte nach *e* :

Neuere Integrationstheorien von Darboux und Moutard besonders hervorheben.

Ad. Cl. J. N. 4 (S.24). Diese Nummer sollte nach meiner Auffassung nur über *continuirliche Transformationsgruppen* in meinem Sinne des Wortes handeln. Der Gegenstand ist doch hinlänglich wichtig um eine besondere Nummer zu bilden und es liegt ja schon eine grosse Litteratur vor.

a. Endliche continuirliche Gruppen. Charakteristische Relationen zwischen den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe. Isomorphismus.

b. Gruppen von Bewegungen. Lineare Gruppen.Complexe Zahlen.

c. Unendliche continuirliche Gruppen.

d. Transitivität. Invarianten. Primitivität. Aehnlichkeit.

e. Bestimmung von Gruppen.

f. Allgemeine Theorie der Differentialinvarianten einer endlichen oder unendlichen Gruppe.

g. Gruppen von Berührungstransformationen.

h. Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten. -

Geometrie.

Cl. N. Die Kugelcomplexe und Kugelcongruenze müssen doch besonders genannt werden.

Ad. Cl. P. Die drei ersten Nummer scheinen mir gut.

Nummer 4. wollte ich Punkttransformationen *nennen*. Hier käme dann noch *rationale Transformationen*.

Nummer 5. würde ich *Berührungstransformationen* nennen.

a. Berührungstransformationen, welche die Krümmungslinien bewahren. Dilatation. Bonnet's Transformation. *Transformation par direction réciproque*.

b. Die Berührungstransformation, welche Kugeln in Gerade umwandelt. Zusammenhang zwischen der Kugelgeometrie und der Liniengeometrie. Doppelflächen (Möbius). *Laguerres géométrie de direction*. (Die Transformation *par direction réciproque et par semiplan réciproque* gehört nicht Laguerre.)

c. Andere Berührungstransf. Die Fusspunkttransformation.

Endlich wollte ich als Schluss der Classe P ein Nummer 6 hinzufügen

6. *Transformationen, welche keine Berührungstransformationen sind*.

Derartige Transformationen fangen an eine immer grössere Rolle in der Geometrie und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu spielen. Ein schönes Beispiel ist die Transformation welche *Laplace* auf Gleichungen

$$s + A(x\ y)\ p + B(x\ y)\ q + C(x\ y)\ r$$

anwendet ; dieselbe ist neuerdings von Darboux in schönster Weise geometrisch interpretirt. Darboux hat selbst ausgedehnte Categorien derartiger Transformationen eingeführt. In der Theorie der Flächen constanter Krümmung spielen derartige Transformationen eine grosse Rolle. In der Theorie der Minimalflächen betrachtet man auch derartige Transformationen. - Es ist überhaupt meine Auffassung dass diese Transformationen in der Zukunft eine immer grössere Rolle spielen werden.

Ueber die Geometrie möchte ich noch die allgemeine Bemerkung machen, dass die elementaren Theile der Geometrie verhältnissmässig breiter als die höheren Theile der Geometrie behandelt worden sind.

Indem ich schliesse wünsche ich Ihnen Glück mit Ihrem grossen Unternehmen. Es ist mir unbegreiflich dass Sie neben Ihrer grossen Productivität zu solchen Sachen Zeit finden. Gewiss ist eine rationelle Classification der mathematischen Litteratur eine ausserordentlich wichtige Sache.

Sie nehmen mir es hoffentlich nicht übel, dass ich meine Meinung rücksichtslos gesagt habe. Sie müssen entschuldigen, dass ich nicht Zeit habe meine Bemerkungen sorgfältiger zu redigiren.

Ihr ergebener

Sophus Lie.

Leipzig Seburgstrasse 5.

V.

[[Mars 1892]]

Hochgeehrter Herr !

Für den Fall, dass Sie meine Note vorgelegt haben oder vorlegen werden, wünsche ich bei der Correktur wenn möglich eine ganz kleine Aenderung.

Die Untersuchungen von de *Tilly* sind, finde ich nachträglich, besser als ich geglaubt habe, wenn ich sie allerdings fortwährend für *vague* halte. Ich möchte daher nichts Unvortheilhaftes über de Tilly sagen. Findet sich daher in meinem Text ungünstige Äusserungen über de Tilly, was ich allerdings nicht erinnere, so wünsche ich sie gestrichen.

Und jedenfalls wünschte ich meine Note, in welcher ich sage, dass Ihre und meine Untersuchungen die einzigen exacten sind[7] dahin geändert werde dass auch de Tillys Untersuchungen günstig beurtheilt werden. Vielleicht könnten Sie hinzufügen : *Les recherches de M. de Tilly présentent aussi un véritable intérêt quoiqu'elles ne me semblent pas tout à fait précises.* (Oder etwas ähnliches.)

Das Problem die Bewegungen in einfachster Weise zu charakterisiren ist ja ganz unbestimmt. Ich halte meine alte Lösung für die einfachst mögliche. Bemerkenswerth ist auch die folgende Lösung :

Die Gruppen der Bewegungen im Euclidischen und Nichteuclidischen Raum sind die einzigen bei welchen nach dem Festhalten eines Punktes jeder andere Punkt sich frei *auf einer Fläche bewegt, welche durch den festen Punkt nicht hindurchgeht.*

Dieser Satz hat eine äussere Aehnlichkeit mit dem Resultat de Tillys, wobei doch der wesentliche *Unterschied* in Betracht kommt dass *de Tilly annimmt, dass die Abstandsfunktion* sich *continuirlich aendere* und gegen Null convergirt.

Da ich faktisch alle Gruppen des Raume kenne, kann ich natürlich beliebig viel derartige Formulirungen aufstellen. -

Sie werden erfahren haben dass gerade *Frobenius* und *Schwarz*, welche gewiss Weierstrass' beste Schüler sind, nach Berlin gerufen sind. Dies ist für alle eine grosse Ueberraschung ; man sprach von Koenigsberger und Lindemann.

Ihr sehr ergebener

Sophus Lie.

VI.

[[Avril 1892]]

Lieber Herr Poincaré !

Ich brauche nicht zu sagen, dass ich die mir zugedachte Ehre ausserordentlich schätze[8]. Das wenig was ich aus der math. Litteratur weiss, habe ich grösstentheils in französischen Werken gelernt. Die Gruppentheorie ist in erster Linie eine französische Wissenschaft. In Frankreich haben meine Arbeit längst mehr Anerkennung als sonst gefunden.

Darum giengen meine mathem. Sympathien schon als die Mathematik in Deutschland blühte nach Paris.

Ich habe in *grösster Eile* ein Resume meiner Arbeiten zusammengeschrieben. Das ist unverhältnissmässig gross geworden. Ich hatte aber nicht Zeit zu einer Redaction.

Hoffentlich können meine Notizen Ihnen die Arbeit wesentlich erleichtern. Leider ist meine Schrift schlecht.

Ein Referat von meine grösseren Werken hielt ich es unnothwendig zu geben. Dieselben sind ja die Ausführung von meinen alten Ideen.

Ich habe nach dem *Gedächtniss* geschrieben. Kleinere Ungenauigkeiten kommen vor ; theilweise auch wohl wirkl. Fehler.

Es war mir aber unmöglich mein Referat besser zu machen[8].

Ich bemerke nachträglich dass ich vergessen habe eine Abhandlung aus den Leipz. Abhandlungen *Zur Theorie der Berührungstr.*, 87 zu nennen. Möglicherweise sind andere unwichtige Arbeiten vergessen.

Hinzugefügt muss werden, dass sich in den Verh. d. G. d. W. zu Christiania eine Reihe kurzen Mittheilungen meistens ohne besondere Titel finden.

Vergessen habe ich noch meine drei letzten *Notes* in *Comptes Rendus*.

Ich will versuchen Ihnen später eine complettirende Liste zu schicken. *Während ich schreibe bemerke dass ich doch eine Anzahl Arbeiten vergessen habe.*

Vielleicht schicken Sie mir gelegentlich meine Referate zurück[9]. Sie können für meine Schüler vielleicht nützlich werden.

Ich bin und bleibe Ihr Bewunderer ergeb.

Sophus Lie.

VII.

[[Octobre 1892]]

Lieber Herr Poincaré !

Ich sage Ihnen meinen herzlichsten Dank für die mir gezeigte grosse Ehre. Ich schätze dieselbe so besonders hoch, weil jetzt wiederum der mathematische Schwerpunkt in Paris und Frankreich liegt. Es ist ganz merkwürdig, dass die deutsche Mathematik jetzt von der Einseitigkeit leidet, welche nach Cauchys[10] Tod theilweise in der französischen Mathematik herrschte.

Soeben erhalte ich eine Arbeit des Herrn Vessiot über lineare Differentialgleichungen[11], die hoffentlich nach mehrern Richtungen günstig wirken wird. Mir interessirt diese Arbeit so stark, weil durch sie die Bedeutung meiner Gruppentheorie zur lineare Differentialgleichungen, welche Picard zuerst erkannt[12], so besonders klargestellt wird.

Es ist unbegreiflich wie weit die von *Galois* eingeführten Principien reichen. Und noch merkwürdiger ist es, dass man so lange Zeit braucht um das nach und nach zu erkennen. Galois Ideen herrschen nach und nach auf allen Gebieten.

Neuerdings hat mein alter Freund F. Klein eine Vorlesung über die Grundlagen der Geometrie veröffentlicht, die zwar schöne Partien enthält, welche aber in der Darstellung von Helmholtzs Theorien eine ganze Reihe von merkwürdige Fehler enthalten[13].

Auch *Lindemann* veröffentlicht wiederum dummes Zeug über diesen Gegenstand[14].

Mit Engel redigire ich eben für den dritten Abschnitt meiner Gruppentheorie eine ausführliche Abtheilung über diesen Gegenstand[15]. Ich stelle eine ganze Anzahl Systeme von Axiome auf welche für die Geometrie einer *Zahlen-Mannigfaltigkeit* genügen. Diese Systeme sind alle sehr einfach.

Es ist aber eine Frage auf die ich (ebensowenig wie Sie) eingehe.

Weierstrass hat mit Grund hervorgehoben, dass Euclid implicit voraussetzt, dass die Punkte der *Gerade* durch alle Zahlen dargestellt werden.

(Riemann und) v. Helmholtz gehen einen Schritt weiter und setzen voraus dass der **Raum** eine Zahlen-Mannigfaltigkeit ist. Dieser Standpunkt ist sehr *interessant*, *darf aber nicht als definitiv betrachtet werden.*

Ich glaube die einfachsten Axiome für die Geometrie einer *drei*fach ausgedehnten Zahlen-Mannigfaltigkeit gefunden zu haben, nämlich

1) alle Bewegungen bilden eine Gruppe bei denen zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben

2) getrennte Punkte bleiben immer getrennt.

Diese Axiome muss man wohl unter allen Umständen behalten. Mir scheint es aber nothwendig Axiome hinzuzufügen, welche jedenfalls theilweise die Annahme einer Zahlen-Mannigfaltigkeit ersetzen. Ueberdies muss man die beiden vorhergehenden Axiome anders einkleiden.

Man muss wohl Punkt, Raum, Fläche, Curve als Grundbegriffe einführen.

Entfernung ebenso.

Alle Punkte die von einem gegebenen eine gewisse Entfernung haben bilden eine *Fläche*, welche durch den gegebenen Punkt nicht hindurchgeht.

So muss man wohl die *Gerade* axiomatisch in der bek. Weise einführen.

Nun wird man versuchen müssen die Ebene einzuführen ... etc....

Nachdem so die nothwendigen Begriffe vorliegen, so würde man die Sätze über Congruenz ableiten müssen.

Sodann das Parallelenaxiom, *ferner* das Axiom, dass die *Punkte einer Gerade durch Coordinaten darstellbar sind.*

Endlich das Axiom über Flächengleicheit ...

Es wäre mir lieb gelegentlich Ihre Meinung hierüber zu hören. Sind Sie damit einverstanden, dass man bei Aufbau der Geometrie *nicht mit der Auffassung des Raumes als Zahlen-Mannigfaltigkeit anfängt*, sondern zunächst die Begriffe Fläche, Curve, Gerade, Ebene, etc. ... einführt und die möglichen Sätze entwickelt dass man erst später nicht allein das Parallelenaxiom sondern auch die *Auffassung der* **Gerade** als Zahlen-Mannigfaltigkeit einführt. ...

Nach meiner Auffassung ist man noch weit davon entfernt die Grundlagen der Geometrie gut begründet zu haben.

Meine Gruppentheorie beherrscht wohl die Grundlagen der Geometrie einer Zahlen-Mannigfaltigkeit nicht aber die Grundlagen der Geometrie des Raumes !!

Ich beschränke mich darauf die Geometrie einer Zahlen-Mannigfaltigkeit auf die einfachsten Principien zurückzuführen. Dies ist nicht so ganz leicht ; denn Riemanns Arbeit ist nur ein Anfang während in Helmholtz Arbeit wohl die Tendenz richtig, die Durchführung aber falsch ist.

Wäre ich jetzt zwanzig Jahre jünger, so würde ich versucht haben den nächsten ungleich schwierigeren Schritt zu gehen. In den Jahren 1867-68 beschäftigte ich mich lebhaft mit derartigen Fragen, die mir doch damals zu schwer waren.

Unter allen Umständen ist es meine Ueberzeugung, dass wir bald wesentlich weiter kommen werden. Merkwürdig ist es dass nicht allein Legendre und v. Helmholtz sondern auch Lobatschewsky und Riemann sich in allerdings secundären Punkten geirrt haben. -

Ich empfehle Ihren jungen Landsmann *Tresse*, der soeben von Leipzig nach Paris zurückkehrt, zu Ihrer Aufmerksamkeit. Herr Tresse ist ein begabter Mathematiker mit guten Kenntnissen, von dem man viel erwarten kann.

Ihr ergebener

S. Lie

LETTRES D'HENRI POINCARÉ

VIII.

Paris, le 14 Novembre 1882[16]

Cher Monsieur,

J'espère que ma lettre vous trouvera encore à Paris. Seriez-vous assez bon pour nous faire le plaisir de venir dîner chez nous samedi prochain sans aucune cérémonie, à 7 heures.

Veuillez agréer, cher Monsieur, l'assurance de mes sentiments affectueux et dévoués.

Poincaré

rue Gay-Lussac 66.

IX.

Paris, le 26 Mars 1883[17]

Mon cher Ami,

Merci mille fois pour la belle photographie d'Abel que vous avez eu la bonté de m'envoyer, et pour votre portrait qui m'a fait beaucoup de plaisir. Je vous envoie ci-joint une photographie de moi que l'on a tirée à Vesoul il y a trois ou quatre ans ; je n'en ai pas de plus récente.

Les résultats que vous m'annoncez dans votre lettre m'ont vivement intéressé ; ils me paraissent extrêmement importants. Je connaissais déjà ceux qui sont relatifs aux groupes qui ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres et j'avais vu sans peine comment vous aviez pu les obtenir. Mais en ce qui concerne les groupes dépendant d'un nombre infini de paramètres, j'avoue que je ne puis deviner par quel moyen vous avez pu aborder un problème aussi difficile. Je n'ose vous le demander parce que l'exposé de votre méthode serait sans doute trop long pour être contenu dans les bornes d'une lettre. Mais j'attends avec impatience la publication du mémoire détaillé.

Il est cependant un point sur lequel je vous demanderai une explication. Vous parlez de groupes qui laissent invariante une équation différentielle du 1^{er} ordre, par exemple le groupe des transformations conformes. J'avais d'abord compris qu'il s'agissait d'une équation de la forme suivante

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 ,$$

entre les coordonnées d'un *seul* point x, y , et la tg. à une courbe passant par ce point. Mais l'exemple que vous citez ; celui des substitutions conformes ne me permet pas cette interprétation. Il s'agit évidemment dans l'espèce d'une relation entre les coordonnées d'un point x, y et les tangentes à deux courbes passant par ce point ; de sorte qu'il me semble que vous entendez par équation différentielle du 1^{er} ordre une relation entre plusieurs points du plan et les tangentes à diverses courbes passant par ces points.

Ai-je bien compris votre pensée ? Et si je l'ai bien comprise, le nombre de ces points et de ces tangentes est-il limité ou peut-il croître indéfiniment ?

J'ai eu dernièrement de meilleures nouvelles de M. Klein par un de ses élèves M. Dyck qui est en ce moment à Paris.

Votre tout dévoué.

Poincaré

X.

[[Cachet de la poste de Leipzig :
5 avril 1892]]

Mon cher Collègue,

La Section de Géométrie est d'accord pour proposer votre nom au choix de l'Académie des Sciences pour la place de correspondant devenue vacante par la mort de Kronecker[18]. Elle m'a chargé de faire le rapport sur vos travaux. Seriez-vous assez bon pour m'en envoyer la liste, afin de faciliter mon travail ? Voudriez-vous me l'adresser à Nancy, rue de Serre 9, où je serai quelques semaines. Si vous pouvez y joindre quelques indications sommaires, cela n'en vaudra que mieux.

Votre lettre est arrivée trop tard[19] pour que je puisse faire changer le texte de votre note. Je crois du reste que cela n'aura pas d'inconvénient.

Votre dévoué collègue.

Poincaré[20].

TRADUCTION DES LETTRES DE SOPHUS L I E[21]

I.

Cher Poincaré,

C'est avec grand plaisir que j'accepte votre aimable invitation. J'ai essayé récemment de vous trouver chez vous, mais je n'ai pas laissé ma carte, puisque j'avais l'intention de refaire une visite.

Avec mes salutations distinguées, votre dévoué

Sophus Lie.

Paris, le 15 novembre 1882

II.

Cher Poincaré,

J'avais depuis longtemps l'intention de vous écrire quelques lignes. D'abord je vous remercie très cordialement pour la très grande bienveillance que vous m'avez témoignée lors de mon séjour à Paris. Ensuite je vous remercie sincèrement pour les brillants travaux que vous m'avez envoyés au fur et à mesure. Je connaissais vos anciens travaux à l'exception de votre thèse que j'avais commandée il y a longtemps, sans succès, auprès de Gauthier-Villars. C'est avec un véritable plaisir que j'ai lu votre mémoire dans les *Acta* I,1. Ce que j'admire le plus (outre la généralité du résultat), c'est la simplicité des moyens que vous avez utilisés pour venir à bout d'un problème aussi difficile. Pourvu que vos travaux ultérieurs, dont tout le monde mathématique attend impatiemment la publication, ne requièrent pas de connaissances plus grandes que les miennes en théorie moderne des fonctions ! J'espère que je vais parvenir à pénétrer vos théories. Car la théorie des fonctions est d'un intérêt nouveau et concret pour moi, précisément à cause de vos nouvelles fonctions.

Je me permets de vous décrire un peu quelques résultats que j'ai obtenus au cours des derniers mois. Je souhaitais, en effet, attirer de toute façon votre attention sur les groupes continus (je dis brièvement : groupe de transformations). Je crois qu'eux aussi joueront un certain rôle dans la théorie des équations différentielles.

Les groupes discontinus se répartissent en deux catégories principales, selon que le nombre de substitutions est fini ou infini. Conformément à cela, il existe deux classes de groupes continus, selon que le nombre de paramètres est fini ou infini. La première catégorie comprend le groupe linéaire

$$\mathfrak{x}' = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{y} + \mathfrak{c}}{\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma} \quad , \quad \mathfrak{y}' = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}}{\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma}$$

avec huit paramètres essentiels. La seconde catégorie comprend, par exemple, l'ensemble de toutes les transformations conformes du plan. Car celles-ci sont définies par des équations

$$\mathfrak{x}' + i\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}) \quad , \quad \mathfrak{x}' - i\mathfrak{y}' = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}-i\mathfrak{y})$$

avec deux fonctions arbitraires. Un deuxième exemple est l'ensemble de toutes les transformations qui laissent toutes les aires invariantes.

Je possède depuis longtemps une méthode générale pour déterminer tous les groupes continus, à un nombre fini de paramètres, d'un espace à $\mathfrak{n}$ dimensions. Ainsi, par exemple, j'avais montré que la totalité de tels groupes de transformations peut être ramenée, en utilisant des coordonnées appropriées, à certaines formes canoniques.

En ce qui concerne, par contre, les groupes continus à une infinité de paramètres, je n'avais pas de méthode générale pour les déterminer, même si j'avais depuis longtemps examiné à fond des classes importantes de tels groupes. Je ne savais même pas clairement comment formuler exactement le problème correspondant. Sur ce point je vient de faire des progrès. Je traite des groupes continus à un nombre infini de paramètres avec autant d'aisance que de ceux à un nombre fini.

En particulier, j'ai complètement déterminé tous les groups infinis et continus du plan.

Si je me restreins à des groupes de transformations ponctuelles (c'est-à-dire des transformations entre (x,y) et (x_1,y_1) , où y_1 et x_1 ne dépendent que de (x,y) et non de $\frac{\partial y}{\partial x}$), j'obtiens entre autres le théorème :

Si un groupe continu comprend une infinité de paramètres, alors deux cas principaux se présenterons selon que le groupe laisse une équation différentielle $f(x,y,y',\ldots,y^{(m)}) = 0$ invariante ou non. S'il existe une équation différentielle invariante, alors elle sera du premier ordre. S'il n'existe pas d'équation $f = 0$ invariante, le groupe pourra être ramené, par l'introduction de variables adéquates, à une forme canonique parmi deux possibles. Une des formes canoniques comprend les transformations qui laissent toutes les aires invariantes. La seconde forme canonique comprend les transformations qui modifient toutes les aires dans un rapport constant.

Si par ailleurs on cherche tous les groupes continus à un nombre infini de transformations entre (x,y) , laissant une équation différentielle $f(x,y,y',\ldots)$ $= 0$ invariante, on obtiendra une série de formes canoniques, que je ne vais pas énumérer ici. J'indiquerai juste que le groupe de toutes les transformations conformes du plan est une telle forme canonique. - J'espère que vous m'excuserez d'avoir été si long au sujet de mes recherches !

Je viens tout juste de recevoir le troisième cahier des Acta. J'ai seulement feuilleté votre grand travail. J'ai pourtant déjà l'impression de comprendre relativement facilement vos recherches. Les mathématiciens ne peuvent pas assez vous remercier de publier vos travaux si rapidement, avec tant de détails et de clarté.

Je vous envoie en même temps la photographie d'Abel, que j'avais omis de vous envoyer plus tôt. Je regrette cet oubli d'autant plus que le portrait d'Abel sera dans les Acta. J'avais pourtant commandé le portrait en question pour vous longtemps avant que Mittag-Leffler m'écrive au sujet du portrait pour les Acta.

Pour terminer puis-je vous prier de transmettre mes salutations à votre aimable épouse.

Avec mes salutations disinguées, votre dévoué

Sophus Lie.

III.

Cher Poincaré,

Mes chaleureux remerciements pour votre photographie ainsi que pour les lignes cordiales qui l'accompagnent. Je vais tenter de répondre à vos questions. Par ailleurs, je renvoie aux feuillets joints qui contiennent un résumé, bien que très incomplet, des principes de ma théorie.

Mais venons en à votre question !

Les équations

$$\left.\begin{aligned} x_1 + i\mathfrak{y}_1 &= \mathcal{F}(x+i\mathfrak{y}) \\ x_1 - i\mathfrak{y}_1 &= \Phi(x-i\mathfrak{y}) \end{aligned}\right\} (1) ,$$

où $\mathcal{F}$ et Φ désignent des fonctions analytiques *arbitraires*, déterminent, dans ma terminologie, un groupe continu infini qui laisse invariantes *deux* équations différentielles du premier ordre, à savoir

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dx} = +i \ , \quad \frac{d\mathfrak{y}}{dx} = -i \ .$$

Remarquons que, dans les équations (1), la grandeur i désigne partout la *même* racine carrée de -1 .

Si j'ajoute aux équations (1) les équations

$$\left.\begin{aligned} x_2 + i\mathfrak{y}_2 &= x_1 - i\mathfrak{y}_1 \\ x_2 - i\mathfrak{y}_2 &= x_1 + i\mathfrak{y}_1 \end{aligned}\right\} (2) ,$$

alors l'ensemble des équations (1) et (2) définit *toutes* les transformations conformes du plan. Je souligne que, dans ma terminologie, l'ensemble des équations (1) et (2) ne forme pas *un groupe continu*. Car je définis un groupe par ses transformations infinitésimales et j'exige que les transformations finies du groupe soient engendrées par l'application répétée des transformations infinitésimales.

Conformément à cela, je dis bien, par exemple, que les transformations linéaires

$$x_1 = \frac{\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}\mathfrak{y} + \mathfrak{c}}{\alpha x + \beta\mathfrak{y} + \gamma} \quad \mathfrak{y}_1 = \frac{\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{C}}{\alpha x + \beta\mathfrak{y} + \gamma}$$

forment un groupe continu ; par contre, l'ensemble des transformations linéaires et duales du plan n'est pas, dans ma terminologie, un groupe continu.

Il est, bien entendu, possible d'élargir davantage encore la notion de groupe.

On obtiendrait des groupes qui seraient continus et discontinus à la fois. Je n'ai traité de tels groupes que dans des cas particuliers, lorsque j'ai déterminé, par exemple, dans ce sens le groupe de l'équation

$$rt - s^2 = \text{Const.}\ (1+p^2+q^2) \ ,$$

qui définit toutes les surfaces à courbure constante.

Je ne crois pas me tromper lorsque je prétends qu'il est possible de déterminer tous les groupes qui sont à la fois continus et discontinus. Mais je n'y ai pas beaucoup réfléchi.

Car, pour les applications aux équations aux dérivées partielles, seules sont intéressantes les transformations infinitésimales.

Je serais heureux si je parviens, avec l'explication ci-jointe, à vous donner une idée de mes recherches.

Ces derniers mois, j'étais occupé à rédiger mon ancienne théorie sur les équations $f(x,y,y',\ldots,y^{(m)}) = 0$, qui admettent un groupe comprenant un nombre fini de paramètres. J'ai là-dessus beaucoup de résultats curieux. - Au cours de l'été, j'essaierai de rédiger provisoirement ma théorie des groupes infinis. Je crois bien devoir me restreindre au plan, sinon l'exposé sera trop long.

Aujourd'hui je n'ai parlé que de mes propres recherches. Mais il faut que je vous dise, déjà dans cette lettre, l'admiration qu'a suscité en moi votre dernier travail paru dans les Acta.

Avec mes salutations cordiales

Sophus Lie.

IV.

Monsieur,

Vous avez eu la gentillesse de m'envoyer, à moi aussi, le répertoire. Celui-ci m'intéresse vivement ; c'est une entreprise aussi importante que difficile. Je n'ai pas eu le temps de vous en parler plus tôt. Aujourd'hui enfin je vous envoie en toute hâte quelques remarques.

Mes remarques sont surtout relatives aux groupes de substitutions et aux groupes de transformations. Les premiers traitent d'objets discrets ; les derniers de domaines continus. Ne serait-il pas correct de tenir compte de cette différence de nature ? Il n'est guère possible d'étudier exhaustivement la notion de groupe de transformations ; moi je n'y arrive pas en tout cas. Les catégories les plus importantes sont celles des groupes **discontinus et continus**. On peut provisoirement ne pas tenir compte des groupes de transformations qui ne sont ni discontinus ni continus. Suivant d'autres principes de classification, on peut distinguer des groupes de transformations **finis** ou **infinis**, en outre des groupes de transformations ponctuelles ou de transformations de contact.

Après ces remarques générales, j'en viens aux différents chapitres.

Analyse.

Ad. Cl. A.

Je diviserais le paragraphe 4 en deux.

4'. Théorie des groupes de substitutions de Galois.

A mon avis, les notions de transitivité, primitivité, composition d'un groupe de *substitutions*, *facteurs de composition*, etc. en font partie. En outre, les **substitutions** *linéaires*, le *groupe orthogonal*, *abélien*, ...

Suivrait en tant que paragraphe *autonome* :

4". Théorie de la résolution des équations algébriques, en particulier par radicaux.

....

Ad. Cl. B. Je supprimerais le paragraphe sur les *substitutions linéaires*, puisqu'il comprend des objets hétérogènes.

Par contre, j'introduirais un paragraphe à part sur *Les groupes discontinus de transformations*.

Le développement conceptuel y est différent de celui de la théorie des substitutions. Aussi longtemps qu'on n'envisage pas certains faisceaux invariants de configurations *discrètes*, on ne pourra pas appliquer, par exemple, les notions de transitivité et de primitivité. Dans ce paragraphe, on devrait distinguer groupes *finis* et *infinis*. La notion de sous-groupe *invariant* (distingué) joue un grand rôle. De toute façon, la théorie de la composition d'un groupe fini discontinu peut être ramenée sans problème à la notion correspondante de la théorie des substitutions. - Par contre, la notion de groupe de transformations infini et discontinu ne possède pas d'équivalent dans la théorie des substitutions de Galois.

Dans ce paragraphe, les *groupes* discontinus de *transformations linéaires* devront évidemment jouer le rôle principal. Cette théorie a effectivement pris une importance capitale.

Ad. Cl. H (p.17). Après le paragraphe 6 j'intercalerais un paragraphe :

Equations différentielles linéaires totales et équations différentielles linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.

a. Le problème de *Pfaff*.

b. Systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles ou d'équations différentielles linéaires totales (Jacobi, Clebsch et Mayer).

c. Equations différentielles d'ordre quelconque, dont les solutions les plus générales ne comprennent qu'un nombre fini de constantes.

(A mon avis, le problème de Pfaff et la théorie des systèmes complets ont une importance tout à fait capitale. La théorie importante indiquée sous *c* pourrait également être inclue dans *b*.)

Ad. Cl. H. Paragraphe 7 (p.17). Dans ce paragraphe, il me semble que tant les *précurseurs* que les successeurs de Jacobi ont été négligés.

a. L'interprétation de *Lagrange* de l'équation $F(x,y,z,p,q) = 0$. L'interprétation de Monge.

b. Solution complète et singulière.

c. La théorie générale de *Pfaff*.

d. La méthode d'intégration de *Cauchy*.

e. La méthode d'intégration de *Jacobi*, le théorème de Poisson-Jacobi. L'identité de *Jacobi*.

f. Théories plus récentes d'intégration.

g. Théorie des transformations de contact.

h. Equations particulières.

Ad. Cl. H, 8.

Je voudrais, après *e*, mettre l'accent sur :

Les nouvelles théories de l'intégration de Darboux et Moutard.

Ad. Cl. J, § 4 (p.24). Ce paragraphe ne devrait traiter, à mon avis, que de *groupes continus de transformations* dans le sens où moi je l'entends. Cette notion est suffisamment importante pour qu'elle fasse l'objet d'un paragraphe à part et il existe, en effet, une bibliographie déjà importante à son sujet.

a. Groupes continus finis. Relations caractéristiques entre les transformations infinitésimales d'un groupe. Isomorphisme.

b. Groupes de déplacements. Groupes linéaires. Nombres complexes.

c. Groupes continus infinis.

d. Transitivité. Invariants. Primitivité. Similitude.

e. Détermination de groupes.

f. Théorie générale des invariants différentiels d'un groupe fini ou infini.

g. Groupes de transformations de contact.

h. Equations différentielles admettant un groupe continu.

Géométrie.

Cl. N. Les complexes sphériques et les congruences sphériques doivent être cités à part.

Ad. Cl. P. Les trois premiers paragraphes me semblent bien.

Le paragraphe 4, je l'intitulerais : **Transformations ponctuelles**. S'y ajouteraient encore les *transformations rationnelles*.

J'intitulerais le *paragraphe 5 : Transformations de contact.*

a. Transformations de contact, qui conservent les lignes de courbure. Dilatation. La transformation de Bonnet. *Transformation par direction réciproque.*

b. La transformation de contact, qui transforme les sphères en droites. Le rapport entre la géométrie de sphère et la géométrie de lignes. Les surfaces doubles (Möbius). *La géométrie de direction de Laguerre.* (La transformation *par direction réciproque et par semi-plan réciproque* n'est pas de Laguerre.)

c. Autres transformations de contact. Transformation du point podaire.

Enfin, j'ajouterais un paragraphe 6 à la fin de la classe P.

6. *Transformations qui ne sont pas des transformations de contact.*

Ce genre de transformations commence à jouer un rôle de plus en plus grand en géométrie et dans la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles. La transformation que Laplace applique aux équations

$$s + A(x,y)\ p + B(x,y)\ q + C(x,y)\ r$$

en est un bel exemple ; récemment, celle-ci a été interprétée géométriquement, de la manière la plus parfaite, par Darboux. Darboux lui-même a introduit des catégories étendues de telles transformations. Dans la théorie des surfaces à courbure constante, ces transformations jouent un grand rôle. Dans la théorie des surfaces minimales, on considère également de telles surfaces. - De toute façon, je suis d'avis que ces transformations joueront à l'avenir un rôle de plus en plus grand.

Quant à la géométrie, j'aimerais juste faire la remarque générale que les parties élémentaires ont été traitées avec relativement plus d'ampleur que les parties supérieures de la géométrie.

Pour terminer, je vous souhaite beaucoup de chance pour votre grande entreprise. Je ne comprends pas comment, à côté de votre grande production, vous trouvez le temps pour accomplir de telles choses. Certes, la classification rationnelle de la littérature mathématique est une chose extraordinairement importante.

J'espère que vous ne m'en voudrez pas d'avoir donné mon avis sans ménagement. Excusez-moi de ne pas avoir eu le temps nécessaire pour une rédaction plus soignée de mes remarques.

Votre dévoué

Sophus Lie.

Leipzig, Seburgstrasse 5.

V.

Monsieur,

Au cas où vous aurez présenté ou présenteriez ma note, je souhaite, si possible, introduire, lors de la correction, une toute petite modification.

Les recherches de *de Tilly*, je le trouve après coup, valent mieux que je ne l'avais d'abord cru, même si je continue à les trouver trop *vagues*. Voilà pourquoi je ne voudrais rien dire en sa défaveur. Si, dans mon texte, il se trouve des propos défavorables à de Tilly, ce dont je ne me souviens guère, je souhaiterais les voir supprimés.

Je souhaite, en tout cas, que la note dans laquelle je cite vos recherches et les miennes comme les seules exactes soit modifiée de sorte que les recherches de de Tilly soient également jugées favorablement. Peut-être pourriez-vous ajouter : *Les recherches de M. de Tilly présentent aussi un véritable intérêt quoiqu'elles ne me semblent pas tout à fait précises.* (Ou quelque chose d'analogue.)

Le problème de la caractérisation la plus simple des déplacements est même entièrement indéterminé. Je considère mon ancienne solution comme la plus simple possible. La solution suivante est également remarquable :

Les groupes de déplacements dans l'espace euclidien et non-euclidien sont les seuls pour lesquels, un point étant fixé, tout autre point se meut librement *sur une surface, qui ne passe pas par le point fixe.*

Ce théorème ressemble formellement au résultat de de Tilly, encore que la *différence* essentielle entre en ligne de compte, à savoir que *de Tilly suppose que la fonction de la distance varie continûment* et converge vers zéro.

Comme je connais en fait tous les groupes de l'espace, je peux naturellement établir un nombre arbitraire de telles formules.

Vous aurez sans doute appris que *Frobenius* et *Schwarz*, qui sont certainement les meilleurs élèves de Weierstrass, viennent d'être appelés à Berlin. C'est une grosse surprise pour tout le monde : on parlait de Koenigsberger et de Lindemann.

Votre dévoué

Sophus Lie.

VI.

Cher Monsieur,

Je n'ai pas besoin de dire que j'apprécie énormément l'honneur qui m'est fait. Le peu de choses que je connaisse de la littérature mathématique, je l'ai surtout appris dans des ouvrages français. La théorie des groupes est avant tout une science française. En France, mes travaux ont obtenu beaucoup plus de reconnaissance qu'ailleurs.

Voilà pourquoi mes sympathies mathématiques allaient déjà vers Paris lorsque les mathématiques florissaient encore en Allemagne.

J'ai rassemblé *en toute hâte* un résumé de mes travaux. Il s'avère démesurément long. Mais je n'avais guère le temps de le rédiger.

J'espère que mes notices allégeront considérablement votre travail. Malheureusement j'écris mal.

Je n'ai pas trouvé nécessaire de faire un compte rendu de mes gros ouvrages. Ils ne sont que le développement de mes vieilles idées.

J'ai écrit de mémoire. Il y a de petites inexactitudes ; en partie sans doute aussi de vraies fautes.

Mais il n'était pas possible d'améliorer mon exposé.

Je remarque après coup que j'ai oublié de citer un mémoire des *Leipz. Abhandlungen*, 87 : *Sur la théorie des transformations de contact*. Il est possible que j'ai oublié d'autres travaux mineurs.

Je dois ajouter que,dans les Comptes Rendus de la Société des Sciences de Christiania, se trouve une série de communications brèves, la plupart du temps sans titre.

J'ai aussi oublié mes trois dernières *Notes* dans les *Comptes Rendus*.

J'essaierai de vous envoyer plus tard une liste complétée. *En écrivant, je m'aperçois que j'ai quand même oublié bon nombre de travaux.*

Peut-être pourrez-vous, à l'occasion, me renvoyer mes rapports. Ils seront peut-être utiles à mes élèves.

Je suis et reste votre dévoué admirateur

Sophus Lie.

VII.

Cher Monsieur,

Je vous remercie sincèrement de l'honneur qui m'a été fait. Je l'apprécie d'autant plus qu'à l'heure actuelle le centre de gravité mathématique se trouve de nouveau à Paris et en France. C'est très curieux que les mathématiques allemandes souffrent maintenant de l'étroitesse qui, après la mort de Cauchy, était en partie l'apanage des mathématiques françaises.

Je viens de recevoir un travail de Monsieur Vessiot sur les équations différentielles linéraires, dont j'espère qu'il aura des effets favorables sur plusieurs directions de recherche. Ce travail m'intéresse beaucoup parce que l'importance de ma théorie des groupes pour les équations différentielles linéaires, que Picard a reconnue le premier, y est exposée de façon particulièrement claire.

Il est inconcevable que les principes posés par *Galois* aient une validité aussi étendue. Et il est encore plus curieux qu'on mette si longtemps à le reconnaître peu à peu. Les idées de Galois s'imposent petit à petit dans tous les domaines.

Récemment mon vieil ami F. Klein a publié un cours sur les fondements de la géométrie, qui comprend de bien belles parties, mais aussi toute une série d'erreurs curieuses dans l'exposé des théories de von Helmholtz.

Lindemann publie aussi de nouveau des bêtises sur ce sujet.

Je suis en train de rédiger avec Engel un chapitre très détaillé sur ce sujet pour la troisième partie de ma théorie des groupes. J'établis nombre de systèmes d'axiomes qui suffisent pour définir la géométrie d'une *variété numérique*. Tous ces systèmes sont très simples.

Mais il est une question que je néglige (autant que vous).

Weierstrass a souligné avec raison qu'Euclide suppose implicitement que les points de la *droite* sont représentés par tous les nombres.

Riemann et von Helmholtz font un pas en avant et présupposent que l'espace est une variété numérique. Ce point de vue est très *intéressant, mais ne doit pas être considéré comme définitif.*

Je crois avoir trouvé les axiomes les plus simples pour la géométrie d'une variété numérique à *trois* dimensions, à savoir :

1) tous les déplacements forment un groupe dans lequel deux points n'ont qu'un, et un seul, invariant ;

2) des points séparés restent toujours séparés.

On doit retenir ces axiomes dans toutes les circonstances. Mais il me semble nécessaire d'y ajouter des axiomes qui remplacent, partiellement au moins, l'hypothèse de la variété numérique. En outre, il faut présenter différemment les deux axiomes ci-dessus.

Il faut bien introduire le point, l'espace, la surface, la courbe comme notions fondamentales. De même la distance.

Tous les points qui ont une certaine distance à un point donné forment une *surface* qui ne passe pas par le point donné.

Ainsi, il faut introduire la *droite* axiomatiquement de la manière bien connue.

Puis, il faudra tenter d'introduite le plan, etc.

Les notions nécessaires étant introduites, on devrait en déduire les théorèmes de congruence.

Ensuite l'axiome des parallèles, *en outre* l'axiome stipulant que *les points d'une droite peuvent être représentés par des coordonnées.*

Finalement l'axiome sur l'égalité des surfaces. ...

Je serais content d'avoir votre avis là-dessus. Etes-vous d'accord que, dans la construction de la géométrie, *on ne commence pas par concevoir l'espace comme variété numérique*, mais qu'on introduise d'abord les notions de surface, courbe, droite, plan, etc., qu'on développe les théorèmes potentiels et qu'on introduise plus tard non seulement l'axiome des parallèles, mais aussi la droite *conçue* comme variété numérique ... ?

A mon avis on est loin d'avoir bien assis les fondements de la géométrie.

Ma théorie des groupes maîtrise bien les fondements de la géométrie d'une variété numérique mais pas du tout ceux de la géométrie dans l'espace !!

Je me restreins à ramener la géométrie d'une variété numérique aux principes les plus simples. Cela n'est pas si facile ; car le travail de Riemann n'est qu'un début, dans celui de Helmholtz, alors que l'orientation est bonne, le développement est faux.

Si j'avais vingt ans de moins, j'aurais essayé de faire le pas suivant incomparablement plus difficile. Au cours des années 1867-1868, je me suis occupé activement de ces questions, mais à l'époque elles étaient bien trop difficiles pour moi.

Je suis de toute façon convaincu que nous ferons bientôt un pas essentiel en avant. Il est curieux que non seulement Legendre et von Helmholtz, mais également Lobatchevsky et Riemann, ont fait des erreurs, bien que sur des points très secondaires.

Je recommande à votre attention votre jeune compatriote *Tresse*, qui est sur le point de quitter Leipzig pour rentrer à Paris. Monsieur Tresse est un mathématicien doué avec de bonnes connaissances, dont on peut attendre beaucoup.

Votre dévoué

S. Lie.

Notes

1 Sur Sophus Lie (1842-1899) voir [5], vol. VIII, p.323-327.

Ces lettres ont été transcrites par Walter Purkert qui nous écrit le 15 mars 1985 :

"Lie sprach ja bekanntlich sehr gut deutsch ; trotzdem unterlaufen ihm natürlich Fehler in Grammatik, Orthographie und Interpunktion. Ich habe selbstverständlich so transkribiert, wie Lie wirklich geschrieben hat. Bei der Edition sollte man jedoch auf diesen Sachverhalt aufmerksam machen, damit deutsche Leser nicht denken, hier haben Ausländer deutsche Texte falsch gelesen."

2 T. Hawkins note dans son article *The Erlangen Programm of Felix Klein : Reflections on Its Place in the History of Mathematics* (Historia Mathematica, 11(1984), 442-470) que, lors de son voyage à Paris en 1882, Lie avait informé Klein, dans une lettre de Paris, que Poincaré lui avait expliqué "that all of mathematics was a tale about groups" (p.448).

G. Mittag-Leffler écrit à Poincaré le 2 mars 1883 :

"M. Lie a été charmé de faire votre connaissance. Il m'écrit que votre génie l'a beaucoup impressionné quoiqu'il n'est pas en état de vous comprendre parfaitement."

3 **Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles**, Paris, 1879 = **Oeuvres**, t.I, p.XLIX-CXXIX.

4 **Théorie des groupes fuchsiens** (Acta Math., 1(1882), 1-62) = **Oeuvres**, t.II, p.108-168.

5 **Sur les fonctions fuchsiennes** (Acta Math., 1(1882), 193-294) = **Oeuvres**, t.II, p.169-257. Daté : Paris 23 octobre 1882 ; imprimé le 29 novembre 1882.

6 Les 8 grandes feuilles du texte de Lie se trouvent dans la correspondance de Poincaré.

7 *Sur les fondements de la géométrie* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 114(1892), 461-463, 29 février) = p.477-479 du t.II, 1e partie des *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig(Teubner), 1935.

7 S. Lie a été élu le 7 juin 1892 correspondant pour la Section de Géométrie. C'est Poincaré qui a présenté sa candidature, et son rapport doit se trouver dans le dossier de S. Lie déposé aux Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

8 On aura une idée des travaux de S. Lie en consultant les 7 volumes de ses

Gesammelte Abhandlungen, 1934-1960, Leipzig(Teubner).

9 Ce rapport a dû être renvoyé à Lie, car il ne se trouve pas dans les papiers laissés par Poincaré.

10 Cauchy est mort en 1857.

11 E. Vessiot, *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires* (Annales sci. Ecole Normale Supérieure, (3), 9(1892), 197-280 ; imprimé en septembre 1892).

12 E. Picard, *Sur les groupes de transformation des équations différentielles linéaires* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 96(1883), 1131-1134 ; 16 avril) = *Oeuvres*, t.II, p.97-100.

13 Il s'agit des *autographirte Vorlesungshefte* de F. Klein sur la *Höhere Geometrie* de 1892 qu'il a résumées p.145-149 de son article *Autographierte Vorlesungshefte* (Math. Annalen, 45(1894), 140-152) = *Gesammelte Math. Abhandlungen*, t.I, p.498-502.

14 Il s'agit probablement du livre de F. Lindemann que nous n'avons pas consulté : *Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch*, Leizig(Teubner), 1891.

15 Voir p.829 du tome III de la *Theorie der Transformationsgruppen*, Leipzig(Teubner), 1893.

16 Les lettres de Poincaré à Lie sont déposées à la Universitetsbiblioteket I Oslo, Håndskriftsamlingen, et elles nous ont été communiquées par Christian Peskine.

Avant la lettre du 14 novembre 1882, il existe une carte de visite de Poincaré, datée par l'ordonnateur des lettres de 1881,"avec mille remerciements".

17 Poincaré répond à la lettre II de Lie.

18 L. Kronecker est mort le 29 décembre 1891.

19 La lettre V de Lie.

20 Il existe aussi une carte de visite de Poincaré,que nous datons de 1897 : "Pouvez-vous venir aujourd'hui dîner".

21 Traduction de Jeanne Peiffer.

CORRESPONDANCE AVEC ANDERS L I N D S T E D T

Sur A. Lindstedt, né en 1854, voir [1], t.III, p.816-817 et t.IV, p.893, ainsi que la nécrologie publiée p.58-61 du t.23(1940) du *Skand. Aktuarietidskr.*

Les lettres de Poincaré, déposées à l'Observatoire de Paris, nous ont été aimablement communiquées par Jacques Lévy.

Poincaré écrit dans sa lettre du 14 août 1883 :

"Les méthodes que vous avez exposées me semblent les meilleures qui aient été proposées jusqu'ici pour la solution du problème des trois corps."

Il écrit dans sa lettre du 25 août 1883 :

"Permettez-moi aussi de vous adresser une question au sujet de vos méthodes que, je vous le répète, je regarde comme supérieures à toutes celles qui ont été proposées jusqu'ici, même à celles de M. Gyldén."

Dans sa lettre du 29 mars 1884, Poincaré note :

"Il faudrait donc démontrer que ces termes disparaissent d'eux-mêmes. Je vois bien, par l'observation, qu'il en est effectivement ainsi mais je ne puis parvenir à le démontrer et cela ne paraît pas du tout évident *a priori*."

CORRESPONDANCE AVEC RUDOLF LIPSCHITZ

Sur R. Lipschitz voir [5], vol. VIII, p.388-390.

C'est Winfried Scharlau qui a bien voulu nous envoyer les lettres de Poincaré à Lipschitz.

Poincaré écrit dans sa lettre du 5 février 1889[1] :

"Monsieur Hermite m'a communiqué votre dernière lettre [[cette lettre de Lipschitz à Hermite du 28 décembre 1888 se trouve dans les papiers de Poincaré]], ce qui m'a fait beaucoup de plaisir, d'abord parce que les considérations arithmétiques que vous y développez m'ont beaucoup intéressé et ensuite parce que j'ai été flatté de voir qu'un homme tel que vous avait pris la peine de lire mon travail sur les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique."

Il s'agit ici du mémoire de Poincaré : *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique* (Journal de Mathématiques, (4), 3(1887), 405-464) = *Oeuvres*, t.II, p.463-511 ; t.V, p.285-290.

1 Lettre publiée p.197 de R. Lipschitz, *Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass*, Braunschweig(Vieweg),1986.

LETTRE DE FÉLIX LUCAS

Sur F. Lucas voir [1], t.III, p.838-839 ; t.IV, p.920 et t.V, p.772.

Il pose dans cette lettre du 14 février 1887 une "question d'analyse dont je vous parlais aujourd'hui".

CORRESPONDANCE AVEC ALEKSANDR MIHAILOVITCH LYAPUNOV

Sur A.M. Lyapunov (1857-1918) voir [5], vol. VIII, p.559-563.

A.P. Youschkevitch a bien voulu nous envoyer les lettres de Poincaré à Lyapunov. D'ailleurs, cette correspondance sera publiée par ses soins.

Elle est publiée en russe dans : Смирнов В.И. и Юшкевич А.П., Переписка А.М. Ляпунова с А. Пуанкаре и П. Дюэмом (Историко-математические Исследования, 29(1985), 265-284).

Voir V.I. Smirnov et A.P. Youchkevitch, *Correspondance de A.M. Liapunov avec H. Poincaré* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 8(1987), 1-18).

LETTRE DE DE MARSILLY

Le général de Marsilly, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, membre de la Société Mathématique de France, écrit dans sa lettre du 4 juin 1885, envoyée d'Auxerre :

"Je vous remercie de votre complaisance à me répondre et, au risque d'en abuser, je viens vous donner quelques indications sur les nouvelles intégrales que j'espère obtenir dans le problème des trois corps."

LETTRE D'EMILE MATHIEU

Sur E. Mathieu (1835-1890) voir [5], vol. IX, p.174-175.

Sa lettre, du 8 mai 1887, concerne le "répertoire bibliographique" dont Poincaré était un des promoteurs en France, et E. Mathieur ajoute :

"Bien que vous ayez dû recevoir autrefois ma Notice sur mes travaux scientifiques, j'ai l'honneur de vous adresser la liste de mes Mémoires d'Analyse mathématique, en indiquant la classe de votre répertoire à laquelle ils appartiennent."

CORRESPONDANCE AVEC GÖSTA MITTAG-LEFFLER

Cette correspondance extraordinairement riche et intéressante, déposée à l'Institut Mittag-Leffler à Djursholm, nous a été aimablement envoyée par Jesper Lützen. Monique Fleinert-Jensen prépare actuellement une édition de cette correspondance.

H. Poincaré écrit le 25 octobre 1883 :

"J'ai reçu les tirages à part des Groupes Kleinéens ; ceux-ci ont inspiré à M. Waldeck-Rousseau [[ministre de l'Intérieur]] moins de défiance que les Groupes Fuchsiens, car on me les a envoyés directement sans les faire passer par le ministère de l'Intérieur."

Dans sa lettre, datée d'avril 1885, Poincaré écrit encore :

"Je n'ai pas encore reçu les tirages à part de mon travail sur le théorème de M. Fuchs. Peut-être ont-ils été retenus au Ministère de l'Intérieur comme écrits socialistes."

G. Mittag-Leffler informe Poincaré dans sa lettre du 13 juillet 1887 de ce que pense K. Weierstrass de ses travaux :

"M. Weierstrass est l'un de ceux qui connait le mieux vos travaux et qui m'en a parlé avec une véritable admiration et en se plaignant beaucoup qu'il y a encore si peu d'Allemands qui ont su vous comprendre."

G. Mittag-Leffler écrit à Poincaré le 15 novembre 1888 à propos de son mémoire présenté pour le prix du roi Oscar II :

"Parmi ces points qui m'ont parus devoir être plus approfondis est d'abord votre proposition que des développements dans le genre de ceux de M. Lindstedt sont divergents. J'ai passé tout un mois cet été chez M. Weierstrass occupé uniquement de l'étude de votre mémoire. Quand je suis parti nous ne sommes pas encore arrivés à saisir comment vous démontrez cette proposition. M. Weierstrass m'écrit maintenant qu'il est persuadé que vous avez raison."

Poincaré répond le 19 novembre 1888 :

"Je vais rédiger tout de suite deux notes : la première sur la divergence des séries de M. Lindstedt."

La lettre de G. Mittag-Leffler du 23 février 1889 (Poincaré avait déjà obtenu le prix le 21 janvier 1889) contient le passage intéressant suivant :

"M. Weierstrass m'a écrit il y a quelques jours :

Poincaré behauptet, dass aus der Nichtexistenz mehrerer eindeutige (analyt.) Integrale bei einem dynamischen Probleme nothwendig die Unmöglichkeit folge, das Problem durch Reihen von der Form

$$\sum_{\nu,\nu'} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\nu a t + \nu' a' t + \ldots)$$

zu lösen. Diese Behauptung, die von fundamentaler Bedeutung ist, wird ohne Beweis ausgesprochen."

Poincaré répond le 1er mars 1889 (cachet de la poste) :

"Je réponds d'abord aux observations de M. Weierstrass. Je crois que j'ai donné la démonstration du point en question dans la Note *A* . Mais j'ai précisément égaré la feuille sur laquelle elle se trouve. Veuillez vérifier si mes souvenirs sont exacts et si la démonstration vous paraît suffisante et suffisamment développée."

La lettre de Mittag-Leffler du 7 avril 1889 contient une appréciation intéressante sur l'histoire des mathématiques :

"Je ne sais pas si vous avez remarqué que je n'ai rien à faire maintenant avec la *Bibliotheca Mathematica* qui est éditée d'après un tout autre plan que d'abord. C'est devenu maintenant, à mon grand regret du reste, un journal qui s'occupe exclusivement avec la soi-disant histoire des mathématiques."

H. Poincaré a donc déjà reçu le prix mathématique du roi Oscar II, bien que la rapporteur K. Weierstrass n'a pas encore terminé son rapport sur son mémoire. Mais voilà qu'une nouvelle difficulté surgit et Mittag-Leffler écrit dans sa lettre du 16 juillet 1889 :

"Monsieur Phragmén vient de fixer mon attention sur quelques passages de votre mémoire sur le problème des trois corps qui lui ont parus un peu obscurs et qu'il a jugés dignes de vous être signalés."

Mais c'est la lettre bouleversante de Poincaré, du 1er décembre 1889 (cachet de la poste), qui trahit un véritable désarroi :

"J'ai écrit ce matin à M. Phragmén pour lui parler d'une erreur que j'avais commise et il vous a sans doute communiqué ma lettre. Mais les conséquences de cette erreur sont plus graves que je ne l'avais cru d'abord. [[...]]

Je ne vous dissimulerai pas le chagrin que me cause cette découverte. Je ne sais d'abord si vous jugerez encore que les résultats qui subsistent [[...]] méritent encore la haute récompense que vous avez bien voulu leur accorder.

D'autre part, de grands remaniements vont devenir nécessaires et je ne sais pas si on n'a pas commencé à tirer le mémoire."

Oui, le mémoire a été déjà envoyé à C. Hermite. En effet, Mittag-Leffler lui écrit le 5 décembre 1889 de "donner au domestique qui vous sera envoyé par M.Hermann l'exemplaire couronné de M. Poincaré qui vous a été remis par la poste. Une erreur s'y trouve qui doit être corrigée avant que le mémoire ne paraisse et je ne veux qu'aucun exemplaire avec cette erreur existe." (Note 511, p.213 des *Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1884-1891)*, Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 6(1985), 79-217.) Toutefois, nous possédons à l'Institut Henri Poincaré une photocopie de cette première version du mémoire de Poincaré, avec des passages incriminés corrigés.

Ce fait est confirmé d'abord par la lettre de Mittag-Leffler à Poincaré du 4 décembre :

"Mais voici le plus grand malheur. Votre dépêche est arrivée trop tard et le mémoire était déjà distribué."

Mais les dégats ont été limités, comme l'indique sa lettre du 5 décembre :

"J'ai télégraphié à Berlin et à Paris en demandant qu'on ne fasse pas distribuer un seul exemplaire. Il n'y a pas de doute que ces dépêches soient arrivées à temps. A Paris il n'y aura que MM. Hermite et Camille Jordan et à Berlin que M. Weierstrass qui auront reçu des exemplaires. [[...]] M. Walther Dyck a de même reçu un exemplaire."

Dans sa lettre du 31 juillet 1897 (cachet de la poste), Poincaré écrit :

"Si j'ai dit que le théorème en question paraissait avoir été connu de Riemann, c'est à cause d'une conversation entre Riemann et M. Hermite. M. Hermite ayant appelé son attention sur la difficulté qu'il y avait à montrer que les fonctions périodiques les plus générales sont des quotients de fonctions Θ , Riemann répondit : Ce n'est qu'un jeu d'enfants."

G. Mittag-Leffler écrit dans sa lettre du 5 juillet 1909 :

"Vous connaissez sans doute l'opuscule de Minkowski *Raum und Zeit* [[...]] M. Fredholm me dit que vous avez touché à des idées semblables avant les autres, mais en vous exprimant d'une manière moins philosophique et plus mathématique."

Pour l'état actuel des questions concernant les recherches de Poincaré qui se rapportent à son mémoire qui a obtenu le prix du roi Oscar II, voir l'article, qui nous a été signalé par M.R. Herman, de J.-B. Bost : *Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens*, Séminaire Bourbaki, 37(1985), n° 639, en particulier sa très riche bibliographie.

LETTRE DE JULES MOLK

Nancy, le 12 Décembre 1901[1]

Monsieur et cher Collègue,

Je vous suis très reconnaissant de vouloir bien consentir à me donner votre appui et votre concours dans l'oeuvre que j'ai entreprise[2]. J'ai beaucoup hésité à vous les demander, me doutant bien du peu de temps que vous avez à vous ; je ne vous en remercie que plus,de vouloir bien m'accorder votre appui et de vous intéresser à l'*Encyclopédie*. Il est d'ailleurs bien entendu que ce sera de la façon que vous jugerez la plus avantageuse pour le développement de l'enseignement en France et que vous déciderez vous-même, au printemps prochain, quand j'aurai l'honneur et le plaisir de vous voir à Paris, sous quelle forme votre collaboration se manifestera.

Notre *Encyclopédie* ne sera pas une traduction de l'édition allemande ; ce sera une *nouvelle édition* de cette encyclopédie. Nous serons libres d'intercaler de nouveaux articles, d'exposer, d'après nos habitudes françaises, les articles allemands, d'y ajouter des notes, des compléments. Chaque article sera publié avec la mention : exposé par (l'auteur français) d'après (l'auteur allemand),et les notes [ou compléments] *ajoutées* par l'auteur français seront, en outre, mentionnées d'une façon spéciale, afin de *réserver nos droits*, dans le cas où à l'édition française succéderait, ce qui est fort probable, une édition anglo-américaine, une nouvelle édition allemande, ou d'autres éditions encore.

L'Encyclopédie rend de *grands services* en Allemagne ; ce qui en a paru se trouve répandu dans les Universités, dans les lycées, même dans les collèges, en sorte que, tout naturellement, elle tend à prendre un caractère plus international. Il serait bon que nous puissions mettre entre les mains des maîtres et des élèves un instrument analogue, mais bien français, rédigé d'une façon claire, lumineuse, évitant aux uns et aux autres des recherches souvent longues, fatigantes ; indiquant les résultats acquis et ceux où il y a, peut-être, des voies nouvelles à parcourir ; en un mot permettant de gagner du temps.

Les Allemands ont des qualités d'érudition minutieuse très remarquables ; nous profiterons de celles qu'ils ont mises en évidence dans leur édition allemande. Leurs qualités d'exposition sont peut-être moins remarquables ; nous essayerons de faire mieux à cet égard. Nous parviendrons peut-être ainsi à rendre service ; c'est quelque chose. Il serait en tout cas dangereux de ne pas avoir chez nous un instrument de recherche analogue à celui qui se répand de plus en plus rapidement chez eux. (Mr

Teubner a dû faire un nouveau tirage des premiers fascicules, après deux ans seulement.)

Chaque article de notre édition française sera confié à un de nos collaborateurs, mais nous ne nous interdisons pas d'ajouter des notes, compléments, etc. Votre collaboration pourra donc avoir lieu sous plusieurs formes très différentes, d'après vos convenances personnelles et d'après ce que vous jugerez le plus avantageux pour la réussite de l'oeuvre commune.

Il y a par exemple un article de M. Fricke sur les fonctions automorphes[3] (mettons automorphes si vous voulez) ; vous pouvez, si vous le jugez bon et si cela ne vous ennuie pas trop, exposer de la façon que vous voudrez, en profitant de la rédaction et des notes bibliographiques de M. Fricke, cet article dans l'édition française. C'est ce que Messieurs Tannery et Appell ont bien voulu faire pour divers articles[4] ; c'est aussi ce que Monsieur Picard a bien voulu faire pour un article de M. Sommerfeld sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second[5].

Vous pouvez aussi, si vous jugez que cet article peut être rédigé par un M. A, me dire que vous décidez que cet article sera exposé par Mr A et que vous vous contenterez d'ajouter une Note sur un point ayant trait à cet article et vous intéressant[6].

Mais il y a aussi des articles qui *manquent manifestement* dans l'édition allemande. C'est à peine si l'on mentionne, par exemple, les recherches sur les lois des grands nombres. Là un article additionnel semblerait peut-être indiqué ; les recherches de M. Darboux, les vôtres, celles d'Hadamard devraient trouver place dans notre édition. Vous me direz s'il vous convient d'en parler vous-même, ou si vous croyez bon de confier à d'autres cet article.

Je vous donnerai des détails au printemps prochain, en venant vous voir à Paris, puisque vous voulez bien m'y autoriser. Aujourd'hui je voudrais encore vous *remercier*; je ferai tout ce qui est en mon pouvoir pour réduire au *minimum* la partie ennuyeuse de votre si aimable collaboration.

Jules Molk

8 rue d'Alliance, Nancy

NOTES

1 Sur J. Molk (1857-1914) voir [1], t.4, p.1025 et t.5, p.870.

Sa thèse a été publiée dans les *Acta Mathematica* (t.6, p.1-165) : *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination.* Il se propose dans ce travail de rendre clair le mémoire génial, mais fort obscur, de Kronecker sur les fondements d'une théorie arithmétique des nombres algébriques, comme il l'écrit dans son *Introduction* (p.1-2) :

"Je désirais surtout éclaircir quelques points du grand mémoire que M. Kronecker a publié, en Septembre 1881, à l'occasion du cinquantième anniversaire du doctorat de M. Kummer (L. Kronecker : *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, Festschrift zu Herrn E.E. Kummers Doctor-Jubiläum, Berlin, Reimer, 1882). Ce mémoire semble appelé à imprimer une direction nouvelle à l'Algèbre. Le but que je me suis proposé serait entièrement atteint si mon travail pouvait amener quelques géomètres à approfondir les idées aussi difficiles que nombreuses qui y sont contenues."

G. Eneström a publié dans la *Bibliotheca Mathematica* (t.XIV, p.336-340) un intéressant article sur Molk : *Jules Molk (1857-1914) als Förderer der exakten mathematisch-historischen Forschung.*

Pierre Crépel nous a indiqué dans sa lettre du 17 mars 1981 que la rue d'Alliance, où Molk habitait à Nancy au numéro 8, est devenue maintenant la rue du Maréchal Lyautey, et qu'il existe à la Bibliothèque Universitaire des Sciences de Nancy une plaquette historique sur J. Molk, sous la cote A 5737. D'ailleurs, certains livres de cette bibliothèque portent le cachet "Jules Molk". Il doit exister également au Service de documentation du Rectorat un dossier de professeur de Molk. Mais il est impossible de savoir actuellement où sont déposés, s'ils existent toujours, les papiers laissés par Molk (sont-ils aux Archives Départementales de Nancy ?)[7].

2 "L'oeuvre" entreprise par J. Molk est l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées* à partir de l'édition allemande de l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, qui a commencé à paraître en 1898, chez Teubner à Leipzig. L'édition française débutera en 1904 chez Gauthier-Villars à Paris.

Cette encyclopédie est encore un outil incomparable pour les historiens des mathématiques. Malheureusement elle fut interrompue par la première guerre mondiale et ne fut pas reprise après la guerre.

Actuellement, il est impossible de savoir combien de fascicules ont été réellement imprimés. Les différentes bibliothèques parisiennes possèdent des exemplaires dont le contenu diffère. Il faudrait faire une enquête approfondie dans la bibliothèque de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm, dans celle de l'Ecole Polytechnique, de l'Institut Henri Poincaré, de l'Institut de France, ainsi que dans la Bibliothèque Nationale.

D'autre part, il y a des manuscrits complètement rédigés et qui n'ont jamais été imprimés. Malheureusement, il nous a été impossible jusqu'à présent, malgré de nombreuses tentatives, de consulter le dossier de l'*Encyclopédie* déposé dans les Archives de la maison d'édition Gauthier-Villars-Dunod-Bordas.

3 R. Fricke, *Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen*, p.349-470 du t.II de l'*Analysis*, Leipzig(Teubner), 1901-1921. Cet article a été achevé en novembre 1913.

4 *Principes fondamenataux de l'arithmétique*, exposé,d'après H. Schubert, par J. Tannery et J. Molk ;

Fonctions sphériques, exposé, d'après A. Wangerin, par A. Lambert, avec une Note de P. Appell et A. Lambert ;

Généralisations diverses des fonctions sphériques, exposé par P. Appell et A. Lambert ;

Hydrodynamique, exposé, d'après A.-E.-H. Love, par P. Appell et H. Béghin ;

Développements concernant l'hydrodynamique, exposé d'après A.-E.-H. Love, par P. Appell, H. Béghin et H. Villot.

5 D'après le Catalogue de Gauthier-Villars de 1924 concernant l'état de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, p.228-230, ce fascicule n'a jamais été publié.

6 Sur la couverture du tome I, voulume 1, fascicule 2, publié le 30 mai 1907, a été annoncé le tome IV : *Mécanique*, avec des *Notes sur les principes de la Mécanique* par H. Poincaré.

7 De toute façon, l'essentiel des archives de J. Molk doit se trouver dans les cartons relatifs à l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* conservés chez l'éditeur Gauthier-Villars et actuellement inaccessibles.

LETTRE DE GEORGE WILLIAM MYERS

La lettre de G.W. Myers professeur d'astronomie et de mathématiques à la School of Education de l'University of Chicago, du 24 septembre 1901, concerne les "various forms of rotating liquid masses in equilibrium" et la preuve de l'existence "in the universe of such equilibriums".

LETTRES DE MAURICE D'OCAGNE

Sur M. d'Ocagne (1862-1938) voir [5], vol. X, p.170.

Il écrit dans sa lettre du 18 mai 1907 :

"Je voudrais vous parler aussi de votre candidature à l'Académie Française à laquelle, dans la faible mesure de mes modestes moyens, j'ai eu, je crois, l'extrême satisfaction de travailler utilement. [[...]]

J'aurais enfin l'intention de vous dire quelques mots de ce qui vient de se passer pour moi à l'Institut.[1] J'ai, croyez le bien, très exactement conscience du niveau modeste où se tient, dans la hiérarchie de la science, ce qui fait l'objet de mes travaux, mais, cela dit, je n'ai pas moins conscience de ce qu'à ce niveau je puis revendiquer comme m'étant strictement personnel, et je ne puis pas ne pas m'élever contre l'insinuation, renouvelée l'autre jour, qui tend à ravaler mon rôle à celui d'un simple compilateur."

NOTE

1 M. d'Ocagne a été élu académicien libre le 30 janvier 1922.

LETTRES DE PAUL PAINLEVÉ

La première lettre de cette correspondance, la seule qui débute par "Monsieur et cher Maître", les autres commencent par "Cher Maître et Ami", est datée du jeudi 24 Mai,et Painlevé écrit :

"Permettez-moi de préciser les explications que je vous ai données hier sous une forme obscure, encore que trop longuement."

Raymond Gérard nous écrit à propos de cette lettre le 3 novembre 1984 :

"Je me suis fait une idée très précise sur cette lettre et, pour en vérifier l'exactitude, j'ai consulté Mr le Professeur F. Bureau qui a confirmé mes conclusions tout en y ajoutant des détails très précis."

En effet, Florent Bureau écrit dans sa lettre à R. Gérard du 29 septembre 1884 :

"La lettre de Painlevé m'a beaucoup intéressé. C'est une démonstration du fait qu'un point singulier transcendant n'existe pas à distance finie pour une intégrale de $y'' = 6y^2 + x$. En substance, c'est la même que celle du *Bulletin de la Société Mathématique de France* en 1900 [[t.28, p.201-261 : *Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme* = *Oeuvres*, t.III, p.149-185, Paris (C.N.R.S.) ; le problème est traité p.149-174]]. Cette lettre est datée d'un jeudi 24 mai. *C'est l'année 1900*. Voici pourquoi.

Je retiens d'abord que Picard et Poincaré connaissaient les difficultés du problème qu'en fait ils avaient posé - difficultés "que les meilleurs juges regardaient comme presque insurmontables" (Poincaré : *Rapport sur les Titres de M. Painlevé*, 2^{e} page [[intercalé entre les pages 752 et 753 du tome III des *Oeuvres* de Painlevé]]). Painlevé lui-même, en 1892-1894, n'espérait plus former les équations différentielles d'ordre supérieur à points critiques fixes (P. Painlevé : *Analyse des travaux scientifiques jusqu'en 1900*, p.34 [[Paris(Gauthier-Villars), 1900 = Paris(A. Blanchard), 1967 = *Oeuvres*, t.I, p.74-196, 1972 ; p.34 = p.110]]). Le rapport de Poincaré est daté du 3 décembre 1900 et a trait à la candidature de Painlevé à l'Académie des Sciences ; l'*Analyse des travaux scientifiques* et le Mémoire du *Bulletin de la Société Mathématique* sont de 1900. C'est dans ce dernier Mémoire que Painlevé donne sa démonstration de la non-existence d'un point singulier transcendant et il n'en dit rien dans les Notes des *Comptes Rendus*.

Alors, voici le scénario. Painlevé a fait une visite de candidature chez Poincaré le 23 mai 1900. Poincaré a naturellement demandé des explications sur la grosse difficulté du problème, le Mémoire du *Bulletin de la Société Mathématique de France* n'étant très probablement pas paru ; Painlevé n'a pas été très clair et il a écrit le lendemain.

J'ai vérifié que le 24 mai 1900 était bien un jeudi. Pour retrouver un *jeudi* 24 mai, il faut 1894 ou 1906 et ces deux dates sont exclues. Donc, C.Q.F.D."

Dans une deuxième lettre, Painlevé écrit à Poincaré :

"Mittag-Leffler me télégraphie de lui envoyer un télégramme très chaleureux de condoléances au sujet de la mort d'Oscar, et il me demande de vous prier d'en faire autant."

R. Gérard nous écrit à propos de cette lettre :

"Oscar = Oscar II, roi de Suède et de Norvège, né en 1829, mort en 1907 ; protecteur des sciences et des arts (*cf. Le Grand Larousse*).

Un extrait de la *Revue des Questions Scientifiques* d'Ocagne (*cf. Oeuvres* de Painlevé, t.I, p.199) :

"A défaut de Monsieur Poincaré, l'illustre vainqueur du tournoi mathématique institué par Sa Majesté Oscar II, à l'occasion du soixantième anniversaire de sa naissance, à qui le Roi avait d'abord offert cette chaire, et qui s'est vu empêché de l'accepter, c'est à Monsieur Paul Painlevé que sur le conseil éclairé de Monsieur Mittag-Leffler a été confié l'honneur de l'inaugurer au mois de septembre 1895."

Je pense que Mittag-Leffler tenait beaucoup à la place qu'occupaient les Sciences dans la "cour" de Suède, d'où cette insistance pour obtenir des télégrammes de condoléances."

F. Bureau nous écrit encore le 21 octobre 1984 :

"En feuilletant le tome 1 des *Mémoires* de Jacques Isorni, je trouve ceci, p.18. Vers 1898-1902 (au moins) :

"Paul Painlevé, qui avec Emile Boutroux, Henri Poincaré, Maurice d'Ocagne, André Siegfried, Henri Rabaud, Gabriel Pierné, était au rendez-vous du boulevard Saint-Germain, en dehors de l'affaire Dreyfus, pour faire de la musique." "

CORRESPONDANCE AVEC JOSEPH DE PEROTT

Sur J. de Perott voir [1], t.IV, p.1141. John F. Kennison a bien voulu nous envoyer une lettre de Poincaré à de Perott, et il écrit dans sa lettre du 26 juillet 1984 :

"Joseph de Perott studied in the University of Paris as well as Berlin. He taught in the Clark University Mathematics department from 1890 to 1921 and died May 22, 1924. He was an interesting and respected teacher.

The letter from Poincaré was in response to an invitation from de Perott to Clark's Decennial Conference of 1899."

J. de Perott écrit dans sa lettre du 5 mai 1887 :

"J'ai l'honneur de vous adresser quelques observations au sujet de la formule de classement. Il est quelquefois utile de traiter la théorie des groupes d'une manière abstraite, indépendemment de son application à la théorie des nombres, théorie des équations, théorie des substitutions, etc. Tel est par exemple le § 1 du Mémoire de M. Kronecker (*Monatsb. der Berl. Akad. vom 1. Dez. 1870* [[*Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen*, p.273-282 du t.I des *Werke*, en particulier p.275]]). Je veux naturellement parler des groupes qui s'appliquent à telle ou telle branche de mathématiques, mais que l'auteur pour une raison ou pour une autre *traite* d'une manière abstraite."

Poincaré écrit dans sa lettre :

"Je suis extrêmement flatté de l'honneur que vous voulez bien me faire en m'invitant à faire des conférences à l'Université de Worcester , et ce n'est pas sans le plus vif regret que je me vois forcé de refuser cette invitation.

Malheureusement mon cours,ayant lieu cette année par exception dans le second semestre, ne sera pas terminé en temps utile pour que je puisse me trouver en Amérique au moment des fêtes. D'autre part, la commission du répertoire bibliographique de la Société Royale doit probablement se réunir à Londres au commencement de juillet et je ne pourrais manquer d'assister à cette réunion puisque je suis le seul représentant de la France dans cette commission.

Soyez persuadé que je regrette infiniment de manquer cette occasion de faire la connaissance de mes collègues américains."

CORRESPONDANCE AVEC JULIUS PETERSEN

Sur J. Petersen (1839-1910) voir [5], vol. X, p.544.

Sa lettre du 8 mars 1883 porte sur l'utilisation de la théorie des groupes dans les recherches sur la théorie des fonctions.

Jesper Lützen nous a envoyé les deux lettres de Poincaré à Petersen qui se trouvent à la Bibliothèque Royale de Copenhague.

Dans sa deuxième lettre, qui doit être de la fin mars 1883, Poincaré montre que le groupe dont l'entretenait Petersen "est un de ceux qui donnent naissance aux fonctions elliptiques".

LETTRES DE EDVARD PHRAGMÉN

Sur E. Phragmén (1863-1937) voir [1], t.IV, p.1155-1156 ; t.V, p.969-970 et t.VI, p.2005.

Il écrit dans sa lettre du 21 février 1890 (les lettres de Phragmén se trouvent avec la correspondance de Poincaré à l'Institut Mittag-Leffler) :

"Je vous remercie vivement de votre dernière lettre où vous aviez la bonté de me répondre à des questions qui auraient été complètement superflues, si j'avais lu moins rapidement vos développements [[il s'agit du mémoire de Poincaré qui a obtenu le prix du roi Oscar II]]. Toutefois j'aurai l'honneur, quand la composition aura avancé jusque là de vous proposer quelques modifications insignifiantes du texte, en vue de rendre impossible tout malentendu."

C'est ainsi que dans sa lettre du 20 mars 1890 Phragmén propose plusieurs modifications du texte de Poincaré et lui pose des questions précises qui se réfèrent au texte imprimé de Poincaré.

E. Phragmén a publié un mémoire sur le problème des trois corps de Poincaré : *Om några med det Poincaré'ska fallet af trekropparsproblemet belägtade dynamiska uppgifter* (Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handligar. Band 15. Afd.I. N° 13. 1890).

LETTRES D'EMILE PICARD

I.

Toulouse, le 17 Mai 1881

Monsieur,

Je m'empresse de répondre à la remarque que vous me faites sur mon mémoire inséré au *Bulletin* de M. Darboux[1]. Il s'agit d'établir que la relation :

$$\int_{u_0}^{u} \frac{f(u,v)\,du}{F'_v(u,v)} = G_1(x) \qquad \text{(I)}$$

ne peut être satisfaite par une fonction uniforme de z ; on y parvient de la manière suivante : Remarquons tout d'abord que, une équation $u(z) = a$ étant donnée, les valeurs d'une fonction $G_1(z)$ pour les racines de cette équation peuvent former une suite infinie, mais il est clair que, A étant un nombre absolument quelconque et ε aussi petit qu'on voudra, il n'y aura pas dans cette suite de terme différent de A de moins de ε. Or c'est précisément ce qui arriverait d'après l'équation (I), car on peut admettre que l'intégrale du premier membre a au moins quatre périodes ($p > 1$), et alors pour une valeur donnée de u le premier membre s'approche autant que l'on veut de toute valeur donnée (Jacobi dit autant que l'on veut de zéro ; dans son *Cours* M. Hermite prend une valeur quelconque donnée).

Voilà une des formes que j'ai donnée à la démonstration : mais ce n'est pas la seule que je possède ; et on peut facilement encore montrer que,parmi les valeurs de z donnant une valeur G_1 qui corresponde à $u=\infty$, il y en aura certainement pour lesquelles u cessera d'être uniforme.

Je regrette vivement, dans ma rédaction faite un peu précipitamment et à une époque où j'avais autre chose dans la tête que des théorèmes d'algèbre, d'avoir donné une raison que vous considérez fort bien comme nullement évidente. Je suis heureux cependant que cette circonstance nous ait donné l'occasion d'entrer en relations et j'espère que nos études qui ont tant de points communs la feront souvent renaître.

J'ai suivi avec un bien grand intérêt vos recherches sur les fonctions fuchsiennes. Je crois avoir obtenu un résultat qui vous intéressera dans cette théorie ; il est relatif aux courbes du second genre : les coordonnées d'un point de cette courbe peuvent être exprimées par des fonctions uniformes d'un paramètre. Je n'ai pas encore bien établi l'exacte dépendance entre ces fonctions et vos fonctions fuchsiennes, et j'ai d'ailleurs encore besoin de lever quelques doutes sur certains points du dernier mémoire de M. Fuchs, avant de publier ce résultat.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Em. Picard

II.

[[juillet 1881]]

Monsieur et cher Collègue,

Je comprends très bien les réflexions que vous ont suggérées vos études si remarquables sur les fonctions fuchsiennes à propos de mon théorème sur le genre des courbes algébriques dont les coordonnées peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes (n'ayant que des pôles) d'un paramètre. J'ai été ainsi conduit à serrer de plus près cette démonstration, ce qui m'a amené à traiter en même temps divers autres problèmes, mais je ne suis pas encore en mesure de vous exposer complètement cette étude et je veux seulement vous dire aujourd'hui que la vérité du théorème en question ne me laisse aucun doute. J'avais commencé autrefois ces recherches par l'examen des courbes hyperelliptiques :

$$v^2 = (u-a_1)\dots(u-a_m) \ ,$$

vous trouverez la démonstration dans les *Comptes Rendus* de Juillet 1880[2]. Elle est irréprochable et trouve son point de départ dans un théorème sur les fonctions entières, qui n'a nullement son analogue pour les fonctions qui ne peuvent pas s'étendre au-delà d'un certain cercle. Il y a à cet égard bien des différences entre des fonctions déterminées dans tout le plan et celles qui ne peuvent pas être étendues au-delà d'une certaine courbe, et je ne partage pas votre avis qu'une démonstration qui s'applique à des fonctions méromorphes dans tout le plan doit pouvoir s'appliquer à des fonctions circonscrites à l'intérieur d'un cercle du plan.

La question étant traitée pour les courbes hyperelliptiques est traitée du même coup pour toutes les courbes du second genre, qui se ramènent point par point à une courbe hyperelliptique convenable par une transformation birationnelle. [Théorème énoncé par Clebsch, je crois, pour la première fois, et dont M. Schwarz a repris la démonstration.]

Vous avez pu voir,dans le dernier numéro du *Compte Rendu*, les remarques que j'ai développées sur les fonctions fuchsiennes[3] et où j'ai pris pour point de départ la proposition qui m'avait déjà servi pour la démonstration du théorème qui vient de nous occuper. Je suis bien porté à penser que le théorème dont je vous parlais sur les courbes du second genre peut s'établir par cette voie, en prenant un groupe où le nombre n est suffisamment grand, mais je craindrais, en me lançant dans ces calculs, de rencontrer des résultats trop compliqués pour ne pas me décourager : la fin de l'année et les chaleurs de ce climat me rendent d'ailleurs horriblement paresseux.

Recevez, mon cher Collègue, l'assurance de ma considération très distinguée et permettez-moi de me dire votre ami dévoué.

Em. Picard

III.

[[janvier 1883]]
Paris, samedi

Cher Ami,

J'ai repris la démonstration du théorème relatif au genre des fonctions uniformes liées par une relation algébrique ; on peut même établir d'une manière plus générale que, si entre deux fonctions uniformes d'une variable ayant un nombre fini de points singuliers essentiels il existe une relation algébrique, celle-ci sera du genre zéro ou du genre un. Toutefois je m'appuie sur la proposition suivante relative aux fonctions fuchsiennes, sur laquelle je voudrais bien avoir votre avis.

Etant donnée une relation algébrique

$$(1) \qquad f(x,y) = 0$$

de genre égal ou supérieur à deux : on peut trouver une équation linéaire[4]

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x,y) . v ,$$

φ étant rationnelle, n'ayant d'autres points singuliers que les points analytiques ($x=a$, $y=b$) , valeurs singulières de (1). De plus le quotient de deux solutions ω_1 et ω_2 donne, en posant

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = u ,$$

pour x une fonction fuchsienne de u définie seulement dans le demi-plan telle que le polygone fondamental R n'ait aucun sommet sur l'axe réel, et qu'aucune substitution du groupe ne soit parabolique. Enfin dans le voisinage d'un point singulier $x=a$, $y=b$ [$y=b$ faisant partie d'un système circulaire de p racines] le quotient

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

sera fonction uniforme de $(x-a)^{\frac{1}{p}}$.

Ce théorème étant admis, je raisonne de la manière suivante en copiant presque textuellement ce que j'ai fait autrefois dans mon mémoire sur les fonctions entières[5] ; seulement, au lieu de partir du quotient $\frac{K'}{K}$ de la théorie des fonctions elliptiques, je pars du quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$. Supposons que l'équation $f(x,y) = 0$ soit vérifiée en posant $x=P(z)$, $y=Q(z)$, P et Q ayant les points singuliers essentiels $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Je fais $x=P(z)$ dans

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \ ;$$

vous verrez facilement que cette fonction sera uniforme et continue dans tout contour simple ne contenant pas les points essentiels. Les points $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sont des points critiques pour cette fonction autour desquelles la fonction cesse d'être uniforme. J'étudie la forme de cette fonction dans le voisinage d'un de ces points, en suivant la même marche que dans le travail appelé plus haut et je suis amené à cette conclusion que aucun des points a ne peut être un point singulier essentiel ; d'où suit la démonstration du théorème énoncé. Il est utile pour ma démonstration qu'aucune substitution du groupe indiqué ne soit parabolique.[6]

IV.

[[novembre 1883]]

Cher Ami,

L'étude de la connexité dans les espaces à n dimensions m'a ramené à cette proposition que les périodes d'une fonction de p variables à $2p$ systèmes de périodes ne peuvent être arbitraires. Après un long détour, je me suis aperçu que tout se ramenait à ceci : Raisonnons, pour plus de simplicité, dans le cas de deux variables. Soit $u(x,y)$ une telle fonction. Si

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w \ , \quad x : a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \ , \quad y : b_1 \ , \ b_2 \ , \ b_3 \ , \ b_4 \ ,$$

on a $f(u,v,w) = 0$ et on voit de suite que

$$dx = P\,dv + Q\,dw \qquad x = \int_{v_0,w_0}^{v,w} Pdu+Qdv$$

$$dy = P_1dv+Q_1dw \qquad y = \int_{v_0,w_0}^{v,w} P_1du+Q_1dv$$

où les P et Q sont fonctions rationnelles de u,v,w .

Or si l'on fait $w=w_0$, x et y deviennent des intégrales abéliennes de v . Les périodes de ces intégrales sont des multiples des intégrales de la première,et la relation entre les périodes de deux intégrales abéliennes conduit à la relation cherchée entre les périodes de la fonction u . Cette relation aura la forme

$$\Sigma\, c_{ik}(a_ib_k-a_kb_i) = 0 \qquad i,k = 1,2,3,4\ .$$

On démontre d'ailleurs, comme je l'ai fait dans mon étude sur la réduction, que le déterminant des c_{ik} n'est pas nul ; la relation ne sera certainement pas une identité.

Vous m'avez dit autrefois que vous aviez aussi une méthode pour la démonstration du susdit théorème ; est-ce là votre marche ou quelque chose d'approchant ? En tous cas, je ne veux pas publier cela, puisque vous vous en êtes occupé de votre côté ; je me rappelle seulement que,dans une conversation au Luxembourg, vous étiez gêné par la crainte d'une relation identique. Peut-être, si vous le jugez à propos, pourrions-nous publier en commun une petite note à ce sujet dans les *Comptes Rendus*[7].

Votre bien dévoué.

Em. Picard

V.

Mon cher Ami,

A la suite de notre conversation de l'autre jour, j'ai pris le Mémoire de Madame de Kowalevski pour avoir l'énoncé de Weierstrass.

Le théorème que j'ai donné autrefois pour $\rho = 2$ ne coïncide pas entièrement avec celui de Weierstrass, et pour ma tranquillité personnelle j'ai tenu à vérifier directement que de la forme de Weierstrass on pouvait passer à la mienne.

Vous pouvez insérer les deux pages que je vous envoie dans notre *Bulletin* à la suite des démonstrations que vous donnez des théorèmes de Weierstrass[8].

Je vous serre bien cordialement la main.

Em. Picard

Paris, le 30 octobre 1884.

VI.

Paris,le 19 octobre 86.

Mon cher Ami,

Je vous remercie beaucoup de la délicate attention exprimée par votre lettre. Je n'avais plus l'intention de faire communication à l'Académie sur la théorie des surfaces ; mais je puis cependant, dans le numéro des *Comptes Rendus* où vous ferez connaître votre mode de raisonnement, insérer une très courte note, avec une indication succincte de la démonstration que voici très rapidement[9]. On démontre d'abord que, sous l'hypothèse faite, la relation entre les deux points correspondants (x,y,z) et (x',y',z') peut s'écrire sous forme différentielle, c'est-à-dire après l'élimination des deux arbitraires

$$P(x,y,z)\ dx + Q(x,y,z)\ dy = P(x',y',z')\ dx' + Q(x',y',z')\ dy'$$
$$P_1(x,y,z)\ dx + Q_1(x,y,z)\ dy = P_1(x',y',z')\ dx' + Q_1(x',y',z')\ dy'$$

où les P et Q sont rationnels en x,y,z .

On voit de suite que $Pdx+Qdy$ et P_1dx+Q_1dy doivent être des différentielles totales exactes ; et enfin en posant

$$P\ dx + Q\ dy = du$$
$$P_1dx + Q_1\ dy = dv$$

on a x,y,z en fonctions uniformes de u et v . Telle est la forme à laquelle je me suis arrêté.[10]

VII.

Paris, vendredi
[[juin 1897]][11]

Mon cher Ami,

La notion de période dans les intégrales doubles considérées peut en quelque sorte se généraliser de deux manières différentes. Celle dont je me suis occupé précédemment est celle qui se présente naturellement quand on veut considérer l'intégrale double

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\frac{Q\,dx\,dy}{f'_z}$$

comme fonction de x et y. On a alors les expressions indiquées

$$\int_{u_0}^{U_0}\int_{v_0}^{V_0} G(u,v)\;du\;dv$$

où dans le plan u, si l'on veut, va de u_0 à U_0, et v de v_0 à V_0, en suivant d'ailleurs des chemins qui importent peu.

On peut se placer à un tout autre point de vue, comme je l'ai remarqué il y a longtemps. Considérons le domaine fondamental δ, et adoptons la terminologie dont je me sers pour définir p_1, p_2, p_3 [voir, par exemple, mon mémoire sur les fonctions hyperabéliennes[12]]. Considérons dans δ un espace *fermé* à *deux* dimensions ; et prenons l'intégrale double

$$\iint G(u,v)\;du\;dv$$

étendue à cet espace. Voilà le second type de périodes bien distinct évidemment du précédent. Le nombre p_2 jouera certainement un rôle dans la théorie de ces expressions.

Le fait que les coordonnées d'un point de la surface s'expriment par des fonctions hyperabéliennes de u et v me sert à fixer les idées, mais il est manifeste que cela s'étend au fond à toute surface.

Votre bien dévoué.

Em. Picard

VIII.

[[juin 1897]]

Cher Ami,

J'avais bien pensé d'après votre lettre de dimanche que nous étions du même avis, car vous aviez sans doute oublié ma définition des surfaces *fermées*, telles que je les considère dans les questions de connexité.

Quant à mes périodes de la seconde manière, vous pensez bien que je n'ai jamais douté un instant qu'elles ne fussent des constantes, et leur nombre tient très intimement à p_2 (connexité du 2^e ordre).

J'espère que ce beau temps va vous débarrasser de vos douleurs, et je vous souhaite bonne santé en vous serrant cordialement la main.

Em. Picard

IX.

Paris, mardi [[1898]]

Cher Ami,

Quand nous avons, M. Simart et moi, étudié votre mémoire (*Analysis situs*[13]), voilà le point qui nous a gênés ; je le trouve signalé dans mon exemplaire avec un point d'interrogation. C'est au haut de la page *44* : "mais, si elle a lieu par rapport..." .

De notre côté, en nous bornant au seul cas utile pour la théorie des surfaces ($m = 1$), nous faisons une hypothèse sur les variétés fermées E_n (voir au bas de la page 45, et page 46 de notre *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* [[Paris(Gauthier-Villars), 1897]]). Elle nous a paru à ce moment plausible ; actuellement je n'en suis plus aussi convaincu. Je ne puis malheureusement pas suivre le danois de notre auteur, pour voir au juste ses objections.

Je m'occupe, comme vous, des périodes des intégrales doubles, mais particulièrement au point de vue des nombres invariants dans la théorie des surfaces[14]. J'y trouve une mine de paradoxes, et de grandes difficultés à évaluer *exactement* le nombre p_2 .

Bien à vous.

Em. Picard

X.

Lundi soir, 9 Déc. 1901

Cher Ami,

En revenant de l'Académie, j'ai songé à la question que vous me posiez. Il ne peut y avoir aucune espèce d'hésitation ; on voit très aisément que les périodes que vous trouvez[15] rentrent dans mon type :

$$\Sigma \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy \;.$$

Vous me feriez plaisir maintenant, en regardant ma note du 22 avril 1901 *Sur les résidus et les périodes des intégrales doubles de fonctions rationnelles*[16]. La fonction rationnelle que j'y étudie, qui a *des périodes* mais *pas de résidus*, me paraît appeler l'attention sur une circonstance curieuse, peut-être assez gênante.

Bien affectueusement à vous.

Em. Picard

XI.

Cher Ami,

Je crois devoir vous donner en quelques mots le raisonnement, fondamental pour mon analyse, par lequel j'établis le résultat énoncé dans ma dernière note que tous les A sont des périodes de l'intégrale double[17]. J'y énonçais seulement qu'on peut construire un certain continuum fermé à deux dimensions conduisant à la période A. Voici la démonstration.

Soit ω une période pour la surface de Riemann $f(x,\overline{y},z) = 0$ se reproduisant, au terme près $m_1\Omega_1(y)$, quand y tourne autour de b_1. Cette rotation engendre un continuum à deux dimensions avec le bord m_1C_1 [C_1 correspondant à $\Omega_1(\overline{y})$].

Chacune des quantités $\Omega_1,\ldots,\Omega_{2p},\Omega_h$ donnera de même un continuum analogue. Tous ces continuums, avec la portion de surface de Riemann $f(x,\overline{y},z) = 0$ limitée par les mC, forment une surface fermée et l'intégrale correspondante est

$$\Sigma\, m_i \int_{\overline{y}}^{b_i} \Omega(y)\, dy$$

évidemment indépendante de $\overline{y}$. C'est la période indiquée.

Bien à vous.

Em. Picard

Paris, 10 Décembre 1901.

XII.

Cher Ami,

Dans cette question des cycles à deux dimensions, que nous travaillons tous deux actuellement, je tiens essentiellement à vous dire avec la plus grande sincérité les points que je possédais depuis longtemps, et ceux qui ont pu plus ou moins directement m'être suggérés par des conversations avec vous.

En fait, comme vous savez, j'ai commencé par porter mon attention sur ce que j'appelais les cycles de l'équation linéaire E ; ceci m'a conduit aux expressions

$$A = \Sigma\, m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy$$

(on a $\Sigma\, m_i\, \Omega_i(y) = 0$).

C'étaient peut-être des A particuliers ; je me suis demandé alors si tous les A étaient des périodes (au sens le plus large), et j'ai montré que oui, en faisant le raisonnement que je vous ai envoyé hier, et auquel j'ai fait allusion dans ma dernière note. *J'ai eu alors mes* $N = 2p$ *périodes.*

Quant à la question de savoir si ces périodes pouvaient toutes être engendrées par des combinaisons de périodes, telles que je les avais d'abord envisagées, c'était une idée fixe dans mon esprit qu'il en était ainsi. J'en ai eu ou j'ai cru en avoir une démonstration, mais je ne la trouve pas dans mes notes, tandis que les points visés plus haut ont été rédigés pendant les vacances tout en détail. Je viens de faire quelques efforts pour retrouver cette démonstration, mais je suis trop énervé en ce moment par différentes choses et j'y renonce momentanément.

Sur la question de la réduction des $N-2p$ périodes trouvées plus haut, je n'ai rien rédigé de précis et une indication importante cependant est seulement relative à ceci de définitif :

Soient les $N-2p$ quantités

$$A = \Sigma\, m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy\ .$$

Elles ne dépendant pas de a . Donc, si on fait décrire à a une courbe fermée, on obtiendra une relation

$$\Sigma\, \mu_i A_i = 0$$

(μ_i entier). Il y aura donc, en employant tous les chemins possibles pour a , un certain nombre de relations de cette forme (nombre évidemment fini). Si il y en a

π de distincts, on aura *au plus* $N-2p-\pi$ périodes distinctes.

Je n'ai pas voulu viser ce point dans ma note, me réservant de l'approfondir, et je n'ai fait allusion qu'à un cas très particulier.

Je n'avais rien de plus, que quelques craintes et embarras que j'exprime à la fin de ma note. Maintenant, sur votre affirmation de lundi, qui revient à dire que toutes les périodes de l'intégrale double reviennent aux quantités que j'appelle A , je crois bien pouvoir établir la chose sans trop de peine ; mais sur ce que les périodes sont en nombre $N-2p-\pi$, résultat bien vraisemblable, j'ai encore quelques doutes.

Les périodes singulières me préoccupent aussi un peu ; la chose me paraît moins simple qu'à vous.

J'ai tenu, cher ami, à vous faire connaître l'état exact de mes recherches avant que nous n'ayons parlé de ce sujet, sur lequel j'avais réfléchi à diverses reprises sans jamais le creuser complètement.

Bien à vous.

Em. Picard

11 Décembre 1901.[18]

NOTES

1 Sur les lettres de Poincaré à Picard voir la note 1 des *Lettres de Charles Hermite.*

Le mémoire de Picard est *Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique, et sur une classe d'équations différentielles* (Bulletin des Sciences mathématiques, 4(1880), 416-433 ; novembre) = *Oeuvres*, t.II, p.39-55, Paris(C.N.R.S.), 1979.

2 *Sur une propriété des fonctions et des courbes algébriques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 91(1880), 214-217 ; 26 juillet) = *Oeuvres*, t.I, p.61-64, 1978.

3 *Sur les expressions des coordonnées d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 92(1881), 1332-1334, 6 juin) = *Oeuvres*, t.I, p.73-76.

4 Exposé dans la note : *Sur les fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 96(1883), 476-479 ; 19 février) = *Oeuvres*, t.I, p.95-98.

5 *Mémoire sur les fonctions entières* (Ann. ENS, 9(1880), 145-166) = *Oeuvres*, t.I, p.39-60.

6 Nous n'avons pas la photocopie de la fin de cette lettre.

7 E. Picard et H. Poincaré : *Sur un théorème de Riemann relatif aux fonctions de n variables indépendantes admettant 2n systèmes de périodés* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 97(1883), 1284-1287 ; 3 décembre) = *Oeuvres* de Picard, t.I, p.109-112.

8 Nous n'avons pas trouvé insérées les deux pages de Picard à la suite de l'article de H. Poincaré : *Sur la réduction des intégrales abéliennes* (Bulletin Soc. Math. France, 12(1884), 124-143).

9 E. Picard, *Sur les surfaces algébriques susceptibles d'une double infinité de transformations birationnelles* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 103(1886), 730-732; 26 octobre).

H. Poincaré, *Sur la transformation des surfaces en elles-mêmes* (mêmes Comptes Rendus, p.732-734).

10 Nous arrêtons ici la transcription de cette lettre, car il manque une partie de la suite sur notre photocopie.

11 Cette lettre concerne la Note de E. Picard : *Sur les fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux variables* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 124(1897), 1490-1491 ; 28 juin) = *Oeuvres*, t.I, p.189-190.

12 *Sur les fonctions hyperabéliennes* (Journal Math. pures et appl., 1(1885), 87-128) = *Oeuvres*, t.I, p.543-584.

13 (Journal de l'Ecole Polytechnique, (2), 1[e] Cahier, 1895, 1-123) = *Oeuvres*, t.VI, p.193-288, Paris(Gauthier-Villars), 1953 ; pages 44 - 227.

14 *Sur la réduction des intégrales doubles et sur un nouvel invariant dans la théorie des surfaces algébriques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 126(1898), 297-300 ; 24 janvier) = *Oeuvres*, t.III, p.453-456, Paris(C.N.R.S.), 1980.

15 H. Poincaré, *Sur la connexion des surfaces algébriques* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 133(1901), 969-973 ; 9 décembre).

Poincaré écrit (p.969) :

"Une Note importante de M. Picard a récemment attiré de nouveau l'attention sur la question de la connexion des surfaces algébriques. Je crois devoir dire quelques mots de certains résultats que j'ai obtenus sur ce sujet."

16 (Comptes Rendus Acad.Sci. Paris, 132(1901), 929-931) = *Oeuvres*, t.III, p.559-561.

17 *Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 133(1901), 795-800 ; 18 novembre) = *Oeuvres*, t.III, p.563-568 .

18 Il existe encore une lettre de E. Picard, qui doit être du début de 1903, car elle concerne "la succession prochaine de M. Darboux au décanat". Or Darboux a été doyen de la Faculté des Sciences de Paris du 12 novembre 1889 au 4 mars 1903. E. Picard n'a pas été élu doyen à la place de Darboux, comme on peut le voir p.15 du livre de E. Lebon : *Emile Picard*, seconde édition, Paris(Gauthier-Villars), 1914.

Florent Bureau nous écrit dans sa lettre du 21 octobre 1984 qu'il y a une lettre de Picard à Paul Mansion "belle, mais sévère pour Poincaré". D'après Alain Brieux, la correspondance adressée à P. Mansion a été achetée par la Bibliothèque Royale de Bruxelles. Or, Georges Dogaer, chef de la Section des Manuscrits de la Bibliothèque Royale Albert I[er], nous écrit le 4 mars 1985 que "la section des manuscrits ne possède pas la correspondance de Paul Mansion avec Emile Picard".

LETTRES DE SALVATORE PINCHERLE

I.

Bologne, le 17 Mars 1881.

Monsieur,

Bien que n'ayant pas l'honneur de vous connaître, je prends la liberté de vous adresser deux Notes d'Analyse que j'ai publiées l'an dernier sur des sujets qui me semblent avoir quelque analogie avec ceux que vous traitez[1] d'une façon si remarquable et dont j'ai pu voir un extrait dans les derniers fascicules des *Comptes Rendus*[2].

J'espère que vous voudrez bien m'excuser si j'ai pensé que pareille liberté était permise entre personnes qui cultivent la même partie de la même science ; et je me permets en même temps de vous demander un exemplaire des Mémoires que vous avez déjà publiés ou que vous publierez sur des sujets analogues.

Je crois que la détermination des fonctions ayant la propriété

$$f(x) = f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$$

(et sans autres points singuliers que ceux qui sont exigés par l'équation précédente) résulte immédiatement de mes deux notes[3].

Dans l'espoir que vous voudrez bien pardonner la liberté que j'ai prise et jeter un coup d'oeil sur ces deux Notes, je vous prie d'agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus distingués.

Dr Salvator Pincherle
professeur à l'Université Royale de Bologne
(Italie)

II.

Bologne, le 10 Juin 1882

Monsieur le Professeur,

L'obligeance avec laquelle vous avez bien voulu répondre à une lettre,que j'ai pris la liberté de vous adresser l'année dernière[4], m'encourage à vous écrire de nouveau. Je viens cette fois vous soumettre une ébauche de *programme*, dont le but est d'exposer [à des élèves d'un cours supérieur d'Analyse] l'énoncé des principaux problèmes dont s'occupent actuellement les spécialistes de la théorie générale des fonctions ; et c'est à vous, qui prenez place parmi les plus distingués, que je viens demander si l'insuffisance de mes connaissances ne m'a pas éloigné par trop de la vérité.

Ebauche d'une classification des problèmes de la théorie générale des fonctions.

Il me semble que les principaux problèmes qui forment l'objet de la théorie générale des fonctions puissent se partager en quatre grandes classes :

A. "Etant donné un élément de fonction analytique, reconnaître les propriétés de la fonction qu'il définit."

On sait (Weierstrass) qu'un élément de fonction sert à définir la fonction dans tout le champ de sa validité ; et l'on obtient la valeur, ou les valeurs, de la fonction pour tous les points de ce champ au moyen de la continuation (*Fortsetzung* [[= prolongement]]) de proche en proche. Mais cette méthode est peu pratique pour faire connaître :

1° Les limites du champ de validité.

2° Si la fonction est uniforme ou multiforme.

3° Si elle satisfait à une équation algébrique, ou à une équation algébrico-différentielle, ou si elle appartient à une classe connue de fonctions.

Il semble donc que l'un des principaux problèmes de la théorie des fonctions devrait être le suivant : "Reconnaître, par la loi des coefficients de l'élément, les trois caractères sus-énoncés dans la fonction."

J'ignore si ce problème a été résolu, hors le cas des *séries récurrentes*, et des *séries hypergéométriques*.

B. "Quelles sont les fonctions qui peuvent s'exprimer au moyen de *formes arithmétiques* déterminées ?"

Une forme arithmétique, qui ne contient que les 4 opérations en nombre fini, représente une fonction rationnelle et ne donne lieu à aucune observation. Mais si la forme contient des opérations en nombre infini (séries, produits infinis ou fractions continues), on se trouve en présence des problèmes de cette seconde classe :

"Convergence ou divergence de la forme arithmétique. Champ de convergence, à une ou deux dimensions. Si le champ est à deux dimensions, la forme représente-t-elle une fonction analytique, et dans quel cas ?"

Ces questions sont résolues en partie pour les séries ; *j'ignore* si elles ont été traitées pour les produits infinis ou les fractions continues (sauf la première).

Pour les séries, la convergence *au même degré* (*gleichmässig* [[= uniforme]]) donne un critérium pour reconnaître si la série représente une fonction analytique, quand en outre le champ de convergence est à deux dimensions (Weierstrass : *Zur Functionenlehre*[5]), mais c'est une condition suffisante, et non nécessaire. Je ne crois pas que cette condition ait été étendue à d'autres formes arithmétiques que les séries.

A cette classe se rattachent encore les problèmes ayant pour but la construction de fonctions avec les zéros ou des infinis déterminés : résolus par Betti, Weierstrass, Mittag-Leffler, et récemment étendus aux fonctions multiformes par Picard.

Un des résultats les plus importants obtenus dans cette classe de problèmes est le fait analytique qu'une seule et même forme arithmétique peut représenter deux fonctions analytiques différentes : c'est-à-dire qui ne peuvent se déduire l'une de l'autre par *continuation*.

Enfin à cette même classe de problèmes se rattache l'étude des séries de la forme $\Sigma\, a_n P_n(x)$, où les fonctions $P_n(x)$ constituent un système donné. (Séries de Fourier, de fonctions sphériques, de Frobenius, de Lindemann, etc.) En particulier, en quels cas ces séries peuvent-elles être des développements de zéro.

C. "Recherche des fonctions qui satisfont à une propriété donnée, dans tout le champ de validité."

Cette classe de problèmes comprend la résolution des équations finies (fonctions implicites), des équations différentielles, et des équations fonctionnelles ; et, d'abord, la démonstration de la possibilité de la solution au moyen des fonctions analytiques (Cauchy et Weierstrass).

D. Enfin, les problèmes de la dernière classe sont ceux qui regardent la manière d'être de la fonction aux limites de son champ de validité ; ainsi :

"Manière d'être d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier (Weierstrass).

Manière d'être d'une fonction multiforme dans le voisinage d'un point de diramation[6] (Riemann).

Détermination d'une fonction uniforme ayant un nombre donné de points singuliers (Weierstrass).

Fonctions à espaces lacunaires (Weierstrass, Poincaré).

Manière d'être d'une fonction le long d'une ligne, soit un contour du champ de validité, soit la circonférence de convergence de l'un de ses éléments : d'où les fonctions de variable réelle (Dirichlet, Dini, Cantor).

Excusez-moi, Monsieur, si je n'ai pu résister au désir de soumettre mes idées sur la théorie des fonctions à une personne compétente : cette branche des mathématiques est un peu négligée dans le milieu où je vis, et je n'ai pas cru, en commençant ma carrière, devoir me fier trop exclusivement à moi-même[7]. Dans l'espoir que vous voudrez bien pardonner mon importunité, je vous prie d'agréer, Monsieur le Professeur, l'assurance de mes sentiments les plus distingués.

S. Pincherle
Professeur à l'Université royale de Bologne[8]

V.

Bologne, le 15 février 1884

Monsieur,

Je vous remercie de l'envoi de la *Notice sur vos travaux scientifiques*[9], et je regrette de ne pouvoir vous exprimer mieux mon admiration sincère pour ces beaux travaux, accomplis dans un laps de temps si court. Je souhaite, pour vous et pour la Science, que ces travaux soient le prélude d'autres plus importants encore. J'espère que vous voudrez bien continuer à m'adresser vos publications, que je regrette de ne pouvoir échanger qu'avec des notes de peu d'importance.

Je me permets une petite remarque. Le théorème sur une ou plusieurs fonctions implicites d'un nombre quelconque de variables, donné dans votre thèse inaugurale[10] (cité à la p.40 de la *Notice*), a été donné aussi par M. Weierstrass dans son cours d'Introduction à la théorie des fonctions analytiques, auquel j'ai assisté en 1878[11]. Je ne crois pas cependant que M. Weierstrass ait jamais publié ce théorème, ni les nombreux corollaires qu'il en déduit.

Croyez, Monsieur, l'assurance de ma plus haute estime.

S. Pincherle[12]

NOTES

1 S. Pincherle, *Sulle funzioni monodrome aventi un'equazione caratteristica* (Ist. Lomb. Rendiconti, Milano, 12(1879), 536-542) et *Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome* (Giornale di Matematiche, 18(1880), 92-136).

2 H. Poincaré, *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 92(1881), 333-335, 14 février ; 395-398, 21 février).

3 Voir, en particulier, p.121-136 du mémoire de 1880.

4 Malgré tous nos efforts, nous n'avons pas pu savoir où se trouvent les papiers laissés, s'ils existent, par S. Pincherle.

5 (Monatsberichte Akad. Wissenschaften Berlin, 1880, 719-743) = *Math. Werke*, t.II, p.201-223, Berlin(Mayer und Müller), 1895.

6 Pincherle francise ici le mot italien *diramazione* = ramification.

7 Sur S. Pincherle (1853-1936) voir [5], t.X, p.610.

8 S. Pincherle écrit dans sa lettre du 22 juin 1882 :

"Je vous suis bien reconnaissant pour la réponse que vous avez bien voulu faire à une lettre que je craignais indiscrète, et cette réponse a servi à compléter en plusieurs points le Plan de mon cours."

Il écrit le 3 novembre 1883 :

"Je vous dois des remerciements infinis pour la bonté que vous avez eue de m'envoyer les beaux mémoires que vous avez publiés dans le Journal de M. Mittag-Leffler [[*Théorie des groupes fuchsiens* (Acta Math., 1(1882), 1-62) ; *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (1(1882), 193-294) ; *Sur les fonctions de deux variables* (2(1883), 97-113)]]. J'ai lu avec grand intérêt celui sur les fonctions de deux variables, qui jette un nouveau jour sur la théorie si difficile de ces fonctions. [[...]]

Je suis heureux que mon mémoire vous ai offert quelque intérêt [[*Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi* (Annali Mat. pura e appl., (2), 12(1883-1884), 11-41, 107-133)]] ; ce n'est qu'un premier essai dans un champ qui me semble devoir être fertile, et je n'ai pas eu la prétention de résoudre, ni même d'énoncer les principaux problèmes qui peuvent se présenter sur ce sujet."

9 Paris(Gauthier-Villars), 1884.

10 *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, Paris(Gauthier-Villars), 1879 = *Oeuvres*, t.I, p.XLIX-CXXIX.

11 Voir S. Pincherle : *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. C. Weierstrass* (Giornale di Matematiche, 18(1880), 178-254, 314-357).

12 Pincherle écrit dans sa lettre du 18 septembre 1885 :

"Je viens de lire votre Mémoire de l'*American Journal of Mathematics* [[t.7, p.203-258 : *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies*. Il y cite, p.244-245, le mémoire de Pincherle indiqué dans la note 8]]. Je vous félicite d'avoir su si bien résoudre les questions analogues à celles que j'ai traitées."

Il écrit encore dans sa lettre du 27 novembre 1888 :

"Puisque vous vous êtes occupé de questions analogues, je prends la liberté de vous soumettre quelques-uns de ces résultats parmi les plus simples."

LETTRE D'HENRI POINCARÉ

Paris, le 15 juin 1882[1]

Monsieur le Professeur,

Je vous remercie beaucoup de votre intéressante lettre et des aperçus nouveaux et ingénieux qu'elle renferme. C'est bien ainsi, ce me semble, qu'il convient d'exposer la théorie générale des fonctions si l'on veut bien faire comprendre le véritable sens des problèmes qu'on a à traiter.

Le problème qui consiste à reconnaître,d'après les coefficients d'un développement en série de puissances, quelles sont les propriétés essentielles de la fonction représentée par ce développement est loin d'être résolu, comme vous le faites fort bien remarquer et il y a encore beaucoup à faire dans ce sens.

Vous citez le cas des séries récurrentes et celui des séries hypergéométriques ; je pense que vous comprenez sous ce dernier nom, non seulement la série de Gauss, mais toutes les séries représentant des intégrales d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels ; il y a en effet entre p coefficients consécutifs d'une pareille série (tout à fait analogue à la série de Gauss) une relation linéaire de récurrence dans laquelle entre le rang n du premier de ces p coefficients. Voilà donc une condition qui permet de reconnaître d'après la loi des coefficients si la série satisfait à une équation linéaire ; et par conséquent *si elle représente une fonction algébrique.*

Il y a aussi des cas où la loi des coefficients montre immédiatement quel est le champ de validité de la fonction ; je ne parle pas seulement ici du cas simple des séries convergentes dans tout le plan ; mais des séries telles que celles-ci

$$\Sigma \frac{x^{3^n}}{2^n} \qquad \text{ou} \qquad \Sigma\, \varphi_p(n)\, x^n ,$$

où $\varphi_p(n)$ représente la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des diviseurs de n. On voit immédiatement en effet que le champ de validité est le cercle de rayon 1 et de centre 0.

Je passe au second de vos problèmes : étant donné un développement en série, ou un produit infini, ou une fraction continue, reconnaître si ce développement représente une fonction analytique. Le cas du produit infini se ramène aisément à celui de la série traité par Weierstrass ; il suffit de passer aux logarithmes. Quant au cas des fractions continues, je ne crois pas qu'il ait été approfondi comme il mériterait de l'être.

Il est encore une autre classe de problèmes qui sont un peu différents de ceux dont vous parlez, ce sont ceux qui se rattachent à l'*aenliche Abbildung*[2] d'un contour sur un autre et au principe de Dirichlet.

Malheureusement beaucoup de ces problèmes ont été longtemps traités sans une rigueur suffisante, mais on en trouve une solution rigoureuse dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, octobre 1870, page 767 et suivantes, dans un mémoire de M. Schwarz[3].

Oserais-je vous demander un service, ce serait de me dire ce que c'est que la *Revue Universelle* qui se publie à Voltri ; est-ce un journal auquel un géomètre ait intérêt à s'abonner ?

Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

NOTES

1 La transcription de cette lettre a été faite par S. Francesconi - transcription qui sera publiée dans sa *tesi di laurea* - et cette lettre nous a été envoyée par U. Bottazzini le 15 septembre 1986.

2 Application bijective.

3 P.144-171 du tome II des *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin(Springer), 1890.

LETTRE DE VICTOR SCHLEGEL

Sur V. Schlegel (1843-1905) voir [1], t.III, p.1193-1194 ; t.IV, p.1331 et t.V, p.1112.

La lettre de Schlegel du 19 mai 1887 concerne "la répartition des matières pour le répertoire bibliographique".

Lettres de Ludwig SCHLESINGER

Sur L. Schlesinger(1864-1933), gendre de Lazarus Fuchs, voir [1], t.IV, p.1332 et t.VI, p.2328.

Il écrit dans sa lettre du 7 mai 1892 :

"Dans un mémoire inséré au tome 105 du *Journal* de Crelle [[*Zur Theorie der Fuchsschen Functionen* (Journal reine und angew. Math, 105(1889), 181-232)]] dont je m'avais aussi fait l'honneur de vous offrir un tirage à part, j'ai montré, en suivant la voie que vous avez ouverte dans votre admirable mémoire du t.IV des *Acta* [[*Sur les groupes des équations linéaires* (Acta Math., 4(1884), 197-311)]], que les fonctions fuchsiennes symétriques de la deuxième famille et du genre zéro peuvent être représentées comme les limites de certaines fonctions algébriques, qui correspondent à une série de sous-groupes du groupe des dites fonctions.

Essayant de généraliser ce mode de génération au cas des fonctions fuchsiennes non symétriques, je vous prie Monsieur de vouloir permettre que je vous fasse part en quelques lignes des résultats auxquels je suis parvenu."

Ces résultats ont été publiés dans les notes de Schlesinger : *Sur la théorie des fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 114(1892), 1100-1102, 1409-1412).

Il écrit le 14 avril 1904 :

"Je me permets de vous transmettre ci-joint deux Notes qui peut-être trouverons votre approbation pour être présentées à l'Institut. J'y ai réussi de démontrer l'existence des fonctions satisfaisant au problème de Riemann, sans imposer aux substitutions fondamentales aucune restriction, en m'appuyant sur un théorème que j'énonce dans la première note (dont la démonstration, d'ailleurs assez pénible, sera donnée dans un mémoire destiné au *Journal* de Crelle), et en appliquant ensuite vos principes de la méthode de continuité."

La première Note : *Sur la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires* a été publiée dans le tome 138(1904), p.955-956 (séance du 18 avril), mais la deuxième : *Sur une solution nouvelle et générale du problème de Riemann*, n'est pas parue et se trouve encore parmi les papiers laissés par Poincaré.

LETTRES DE HERMANN AMANDUS SCHWARZ

Sur H.A. Schwarz voir [5], vol. XII, p.245-247.

Il écrit dans sa lettre du 31 octobre 1884 (les deux lettres de Schwarz ont étées transcrites par Olaf Neumann) :

"Die *mathematische Classe* der hiesigen [[Göttingen]] Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften beabsichtigt, wie sie in ihrer heutigen Sitzung *mit Einstimmigkeit* beschlossen hat, Sie bei Gesammtsocietät zur Wahl als correspondierendes Mitglied der mathematischen Classe in Vorschlag bringen. Am Sonnabend, den 8ten November, wird die Gesammtsocietät durch Kugelung über diesen Vorschlag abzustimmen haben. Ich zweifle nicht, daß diese Wahl mit überwiegender Majorität dem Antrage der Classe gemäss vollzogen werden wird, wenn Sie sich antschliessen, mich möglichst bald zu vergewissern, dass Sie Willens sind, die von unserer Classe Ihnen zugedachte Ehre, durch welche unsere Classe zugleich sich selbst zu ehren wünscht, anzunehmen, falls die Wahl dem Antrage der Classe gemäss erfolgt."

Schwarz écrit dans sa lettre du 8 novembre 1884 :

"Indem ich Ihnen für Ihren liebenswürdigen Brief vom 2ten dieses Monats meinen verbindlichsten Dank ausspreche, theile ich Ihnen mit, dass unsere Gesellschaft der Wissenschaften Sie heute mit Einstimmigkeit zum Correspondenten der mathematischen Classe erwählt hat."

M. Simon, syndic de l'*Akademie der Wissenschaften zu Göttingen*, a bien voulu nous envoyer la lettre de présentation de Poincaré par H.A. Schwarz, datée d'octobre 1884, ainsi que celle de E. Schering, du 29 octobre 1892, proposant Poincaré comme membre ordinaire de l'Académie des Sciences de Göttingen.

LETTRE DE PAUL STÄCKEL

Sur P. Stäckel voir [5], vol. XII, p.599.

Il signale à Poincaré dans sa lettre du 18 octobre 1899 une démonstration incomplète p.141-144 du tome I de [2], en lui donnant un contre-exemple que lui a envoyé T. Levi-Civita.

LETTRES DE VLADIMIR ANDREEVITCH S T E K L O V

Sur V.A. Steklov (1864-1926) voir [5], vol. XIII, p.25-28.

A.P. Youschkevitch nous informe dans sa lettre du 22 octobre 1984 que les lettres de Poincaré à Steklov se trouvent à Leningrad.

Steklov écrit dans sa lettre du 29 octobre 1897 :

"Vos recherches ingénieuses sur les divers problèmes de la physique mathématique me rendent sûr que vous avez un grand intérêt aux questions de ce genre. C'est pourquoi je me décide à présenter à votre attention mes recherches sur les deux problèmes les plus intéressants, à savoir : sur le problème de la distribution de l'électricité et le problème de C. Neumann.

[[...]]

Je vous envoie une courte Note."

Il s'agit de la : *Le problème de la distribution de l'électricité et le problème de C. Neumann* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 125(1897), 1026-1029).

Steklov écrit le 28 avril 1898 :

"Je vous prie d'agréer mes remerciements les plus vifs pour la présentation de ma Note *Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur* [[(Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 126(1898), 1022-1025)]], que vous avez bien voulu faire à l'Académie des Sciences le 4 Avril 1898. Permettez-moi aussi d'appeler votre attention sur quelques applications de la méthode, indiquée dans la Note.

[[...]]

Je ne veux pas en ce moment publier ces recherches, je voudrais seulement appeler votre attention sur quelques application de la méthode."

Il écrit le 10 février 1899 :

"Permettez-moi de vous prier de présenter à l'Académie une Note : *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique* [[(Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 128(1899), 588-591)]], que j'ai l'honneur de vous envoyer avec cette lettre.

Bien que d'après vos recherches ingénieuses il reste peu de faire pour ramener la solution des questions les plus importantes de la Physique Mathématique en un système de raisonnements autant que possible simples, ce problème cependant n'est pas encore résolu."

A.P. Youschkevitch a bien voulu nous envoyer la transcription des deux lettres de Poincaré à Steklov qui se trouvent à la Section de Leningrad des Archives de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.

LETTRES DE XAVIER STOUFF

Sur X. Stouff (1861-1903) voir [1], t.IV, p.1451.

X. Stouff a passé sa thèse *Sur la transformation des fonctions fuchsiennes*, Paris (Gauthier-Villars), 1888, le 16 juillet 1888 devant un jury dont G. Darboux était président et E. Picard et H. Poincaré examinateurs. Elle est dédiée à P. Appell et J. Tannery.

Il écrit (p.3) :

"Ce travail a son origine dans les Ouvrages de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes. Il se divise en deux Parties. La première est relative à la théorie des sous-groupes [[...]]. Le § IV a été consacré aux sous-groupes distingués [[...]] l'isomorphisme de certains groupes."

X. Stouff écrit dans sa lettre du 13 janvier 1888 :

"J'ai revu mon travail suivant les indications que vous avez eu la bonté de me fournir, et j'ai l'honneur de vous le renvoyer sous sa nouvelle forme."

Dans sa lettre du 23 décembre 1890, X. Stouff envoie à Poincaré une note : *Sur la formation de groupes fuchsiens*, qui se trouve toujours dans la correspondance de Poincaré, mais qui n'a pas été présentée à l'Académie des Sciences de Paris.

Lettre d'Eduard STUDY

Coburg, 11. 11. 86.[1]

Sehr geehrter Herr !

Mit Untersuchungen ueber Transformationsgruppen beschaeftigt, fand ich vor Kurzem einige Saetze, welche sich auf den Zusammenhang dieser Theorie mit der Theorie der complexen Zahlen beziehen. Man theilt mir aus Leipzig mit, dass Sie sich mit aehnlichen Fragen beschaeftigt haben und zu aehnlichen Resultaten gelangt sind. Leider ist mir die betreffende Literatur im Augenblicke unzugaenglich. Duerfte ich mir wohl erlauben, Sie, falls es Ihnen möglich ist, um freundliche Uebersendung eines Exemplares Ihrer Abhandlung (wenn auch nur leihweise) zu bitten ?

Selbstverstaendlich wuerde ich mich, im Falle ich spaeter ueber einen derartigen Gegenstand etwas drucken liesse (selbstverstaendlich mit vollster Anerkennung Ihrer Prioritaet), durch Uebersendung meiner Bemerkungen erkenntlich zu zeigen suchen.

Die Saetze, zu welchen ich gelangt bin, sind im Wesentlichen die folgenden :

1). Zu jeder Gruppe von linearen Transformationen, welche eine lineare Mannichfaltigkeit bilden, gehoert ein System von complexen Zahlen ; dergleichen zu jeder Gruppe, welche mit einer solchen gleich zusammengesetz ist. (Beispiel : Drehungen der Kugel-Quaternionen).

2). Zu jedem System von $n+1$ complexen Zahlen, mit commutativem Gesetz, gehoert eine n gliedrige Gruppe von vertauschbaren linearen Transformationen in R_n, welche eine lineare Mannichfaltigkeit bilden.

3). Zu jedem System von $(n+1)$ complexen Zahlen, mit associativem, aber nicht mit commutativem Gesetz, gehoeren *zwei* n - gliedrige Gruppen in R_n, deren Transformationen von i. A. nicht vertauschbaren Collineationen gebildet werden. Jede Transformation der ersten Gruppe ist vertauschbar mit jeder Transformation der zweiten Gruppe. Beide sind also enthalten in einer $2n$ - gliedrigen Gruppe. Diese enthaelt auch eine dritte ausgezeichnete n - gliedrige Gruppe, deren Transformationen aber keine lineare Mannichfaltigkeit bilden.

Die Saetze 2) und 3) ermöglichen mir, auf Grund der Untersuchungen von Sophus Lie, z. B. alle Systeme von complexen Zahlen mit 2 oder 3 Einheiten sofort anzugeben.

4). Zu jedem System von complexen Zahlen mit commutativem Gesetz gehoert ein *Logarithmensystem*, welches genau wie ein System von $x+iy$ die Multiplication auf

Addition zurueckfuehrt, etc.

5). Zu jedem System von complexen Zahlen gehoert ein *System von partiellen Differentialgleichungen*, welche durch die Functionen einer complexen Groesse eben so integrirt werden, wie die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

durch die Functionen von $x+iy$.

Ich bin sehr begierig zu erfahren, in wie weit sich Ihre Resultate mit den vorstehenden decken, und ob vielleicht meine Bemerkungen den Ihrigen noch etwas Neues hinzufuegen.

Mit den besten Empfehlungen an Herrn Hermite und Herrn Picard, die Sie wohl so freundlich sind, zu uebermitteln, Ihr ganz ergebener

E. Study [2].

Coburg, Untere Anlage.

NOTES

1 Nous remercions W. Klingenberg qui a bien voulu transcrire cette lettre.

Sur E. Study (1862-1930) voir [5], vol. XIII, p.124-126.

L'article de T. Hawkins : *The Erlangen programm of Felix Klein : Reflections on its place in the history of mathematics* (Hist. Math., 11(1984), 442-470), donne d'excellentes informations sur l'oeuvre mathématique de Study.

2 Traduction de Jeanne Peiffer :

"Coburg, le 11 novembre 1886

Monsieur,

Occupé par des recherches sur des groupes de transformations, j'ai établi, il n'y a pas longtemps, quelques théorèmes concernant le lien entre cette théorie et la théorie des nombres complexes. On m'apprend de Leipzig que vous avez traité des questions analogues et obtenu des résultats analogues. Malheureusement, je n'ai pas actuellement accès à la bibliographie en question. Puis-je me permettre de vous prier, si c'est possible, d'avoir la gentillesse de bien vouloir me faire parvenir un exemplaire de votre mémoire (même si ce n'est qu'à titre de prêt) ?

Bien entendu, au cas où je publierais, plus tard, quelque chose sur le sujet (en reconnaissant évidemment pleinement la priorité de vos recherches), je vous témoignerais ma reconnaissance en vous envoyant mes remarques.

Les théorèmes que j'ai obtenus sont essentiellement les suivants :

1) A tout groupe de transformations linéaires formant une variété linéaire, correspond un ensemble de nombres complexes ; de même à tout groupe composé avec un tel groupe. (Exemple : les rotations des quaternions sphériques.)

2) A tout ensemble de $n+1$ nombres complexes, muni d'une loi commutative, correspond un groupe à n éléments de transformations linéaires commutatives de R_n, formant une variété linéaire.

3) A tout ensemble de $(n+1)$ nombres complexes, muni d'une loi associative, mais non commutative, correspondent *deux* groupes à n éléments dans R_n, dont les transformations se composent de collinéations non commutatives en général. Toute transformation du premier groupe est commutative avec toute transformation du second. Les deux sont donc contenus dans un groupe à $2n$ éléments. Celui-ci contient également un troisième groupe à n éléments, distingué, mais dont les transformations ne forment pas une variété linéaire.

Les théorèmes 2) et 3) permettent, grâce aux recherches de Sophus Lie, d'indiquer, par exemple, immédiatement tous les ensembles de nombres complexes à 2 ou 3 unités.

4) A tout ensemble de nombres complexes muni d'une loi commutative correspond un *ensemble de logarithmes* qui, à l'instar d'un système de $x+iy$, ramène la multiplication à l'addition, etc.

5) A tout ensemble de nombres complexes correspond un *ensemble d'équations aux dérivées partielles*, qu'on peut intégrer par les fonctions d'une variable complexe, comme l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

est intégrable par des fonctions de $x+iy$.

J'ai hâte de savoir jusqu'à quel point vos résultats recouvrent ceux ci-dessus, et aussi si évenuellement mes remarques ajoutent quelque chose de nouveau à vos résultats.

Je vous prie d'avoir le gentillesse de transmettre mes compliments à Monsieur Hermite et à Monsieur Picard.

Votre très dévoué

E. Study.

LETTRES DE JAMES JOSEPH SYLVESTER

Sur J.J. Sylvester voir [5], vol. XIII, p.216-222.

Les 10 lettres de Sylvester s'échelonnent entre les 13 janvier 1886 et 13 janvier 1896.

Jeremy Gray nous écrit dans sa lettre du 10 octobre 1984 :

"Sylevester's letters mostly are mere politeness. Sylvester is otherwise at pains to describe his attempts to generalize Bertrand's postulate (there is alaways a prime between n and $2n$) to statements about the primes between n and kn for various k ."

LETTRE DE THORVALD NICOLAI THIELE

Sur T.N. Thiele (1838-1910) voir [5], vol. XIII, p.338-339.

Il écrit dans sa lettre du 7 mars 1887 :

"Le point essentiel qui nous empêchera de suivre M. Sylvester sera que

$$y = \frac{a+bx}{c+dx} = \frac{na+nbx}{nc+ndx} \text{ . "}$$

Lettre à Aleksandr Vassilievitch VASSILIEV

[[1900]][1]

Mon cher Collègue

Tout bien considéré, je ne crois pas pouvoir me charger du rapport sur les titres de M. Killing[2]. Je suis cette année accablé d'une quantité de petites besognes et je suis obligé, à mon grand regret, de décliner un honneur auquel je suis très sensible.

Veuillez vous faire mon interprète auprès de la société. Votre bien dévoué collègue.

Poincaré

Notes

1 C'est A.P. Youschkevitch qui a bien voulu transcrire pour nous cette lettre qui est conservée dans un dossier contenant des papiers se rapportant au prix Lobatchevski déposé à l'Université de Kazan. Il nous signale que la Société physico-mathématique de Kazan, fondée en 1890, a decerné le Prix Lobatchevski en 1897 à Sophus Lie et en 1900 à W. Killing (pour ses recherches de 1883 à 1896 sur la géométrie non-euclidienne et les groupes de Lie).

Henri Poincaré a reçu la Médaille d'or Lobatchevski de la Société physico-mathématique de Kazan le 14 février 1904.

Sur A.V. Vassiliev, voir [1], t.III, p.1419 ; t.IV, p.1599 ; t.V, p.1337 et t.VI, p.2812.

2 Sur l'oeuvre mathématique de W. Killing, lire : T. Hawkins, *Wilhelm Killing and the structure of Lie Algebras* (Archive for History of Exact Sciences, 26(1982), 127-192).

CORRESPONDANCE AVEC VITO VOLTERRA

Les photocopies des 14 lettres de cette correspondance, du 30 mai 1889 au 3 janvier 1912 (les lettres de V. Volterra (1860-1940) sont des minutes), nous ont été envoyées de Rome par Giorgio Israel.

LETTRES D'EMIL WEYR

Sur E. Weyr voir [1], t.III, p.1434-1435 et t.IV, p.1623.

Les deux lettres des 25 mars et 25 avril 1892 concernent le répertoire bibliographique de la littérature mathématique.

LETTRES À ERNST ZERMELO

Ces lettres ont été publiées par Jean Cassinet dans son article : *La position d'Henri Poincaré par rapport à l'axiome du choix, à travers ses écrits et sa correspondance avec Zermelo (1905-1912)* (History and Philosophy of Logic, 4(1983), 145-155).

Gregory H. Moore a mentionné ces lettres p.146-147 de son livre *Zermelo's Axiome of Choice*.

Il nous semble intéressant de citer la lettre de Zermelo à Cantor du 24 juillet 1908 (p.79 de *Georg Cantor et Henri Poincaré*, Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche, vol.IV(1984), p.65-96) à propos de la communication de Poincaré au IV^{e} Congrès international des mathématiciens à Rome, en 1908, où il a abordé la problème du "cantorisme". Zermelo affirme que Poincaré "ne s'était pas donné beaucoup de peine" pour la rédaction de cette communication, que ses aperçus sur le cantorisme lui paraissent plus "une retraite qu'une attaque" et que d'ailleurs "presque personne n'a pris très au sérieux".

Voir aussi la lettre de H. Poincaré à Zermelo du 16 juin 1906 p.105 de *Poincaré, Russel, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*, réunis par G. Heinzmann, Paris (Librairie scientifique et technique Albert Blanchard), 1986.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *J.C.POGGENDORFF's biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, t.3, Leipzig(Barth), 1898, t.4, Leipzig(Barth), 1904, t.5, Leipzig(Chemie), 1926, t.6, Berlin(Chemie), t.7 b, 2^{e} partie, Berlin(Akademie-Verlag), 1968.

[2] POINCARE H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t.I, 1892, t.II, 1893, t.III, 1899, Paris(Gauthier-Villars).

[3] POINCARE H., *Oeuvres*, t.I-XI, Paris(Gauthier-Villars), 1916-1956.

[4] LEBON E., *Henri Poincaré*, 2^{e} édition, Paris(Gauthier-Villars), 1912.

[5] *Dictionary of Scientific Biography*, t.I-XV, New York (Charles Scribner's Sons), 1970-1978.

[6] BELLIVIER A., *Henri Poincaré*, Paris(Gallimard), 1956.

[7] *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, Providence(American Mathematical Society), 1983.

[8] DUGAC P., *La influencia científica de Henri Poincaré a la luz de su correspondencia con matemáticos* (LLull, 8(1985), 21-33).