ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES
SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PAR
LA SECTION DE GÉOMÉTRIE

TOME XI

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION
DE
GÉRARD PETIAU
MAITRE DE RECHERCHES

MÉMOIRES DIVERS — HOMMAGES A HENRI POINCARÉ

LIVRE DU CENTENAIRE DE LA NAISSANCE D'HENRI POINCARÉ (1854-1954)

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1956

MÉMOIRES DIVERS

SUR

LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 416-418 (13 février 1882).

J'envisage deux équations différentielles simultanées

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{1}$$

où X, Y, Z sont des polynomes entiers en x, y, z. Si je regarde x, y, z comme les coordonnées d'un point dans l'espace, ces deux équations définissent une infinité de courbes gauches que j'appelle *caractéristiques*.

Par chaque point de l'espace passe une caractéristique et une seule. Les seuls points qui ne satisfont pas à cette règle sont les *points singuliers*, c'est-à-dire les points d'intersection des trois surfaces

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0. \tag{2}$$

En général, ces trois surfaces ne se couperont pas suivant une courbe, et les point singuliers seront isolés. Pour les classer, on envisagera l'équation en S,

$$\begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} - S & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} - S & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} - S \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Nous supposerons que cette équation n'a pas de racine multiple, ni de racine nulle, ce qui arrivera en général. Il y aura alors quatre sortes de points singuliers :

1° Les *nœuds*. L'équation (3) a toutes ses racines réelles et de même signe. Toutes les caractéristiques qui pénètrent dans une petite sphère décrite autour du point singulier viennent converger en ce point : exemple, l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

a, b, c étant les constantes d'intégration.

2° Les *cols*. L'équation (3) a toutes ses racines réelles, mais non de même signe. Une infinité de caractéristiques, dont l'ensemble forme une surface, viennent converger au point singulier; en dehors de cette surface, il existe encore une autre caractéristique qui vient passer par le point singulier; les autres restent constamment à une distance finie de ce point : exemple, l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z},$$

dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{cz}.$$

Une infinité de caractéristiques,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \qquad z = 0,$$

situées toutes sur la surface $z = 0$, viennent passer par l'origine. Il en est de même de la caractéristique

$$x = y = 0.$$

Les autres restent à une distance finie de l'origine.

3° Les *foyers*. L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées, dont la somme est de même signe que la racine réelle. Une caractéristique, et une seule, passe par le foyer; les autres tournent autour de ce foyer, en s'en rapprochant asymptotiquement, en forme de spirales et de tire-bouchons.

4° Les *cols-foyers*. L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées, dont la somme n'est pas de même signe que la racine réelle. Une caractéristique, et une seule, passe par le point singulier; une infinité d'autres, dont l'ensemble forme une surface, tournent autour de ce point en s'en rapprochant asymptotiquement; les autres restent à une distance finie de ce point.

Un cas particulier intéressant est celui où les trois surfaces (2) se coupent suivant une même courbe, qui est alors une *ligne singulière*.

Considérons un point de cette ligne singulière. En ce point, l'équation (3) a une racine nulle. Il y a toujours une caractéristique qui passe par le point singulier, et c'est la ligne singulière elle-même.

Les points d'une ligne singulière sont d'ailleurs de trois sortes :

1° Les *nœuds*. L'équation (3) a une racine nulle et deux racines réelles et de même signe. Dans le voisinage de ces points, une infinité de caractéristiques, dont l'ensemble forme une surface, viennent converger en chaque point de la ligne singulière.

2° Les *cols*. L'équation (3) a une racine nulle et deux racines réelles et de signe contraire. Par chaque point de la ligne singulière passent deux caractéristiques (outre la ligne singulière elle-même); les autres restent à distance finie de cette ligne.

3° Les *foyers*. L'équation (3) a une racine nulle et les deux autres imaginaires conjuguées. Toutes les caractéristiques se rapprochent alors asymptotiquement de la ligne singulière.

On trouverait des singularités d'ordre plus élevé aux points qui séparent les arcs de la ligne singulière, dont tous les points sont des nœuds, des arcs dont tous les points sont des cols et de ceux dont tous les points sont des foyers.

SUR

LA GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME D'EULER RELATIF AUX POLYÈDRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 117, p. 144-145 (17 juillet 1893).

On sait qu'Euler a démontré que, dans un polyèdre convexe, le nombre des sommets, plus celui des faces, moins celui des arêtes, est égal à 2; si donc on désigne par α_0, α_2 et α_1, ces trois nombres, on aura

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$

Ce résultat s'étend à tous les polyèdres simplement connexes; on sait que si l'ordre de connexion est égal à P_1, la formule doit s'écrire

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 3 - P_1.$$

Il peut être intéressant, au point de vue de l'*Analysis situs* et de ses applications, de voir ce que devient ce théorème pour un polyèdre situé dans l'espace à plus de trois dimensions. Considérons donc un polyèdre situé dans l'espace à $n+1$ dimensions, et soit α_0 le nombre des sommets, α_1 le nombre des arêtes, c'est-à-dire des éléments à une dimension, α_2 celui des éléments à deux dimensions, etc.; et enfin α_n celui des éléments à n dimensions. On trouve aisément

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots \pm \alpha_n = \text{const.}$$

Mais, ce qu'il y a de remarquable, c'est que la constante du second membre dépend de l'ordre de connexion si n est pair, et qu'elle est toujours nulle si n est impair.

On peut s'en rendre compte de diverses manières ; par exemple si nous désignons par

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_{n-1},$$

les ordres de connexion du polyèdre définis par Riemann et Betti, on voit qu'on a

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots + \alpha_n = 3 - P_1 + P_2 - \ldots - P_{n-1},$$

si n est pair et

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots - \alpha_n = - P_1 + P_2 - \ldots + P_{n-1},$$

si n est impair.

Comme les nombres de Betti P_q et P_{n-q} sont égaux, on voit que, dans le second cas, le second membre est nul, ainsi que je l'avais annoncé.

Ces résultats supposent que tous les éléments du polyèdre sont simplement connexes. S'il n'en était pas ainsi, on serait conduit à une formule analogue, mais plus compliquée.

SUR

LA GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME ÉLÉMENTAIRE DE GÉOMÉTRIE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 140, p. 113-117 (16 janvier 1905).

La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits; mais nous n'avons aucun théorème analogue pour le tétraèdre.

La surface d'un triangle sphérique est proportionnelle à l'excès sphérique; mais nous n'avons aucun théorème analogue pour le tétraèdre hypersphérique tracé sur l'hypersphère de l'espace à quatre dimensions.

On peut donc se demander si les théorèmes en question sont susceptibles d'être étendus aux espaces à plus de trois dimensions. Ainsi que nous allons le voir, le premier de ces théorèmes peut être généralisé dans tout espace d'un nombre pair de dimensions, mais non dans les espaces d'un nombre impair de dimensions. Le second théorème peut être étendu aux hypersphères des espaces à un nombre pair de dimensions, mais non aux hypersphères des espaces à un nombre pair de dimensions.

Plaçons-nous dans l'espace à n dimensions, et soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les coordonnées d'un point dans cet espace et

$$(1) \qquad \xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2=1$$

l'équation d'une hypersphère. Soient

$$(2) \qquad X_1=0, \qquad X_2=0, \qquad \ldots, \qquad X_n=0$$

les équations de n plans passant par l'origine. Alors $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des polynomes linéaires et homogènes en $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Nous pouvons toujours supposer qu'on a identiquement

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \xi_n \tag{3}$$

En effet, quels que soient ces polynomes, on pourra trouver n constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ telles que $\sum \lambda_i X_i = \xi_n$; mais comme nous pouvons aussi bien écrire les équations des plans $\lambda_i X_i = 0$, au lieu de $X_i = 0$, nous ne restreignons pas la généralité en supposant que ces constantes sont égales à 1.

Ces n plans (2) divisent la surface de l'hypersphère (1) en 2^n régions, qui se distinguent entre elles par les signes des polynomes X. L'une de ces régions sera le tétraèdre hypersphérique que nous voulons étudier et que j'appelle T; ce sera par exemple celle pour laquelle tous les polynomes X sont positifs.

Mais ce n'est pas tout à fait comme cela que nous opérerons; nous commencerons par diviser l'hypersphère en deux hémisphères par le plan $\xi_n = 0$, et nous envisagerons seulement l'hémisphère $\xi_n > 0$; la surface de cet hémisphère sera partagée en $2^n - 1$ régions seulement; car, en vertu de l'équation (3), tous les X ne peuvent être négatifs si leur somme ξ_n est positive.

Pour distinguer ces régions les unes des autres, nous désignerons chacune d'elles par les indices de ceux des polynomes X qui sont positifs à l'intérieur de cette région. Ainsi la région où les polynomes X_2, X_4, X_5 sont positifs et tous les autres négatifs sera la région 245. Nous appellerons régions R_p celles où p de nos polynomes seront positifs et qui seront désignées par conséquent par p indices. Le nombre total des régions R_p est évidemment $\frac{n!}{p!\,\overline{n-p}!}$.

Il n'y a qu'une seule région R_n qui est le tétraèdre T, il n'y a pas de région R_0. La surface des diverses régions sera évaluée en prenant pour unité la surface de l'hémisphère.

Cela posé, il nous faut définir les angles du tétraèdre; et distinguer parmi eux les angles dièdres ou angles A_2, les angles trièdres ou angles A_3, et plus généralement les angles A_p limités par p plans.

Un angle A_p sera donc l'ensemble des régions où les p polynomes X correspondant aux plans limites de l'angle sont tous positifs, ou tous négatifs. Ce sera la somme des surfaces de ces régions qui sera la mesure de l'angle A_p. Cela revient, pour les angles dièdres par exemple, à prendre π pour unité d'angle.

Les régions R_q faisant partie d'un angle A_p seront celles où les p polynomes X correspondant aux plans limites seront tous positifs ainsi que $q-p$ autres, et celles où ces p polynomes seront tous négatifs ainsi que $n-q-p$ autres. Il y aura donc

$$\frac{n-p\,!}{n-q\,!\,q-p\,!}+\frac{n-p\,!}{q\,!\,n-p-q\,!}$$

régions R_q dans l'angle A_p. Soit alors μ_p la somme des angles A_p; nous voyons que chaque région R_q figurera

$$\frac{q\,!}{q-p\,!\,p\,!}+\frac{n-q\,!}{n-p-q\,!\,p\,!}$$

fois dans cette somme; d'où

$$\mu_p=\sum_{q=0}^{q=n}\left(\frac{q\,!}{q-p\,!\,p\,!}+\frac{n-q\,!}{n-p-q\,!\,q\,!}\right)\sum R_q, \tag{4}$$

$\sum R_q$ représentant la somme des surfaces de toutes les régions R_q. Posons alors

$$B_q=\sum R_q+\sum R_{n-q},$$

avec

$$B_q=2\sum R_q \qquad \text{pour} \quad q=\frac{n}{2}.$$

Il résulte de cette définition que

$$B_q=B_{n-q}, \qquad B_n=B_0=T,$$

l'équation (4) peut alors s'écrire :

$$\mu_p=\sum\frac{q\,!}{q-p\,!\,p\,!}B_q. \tag{5}$$

Dans cette équation, l'indice p peut prendre les valeurs 2, 3, ..., $n-1$; nous compléterons donc le tableau des équations (5) en posant

$$\left\{\begin{aligned}\mu_0&=B_0+\ \ B_1+\ldots+\ \ B_n=2,\\ \mu_1&=B_1+2B_2+\ldots+nB_n=n,\\ \mu_n&=B_n=T.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Toutes ces formules (5) et (6) peuvent se résumer dans l'identité

$$\sum\mu_p x^p=\sum B_q(x+1)^q=\psi(x). \tag{7}$$

Comme on a $B_q = B_{n-q}$, on aura

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{-x}{x+1}\right)(x+1)^n$$

ou

$$(8) \qquad \sum \mu_p x^p = \sum \mu_q (-x)^q (x+1)^{n-q},$$

ou, en égalant les coefficients de x^p,

$$(9) \qquad \mu_p = \sum \mu_q (-1)^q \frac{n-q\,!}{p-q\,!\;n-p\,!}.$$

Ces relations peuvent d'ailleurs se mettre sous une autre forme. Posons

$$(10) \qquad n-p\,!\;\mu_p = \lambda_p, \qquad \sum \lambda_p x^p = \varphi(x),$$

la relation (9) deviendra

$$(11) \qquad \lambda_p = \sum \lambda_q (-1)^q \frac{1}{p-q\,!}.$$

Ces relations sont établies pour $p \leqq n$; mais si $p > n$, μ_p devient nul et $n-p\,!$ infini, de sorte que λ_p est indéterminé. Rien n'empêche alors de supposer que ces relations définissent encore λ_p pour $p > n$. On remarquera que ces relations (11) sont indépendantes de n. Elles peuvent d'ailleurs s'écrire :

$$(12) \qquad \varphi(x) = \varphi(-x)\,e^x,$$

d'où l'on tire

$$(13) \qquad \varphi(x) = \theta(x^2)\,e^{\frac{x}{2}},$$

$\theta(x^2)$ étant une série quelconque procédant suivant les puissances de x^2. La relation (13) permet de calculer les λ_p et par conséquent les μ_p.

Reprenons l'équation (9) et faisons-y $p = n$. Dans le premier membre, le coefficient de μ_n est 1 et, dans le second membre, $+1$ si n est pair et -1 si n est impair, de sorte que les termes en μ_n se détruisent dans le premier cas et ne se détruisent pas dans le second.

Si donc n est impair, c'est-à-dire dans un espace d'un nombre impair de dimensions, il y a une relation linéaire entre : μ_n, qui représente la surface du tétraèdre hypersphérique T; μ_{n-1}, μ_{n-2}, ..., μ_2 qui représentent les sommes de ses angles des différents ordres; μ_1 et μ_0, qui sont égaux à n et à 2. C'est la généralisation du théorème sur le triangle sphérique.

LETTRES DE HENRI POINCARÉ
A L. FUCHS [1]

Acta Mathematica, t. 38, p. 175-184 et 185-187 (1921).

Caen, le 29 mai 1880.

MONSIEUR LE PROFESSEUR,

J'ai lu avec le plus grand intérêt le remarquable Mémoire que vous avez fait insérer dans la dernière livraison du *Journal de Crelle* [2] et qui a pour titre : *Ueber die Verallgemeinerung des Umkehrproblems*. Veuillez me permettre, Monsieur, de vous demander au sujet de ce travail, quelques éclaircissements.

Vous démontrez, page 159 que la fonction z est fonction méromorphe de ζ, toutes les fois que ζ prend une valeur correspondant à une valeur donnée de z : que cette valeur de z soit un point ordinaire ou un point singulier, qu'elle soit finie ou infinie. Vous démontrez ensuite, page 160 que cela est encore vrai pour $\zeta = \infty$ et comme conclusion vous dites :

« ...so ist die durch die Gleichung (H) definirte Function z von ζ für alle Werthe von ζ meromorph. »

Il s'agit ici de toutes les valeurs de ζ finies et infinies ; cet énoncé ferait donc entendre que z est fonction méromorphe *dans toute l'étendue de la sphère* et par conséquent fonction rationnelle de ζ ; on en conclurait que l'équation (A) est toujours intégrable algébriquement ce qui n'est pas exact comme vous le faites voir un peu plus loin page 168.

---

[1] Les lettres que nous publions ici sont d'importance pour l'histoire de la théorie des fonctions fuchsiennes. Ce sont en effet ces lettres dont parle L. Fuchs dans les *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität*, Göttingen, 1882, p. 83 ; *Gesammelte Mathematische Werke*, Band II, p. 286.

[2] T. 89, 1880, p. 151-169.

A quoi tient cette contradiction ? C'est à ce que les valeurs de ζ sont de trois sortes :

1° Celles qu'on peut faire atteindre à la fonction $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ en faisant décrire à la variable z sur la sphère un certain contour *fini* un nombre *fini* de fois.

2° Celles qu'on peut faire atteindre à cette fonction en faisant décrire à z un contour infini ou bien un contour *fini* un nombre *infini* de fois.

3° Celles qu'on ne peut *jamais* faire atteindre à la fonction $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ *quel que soit* le contour décrit par z sur la sphère.

Rien ne prouve en effet *a priori* qu'il n'y ait pas des valeurs de ces trois sortes et même, en général, on est certain qu'il y en a de la deuxième ou de la troisième sorte, sans quoi, je le répète, l'équation (A) serait intégrable algébriquement.

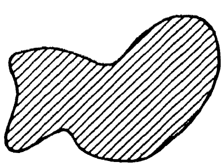
Mais alors il me semble qu'il faudrait encore démontrer que z reste méromorphe quand ζ prend une valeur de la deuxième ou de la troisième sorte, et que la démonstration que vous avez donnée dans votre Mémoire ne s'applique qu'à celles de la première sorte.

On peut en effet faire plusieurs hypothèses :

1° on peut supposer que l'on n'a que des valeurs de la première sorte et alors z est rationnel en ζ;

2° on peut supposer que l'on a des valeurs de la première et de la deuxième sorte et que z reste monodrome quand ζ prend une des valeurs de la deuxième sorte. Dans cette hypothèse votre théorème trouverait encore son application;

3° on peut supposer que l'on a des valeurs de la première et de la deuxième sorte, mais que z ne revienne pas à la même valeur, quand ζ décrit un contour infiniment petit autour d'une des valeurs de la deuxième sorte;

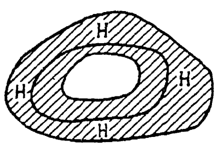


4° on peut encore imaginer que l'on ait des valeurs des trois sortes; que les valeurs de la première sorte remplissent la région du plan que je couvre de hachures sur la figure, que le périmètre de cette région soit formé de valeurs de la deuxième sorte; enfin que les parties extérieures à ce périmètre correspondent à des valeurs de la troisième sorte. Alors la fonction z *n'existe plus* quand ζ sort de ce périmètre, et ne peut prendre qu'une seule valeur quand ζ reste dans ce périmètre. Alors z n'est pas, à proprement parler fonction *analytique* de ζ; mais elle est *eindeutig* en ζ, ce qui vous suffit pour les conséquences que vous en tirez;

5° on peut imaginer que l'on ait des valeurs des trois sortes, disposées comme dans la figure ci-dessous, où la région occupée par des valeurs de la première sorte est couverte de hachures. Alors z pourrait ne pas revenir à la même valeur quand ζ décrirait un contour tel que HHHH.

Enfin on pourrait encore faire mille autres hypothèses.

Je dois avouer, Monsieur, que ces réflexions m'ont inspiré quelques doutes sur la généralité du résultat que vous annoncez, et j'ai pris la liberté de vous en parler, dans l'espérance que vous n'auriez pas de peine à les éclaircir.



Mon adresse est : Henri Poincaré, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen (Calvados).

Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, l'assurance de ma considération respectueuse.

POINCARÉ.

Heidelberg 5 Juni 1880.

GEEHRTESTER HERR COLLEGA!

Da ich aus Ihrem geschätzten Briefe ersehe, dass Sie deutsche Abhandlungen mit so tiefem Verständniss zu lesen in der Lage sind, so erlaube ich mir bei der Beantwortung Ihres Briefes mich auch dieser Sprache zu bedienen, weil ich hoffen darf, mich auf diese Weise klarer ausdrücken zu können.

Empfangen Sie, geehrtester Herr, vor allen Dingen meinen besten Dank nicht nur für das Interesse, welches Sie die Güte haben meiner jüngsten Arbeit entgegenzubringen, sondern auch dafür, dass Sie mich durch Ihren Brief darauf aufmerksam gemacht haben, dass der Satz I p. 161 meiner Abhandlung nicht mit genügender Präcision ausgesprochen ist.

Wenn Sie in der That das Resumé vergleichen, welches ich, vor dem Erscheinen meiner Arbeit im *Borchardtschen Journal*, von meinen Resultaten in den *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (Februar 1880, p. 170-176) gegeben habe, so werden Sie daselbst p. 173 finden, dass ich dort denselben Satz in der Weise ausgedrückt habe, dass unter den über die Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Pünkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen gemachten Voraussetzungen durch die Gleichung

$$\zeta = \frac{f(z)}{\varphi(z)}, \tag{H}$$

z als *eindeutige* Function von ζ definirt werde.

Gestatten Sie mir nun mit wenigen Worten auf die Bedeutung des Satzes einzugehen.

Aus den Entwickelungen meiner Arbeit in *Borchardt's Journal* (p. 158-160) ergiebt sich Folgendes : Berechnet man für jeden Werth von z die zugehörigen Werthe von ζ, indem man z alle möglichen Umläufe machen lässt — gleichgültig ob eine endliche oder eine unendliche Anzahl mal, so erhält ζ von z abhängige Werthe, *so lange die Umläufe nicht so beschaffen sind, dass dadurch $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch das heisst für jeden Werth von z unendlich werden.*

Die Werthe von ζ für welche nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden, erfüllen in der ζ-Ebene eine einfach zusammenhangende Fläche, welche ich mit S bezeichnen will. Diese Fläche bedeckt die ζ-Ebene nur *einfach* und an ihre Begrenzung liegen diejenigen Werthe von ζ für welche $f(z)$ und $\varphi(z)$ *identisch* unendlich werden. *Innerhalb der Fläche* S *ist z überall eine meromorphe Function von ζ.* Dieses ist der Sinn des Satzes I p. 161, und ein Weiteres brauche ich für die Anwendungen, welche ich von demselben mache, nicht.

Ich hoffe, dass Ihnen diese Worte zur Aufklärung über den Sinn, welchen ich dem Satze I p. 161 beilege, genügen werden, um so mehr als ich aus Ihrem Briefe ersehe, dass Sie sich der Ergründung der vorliegenden analytischen Frage bereits mit so grossem Scharfsinn gewidmet haben.

Genehmigen Sie, Hochgeehrter Herr, die Versicherung meiner ausgezeichnetsten Hochachtung.

L. Fuchs.

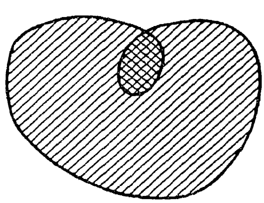
Caen, le 12 juin 1880.

Très-honoré Monsieur,

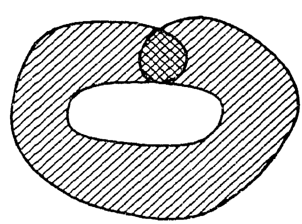
Je vous demande pardon, d'avoir tant tardé à répondre à votre aimable lettre; mais j'étais absent de Caen, lorsqu'elle est arrivée à son adresse; je l'ai reçue ce matin seulement et je l'ai lue avec le plus grand intérêt. Je vous remercie beaucoup des éclaircissements que vous avez bien voulu me donner et qui m'ouvrent des vues nouvelles sur cette question. Cependant, si je ne craignais d'abuser de votre obligeance, je prendrais la liberté d'appeler encore votre attention sur quelques points de détail, qui me semblent encore un peu obscurs.

Je suppose que sur le plan des z, je joigne tous les points singuliers au point ∞ par des coupures, puis que je fasse mouvoir z dans son plan de telle sorte qu'il ne franchisse aucune des coupures. ζ va alors *erfüllen* dans son plan une certaine surface F_0 qui sera évidemment *zusammenhangend*. Faisons maintenant mouvoir z dans son plan de telle sorte qu'il ne puisse franchir les diverses coupures plus de m fois; ζ va rester compris dans une nouvelle surface F_m qui sera toujours *zusammenhangend*. Quand m augmentera, la région F_m va s'étendre de plus en plus et la surface que vous appelez F n'est autre chose que la limite F_m pour $m = \infty$. Dire que cette surface F ne recouvre le plan que *einfach*, c'est dire que, quelque grand que soit m, F_m ne recouvrira le plan que *einfach*.

Or cela est-il une conséquence nécessaire de votre démonstration? Il me semble qu'il faudrait pour le faire voir ajouter quelques explications. En effet, comment, lorsque m grandit, la région F_m peut-elle arriver à se recouvrir elle-même? Elle peut y arriver de deux manières ainsi que l'indique la figure suivante où le trait plein représente le contour de la région F_m et où cette région est recouverte d'une couche de hachures pendant que les parties du plan *où* F_m *se recouvre elle-même* sont couvertes d'une double couche de hachures.



1re manière.



2e manière.

Votre démonstration, Monsieur, me paraît faire voir de la façon la plus claire, que la région F_m ne peut se recouvrir elle-même *de la première manière*; mais non pas qu'elle ne peut se recouvrir elle-même *de la deuxième manière*.

Je vois bien que cela est vrai lorsqu'il n'y a que deux points singuliers à distance finie. Dans ce cas j'arrive en effet, par des considérations un peu différentes à démontrer que F_m ne peut se recouvrir elle-même ni de la première ni de la deuxième manière. Alors la fonction z reste *eindeutig* dans l'intérieur de la surface F qui est ici un cercle.

Mais il ne me paraît pas évident qu'il en soit de même dans le cas général, de sorte que je me demande si le théorème est encore vrai quand il y a plus de deux points singuliers à distance finie.

Dans le cas où ces points singuliers ne sont qu'au nombre de deux je trouve que la fonction que vous avez définie jouit de propriétés fort remarquables et comme j'ai l'intention de publier les résultats que j'ai obtenus, je vous demanderai la permission de lui donner le nom de fonction fuchsienne puisque c'est vous qui l'avez découverte.

Je vous demanderai aussi la permission de communiquer votre lettre à M. Hermite qui s'intéresse à la question.

Veuillez agréer, très honoré Monsieur, l'assurance de ma considération respectueuse.

POINCARÉ.

Heidelberg 16 Juni 1880.

GEEHRTER HERR COLLEGA!

Empfangen Sie den herzlichsten Dank für Ihr freundliches Schreiben vom 12 Juni, wodurch Sie von Neuem ein so tief eingehendes Interesse für meine Arbeit kundzugeben die Güte gehabt haben.

Es würde mir ein besonderes Vergnügen bereiten in die Discussion der von Ihnen aufgestellten Frage einzutreten. Jedoch würde ich dadurch Ihre Geduld zum Ueberfluss in Anspruch nehmen. Denn eine Arbeit, welche ich schon vor der Veröffentlichung meiner Resultate in den Göttinger Nachrichten vom Februar dieses Jahres in Angriff genommen, seitdem aber — weil mich Anderes beschäftigte — liegen gelassen hatte, habe ich nun mehr zu Ende geführt. Diese Arbeit ([1]) enthält unter Anderem das Tableau aller Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, welche ausser den übrigen in meiner Abhandlung angegebenen Eigenschaften noch die auf p. 161 derselben Abhandlung geforderte Eigenschaft besitzt, dass die Gleichung $\frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)}$ nur

([1]) *Ueber die Functionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen* (*Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A.-Universität*, Göttingen, 1880, Sitzung am 3. juli, p. 445-453).

erfüllt wird durch $z_2 = z_1$; natürlich so lange $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ überhaupt einen bestimmten Werth hat, d. h. so lange nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden. Die Arbeit enthält ausserdem die Integrale aller Differenzialgleichungen des Tableau's, und für jede derselben den *analytischen Ausdruck* von z als Function von ζ.

Sie sehen also, geehrter Herr, dass diese Arbeit jede weitere Discussionüberflüssig macht. Ich hoffe die Resultate im Laufe der nächsten Wochen zu veröffentlichen, und werde mich beehren Ihnen einen Abzug zu schicken.

Es machte mir grosses Vergnügen in Ihrem Briefe zu lesen, dass Sie in Bezug auf die von mir definirten Functionen wichtiche Resultate gefunden haben, welche Sie zu veröffentlichen beabsichtigen. Dass Sie die Güte haben wollen, die genannten Functionen, mit meinen Namen zu bezeichnen, ist für mich sehr ehrenvoll und macht mich Ihnen zu Dank verpflichtet.

Es ist selbstverständlich, dass ich mit Ihrem Wunsche mein Schreiben dem Herrn Hermite mitzutheilen einverstanden bin.

Gereicht mir ja das Interesse, welches dieser grosse Mathematiker an meinen Arbeiten nimmt, nur zur grössten Genugthuung.

Empfangen Sie, geehrter Herr, die Versicherung meiner ausgezeichnetsten Hochachtung.

L. FUCHS.

Caen, le 19 juin 1880.

MONSIEUR ET CHER COLLÈGUE,

Je ne saurais vous dire combien je suis satisfait d'apprendre que vous avez complètement résolu le problème qui fait l'objet de notre correspondance et combien je suis désireux de recevoir l'extrait que vous avez bien voulu me promettre et dont je vous suis bien reconnaissant d'avance.

Les conditions que vous aviez posées dans votre Mémoire, pour que z fût *eindeutig* en ζ, étaient, si je me rappelle bien, les suivantes :

$$r_{1,i} = -1 + \frac{1}{n_i}, \qquad r_{2,i} = -1 + \frac{2}{n_i} \qquad \text{ou} \qquad r_{1,i} = -\frac{1}{2}, \qquad r_{2,i} = \frac{1}{2}$$

et

$$s_1 = 1 + \frac{1}{n}, \qquad s_2 = 1 + \frac{2}{n} \qquad \text{ou} \qquad s_1 = \frac{3}{2}, \qquad s_2 = \frac{5}{2}.$$

Or voici d'abord ce que je trouve au sujet des équations qui satisfont à ces conditions. Si on les réduit à la forme canonique, de façon à faire disparaître le terme en $\frac{dy}{dz}$, les points singuliers situés à distance finie et tels que la différence des racines de l'équation fondamentale soit 1 disparaissent.

Il peut arriver alors que l'on ait

$$s_1 = 0, \qquad s_2 = -1.$$

Dans ce cas on posera

$$z - a = t^{-1},$$

si a est un des points singuliers à distance finie; puis on ramènera de nouveau l'équation à la forme canonique; le point singulier $t = 0$ qui correspondrait au point singulier $z = \infty$ disparaît. Quand toutes ces opérations sont effectuées :

1° Pour tous les points singuliers, soit à distance finie, soit à distance infinie, la différence des racines de l'équation déterminante est une partie aliquote de l'unité et est différente de 1.

2° Le nombre des points singuliers à distance finie (qui n'ont pas disparu dans les opérations précédentes) ne peut être plus grand que 3.

Il reste alors à considérer quatre cas.

Premier cas. — Le nombre des points singuliers finis est plus petit que 2. Alors z est rationnel en ζ.

Deuxième cas. — Le nombre des points singuliers est égal à 2; et si ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont les différences des racines des équations fondamentales déterminantes relatives à ces deux points et à $z = \infty$, on a

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 > 1.$$

Alors z est encore rationnel en ζ.

Troisième cas. — Le nombre des points singuliers est 2 mais

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1.$$

Alors z est une fonction doublement périodique de ζ.

Quatrième cas. — Le nombre des points singuliers est 3 et il faut alors que la différence des racines de toutes les équations déterminantes soit $\frac{1}{2}$. C'est sur ce dernier cas que je prendrai la liberté d'attirer votre attention. On peut en effet former l'équation différentielle correspondante de la façon suivante : soit $\Lambda(u)$ une fonction doublement périodique de u définie par l'équation différentielle

$$\frac{d\Lambda}{du} = \sqrt{\mathrm{H}} = \mathrm{P}^2,$$

H étant un polynome du troisième degré en Λ. Posons

$$z = \Lambda(u), \qquad \eta = \sqrt{\frac{d\Lambda}{du}}\, e^{\alpha u} = \mathrm{P}\, e^{\alpha u},$$

on aura

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\mathrm{P}^2}, \qquad \frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{2\mathrm{P}'}{\mathrm{P}^3},$$

et η satisfera à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = \eta\left[\frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{P}} + \frac{\alpha^2}{\mathrm{P}^4}\right]$$

ou

$$(1) \qquad \frac{d^2\eta}{dz^2} = \eta\left[\frac{\frac{1}{4}\mathrm{HH}'' - \frac{3}{16}\mathrm{H}'^2 + \alpha^2\mathrm{H}}{\mathrm{H}^2}\right].$$

L'autre intégrale sera

$$\eta = \mathrm{P}\, e^{-\alpha u},$$

d'où

$$\zeta = e^{2\alpha u}.$$

Pour que z, c'est-à-dire Λ fût *eindeutig* en ζ, il faudrait que la fonction $\Lambda(u)$ admit la période $\frac{i\pi}{\alpha}$ *ce qui n'a pas lieu en général.*

Et pourtant si l'on pose

$$\eta = \eta_1 \mathrm{H}^{-\frac{3}{4}},$$

η_1 se trouve lié à z par une équation différentielle linéaire (2).

L'équation (2) admet trois points singuliers à distance finie et l'un à l'infini. Les racines de l'équation déterminante sont :

1° pour les points à distance finie

$$-\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 = -1 + \frac{2}{2};$$

2° pour le point à l'infini

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad 2 = 1 + \frac{2}{2}.$$

L'équation satisfait donc aux conditions

$$r_1 = -1 + \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad r_2 = -1 + \frac{2}{n},$$

$$s_1 = 1 + \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad s_2 = 1 + \frac{2}{n}$$

et pourtant z n'est pas eindeutig en ζ, de sorte que dans ce cas particulier votre théorème me semble en défaut.

Mais ce n'est pas tout, et, si je ne craignais d'abuser de votre patience, je vous ferais part de quelques réflexions que m'a suggérées l'étude de cette question.

Les conditions que vous avez posées :

$$r_1 = \frac{1}{n} - 1, \qquad r_2 = \frac{2}{n} - 1 \qquad \text{ou} \qquad r_1 = -\frac{1}{2}, \qquad r_2 = \frac{1}{2};$$
$$s_1 = 1 + \frac{1}{n}, \qquad s_2 = 1 + \frac{2}{n} \qquad \text{ou} \qquad s_1 = \frac{3}{2}, \qquad s_2 = \frac{5}{2}$$

vous les avez trouvées en cherchant à satisfaire à deux hypothèses : 1° z devait être *eindeutig* en ζ; 2° toute fonction rationnelle et symétrique de z_1 et de z_2 devait être *eindeutig* en u_1 et en u_2.

Mais si l'on ne fait que la première hypothèse (z *eindeutig* en ζ) ces conditions ne sont plus nécessaires. Si en effet l'objection dont je vous ai parlé dans ma dernière lettre n'existait pas, les conditions que l'on trouverait (en raisonnant tout à fait comme vous l'avez fait dans votre Mémoire) seraient les suivantes : que pour tous les points singuliers la différence des racines des équations déterminantes fût une partie aliquote de l'unité. On aurait ainsi une classe d'équations baucoup plus étendue que celle dont vous vous êtes occupé et auxquelles votre théorème s'appliquerait. Malheureusement l'objection que j'ai soulevée exige une étude plus approfondie de la question; et cette étude, je n'ai pu la faire que dans le cas où il n'y a que deux points singuliers à distance finie.

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les différences des racines des trois équations déterminantes. Si l'on a

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 > 1,$$

z est rationnel en ζ.

Si l'on a

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1,$$

z est doublement périodique en ζ.

Ces propriétés, je les ai déjà énoncées plus haut et d'ailleurs vous les aviez sans doute déjà découvertes.

Tant que l'on suppose

$$r_1 = -1 + \frac{1}{n}, \qquad r_2 = -1 + \frac{2}{n} \qquad \text{ou} \qquad r_1 = -\frac{1}{2}, \qquad r_2 = \frac{1}{2},$$
$$s_1 = 1 + \frac{1}{n}, \qquad s_2 = 1 + \frac{2}{n} \qquad \text{ou} \qquad s_1 = \frac{3}{2}, \qquad s_2 = \frac{5}{2}$$

on ne peut avoir

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 < 1.$$

Mais si l'on se borne à la *première hypothèse* (*z eindeutig* en ζ) ρ_1, ρ_2, ρ_3 ne sont plus assujettis qu'à être des parties aliquotes de l'unité, et l'on peut avoir

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 < 1.$$

Alors z n'est plus rationnel, ni doublement périodique en ζ, mais je démontre que mon objection peut être levée et que z reste *eindeutig* en ζ. C'est cette fonction nouvelle que j'ai appelée fonction fuchsienne et à l'aide de cette transcendante nouvelle et d'une autre qui s'y rattache j'intègre l'équation différentielle du deuxième ordre à deux points singuliers finis, non seulement quand ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont parties aliquotes de l'unité; mais quand ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont des quantités commensurables quelconques.

La fonction fuchsienne a beaucoup d'analogies avec les fonctions elliptiques; elle n'existe que dans l'intérieur d'un certain cercle et reste méromorphe à l'intérieur de ce cercle. Elle s'exprime par le quotient de deux séries convergentes dans tout ce cercle.

Je ne sais rien au contraire sur les équations différentielles quand il y a plus de deux points singuliers à distance finie.

Permettez-moi, Monsieur, de vous remercier de votre complaisance, de remercier aussi les équations linéaires auxquelles je dois le plaisir d'être entré en correspondance avec vous.

Veuillez excuser la longueur de ma lettre et agréez l'assurance de ma respectueuse considération.

POINCARÉ.

Caen, le 30 juillet 1880.

MONSIEUR,

Je vous remercie beaucoup de l'envoi que vous avez bien voulu me faire de votre petit opuscule (1). Le tableau que vous donnez des intégrales de toutes les équations différentielles lève complètement tous les doutes.

---

(1) *Voir* la note (1), p. 18.

C'est dans les cas III (1) et IV (1) que s'appliquait mon objection; vous envisagez en effet l'équation

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}\frac{d\omega}{dz} + \frac{\pi^2}{\Omega^2}\frac{1}{R}\omega = 0,$$

pour laquelle votre théorème est évidemment vrai; mais si au lieu de $\frac{\pi^2}{\Omega^2}$ vous aviez pris un coefficient numérique quelconque α, le théorème se serait trouvé en défaut, quoique les conditions que vous aviez énoncées primitivement et qui sont relatives aux racines des équations déterminantes eussent continué à être remplies. Comme vous aviez négligé d'énoncer cette condition supplémentaire, relative à la valeur du coefficient numérique de $\frac{1}{R}$, je m'y étais laissé tromper et vous voudrez bien m'en excuser.

Permettez-moi d'insister sur les fonctions auxquelles j'ai donné votre nom et que j'ai rencontrées dans ces recherches.

Ces fonctions présentent avec les fonctions elliptiques les plus grandes analogies et sont susceptibles d'être représentées par le quotient de deux séries convergentes, et cela d'une infinité de manières. Parmi ces séries, il y en a qui sont des séries entières et qui jouent le rôle de fonction Théta.

Elles sont convergentes dans toute l'étendue d'un certain cercle et, en dehors de ce cercle elles cessent d'exister, ainsi que la fonction fuchsienne elle-même.

En dehors de ces fonctions, il en est d'autres qui jouent le même rôle que les fonctions Zéta dans la théorie des fonctions elliptiques et grâce auxquelles j'intègre toutes les équations différentielles linéaires d'ordre quelconque à coefficients rationnels toutes les fois qu'il n'y a que deux points singuliers à distance finie et que les racines des trois équations déterminantes sont commensurables. J'ai imaginé aussi des fonctions qui sont aux fonctions fuchsiennes ce que les fonctions abéliennes sont aux fonctions elliptiques et grâce auxquelles j'espère intégrer toutes les équations linéaires quand les racines des équations déterminantes seront commensurables.

Enfin des fonctions tout à fait analogues aux fonctions fuchsiennes me donneront, je crois, les intégrales d'un grand nombre d'équations à coefficients irrationnels.

Veuillez, Monsieur, agréer encore une fois mes remerciements, ainsi que l'assurance de ma considération la plus distinguée.

POINCARÉ.

Caen, le 20 mars 1881.

MONSIEUR,

Je vous remercie beaucoup du Mémoire que vous avez eu la bonté de m'envoyer et que j'ai lu avec le plus grand intérêt.

J'ai continué à m'occuper des fonctions auxquelles j'ai donné votre nom et j'espère publier prochainement mes résultats. Ces fonctions comprennent comme cas particulier les fonctions elliptiques d'une part, et d'autre part la fonction modulaire. Ces fonctions et d'autres que j'ai appelées zétafuchsiennes permettent d'intégrer :

1° Toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qui ne présentent que trois points singuliers, deux à distance finie et l'un à l'infini.

2° Toutes les équations du deuxième ordre à coefficients rationnels.

3° Un grand nombre d'équations de divers ordres à coefficients algébriques.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

POINCARÉ.

CORRESPONDANCE DE HENRI POINCARÉ ET DE FÉLIX KLEIN

Acta Mathematica, t. 39, p. 94-132 (1923).

La Correspondance que nous publierons ici intéressera tous les géomètres comme un document humain. On éprouve un sentiment de réconfort à suivre la lutte, à armes courtoises, dont parlera Poincaré dans une de ses lettres. Dans l'édition allemande de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* on vient de tracer l'histoire de la théorie des fonctions automorphes. Les pages suivantes sont de nature à y ajouter quelque chose. Elles retraceront le développement de cette belle théorie d'une manière plus intime qu'on ne peut le faire dans une Encyclopédie.

Dans quelques pages émouvantes Henri Poincaré a raconté la genèse de la découverte qui est son plus beau titre de gloire. Cette découverte date de l'année 1880 et comme elle fut l'origine de la Correspondance suivante nous nous permettons de reproduire ces pages (1).

Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis, les *fonctions fuchsiennes;* j'étais alors fort ignorant. Tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux : j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude; je ne pus m'endormir, les idées surgissaient en foule; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique. Je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries, si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées *thétafuchsiennes*.

A ce moment, je quittai Caen, ou j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier

(1) H. Poincaré, *Science et Méthode*, Paris, 1909, p. 50-53. *Voir* aussi *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 57-58.

mes travaux mathématiques; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade. Au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non euclidienne. Je ne fis pas la vérification, je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

Je me mis alors à étudier des questions d'arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la géométrie non euclidienne.

Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thétafuchsiennes, et que, par conséquent, il existait des fonctions fuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions; j'en fis un siège systématique et j'enlevai, l'un après l'autre, tous les ouvrages avancés; il y en avait un cependant qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

Là-dessus, je partis pour le Mont Valérien, où je devais faire mon service militaire; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon Mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine.

D'autre part, dans un Cours professé à l'Université de Göttingen pendant l'année universitaire 1915-1916, M. Klein a fait un récit de sa découverte du *Zentraltheorem* dont il sera question dans les lettres XVIII et XIX. Nous nous permettons également de reproduire ce récit [1].

Den Herbst 1881 verbrachte ich zu meiner Erholung an der Nordsee (in Borkum), wo ich die Schrift [2] über Riemann schrieb und das Fundamentaltheorem [3] von Bd. 19 fand (das ich dann aber erst in den Weihnachtsferien niederschrieb). Entsprechend der damaligen Anschauung der Ärzte fasste ich den Entschluss, Ostern 1882 wieder an die Nordsee zu gehen und zwar nach Norderney. Ich wollte dort in Ruhe einen 2.

(1) F. Klein, *Die Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert* (Dritter Teil, *Funktionentheorie von* 1850 *bis ca.* 1900).

(2) F. Klein, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Leipzig, 1882; *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 99, p. 499-573.

(3) *Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich* (« Das Rückkehrschnitt-theorem ») (*Math. Annalen*, t. 19, 1882, p. 565-568); F. Klein, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 101, p. 622-626.

Teil meiner Schrift über Riemann schreiben, nämlich die Existenzbeweise für die algebraischen Funktionen auf gegebenen Riemannschen Flächen in neuer Form ausarbeiten. Ich habe es dort aber nur 8 Tage ausgehalten, denn die Existenz war zu kümmerlich, da heftige Stürme jedes Ausgehen unmöglich machten und sich bei mir starkes Asthma einstellte. Ich beschloss, schleunigst in meine Heimat Düsseldorf überzusiedeln. In der letzten Nacht vom 22. zum 23. März, die ich wegen Asthma auf dem Sofa sitzend zubrachte, stand plötzlich um 2 1/2 Uhr das Zentraltheorem, wie es durch die Figur des 14-Ecks in Bd. XIV der *Mathematischen Annalen* ja eigentlich schon vorgebildet war, vor mir. Am folgenden Vormittag in dem Postwagen, der damals von Norden bis Emden fuhr, durchdachte ich das, was ich gefunden hatte, noch einmal bis in alle Einzelheiten. Jetzt wusste ich, dass ich ein grosses Theorem hatte. In Düsseldorf angekommen, schrieb ich es gleich zusammen (1), datierte es vom 27. März, schickte es an Teubner und liess Abzüge der Korrekturen an Poincaré und Schwarz und beispielsweise Hurwitz gehen.

Wie Poincaré am 10. April in den *Comptes rendus* reagierte (2), habe ich erzählt. Mir selbst aber schrieb er : „ Les résultats que vous énoncez m'intéressent beaucoup, voici pourquoi ; je les avais trouvés il y a déjà quelque temps ...". Wie so und wie lange er es kannte, hat er nie geäussert. Es ist begreiflich, dass die Beziehung zwischen uns eine gewisse Spannung annahm. Schwarz hinwieder war infolge mangelhafter Konstantenzählung zunächst der Meinung, das Theorem müsse falsch sein; er hat dann aber später zu neuen Beweismethoden wesentliche Grundgedanken geliefert.

Mit dem Beweise lag es in der Tat sehr schwierig. Ich benutzte die sogenannte *Kontinuitätsmethode*, welche die Mannigfaltigkeit der Riemannschen Flächen eines gegebenen p der entsprechenden Mannigfaltigkeit automorpher Gruppen mit Grenzkreis gegenüberstellt. Ich habe nie gezweifelt, dass die Beweismethode richtig sei, aber ich stiess überall zuf Unfertigkeiten meiner funktionentheoretischen Kenntnisse bezw. der Funktionentheorie überhaupt, deren Erledigung ich vorläufig nur postulieren konnte, und die in der Tat erst 30 Jahre später (1912) durch Koebe voll erledigt worden sind.

Dies konnte mich nicht abhalten, im Sommer 1882 noch allgemeinere Fundamentaltheoreme aufzustellen, welche Bd. 19 und Bd. 20 gemeinsam umfassen, und die Ausarbeitung der ganzen Konzeption zunächst durch Seminarvorträge vorzubereiten, die Study damals niederschrieb. Ich habe die grosse Mehrzahl meiner Arbeiten in der Weise fertiggestellt, dass ich zunächst bez. Vorlesungen hielt und in den Ferien dann die Redaktion folgen liess. In den Herbstferien 1882 in Tabarz (Thüringen) ist dann die Abhandlung des Bandes 21 entstanden und am 2. Oktober 1882 abgeschlossen worden (3). So unvollkommen und unerledigt dort auch manches ist, die Konstruktion des Gedankenganges im Grossen ist geblieben und auch durch die zunächst folgenden Abhandlungen Poincarés in den Bänden 1, 3, 4, 5 der eben damals gegründeten *Acta Mathematica* nicht verschoben worden.

Nous ferons suivre maintenant la Correspondance qui commence au mois de juin 1881 ; elle s'est poursuivie pendant quinze mois et elle fut interrompue par une

(1) Gedruckt in *Math. Annalen*, t. 20, 1882, p. 49-51 ; F. Klein, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 102, p. 627-629 (« Das Grenzkreistheorem »).

(2) *Sur les fonctions fuchsiennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 94, 1882, p. 1038-1040); *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 41-43.

(3) *Neue Beiträge zur Riemannschen Functionentheorie* (*Math. Annalen*, t. 21, 1882-1883, p. 141-218); F. Klein, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 103, p. 630-710 (« Das allgemeine Fundamentaltheorem » steht daselbst in Abschnitt IV).

maladie de M. Klein. Nous avons ajouté quelques notes qui faciliteront aux lecteurs de trouver rapidement les Ouvrages dont il sera question dans les lettres.

N. E. Nörlund.

I.

Leipzig 12. Juni 1881.

Sehr geehrter Herr !

Ihre 3 Noten in den *Comptes rendus : Sur les fonctions fuchsiennes* (¹), die ich erst gestern, und auch da nur flüchtig kennen lernte, stehen in so engem Zusammenhange mit den Ueberlegungen und Bestrebungen, mit denen ich mich in den letzten Jahren beschäftigte, dass ich Ihnen deshalb schreiben muss. Ich möchte mich zunächst auf die verschiedenen Arbeiten beziehen, die ich in den Bänden XIV (²), XV (³), XVII (⁴) der *Mathematischen Annalen* über elliptische Funktionen veröffentlichte. Es handelt sich bei den elliptischen Modulfunktionen natürlich nur um einen speziellen Fall der von Ihnen betrachteten Abhängigkeitsverhältnisse; aber ein näherer Vergleich wird Ihnen zeigen, dass ich sehr wohl allgemeine Gesichtspunkte hatte. Ich möchte Sie in dieser Hinsicht auf einige besondere Punkte aufmerksam machen :

Bd. XIV p. 128 handelt von denjenigen alg. Funktionen, die sich durch Modulfunktionen darstellen lassen, ohne mit den doppeltperiodischen Funktionen zusammenzuhängen. — Dann folgt, zunächst am speziellen Falle, die wichtige Theorie der Fundamentalpolygone.

Bd. XIV p. 159-160 ist davon die Rede, dass man alle hypergeometrischen Reihen als eindeutige Funktionen geeigneter Modulfunktionen darstellen kann.

Zu Bd. XIV p. 428 ff. gehört eine Tafel, welche die Aneinanderlagerung von Kreisbogendreiecken mit den Winkeln $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ erläutert [was also ein Beispiel der von Halphen (⁵) betrachteten partikulären Funktionenklasse ist], wobei ich inzwis-

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 333-335 (14 *février*), p. 395-396 (21 *février*) et p. 859-861 (4 avril); *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 1-10.

(²) *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades* (*Math. Annalen*, t. 14, 1879, p. 111-172; *Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen* (*ibid.*, p. 417-427); *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* (*ibid.*, p. 428-471); F. Klein, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 82, p. 13-75, n° 83, p. 76-89, n° 84, p. 90-135.

(³) *Ueber Multiplicatorgleichungen* (*Math. Annalen*, t. 15, 1879, p. 86-88); *Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen* (*ibid.*, p. 533-555); F. Klein, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 85, p. 137-139, n° 86, p. 140-165.

(⁴) *Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen* (*Math. Annalen*, t. 17, 1880, p. 62-70); F. Klein, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 87, p. 169-178.

(⁵) *Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 856-858); *Œuvres de G. H. Halphen*, Paris, t. 2, 1918, p. 471-474.

chen bemerken muss, dass schon in *Crelle's Journal* Bd. LXXV Hr. Schwarz (¹) den Fall $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ erläuterte.

Bd. XVII p. 62 ff. bringe ich sodann in knapper Uebersicht die gereifteren Anschauungen, mit denen ich mir in der Zwischenzeit die Theorie der elliptischen Modulfunktionen zurecht gelegt hatte.

Diese Anschauungen selbst habe ich nicht publiziert, ich habe sie aber im Sommer 1879 am Münchener Polytechnikum vorgetragen. Mein Gedankengang, der mit dem jetzt von Ihnen eingeschlagenen nun vielfach zusammentrifft, war damals dieser :

1. Periodische und doppeltperiodische Funktionen sind nur Beispiele für eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich. Es ist Aufgabe der modernen Analysis, alle diesen Funktionen zu bestimmen.

2. Die Anzahl dieser Transformationen kann eine endliche sein; dies gibt die Gleichungen des Ikosaeder's, Oktaeder's ... die ich früher betrachtete (*Math. Annalen*, IX(²), XII (³) und von denen ich bei Bildung dieses ganzen Ideenkreises ausging.

3. Gruppen von unendlich vielen linearen Transformationen, die zu brauchbaren Funktionen Anlass geben (groupe discontinu nach Ihrer Bezeichnung) erhält man *zum Beispiel*, wenn man von einem Kreisbogenpolygon ausgeht, dessen Kreise einen festen Kreis rechtwinkelig schneiden und dessen Winkel genaue Theile von π sind.

4. Man sollte sich mit allen solchen Funktionen beschäftigen (wie Sie das in der That jetzt beginnen), um aber konkrete Ziele zu erreichen, beschränken wir uns auf Kreisbogendreiecke und insbesondere auf elliptische Modulfunktionen.

Ich habe mich seitdem vielfach, auch in Gesprächen mit anderen Mathematikern, mit diesen Fragen beschäftigt, aber abgesehen davon, dass ich noch zu keinem definitiven Resultate gekommen bin, gehört das am Ende nicht hierher. Ich will mich auf das beschränken, was ich publizirt oder vorgetragen habe. Vielleicht hätte ich mich schon früher mit Ihnen oder einem Ihrer Freunde, wie z. B. Herrn Picard (⁴), in Verbindung setzen sollen. Denn der Ideenkreis, in welchem sich Ihre Arbeiten seit 2-3 Jahren bewegen, ist mit dem meinigen in der That äusserst enge verwandt. So wird mich freuen, weun dieser mein erster Brief Anlass zu einer fortgesetzten Korrespondenz geben sollte. Ich bin freilich im Augenblicke durch andere Verpflichtungen von diesen Arbeiten abgedrängt, aber habe um so mehr Anlass,

---

(¹) *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt* (*J. reine angew. Math.*, t. 75, 1873, p. 292-335); H. A. SCHWARZ, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 2, 1890, p. 211-259.

(²) *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* (*Math. Annalen*, t. 9, 1876, p. 183-208); F. KLEIN, *Ges. math. Abh*, Berlin. t. 2, 1922, n° 51, p. 275-301.

(³) *Ueber lineare Differentialgleichungen* (*Math. Annalen*, t. 12, 1877, p. 167-179); *Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder* (*ibid.*, p. 503-560); F. KLEIN, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 2, 1922, n° 52, p. 307-320 et 321-384.

(⁴) Würden Sie Herrn Picard obgleich es ein untergeordneter Punkt ist, vielleicht gelegentlich auf *Annalen*, t. 14, p. 122, § 8 aufmerksam machen!

in einigen Monaten zu denselben zurückzukehren, als ich für nächsten Winter eine Vorlesung über Differentialgleichungen angezeigt habe.

Herrn Hermite wollen Sie mich bestens empfehlen. Ich dachte lange daran, mit ihm briefliche Verbindung zu suchen, und würde das, wie ich nicht zweifele zu meinem grössten Vortheile, schon längst ausgeführt haben, wenn ich nicht in der Sprache ein gewisses Hemmniss gefunden hätte. Ich bin, wie Sie vielleicht wissen, lange genug in Paris gewesen, um französisch sprechen und schreiben zu sollen ; in der Zwischenzeit aber ist letztere Fähigkeit durch Nichtgebrauch nur zu sehr verkümmert.

Hochachtungsvoll

Prof. Dr. F. Klein.

Adresse : Leipzig, Sophienstrasse 10/II.

II.

15 juin.

Monsieur,

Votre lettre me prouve que vous aviez aperçu avant moi quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans la théorie des fonctions fuchsiennes. Je n'en suis nullement étonné; car je sais combien vous êtes versé dans la connaissance de la géométrie non euclidienne qui est la clef véritable du problème qui nous occupe.

Je vous rendrai justice à cet égard quand je publierai mes résultats; j'espère pouvoir me procurer d'ici là les tomes 14, 15 et 17 des *Mathematische Annalen* qui n'existent pas à la bibliothèque universitaire de Caen. Quant à la communication que vous avez faite au Polytechnicum de Munich, je vous demanderai de vouloir bien me donner quelques détails à ce sujet, afin que je puisse ajouter à mon Mémoire une note vous rendant pleine justice; car sans doute, je ne pourrai me procurer directement votre travail.

Comme je ne pourrai sans doute me procurer *immédiatement* les *Mathematische Annalen*, je vous prierais aussi de vouloir bien me donner quelques explications sur quelques points de votre lettre. Vous parlez de *die elliptischen Modulfunktionen.*

Pourquoi ce pluriel? Si la fonction modulaire est le carré du module exprimé en fonction du rapport des périodes, il n'y en a qu'une; il faut donc entendre autrement l'expression *Modulfunktionen.*

Que voulez-vous dire par ces fonctions algébriques qui sont susceptibles d'être représentées par des fonctions modulaires ? Qu'est-ce aussi que la *Theorie der Fundamentalpolygone?*

Je vous demanderai aussi de m'éclairer sur les points suivants : Avez vous trouvé tous les *Kreisbogenpolygone* qui donnent naissance à un groupe discontinu?

Avez-vous démontré l'existence des fonctions qui correspondent à chaque groupe discontinu?

J'ai écrit à M. Picard pour lui communiquer votre remarque.

Je me félicite, Monsieur, de l'occasion qui me met en rapport avec vous, j'ai pris la liberté de vous écrire en français; car vous me dites que vous connaissez cette langue.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération,

POINCARÉ.

III.

Leipzig 19. Juni 1881.

GEEHRTER HERR !

Als ich gestern Ihren willkommenen Brief erhielt, sandte ich Ihnen umgehend Separatabzüge von denjenigen auf unser Thema bezüglichen Arbeiten zu, von denen ich solche überhaupt noch besitze. Lassen Sie mich heute diese Sendung durch einige Zeilen erläutern. Mit dem einen Briefe wird es freilich nicht abgethan sein, sondern wir werden viel korrespondieren müssen, bis wir wechselseitig volle Fühlung gewonnen haben. Ich möchte heute folgende Punkte hervorheben :

1. Unter den übersandten Arbeiten fehlen die 3 wichtigsten aus dem 14. Bande der *Annalen*, desgleichen meine Untersuchungen über das Ikosaeder in Bd. 9 und 12, sowie meine zweite Arbeit über lineare Differentialgleichungen (die auch Hrn. Picard unbekannt scheint) ebenfalls in Bd. 12. Ich bitte Sie, sich dieselben irdendwo zu verschaffen. Separatabzüge sandte ich verschiedene nach Paris, z. B. an Hermite.

2. An meine eigenen Arbeiten schliessen sich die meiner Schüler Dyck und Gierster. Ich benachrichtige beide, Ihnen Separatabzüge zuzustellen. Eine auf dieselben Theorien bezügliche Doktordissertation von Hrn. Hurwitz ([1]) wird eben gedruckt und Ihnen in einigen Wochen zukommen.

3. Seit vorigem Herbst ist einer Ihrer Landsleute hier, dessen Namen Sie

([1]) *Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen*, 1. Stufe, Leipzig, 1881; *Math. Annalen*, t. 18, 1881, p. 528-592.

vermuthlich kennen, da er zusammen mit Picard und Appell studirte : Mr. Brunel (Adr. Liebigstrasse 38/2). Vielleicht interessirt es Sie, auch mit ihm in Korrespondenz zu treten; er wird Ihnen von den hiesigen Seminareinrichtungen und von der Rolle, welche eben dort die eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich gespielt haben, besser erzählen können, als ich selbst.

4. Ich habe Sommersemester 1879 von Hrn. Gierster ein Heft meiner Vorlesung ausarbeiten lassen. Im Augenblicke ist dasselbe verliehen, doch werde ich dasselbe nächster Tage zurückbekommen und mit Hrn. Brunel zusammen durchgehen, worauf wir Ihnen Bericht erstatten.

5. Die Benennung ,, fonctions fuchsiennes " weise ich zurück, so gut ich verstehe, dass Sie durch Fuchs'sche Arbeiten zu diesen Ideen mit veranlasst wurden. Im Grunde basiren alle solche Untersuchungen auf Riemann. Für meine eigene Entwickelung war die eng verwandte Betrachtung von Schwarz in Bd. 75 des *Borchardt'schen Journals* (die ich Ihnen dringend empfehle, wenn Sie dieselbe noch nicht kennen solten) von massgebender Bedeutung. Die Arbeit von Hrn. Dedekind ([1]) über elliptische Modulfunktionen in *Borchardt's Journal* Bd. 83 erschien erst, als ich mir über die geometrische Repräsentation der Modulfunktionen bereits klar war (Herbst, 1877). Zu diesen Arbeiten stehen die von Fuchs vermöge ihrer ungeometrischen Form in bewusstem Gegensatze. Ich bestreite nicht die grossen Verdienste, welche Hr. Fuchs um andere Theile der Lehre von den Differentialgleichungen hat, aber gerade hier lassen seine Arbeiten um so mehr im Stich, als ihm das einzige Mal, wo er in einem Briefe an Hermite die elliptischen Modulfunktionen erläuterte ([2]), ein fundamentaler Fehler unterlief, den dann Dedekind l. c. nur zu sanft monirte.

6. Man kann eine Funktion mit linearen Transformationen in sich insbesondere so definiren, dass man die *Halbebene* auf ein Kreisbogenpolygon, welches beliebig vorgegeben ist, abbildet. Dies ist dann freilich ein nur spezieller Fall der allgemeinen (ich weiss im Augenblicke nicht, ob Sie sich nicht nur auf diesen speziellen Fall beschränken). Die Gruppe der linearen Transformationen ist dann dadurch partikularisirt, dass sie in einer doppelt so grossen Gruppe von Operationen enthalten ist, welche neben linearen Transformationen auch Spiegelungen (Transformationen durch reziproke Radien) umfasst. In diesem Falle ist die Existenz der Funktion durch ältere Arbeiten von Schwarz, resp. Weierstrass, sicher gestellt, sofern man nicht auf die allgemeinen Riemann'schen Prinzipien rekurriren will. Siehe Schwarz ([3]) in Borchardt Bd. 70, Abbildung der Halbebene auf Kreisbogenpolygone.

7. Auch in diesem speziellen Falle habe ich bislang durchaus nicht alle *groupes*

([1]) *Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen* (*J. reine angew. Math.*, t. 83, 1877, p. 265-292).

([2]) *Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces* (*J. reine angew. Math.*, t. 83, 1877, p. 13-37); L. Fuchs, *Ges. math. Werke*, Berlin, t. 2, 1906, p. 85-111. *Voir* aussi la Note de M. Schlesinger, *loc. cit.*, p. 112-114.

([3]) *Ueber einige Abbildungsaufgaben* (*J. reine angew. Math.*, t. 70, 1869, p. 105-120); H. A. Schwarz, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 2, 1890, p. 65-83.

discontinus aufgestellt; ich habe nur gesehen, dass es sehr viele gibt, bei denen kein fester Grundkreis existirt, bei denen also die Analogie mit der nicht-euklidischen Geometrie (die mir übrigens in der That sehr geläufig ist) nicht zutrifft. Nehmen Sie z. B. ein beliebiges Polygon, begränzt von *irgend* welchen sich berührenden Kreisen, so wird die Vervielfältigung durch Symmetrie ebenfalls zu einer *groupe discontinu* führen.

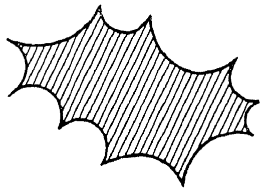


Fig. 1.

8. Die übrigen Fragen Ihres Briefes finden wohl schon durch die übersandten Arbeiten ihre Beantwortung, insbesondere die nach dem Pluralis der „Modulfunktionen" und in der Hauptsache auch die nach den „Fundamentalpolygonen".

In der Hoffnung recht bald wieder von Ihnen zu hören.

Ihr ganz ergebener

F. Klein.

IV.

Caen, le 22 juin 1881.

Monsieur,

Je n'ai pas encore reçu les envois que vous m'annoncez et que je ne tarderai sans doute pas à voir arriver à leur adresse. Mais je ne veux pas attendre ce moment pour vous remercier de vos promesses, ainsi que de votre lettre que j'ai lue avec le plus grand intérêt. Aussitôt après l'avoir reçue, j'ai couru à la bibliothèque pour y demander le 70^e volume de Borchardt; malheureusement ce volume était prêté et je n'ai pu y lire le Mémoire de M. Schwarz. Mais je crois pouvoir le reconstituer d'après ce que vous m'en dites et y reconnaître certains résultats que j'avais trouvés sans me douter qu'ils avaient fait l'objet de recherches antérieures. Je crois donc comprendre que les fonctions fuchsiennes que les recherches de M. Schwarz et les vôtres permettent de définir sont celles dont je me suis occupé plus particulièrement dans ma Note du 23 mai ([1]). Le groupe particulier dont vous me parlez dans votre dernière lettre me semble fort intéressant et je vous demanderai la permission de citer ce passage de votre lettre dans une communication ([2]) que je ferai prochainement à l'Académie et où je chercherai à généraliser votre résultat.

Quant à la dénomination de fonctions fuchsiennes, je ne la changerai pas. Les égards que je dois à M. Fuchs ne me le permettent pas. D'ailleurs, s'il est vrai que le point de vue du savant géomètre d'Heidelberg est complètement différent du vôtre et du mien, il est certain aussi que ses travaux ont servi de point de départ et de fondement à tout ce qui s'est fait depuis dans cette théorie. Il n'est donc que juste que son nom reste attaché à ces fonctions qui y jouent un rôle si important.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération,

POINCARÉ.

V.

Leipzig 25. Juni 1881.

GEEHRTER HERR!

Schreiben Sie mir doch bitte umgehend eine Karte, ob meine Sendung von Separatabzügen auch jetzt noch nicht eingetroffen ist; ich brachte sie selbst heute vor 8 Tagen auf die Post. Ueber F. würden Sie sich anders ausdrücken, wenn Sie die Literatur völlig kennten. Die Lehre von der Abbildung der Kreisbogenpolygone steht völlig unabhängig von der F. Arbeit ([3]) in t. 66, das Gemeinsame ist nur, dass beide Betrachtungsweisen durch Riemann angeregt sind.

Hochachtungsvoll

Prof. Dr. F. KLEIN.

VI.

Caen, le 27 juin 1881.

MONSIEUR,

Au moment où j'ai recu votre carte, j'allais précisément vous écrire pour vous remercier de votre envoi et vous en annoncer l'arrivée. S'il a été retardé

([1]) *Sur les fonctions fuchsiennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 1198-1200); *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 12-15.

([2]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 1484-1487; *Œuvres de Henri Poincaré*, t. 2, p. 19-22.

([3]) *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten* (*J. reine angew. Math.*, t. 66, 1866, p. 121-160); L. FUCHS, *Ges. math. Werke*, Berlin, t. 1, 1904, p. 159-204.

c'est par suite d'une erreur de la poste qui l'a envoyé d'abord à la Sorbonne, puis au Collège de France, bien que l'adresse eût été parfaitement bien mise.

En ce qui concerne M. Fuchs et la dénomination de fonctions fuchsiennes, il est clair que j'aurais pris une autre dénomination si j'avais connu le travail de M. Schwarz; mais je ne l'ai connu que par votre lettre, après la publication de mes résultats de sorte que je ne peux plus changer maintenant le nom que j'ai donné à ces fonctions sans manquer d'égards à M. Fuchs. J'ai commencé la lecture de vos brochures qui m'ont vivement intéressé, principalement celle qui a pour titre *Ueber elliptische Modulfunktionen*. C'est au sujet de cette dernière que je vous demanderai la permission de vous adresser quelques questions.

1° Avez-vous déterminé les *Fundamentalpolygone* de tous les *Untergruppen* que vous appelez *Kongruenzgruppen* et en particulier de ceux-ci :

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \qquad (\bmod n).$$

2° Dans mon Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, j'ai partagé les groupes fuchsiens d'après divers principes de classification et entre autres d'après un nombre que j'appelle leur genre. De même vous partagez les *Untergruppen* d'après un nombre que vous appellez leur *Geschlecht*. Le *genre* (tel que je l'entends) et le *Geschlecht* sont-ils un seul et même nombre? Je n'ai pu le savoir, par ce que je ne sais pas ce que c'est que le *Geschlecht im Sinne der Analysis situs*. Je vois seulement que ces nombres s'annulent à la fois. Auriez-vous donc l'obligeance de me dire ce que c'est que ce *Geschlecht im Sinne der Analysis situs* ou, si cette définition est trop longue pour être donnée dans une lettre, dans quel Ouvrage je pourrais la trouver? Dans votre dernière lettre, vous me demandiez si je ne suis renfermé dans le cas particulier où « Die Gruppe der linearen Transformationen ist dadurch partikularisirt, dass sie in einer doppelt so grossen Gruppe von Operationen enthalten ist, welche neben linearen Transformationen auch Spiegelungen umfasst ». Je ne me suis pas renfermé dans ce cas, mais j'ai supposé que toutes les transformations linéaires conservaient un certain cercle fondamental. Je pense d'ailleurs pouvoir aborder par une méthode analogue le cas le plus général.

A ce propos, il me semble que tous les *Untergruppen* relatifs aux fonctions modulaires ne rentrent pas dans ce cas spécial.

Au sujet de ce groupe discontinu dont vous me parlez et qu'on obtient par des *Spiegelungen* et par *la Vervielfältigung* d'un polynome limité par des arcs de cercle se touchant deux à deux il me semble qu'il y a une condition supplémentaire dont vous n'avez pas parlé bien qu'elle ne vous ait sans doute pas échappé; deux arcs de cercle quelconques prolongés, ne doivent pas se couper. Serait-ce abuser de votre complaisance que de vous poser encore une question.

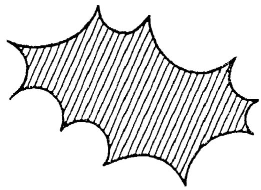


Fig. 1.

Vous dites : « in diesem Falle ist die Existenz der Funktion durch Arbeiten von Schwarz sichergestellt », et vous ajoutez : « *sofern man nicht auf die allgemeinen Riemann'schen Principien rekurriren will* ». Qu'entendez-vous par là ?

J'ai écrit dernièrement à M. Hermite; je lui ai fait part succinctement du contenu de vos lettres, et je lui ai envoyé les compliments dont vous m'aviez chargé pour lui.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma reconnaissance et de mon respect.

POINCARÉ.

VII.

Leipzig den 2. Juli 1881.

GEEHRTER HERR !

Lassen Sie mich die verschiedenen Fragen, die Sie in Ihrem wilkommenen Briefe vom 27. Juni stellen, so gut es gehen will, umgehend beantworten.

1. Die Fundamentalpolygone der Kongruenzgruppen $\alpha \equiv \delta \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{n}$ habe ich bei $n = 5$ (wo durch Zusammenbiegen der Kanten das Ikosaeder entsteht) und bei $n = 7$ im 14. Bande (¹) ausführlich beschrieben. Der allgemeine

(¹) *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades* (*Math. Annalen*, t. 14, 1878-1879, p. 111-170); *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* (*ibid.*, p. 428-471); F. KLEIN, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 82, p. 13-75 et n° 84, p. 90-135.

Fall $n =$ Primzahl bildet den Gegenstand einer Arbeit von Dyck ([1]), die eben im Druck ist. Wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, habe ich die Sache nicht erledigt.

2. ,, Geschlecht im Sinne der *Analysis situs* " wird jeder geschlossenen Fläche beigelegt. Dasselbe ist gleich der Maximalzahl solcher in sich zurückkehrender Schnitte der Fläche, die man ausführen kann, ohne die Fläche zu zerstücken. Wenn jetzt die betreffende Fläche als Bild der Werthsysteme w, z einer algebraischen Gleichung $f(w, z) = 0$ betrachtet werden kann, so ist ihr Geschlecht eben auch das Geschlecht der Gleichung. Ihr *genre* und mein ,, Geschlecht " sind also *materiell dieselben Zahlen*, es liegt bei mir nur vermuthlich eine freiere Auffassung der Riemann'schen Fläche und der auf sie gegründeten Definition von p zu Grunde.

3. Es gibt innerhalb der Gruppe der Modulfunktionen allerdings Untergruppen, welche ein unsymmetrisches Fundamentalpolygon besitzen, dahin gehören, wie ich in Bd. 14 nachwies ([2]), insbesondere diejenigen Untergruppen, welche den singulären Resolventen der Modulargleichung für $n = 7$ und $n = 11$ entsprechen.

4. Dass sich bei dem Polygon die Kreise rückwärts verlängert nicht schneiden dürfen, wenn eine eindeutige Funktion entstehen soll, ist mir in der That wohl bekannt. Gerade auf diesen Punkt muss man meines Erachtens die Aufmerksamkeit

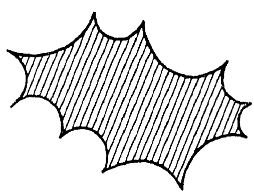


Fig. 1.

richten, wenn man beweisen will, dass sich die Koordinaten w, z des Punktes einer beliebigen algebraischen Kurve als eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich angeben lassen. Ich werde Ihnen angeben, wie weit ich in dieser Frage gekommen bin. Nach den Arbeiten von Schwarz, resp. Weierstrass, kann man die Halbebene immer so auf ein Kreisbogenpolygon abbilden, dass die Punkte I, II, III, IV, V, welche den 1, 2, 3, 4, 5, auf der Begränzung der Halbebene entsprechen, beliebige Lage haben. Nun seien I, II, III, IV, V, ... die Verzweigungspunkte einer algebraischen Funktion $w(z)$; und diese algebraische Funktion möge *keine anderen* Verzweigungspunkte besitzen. Dann sind offenbar w und z eindeutige Funktionen der gewollten Art' von denjenigen Hülfsvariabeln, in deren Ebene das gezeichnete Polygon liegt. *Wenn also alle Verzweigungspunkte einer algebrai-*

([1]) *Versuch einer übersichtlichen Darstellung der Riemann'schen Fläche, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformationen der elliptischen Functionen entspricht* (*Math. Annalen*, t. 18, 1881, p. 507-527).

([2]) *Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen* (*Math. Annalen*, t. 14, 1879, p. 417-27); F. KLEIN *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, nº 83, p. 76-89.

schen Funktion $w(z)$ *auf einem Kreise der* z*-Ebene liegen, so ist die Frage ohne weiteres zu bejahen.* Wie aber, wenn das nicht der Fall ist? Da komme ich unter Umständen auf solche Polygone, wie ich sie das vorige Mal nannte. Findet keinerlei Symmetrie statt, so komme ich wenigstens [durch Aufstellung zugehöriger Differentialgleichungen des von mir behandelten Typus $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \mathrm{R}(z)$] auf einen analog gestalteten Fundamentalraum, dessen Kanten unter Winkeln — Null zusammenstossen und übrigens paarweise durch gewisse lineare Substitutionen zusammengehören. *Aber ich kann nicht beweisen, dass dieser Fundamentalraum mit seinen Wiederholungen zusammen nur einen Theil der komplexen Ebene überdeckt.* Und an dieser Schwierigkeit finde ich mich nun schon lange aufgehalten.

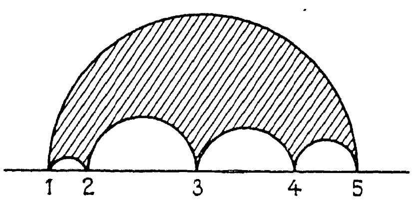


Fig. 2.

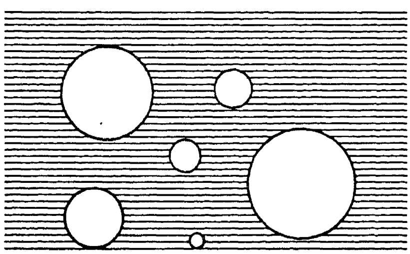


Fig. 3.

5. Uebrigens bekommt man merkwürdige andere Beispiele von diskontinuirlichen Gruppen, wenn man beliebig viele einander nicht schneidende Kreise annimmt und nun an ihnen durch reziproke Radien spiegelt. Ich habe dabei den Theil der Ebene, der gleichzeitig ausserhalb aller Kreise liegt, und der also das halbe Fundamentalpolygon vorstellt, der Deutlichkeit halber schraffirt. Diese Gruppen werden gelegentlich von Schottky betrachtet (*Borchard'ts Journal*, t. 83, p. 300-351), ohne dass dort ihre prinzipielle Bedeutung hervorgehoben würde ([1]).

6. Riemann's Prinzipien geben zunächst keinen Weg, um eine Funktion, deren Existenz man erschliesst, wirklich zu bilden. Man ist daher geneigt, sie als unsicher zu betrachten, so gewiss es auch sein mag, dass die Resultate, welche aus ihnen

([1]) *Vgl.* hierzu die Note von Schottky, *Ueber eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich* (*Math. Annalen*, t. 20, 1882, p. 299-300).

folgen, richtig sind. Demgegenüber haben Weierstrass und Schwarz bei der von mir berührten Frage der Abbildung von Kreisbogenpolygonen wirkliche Bestimmungen der in Betracht kommenden Konstanten durch konvergente Prozesse gegeben. Will man Riemann'sche Prinzipien gebrauchen, so kann man folgenden sehr allgemeinen Satz aufstellen. Es sei ein Polygon gegeben, mit einer oder auch mehreren getrennten Peripherien. Das Polygon kann ein mehrblättriges sein, dessen Blätter durch Verzweigungspunkte verbunden sind. Jede Peripherie besteht aus einer Anzahl von Stücken; jedes Stück gehe durch eine bestimmte lineare Substitution in eins der übrigen über. Dann kann man immer eine Funktion konstruiren, welche im Inneren des Polygons beliebige vorgeschriebene Unstetigkeiten hat, und deren reeller Theil gewisse vorgegebene Periodizitätsmoduln erhält, wenn man von einem Stücke der Begränzung durch das Innere des Polygons zum zugehörigen Stücke übergeht. Unter diesen Funktionen sind insbesondere solche, welche im Inneren des Polygons durchweg eindeutig sind und auf je zwei entsprechenden Punkten des Randes denselben Werth aufweisen ([1]). Der Beweis lässt sich genau demjenigen nachbilden, den Riemann ([2]) in paragraph 12 des ersten Theils seiner Abelschen Funktionen für das besondere Polygon gegeben hat, das aus p übereinander geschichteten Parallelogrammen besteht, die durch $2p-2$ Verzweigungspunkte verbunden sind. Dieser Satz, den ich mir übrigens erst in den letzten Tagen völlig zurechtlegte, schliesst, so viel ich sehe, alle die Existenzbeweise, von denen Sie in Ihren Noten sprechen, als spezielle Fälle oder leichte Folgerungen ein. Uebrigens ist mein Satz, wie manches, was ich heute schreibe, noch ungenau formuliert; ich müsste zu ausführlich sein, wenn ich das vermeiden wollte; Sie werden leicht meine Meinung erkennen.

7. Lassen Sie mich noch eine Bemerkung über eine andere Ihrer Veröffentlichungen hinzufügen. Sie sprechen davon, dass die θ-Funktionen, die aus der Umkehr der algebraischen Integrale an Kurven vom Geschlechte p entstehen, nicht die allgemeinen ihrer Art sind. Dass eben diese Ueberlegungen in Deutschland allgemein gekannt sind, können Sie nicht wissen : eine ganze Anzahl jüngerer Mathematiker arbeitet daran, die Bedingungen zu finden, durch welche sich die sogenannten Riemann'schen θ-s von den allgemeinen unterscheiden. Dagegen wunderte mich, dass Sie die Konstantenzahl der Riemann'schen θ gleich $4p+2$ angeben, während es doch $3p-3$ sein muss. Haben Sie Riemann, die betr. Entwickelungen, nicht gelesen? Und ist Ihnen die ganze Diskussion, welche Brill und Nöther im 7. Bande der *Math. Annalen* (p. 300-307) zum Abschluss bringen, unbekannt?

([1]) Pour que ce théorème soit vrai il faut encore ajouter une condition; cf. *Ueber den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereichs* (*Math. Annalen*, t. 40, 1892, p. 131). F. Klein, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 104, p. 711-720. Poincaré fait allusion à cettre lettre dans son Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes (*Acta Math.*, t. 5, 1884, p. 211; *Œuvres*, Paris, t. 2, 1916, p. 404), où il s'exprime comme il suit : « J'avais, il est vrai, dans les *Mathematische Annalen*, énoncé un résultat particulier sur ces équations irrégulières, mais ce résultat est inexact; j'avais été trompé par une fausse interprétation d'un théorème de M. Klein dont je ne connaissais pas la démonstration.

([2]) *Theorie der Abel'schen Functionen* (*J. reine angew. Math.*, t. 54, 1857, p. 133-136); B. Riemann, *Ges. math. Werke*, Leipzig, 1892, p. 119-122.

In der Hoffnung, bald wieder von Ihnen zu hören, bin ich Ihr hochachtungsvoll ergebener.

F. KLEIN.

VIII.

Caen, 5 juillet 1881.

MONSIEUR,

J'ai reçu votre lettre que j'ai lue avec le plus vif intérêt. Je vous demande mille pardons de la question que je vous ai posée au sujet du *Geschlecht im Sinne der Analysis Situs*. J'aurais pu vous éviter la peine de m'y répondre, puisque je trouvais l'explication à la page suivante de votre Mémoire. Vous vous rappelez sans doute que dans une de mes dernières lettres, je vous demandais l'autorisation d'en citer une phrase dans une communication où je me proposais de généraliser vos résultats. Vous ne m'avez pas répondu à ce sujet et j'ai pris votre silence pour un acquiescement. J'ai fait cette communication ([1]) en deux fois, dans les séances du 27 juin et du 4 juillet.

Vous trouverez que nous nous sommes rencontrés sur quelques points. Mais la citation que j'ai faite de votre phrase vous sera, je pense, une garantie suffisante.

Permettez-moi, Monsieur, encore une question; où trouverai-je les travaux de MM. Schwarz et Weierstrass dont vous me parlez; d'abord au sujet de ce théorème que :

« Man kann immer die Halbebene so auf ein Kreisbogenpolygon abbilden, dass die Punkte I, II, III, IV, V, welche den 1, 2, 3, 4, 5 auf der Begränzung der Halbebene entsprechen, beliebige Lage haben ». Ce théorème ne m'était pas inconnu, car je l'ai démontré dans ma communication ([2]) du 23 mai. Mais où le trouverai-je dans les travaux de mes devanciers? Est-ce au tome 70 de *Crelle?* Où trouverai-je aussi les développements dont vous me parlez dans la phrase suivante : « Demgegenüber haben Weierstrass und Schwarz bei der

([1]) *Sur les fonctions fuchsiennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 1484-1487); *Sur les groupes kleinéens* (*ibid.*, t. 93, 1881, p. 44-46); *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 19-25.

([2]) *Sur les fonctions fuchsiennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 1198-1200; *Œuvres*, t. 2, 1916, p. 12-15.

von mir berührten Frage der Abbildung von Kreisbogenpolygonen wirkliche Bestimmungen der in Betracht kommenden Konstanten durch konvergente Prozesse gegeben »?

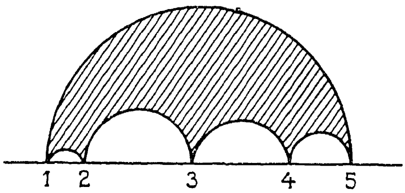


Fig. 2.

Le théorème que vous me dites avoir découvert m'a beaucoup intéressé. Il est clair que, comme vous me le dites, votre résultat contient comme cas particulier, *alle meine Existenzbeweise*. Mais il arrive après.

J'arrive à votre remarque relative aux fonctions abéliennes. Quand j'ai parlé de $4p+2$ constantes, il ne s'agissait pas du nombre des modules. J'ai dit ceci : Une relation algébrique de genre p peut toujours être ramenée au degré $p+1$. Une relation de degré $p+1$ et de genre p dépend de $4p+2$ paramètres; car une relation *générale* de degré $p+1$ dépend de

$$\frac{(p+1)(p+4)}{2} \quad \text{paramètres.}$$

Mais il y a

$$\frac{p(p-1)}{2}-p \qquad \text{points doubles.}$$

Il reste donc $4p+2$ paramètres indépendants. J'ai ainsi, non le nombre des modules, mais une limite supérieure de ce nombre, ce qui me suffisait pour mon objet.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération.

POINCARÉ.

IX.

Leipzig 9. Juli 1881.

GEEHRTER HERR?

In vorläufiger Beantwortung Ihres Briefes habe ich etwa folgendes zu sagen :

1. Es ist mir ganz recht, dass Sie jene Stelle aus meinem Briefe zitirt haben.

Bislang besitze ich nur erst Ihre Note vom 27 Juni. Ueber die Benennung, die Sie dieser Funktionenklasse ertheilt haben, war ich einigermassen erstaunt; denn ich habe ja nichts weiter gethan als die Existenz dieser Gruppen bemerkt. Was mich angeht. so werde ich weder von „ fuchsiennes " noch von „ kleinéennes " Gebrauch machen, sondern bei meinen „ Funktionen mit linearen Transformationen in sich " bleiben.

2. Was ich über den Werth der Riemann'schen Prinzipien sagte, war nicht scharf genug. Es ist kein Zweifel, dass das „ Dirichlet'sche Prinzip ", als überhaupt nicht konklusiv, verlassen werden muss. Man kann es aber vollständig durch strengere Beweisführung ersetzen. Sie finden das näher ausgeführt in einer Arbeit von Schwarz, die ich eben erst in diesen Tagen (zwecks meiner Vorlesung) genauer ansah und in der Sie auch die Angaben über Konstantenbestimmungen finden, die in *Borchardt's Journal* (an Arbeiten in *Borchardt's Journal* müssen Sie jedenfalls Bd. 70, 74, 75 ansehen) nur angedeutet sind; dieselbe steht in den *Berliner Monatsberichten*, 1870, p. 767-795 (1).

3. Der allgemeine Existenzbeweis, von dem ich das vorige Mal sprach, gilt natürlich auch für Gruppen, die aus irgendwelchen analytischen (nicht nothwendig linearen) Substitutionen zusammengesetzt sind. Es ist merkwürdig, dass in diesem Sinne jede Operationsgruppe Funktionen definirt, die bei ihr ungeändert bleiben. Die „ groupes discontinus " haben nur das voraus, dass bei ihnen zugehörige *eindeutige* Funktionen existiren, was allerdings sehr wesentlich ist. Würde man die höheren Fälle durch *eindeutige* Funktionen von *mehreren* Veränderlichen beherrschen können, wie man es in dem besonderen bei Riemann in paragraph 12 behandelten Falle vermöge des Jacobi'schen Umkehrproblems zu thun pflegt?

So viel für heute. Ich habe mittlererweile mit Herrn Brunel meine älteren Sachen, namentlich auch die Vorlesungshefte von 1877-1878 und 1878-1879 (die ich damals habe umarbeiten lassen) durchgegangen und wird Hr. Brunel Ihnen demnächst darüber schreiben.

Hochachtungsvoll
Ihr ergebener

Prof. Dr. F. Klein.

X.

Leipzig 4. Dez. 1881.
Sophienstrass 10/II.

Sehr geehrter Herr!

Nachdem ich lange über die uns gemeinsam interessirenden Fragen nur beiläufig nachgedacht habe, habe ich heute früh Gelegenheit genommen, die verschiedenen

(1) H. A. Schwarz, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 2, 1890, p. 144-171.

Mittheilungen, wie Sie sie der Reihe nach in den *Comptes rendus* veröffentlicht haben, im Zusammenhange zu lesen. Ich sehe, dass Sie nun wirklich zu einem Beweise gekommen sind (8. August) : „ que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes " und " que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire " (1). Indem ich Ihnen dazu gratuliere, dass Sie soweit gekommen sind, möchte ich Ihnen einen Vorschlag machen, der Ihren und meinen Interessen auf gleiche Weise gerecht wird. Ich möchte Sie bitten, mir für die *Mathematischen Annalen* einen kurzen oder einen längeren Aufsatz zu schicken, oder, wenn Sie keine Zeit zur Ausarbeitung eines solchen finden, mir einen *Brief* zu schicken, in welchem Sie in grossen Zügen Ihre Gesichtspunkte und Resultate angeben. Ich selbst würde dann diesen Brief mit einer Anmerkung begleiten, in welcher ich darlegte, wie sich von mir aus die ganze Sache stellt, und wie gerade das Programm, welches Sie jetzt ausführen, als hodegetisches Prinzip meinen Arbeiten über Modulfunktionen zu Grund lag. Natürlich würde ich diese Ammerkung Ihnen vor dem Druck zur Begutachtung zustellen. — Eine solche Publikation würde Zweierlei erreichen : einmal würde, was Ihnen vermuthlich erwünscht ist, das Leserpublikum der *Mathematischen Annalen* auf Ihre Arbeiten mit Entschiedenheit aufmerksam gemacht werden; andererseits würden, auch dem allgemeineren Publikum gegenüber, Ihre Arbeiten in derjenigen Verbindung mit den meinigen stehen, die nun einmal thatsächlich vorhanden ist. Sie werden zwar, wie Sie mir schreiben, diese Beziehungen in Ihrem ausführlichen Mémoire auseinandersetzen; aber bis dahin vergeht viele Zeit, und es liegt mir daran, dass es auch in den Annalen gesagt wird.

Ich selbst habe mittlerweile eine kleine Schrift (2) über „ Riemanns Theorie " fertig gestellt, die Ihnen vielleicht interessant ist, weil sie diejenige Konzeption der Riemann'schen Fläche gibt, mit der R. selbst meines Erachtens eigentlich gearbeitet hat. Vielleicht hat Ihnen Hr. Brunel davon erzählt. Ich habe mich sodann in letzter Zeit mit den verschiedenen Existenzbeweisen beschäftigt, welche man an Stelle des Dirichlet'schen Prinzip's gesetzt hat, und habe mich überzeugt, dass die Methoden von Schwarz in den *Berliner Monatsberichten*, 1870, p. 767 ff. allerdings vollkommen ausreichen, um z. B. den allgemeinsten Satz zu beweisen, von dem ich gelegentlich im Sommer schrieb.

Hochachtungsvoll

F. Klein.

---

(1) *Sur les fonctions fuchsiennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 93, 1881, p. 301-303); *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 29-31.

(2) F. Klein, *Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Leipzig, 1882; *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 99, p. 499-573.

XI.

8 décembre 1881
Paris
rue Gay-Lussac, 66.

MONSIEUR,

Je vous remercie infiniment de l'offre obligeante que vous voulez bien me faire et je suis tout disposé à en profiter. Je vous enverrai prochainement la lettre que vous me demandez; je vous prierai pourtant de me dire quelle place vous pouver lui consacrer dans les *Annales*. Je sais que la clientèle de votre journal est nombreuse et que l'étendue que vous pouvez permettre à chaque travail est forcément limité et je ne voudrais pas abuser de votre bienveillance. Quand je saurai quelle longueur je puis donner à ma lettre, je vous l'écrirai immédiatement.

J'aurai prochainement l'honneur de vous envoyer diverses notes relatives à la théorie générale des fonctions, si vous voulez bien les accepter.

J'ai lu dernièrement le Mémoire de Schwarz dans les *Monatsberichte* et ses démonstrations m'ont paru rigoureuses.

Veuillez agréer, Monsieur, mes remerciments et l'expression de ma grande considération,

POINCARÉ.

XII.

Leipzig 10. Dez. 1881.

SEHR GEEHRTER HERR!

Es freut mich, dass meine Aufforderung Ihnen angenehm war : voilà une loi de réciprocité. Was nun Ihre Anfrage angeht, so will ich vor allen Dingen antworten, dass mir Ihr Aufsatz um so gelegener kommt, je *rascher* er kommt. Trifft er noch bis zum 20. dss. ein, so bringe ich ihn noch in das 4. Heft des eben erscheinenden 19. Annalenbandes; er wird dann bis Anfang März (spätestens) publiziert sein. Was nun dem Umfang angeht, so will ich, da Sie es wünschen, etwa *einen Druckbogen* (16 Seiten) in Vorschlag bringen. Das ist Raum genug, um das Wesentliche deutlich zu sagen, und doch wieder auch für den flüchtigen Leser nicht zu viel. Ich möchte Sie dann bitten, namentlich auch über die *Methoden* Ihrer Beweise die erforderlichen Angaben zu machen, also über die Art, wie Sie die in Betracht kommenden Funktionen wirklich bilden, usw. Doch alles das beurtheilen Sie besser, als ich es hier vorschreiben könnte.

Noch Eins! Ist Ihre Adresse jetzt dauernd in Paris? Und wie ist die gegenwärtige Adresse von Picard? Ich würde glücklich sein, wenn ich auch vom letzteren einen Beitrag für die *Annalen* haben könnte.

Hochachtungsvoll
Ihr ergebener

F. KLEIN

XIII.

Paris, le 17 décembre 1881
rue Gay-Lussac, 66.

MONSIEUR,

J'ai l'honneur de vous adresser le petit travail en question [1]; je n'ai pas, comme vous me le demandiez, exposé succinctement mes méthodes de démonstration. Je n'aurais pu le faire sans dépasser de beaucoup les limites que vous m'aviez fixées. Je sais bien que ces limites n'avaient rien d'absolu. Mais d'un autre côté je ne crois pas qu'une démonstration puisse être résumée; on ne peut en retrancher sans lui enlever sa rigueur et une démonstration sans rigueur n'est pas une démonstration. Je préférerais donc vous adresser de temps en temps une série de courtes lettres où je démontrerais successivement les résultats énoncés où du moins les principaux. Ces lettres, vous en feriez ce que bon vous semblerait.

J'habite en effet Paris, je suis Maître de Conférences à la Faculté des Sciences.

Voici l'adresse de Picard :

Professeur Suppléant à la Faculté des Sciences, rue Michelet, 13, Paris.

---

[1] *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires* (*Math. Annalen*, t. 19, 1882, p. 553-564); *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 92-105.

Je vous donne par la même occasion celle d'Appell :

Maître de Conférences à l'École Normale Supérieure,
rue Soufflot 22, Paris.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

POINCARÉ.

XIV.

Leipzig 13. Jan. 1882.

SEHR GEEHRTER HERR!

Ich habe Ihnen noch nicht persönlich für die Uebersendung Ihrer Arbeit gedankt, mit der Sie mich in der Tat in hohem Grade verpflichtet haben. Wir sind jetzt so weit, dass in den allernächsten Tagen gedruckt wird. Sie werden eine Korrektur bekommen, die ich Sie bitte nach Durchsicht :

„ An die Teubner'sche Buchdruckerei, Leipzig "

zurückzuschicken. Wollen Sie dabei insbesondere auch die kurze Erklärung (1)

---

(1) Die vorstehend abgedruckte Arbeit des Herrn Poincaré resumirt gewisse Resultate, welche der Verfasser in einer Reihe aufeinanderfolgender Artikel in den *Comptes rendus* dieses Jahres mitgeteilt hat. Es wird kaum nöthig sein dieselben der Beachtung der Mathematiker noch, besonders zu empfehlen. Handelt es sich doch um Funktionen, welche geeignet scheinen, in der Lehre von den algebraischen Irrationalitäten den Abel'schen Funktionen erfolgreichen Konkurrenz zu machen, und die überdies einen ganz neuen Einblick in diejenigen Abhängigkeiten gewähren, welche durch lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten bestimmt sind. Indem ich Herrn Poincaré im Namen der Annalenredaktion den besonderen Dank dafür ausspreche, dass er uns vorstehenden Aufsatz hat überlassen wollen, glaube ich ihm nur in dem Punkte engegentreten zu sollen, dass ich die von ihm vorgeschlagene Benennung der in Betracht kommenden Funktionen als verfrüht bezeichne. Einmal nämlich bewegen sich alle die Untersuchungen, welche Hr. Schwarz und ich in der betreffenden Richtung bislang veröffentlicht haben, auf dem Gebiete der *fonctions fuchsiennes*, über die Hr. Fuchs selbst nirgends publiziert hat. Andererseits habe ich über die allgemeineren Funktionen, welche Hr. Poincaré mit meinem Namen in Verbindung bringt, von mir aus bisher nichts drucken lassen; ich habe nur gelegentlich Herrn Poincaré auf die Existenz dieser Funktionen aufmerksam gemacht (siehe *Comptes rendus* t. 92, 1881, p. 1484). Letzterer Umstand ist aber um so irrelevanter, als sich ein spezieller Fall jener allgemeineren Funktionen bereits anderwärts bei Gelegenheit in Betracht gezogen findet, nämlich in der Arbeit von Hrn. Schottky im 83. Bande von *Borchardt's Journal*. Es werden dort (p. 346 ff.) Funktionen besprochen, welche sich symmetrisch reproduzieren, wenn man einen ebenen Bereich, der von lauter getrennten Kreislinien begrenzt ist, an eben diesen Kreislinien spiegelt. Uebrigens möchte ich auch auf die Dyck'schen Arbeiten im 17. und 18. Bande dieser Annalen sowie insbesondere auf dessen demnächst (in Bd. XX) erscheinende Habilitationsschrift verweisen, wo Gebietseinteilungen der allgemeinsten hier in Betracht kommenden Art zu gruppentheoretischen Zwecken verwandt werden. Vielleicht ist es gut, diesen kleinen Bemerkungen noch eine allge-

durchsehen, welche ich Ihrer Arbeit in dem früher bereits bezeichneten Sinne hinzugefügt habe, und in der ich, so viel an mir ist, gegen die beiden Benennungen „ fuchsiennes " und „ kleinéennes " protestire, bezüglich lezterer Schottky zitiere und übrigens Riemann als denjenigen bezeichne, auf den alle diese Untersuchungen zurückgehen. Ich habe mich bemüht, diese Erklärung so massvoll als möglich zu halten, bitte Sie aber, mir umgehend zu schreiben, wenn Sie noch eine Abänderung wünschen. Dem Verdienste Ihrer Untersuchungen trete ich damit in keiner Weise zu nahe. Hierüber hinaus habe ich nun aber noch eine eigene kleine Arbeit (1) redigirt, die gleich hinter der Ihrigen abgedruckt werden soll. Dieselbe bringt, auch ohne Beweis, einige auf dem betr. Gebiete liegende Resultate, vor allem dieses : *dass man jede algebraische Gleichung* $f(w, z) = 0$, *sobald man auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche p unabhängige Rückkehrschnitte gezogen hat, in einer und nur einer Weise durch* $w = \varphi(\eta)$, $z = \psi(\eta)$ *auflösen kann, wo* η *eine diskontinuierliche Gruppe von der Art erfährt, wie Sie sie damals im Anschluss an meinen Brief zur Sprache gebracht haben.* Dieser Satz ist darum so schön, weil diese Gruppe genau $3p - 3$ wesentliche Parameter hat, also ebensoviele, als die Gleichungen des gegebenen *p Moduln* besitzen. Hieran knüpfen sich weitere Ueberlegungen, die mir interessant scheinen. Um Ihnen dieselben möglichst vollständig mitzuteilen, habe ich die Druckerei angewiesen, Ihnen auch von meiner Arbeit die Korrektur zuzuschicken, die Sie dann ruhig für sich behalten wollen.

Was die *Beweise* angeht, so ist das eine mühselige Sache. Ich operire immer mit Riemann'schen Anschauungen resp. *geometria situs*. Das ist schwer ganz deutlich zu redigieren. Ich werde mir alle Mühe geben, dieses mit der Zeit zu tun. Mittlererweile wird es mir sehr erwünscht sein, mit Ihnen hierüber und auch über Ihre Beweise zu korrespondieren. Seien Sie überzeugt, dass ich die Briefe, welche Sie mir in dieser Hinsicht in Aussicht stellen, mit grösstem Interesse studiren und dementsprechend eingehend beantworten werde. Wenn Sie wünschen, dieselben in irgend einer Form zu publizieren, so stehen Ihnen die Annalen selbstverständlich zur Verfügung.

Hochachtungsvoll
Ihr ergebener

F. Klein.

---

meinere zuzugesellen und bei vorliegender Gelegenheit zu konstatieren, dass alle die hier in Frage kommenden Untersuchungen, und zwar sowohl diejenigen, welche ein geometrische Gepräge besitzen, als auch die mehr analytischen, die sich auf die Lösungen linearer Differentialgleichungen beziehen, auf Riemann'sche Ideenbildungen zurückgehen. Der Zusammenhang ist ein so enger, dass man behaupten kann, es handele sich bei Untersuchungen im Sinne des Hrn. Poincaré geradezu um die weitere Durchführung des allgemeinen funktionentheoretischen Programm's, welches Riemann in seiner Doktordissertation aufgestellt hat.

Leipzig, den 30. december 1881.

F. Klein.

(1) *Ueber eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich* („ *Das Rückkehrschnitt-theorem*"), (*Math. Annalen*, t. 19, 1882, p. 565-568), F. Klein, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 101, p. 622-626.

XV.

MONSIEUR,

J'ai reçu les épreuves de Teubner et je vais les lui renvoyer. J'ai lu votre Note et je ne vois pas qu'il y ait lieu d'y changer quoi que ce soit. Vous me permettrez cependant de vous adresser quelques lignes pour chercher à justifier mes dénominations. J'attends avec impatience le théorème que vous m'annoncez et qui me paraît des plus intéressants.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

POINCARÉ.

XVI.

Paris, 28 mars 1882.

MONSIEUR,

Vous avez ajouté à mon travail : *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires*, une note où vous exposez les raisons qui vous ont fait rejeter mes dénominations. Vous avez eu la bonté de m'en envoyer les épreuves imprimées en me demandant si j'y désirais quelque changement. Je vous remercie de la délicatesse de votre procédé, mais je ne pouvais en abuser pour vous demander de taire la moitié de votre pensée.

Vous comprenez cependant que je ne puis laisser les lecteurs des *Annales* sous cette impression que j'ai commis une injustice. C'est pourquoi je vous ai écrit, vous vous le rappelez peut-être, que je ne vous demandais aucun changement à votre note, mais que je vous demanderais la permission de vous adresser quelques lignes pour justifier mes dénominations.

Voici ces lignes [1]; peut-être jugerez-vous convenable de les insérer. A mon tour, je vous demanderai si vous désirez que je fasse quelque changement à la rédaction de cette petite note. Je suis prêt à faire tous ceux qui n'altéreraient pas ma pensée.

---

[1] Lettre n° XVII.

Veuillez excuser mon importunité et me pardonner ce petit plaidoyer *pro domo*.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

POINCARÉ.

Je vous serais obligé si vous voulez bien me dire l'adresse de M. Hurwitz à qui je désirerais faire hommage d'un exemplaire de mon travail.

Je vous serais bien reconnaissant aussi, si vous pouvier m'indiquer les traits généraux de la démonstration par laquelle vous établissez le théorème énoncé dans votre dernier travail : *Ueber eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich*.

XVII.

Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires (1).

(Extrait d'une lettre adressée à M. F. KLEIN.)

Par H. POINCARÉ, à Paris.

....Vous avez eu dernièrement la bonté de faire insérer aux *Mathematischen Annalen* (t. 14, p. 553-564) mon travail sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires et vous l'avez fait suivre d'une note où vous exposez les raisons qui vous font trouver peu convenables les noms que j'ai donnés à ces transcendantes. Permettez-moi de vous adresser quelques lignes pour défendre mes dénominations, que je n'ai pas choisies au hasard (2).

Si j'ai cru devoir donner aux fonctions nouvelles le nom de M. Fuchs, ce n'est pas que je méconnaisse la valeur des travaux de M. Schwarz et des vôtres,

---

(1) Cette lettre a été imprimée dans les *Mathematischen Annalen*, t. 20, 1882, p. 52-53 et réimprimée dans les *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 106-107.

(2) Herrn Poincarés Darlegungen habe ich zunächst nur die eine Bemerkung hinzuzufügen, dass ich für mein Teil nach wie vor an der Auffassung festhalte, der ich auf p. 564 des 19. *Annalen*-bandes Ausdruck gegeben babe. Dabei will ich nicht unterlassen, ausdrücklich auf die Note aufmerksam zu machen, mit welcher Hr. Fuchs von sich aus dem auf ihn bezüglichen Passus meiner Auseinandersetzung entgegengetreten ist (cf. *Göttinger Nachrichten* vom 4. März 1882).

Düsseldorf, den 2. April 1882.

F. KLEIN.

je suis le premier au contraire, à en apprécier la haute importance. Mais il ne m'était pas possible d'oublier les découvertes si remarquables que le savant professeur d'Heidelberg a publiées dans le *Journal de Crelle*. Elles sont le fondement de la théorie des équations linéaires et, sans elles, je n'aurais pu aborder l'étude de mes transcendantes qui se lient si directement à cette théorie. Dans ses premiers travaux, M. Fuchs se place, il est vrai, à un point de vue un peu différent du mien et ne se préoccupe ni de la discontinuité des groupes, ni de l'uniformité des fonctions. Mais M. Schwarz, dans ses Mémoires des tomes 70 et 74 du *Journal de Crelle* ne s'en préoccupe pas non plus ; il en dit quelques mots dans un cas très particulier, dans le Mémoire du tome 75 que j'ai cité dans ma note. C'est là seulement qu'il se trouve *Auf dem Gebiete der fonctions fuchsiennes*. Dans vos belles recherches sur les fonctions modulaires votre façon d'envisager les choses différait peu de la mienne, mais vous aviez plutôt en vue alors l'étude des fonctions elliptiques que celle des équations linéaires. Quant à M. Fuchs, dans ses Mémoires (1) des tomes 83 et 89 du *Journal de Crelle*, il s'est élevé à un point de vue nouveau et a mis en lumière le lien étroit qui unit la théorie des équations différentielles à celle de certaines fonctions uniformes. Ce fut la lecture de ces Mémoires qui devint le point de départ de mes recherches (2).

En ce qui concerne les fonctions kléinéennes, j'aurais cru commettre une injustice, si je leur avais donné un autre nom que le vôtre. C'est M. Schottky qui a découvert la figure qui faisait l'objet de votre lettre, mais c'est vous qui avez *ihre prinzipielle Wichtigkeit betont*; comme vous dites à la fin de votre savant travail : *Ueber eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich*.

Quant à ce que vous dites de Riemann, je ne puis qu'y souscrire pleinement. C'était un de ces génies qui renouvellent si bien la face de la Science qu'ils impriment leur cachet, non seulement sur les œuvres de leurs élèves immédiats, mais sur celles de tous leurs successeurs pendant une longue suite d'années. Riemann a créé une théorie nouvelle des fonctions, et il sera toujours

---

(1) *Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces* (*J. reine angew. Math.*, t. 83, 1877, p. 13-37); *Ueber eine Klasse von Funktionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten entstehen* (*ibid.*, t. 89, 1880, p. 151-169); L. Fuchs, *Ges. math. Werke*, Berlin, t. 2, 1906, p. 87-114 et 191-212.

(2) *Cf.* la *Correspondance de Poincaré et de Fuchs* (*Acta Math.*, t. 38, 1921, p. 175-187). Ce volume page 13-25.

possible d'y retrouver le germe de tout ce qui s'est fait et se fera après lui en analyse mathématique....

Paris, le 30 mars 1882.

XVIII.

Düsseldorf, 3. April 1882.
Adr. Bahnstrasse 15.

SEHR GEEHRTER HERR!

Ihre Zusendung, die ich gestern über Leipzig erhalten habe, traf mich eben im Begriffe, Ihnen zu schreiben, um nämlich meine neue Annalennote (¹), die als Korrektur-Exemplar nun wohl bereits in Ihre Hände gekommen ist, mit ein paar Worten zu begleiten. Zugleich erhielt ich die Note von Prof. Fuchs (²) in den Göttinger Nachrichten. Wenn ich zunächst betreffs letzterer 2 Worte sagen darf, so wäre es diess, dass ich sie für ganz verfehlt bezeichnen muss. Ich habe nur behauptet, dass Fuchs nirgends über *fonctions fuchsiennes* publizirt habe. Hiernach ist die zweite der von ihm angezogenen Arbeiten (die ich mir übrigens zwecks näheren Studiums hierher kommen lassen werde) gegenstandslos. Die erste subsumiert sich allerdings unter die *fonctions fuchsiennes*, insofern es sich um Modulfunktionen handelt, aber gerade den eigentlichen Charakter der letzteren, der in der Natur der singulären Linie liegt, hat Fuchs, bei seinem Mangel an geometrischer Anschauung, nicht richtig erkannt, wie bereits Dedekind in Bd. 83 von Borchardt hervorgehoben hat. Was endlich die Insinuation gegen Schluss der Note betrifft, als sei ich wesentlich durch Fuchs' eigene Untersuchungen zu meinen veranlasst worden, so ist das historisch einfach unrichtig. Meine Untersuchungen beginnen in 1874 mit der Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. Im Jahre 1876 zeigte ich sodann, dass damit das von Fuchs damals aufgeworfene Problem, alle algebraisch integrierbaren linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung zu bestimmen, eo ipso erledigt sei. Die Sache ist also gerade umgekehrt, wie Fuchs angibt. Nicht seiner Arbeit entnahm ich die Ideen, sondern ich zeigte, dass sein Thema mit *meinen* Ideen behandelt werden müsse.

Mit Ihrer Darlegung bin ich, wie Sie vermuthen werden, auch nicht einverstanden.. Wenn es sich um die allgemeine Werthschätzung der Fuchs'schen Arbeiten handelt, so werde ich gerne bereit sein, irgend eine *neue* Funktionenklasse, auf die noch niemand Hand gelegt hat, nach ihm zu benennen, oder auch

(¹) *Ueber eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich* („*Das Grenzkreistheorem*") (*Math. Annalen*, t. 20, 1882, p. 49-51). F. KLEIN, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 102, p. 627-629.

(²) *Ueber Funktionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben* (*Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1882, p. 81-84); L. FUCHS, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 2, 1906, p. 285-287.

z. B. die Funktionen mehrerer Variabeln, die Fuchs in Vorschlag bringt (¹). Die Funktionen aber, welche Sie nach Fuchs benennen, gehörten bereits anderen, ehe Sie den Vorschlag zur Benennung machten. Ich bin auch überzeugt, dass Sie gerade diesen Vorschlag nicht gemacht hätten, wenn Sie damals (zu Anfang) die Literatur gekannt hätten. Sie bieten mir sodann, sozusagen zur Entschädigung, die *fonctions kleinéennes* an. So sehr ich Ihre freundliche Absicht dabei anerkenne, so wenig kann ich dies akzeptieren, weil es eben eine historische Unwahrheit impliziert. Wenn meine Arbeit im XIX. Bande so scheinen könnte, als hätte ich mich in der Tat jetzt besonders auf die *kleinéennes* geworfen, so mag die neue Arbeit in Bd. XX zeigen, dass ich nach wie vor auch die *fuchsiennes* als meine Domaine betrachte.

Doch genug davon. Ich habe Ihre Note umgehend in die Druckerei geschickt und nur die eine Bemerkung hinzu gefügt, dass ich für mein Theil an meiner früheren Darlegung festhalte (wobei ich zugleich das Publikum ausdrücklich auf die Note von Hrn. Fuchs aufmerksam mache). Sie werden in allernächster Zeit die Korrektur bekommen und bitte ich sodann, selbige mir hierher (wo ich mich während der Osterferien aufhalte) zuzuschicken, worauf ich in der Druckerei das Nöthige veranlassen werde (²). Was die Stelle über Schottky angeht, so möchte ich Sie auf einen nachgelassenen Aufsatz in Riemann's Werken, p. 413, aufmerksam machen, wo genau entsprechende Ideen entwickelt sind. Es wird allerdings schwer sein, zu konstatieren, wie viel der Herausgeber, Hr. Prof. Weber, da hineingetragen hat. Riemann's Werke erschienen 1876, Schottky's Dissertation 1875, später als Aufsatz im *Borchardt'schen Journal*, 1877. Nun ist aber die Dissertation von 1875 nur ein Theil derjenigen von 1877 und ich kann aus dem Gedächtnisse nicht sagen, ob die eben hier in Betracht kommende Figur bereits in der Ausgabe von 1875 enthalten ist.

Noch muss ich hinzufügen, dass ich nicht beabsichtige, den Streit wegen der *Benennungen* (nachdem ich Ihrer Erklärung die oben bemerkte Fussnote hinzugefügt habe) von mir aus ferner fortzusetzen. Nur wenn ich erneut dazu veranlasst werden sollte, würde ich eine, dann allerdings sehr ausführliche und sehr offenherzige Darstellung des ganzen Sachverhalt's geben. Lassen Sie uns lieber darin konkurrieren, wer von uns die ganze hier in Betracht kommende Theorie am meisten zu fördern geeignet ist! Ich meine, an meinem Teile durch meine neue Note einen gewissen Fortschritt erzielt zu haben. Eine Reihe von Theoremen über algebraische Funktionen beweist man vermöge der neuen η-Funktion sofort, z. B. den Satz, den ich in meiner Schrift über Riemann nur erst als wahrscheinlich bezeichnete, dass nämlich eine Fläche $p > 0$ niemals unendlich viele *diskrete* eindeutige Transformationen in sich besitzen kann (vermöge deren sie in eine ∞ Zahl „äquivalenter Fundamentalpolygone" zerlegt erscheinen würde). Dann ferner den Satz, dass sich verschiedene von Picard gegebene Sätze von $p = 0$ auf den Fall eines beliebigen p übertragen usw.

(¹) Sind dieselben wirklich *eindeutig*? Ich verstehe nur, dass sie in jedem Wertsysteme, welches sie erreichen *unverzweigt* sind. Doch kann ich mich da täuschen.

(²) Ihre Note kommt unmittelbar hinter die meinige zu stehen!

Was die Methoden betrifft, durch die ich meine Sätze beweise so schreibe ich davon, sobald ich dieselben noch mehr abgeklärt habe. Können Sie mir mittlerweile nicht mitteilen, welches die Ideen sind, die Sie eben jetzt verfolgen? Ich brauche kaum hinzuzufügen, dass wir in den *Mathematischen Annalen* jeden Beitrag, den Sie uns geben wollen, mit Freude abdrucken werden. Es wird mir sehr viel daran liegen, mit Ihnen in regem Verkehr zu bleiben. Für mich ist die lebendige Verbindung mit gleichstrehenden Mathematikern immer die Vorbedingung zur eigenen mathematischen Produktion gewesen.

Hochachtungsvoll

Ihr ergebener

F. Klein.

Die Adresse von Dr. Hurwitz ist bis auf weiteres : *Hildesheim*, Langer Hagen.

XIX.

Paris, 4 avril 1882.

Monsieur,

Je viens de recevoir votre lettre et je m'empresse de vous répondre. Vous me dites que vous désirez clore un débat stérile pour la Science et je ne puis que vous féliciter de votre résolution. Je sais qu'elle ne doit pas vous coûter beaucoup puisque dans votre note ajoutée à ma dernière lettre, c'est vous qui dites le dernier mot, mais je vous en sais gré cependant. Quant à moi, je n'ai ouvert ce débat et je n'y suis entré que pour dire une fois et une seule mon opinion qu'il m'était impossible de taire. Ce n'est pas moi qui le prolongerai, et je ne prendrais de nouveau la parole que si j'y étais forcé; d'ailleurs je ne vois pas trop ce qui pourrait m'y forcer.

Si j'ai donné votre nom aux fonctions kleinéennes, c'est pour les raisons que j'ai dites et non pas comme vous l'insinuez, *zur Entschädigung;* car je n'ai à vous dédommager de rien; je ne reconnaîtrai un droit de propriété antérieur au mien que quand vous m'aurez montré qu'on a avant moi étudié la discontinuité des groupes et l'uniformité des fonctions dans un cas tant soit peu général et qu'on a donné de ces fonctions des développements en séries. Je réponds à une interrogation que je trouve en note à la fin d'une page de votre lettre. Parlant des fonctions définies par M. Fuchs au tome 89 *de Crelle*, vous dites : « Sind diese Funktionen wirklich eindeutig? Ich verstehe nur dass sie in jedem Wertsystem welches sie erreichen unverzweigt sind ». Voici ma réponse, les fonctions étudiées par M. Fuchs se partagent en trois grandes classes; celles des deux premières sont effectivement uniformes; celles de la troisième ne sont en général que *unverzweigt;* elles ne sont uniformes que si l'on ajoute une condition à celles énoncées par M. Fuchs. Ces distinctions ne sont pas faites dans le premier travail de M. Fuchs; on les trouve dans deux notes additionnelles, malheureusement trop concises et insérées l'une au *Journal de Borchardt*, t. 90, l'autre aux *Göttinger Nachrichten*, 1880 ([1]).

Je vous remercie beaucoup de votre dernière note ([2]) que vous avez eu la bonté de m'envoyer. Les résultats que vous énoncez m'intéressent beaucoup, voici pourquoi; je les avais trouvés il y a déjà quelques temps, mais sans les publier parce que je désirais éclaircir un peu la démonstration; c'est pourquoi je désirerais connaître la vôtre quand vous l'aurez éclaircie de votre côté.

J'espère que la lutte, à armes courtoises, d'ailleurs, à laquelle nous venons de nous livrer à propos d'un nom, n'altérera pas nos bonnes relations. Dans tous les cas, ne vous en voulant nullement pour avoir pris l'offensive, j'espère que vous ne m'en voudrez pas non plus de m'être défendu. Il serait ridicule d'ailleurs, de nous disputer plus longtemps pour un nom, *Name ist Schall und Rauch* et après tout ça m'est égal, faites comme vous voudrez, je ferai comme je voudrai de mon côté.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

Poincaré.

XX.

Paris, 7 avril 1882.

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous renvoyer corrigée l'épreuve de ma lettre ([3]). Maintenant que ce petit débat est terminé et je l'espère pour ne plus se renouveler,

---

([1]) *Voir* aussi le Mémoire de Poincaré. *Œuvres*, t. I, p. 336-373 et la *Correspondance de Poincaré et de Fuchs* (*Acta Math.*, t. 38, 1921, p. 175-187. Ce vol. p. 13-25).

([2]) *Ueber eindeutige Funktionen mit linearen Substitutionen in sich* („*Das Grenzkreistheorem*") (*Math. Annalen*, t. 20, 1882, p. 49-51); F. Klein, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 102, p. 627-629.

([3]) Lettre n° XVII.

permettez-moi de vous remercier de la courtoisie dont vous n'avez cessé de faire preuve pendant tout le temps qu'il a duré.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

POINCARÉ.

XXI.

Leipzig, 7. Mai 1882.
Sophienstrasse 10.

SEHR GEEHRTER HERR !

Vor kurzem las ich Ihre Note in den *Comptes rendus* vom 10. April 1882 (1). Dieselbe hat mich um so mehr interessiert, als ich glaube, dass Ihre jetzige Betrachtungen mit den meinigen auch der Methode nach eng verwandt sind. Ich beweise meine Sätze durch *Kontinuität*, indem ich die beiden Lemmata vorausstelle: 1. dass zu jeder *groupe discontinu* eine Riemann'sche Fläche zugehört und 2. dass zu der einzelnen zweckmässig zerschnittenen Riemann'schen Fläche immer (2) nur *eine* solche Gruppe gehören kann (sofern ihr überhaupt eine Gruppe zugehört). Die Reihenentwicklungen, wie Sie dieselben aufstellen, habe ich bislang noch ganz ausser Betracht gelassen. Wie beweisen Sie eigentlich die Existenz der Zahl m, für welche $\sum \frac{1}{(\gamma_i\,\eta + \delta_i)^m}$ absolut konvergiert? Und haben Sie für dieselbe eine *genaue* oder nur eine approximative untere Grenze?

Ich selbst habe mittlererweile den betr. Sätzen wieder allgemeinere Gestalt gegeben, und da die Fertigstellung einer Annalennote im Augenblicke, wo ich sehr wenig Zeit habe, sich noch etwas hinausziehen muss, so schreibe ich Ihnen wieder davon. Im Falle meines ersten Satzes wurde die Gesamtkugel η mit Ausnahme unendlich vieler *Punkte* von den wiedererhaltenen Reproduktionen des Fundamentalbereiches überdeckt. Im Falle des zweiten Satzes bleibt das Innere einer Kreisfläche, aber nur einer *einzigen*, unbedeckt. Ich habe jetzt die Existenz von Darstellungen konstatiert (die für die einzelne Riemann'sche Fläche wieder immer und immer auch nur in einer Weise vorhanden sind), bei welcher *unendlich viele Kreisflächen* ausgeschlossen werden. In dieser Richtung formuliere ich hier nur den allereinfachsten Satz (bei welchem durchaus unverzweigte Darstellung der Riemann'schen Fläche vorausgesetzt wird). Sei $p = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m$, wo vorab keines der $\mu = 1$ sein mag. So nehme man auf der Riemann'schen Fläche m Punkte $O_1, \ldots, O_m$, und lege von O_1 in der bekannten Weise $2\mu_1$ Querschnitte $A_1, B_1; A_2, B_2; \ldots; A_{\mu_1}, B_{\mu_1}$; von O_2 $2\mu_2$ Querschnitte usw. Andererseits konstruiere man auf der η Kugel m auseinander liegende Kreise und innerhalb des

(1) *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 41-43.
(2) D. h. unter den Beschränkungen des jeweiligen Satzes.

von letzteren gemeinsam begrenzten Raumes ein Kreisbogenpolygon, das von $4\mu_1$ Kreisen begrenzt ist, welche auf dem ersten Fundamentalkreise senkrecht stehen, dann ferner von $4\mu_2$ Kreisen, die auf dem zweiten Fundamentalkreise senkrecht stehen, usw. (also ein Kreisbogenpolygon, das m-fachen Zusammenhang hat). Die begrenzenden Kreise werden paarweise in der bekannten Reihenfolge A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, A_2, B_2, ... zusammengeordnet und zwar durch lineare Substitutionen des η, bei denen jeweils der betreffende Fundamentalkreis invariant bleibt. Ueberdies sei das Produkt der betreffenden linearen Substitutionen also etwa : $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_{\mu_1}^{-1} B_{\mu_1}^{-1}$ allemal der Identität gleich. *Dann gibt es immer eine und nur eine analytische Funktion, welche die zerschnittene Riemann'sche Fläche auf ein derart beschaffenes Kreisbogenpolygon abbildet.* Der Fall, dass eines der μ gleich 1 wird, unterscheidet sich nur dadurch, dass dann der zugehörige Fundamentalkreis sich auf einen *Punkt* zusammenzieht und die entsprechenden linearen Substitutionen in diejenigen ,, parabolischen " übergehen, welche jenen Punkt festlassen (¹). Doch genug für heute. Wäre es nicht möglich, eine vollständige Kollektion von Separatabzügen Ihrer einschlägigen Arbeiten zu bekommen? Wenn es angeht, beginne ich nach Pfingsten in meinem Seminare eine Reihe von Vorträgen über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich, und möchte dabei meinen Zuhörern eine solche Kollektion zur Verfügung stellen.

Hochachtungsvoll

Ihr

F. Klein.

XXII.

Paris, 12 mai 1882.

Monsieur,

J'ai bien tardé à vous répondre et je vous prie de m'en excuser, car j'ai été forcé de faire une petite absence. Je crois comme vous que nos méthodes se rapprochent beaucoup et diffèrent moins par le principe général que par les détails. Pour les lemmes dont vous me parlez, le premier, je l'ai établi par les considérations des développements en séries et vous, à ce que je pense, à l'aide du théorème dont vous m'avez parlé dans une de vos lettres de l'année dernière. Pour le second lemme, il ne présente pas de difficulté et il est probable que

(¹) *Vgl.* F. Klein, *Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie*, Abschnitt IV, (,,Das allgemeine Fundamentaltheorem"), (*Math. Annalen*, t. 21, 1882-1883, p. 206-212), *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 103, p. 630-710.

nous l'établissons de la même manière. Une fois ces deux lemmes établis et c'est en effet par là que je commence, ainsi que vous le faites vous même, j'emploie comme vous la *continuité*, mais il y a bien des manières de l'employer et il est possible que nous différions dans quelques détails.

Vous me demandez comment j'établis la convergence de la série $\sum \frac{1}{(\gamma_i \eta_i + \delta_i)^m}$. J'en ai deux démonstrations mais qui sont toutes deux trop longues pour tenir dans une lettre; je les publierai prochainement (¹). La première est fondée en principe sur ce fait que la surface du cercle fondamental est finie. La seconde exige la même hypothèse, mais elle est fondée sur la géométrie non euclidienne. Quelle est maintenant la limite inférieure du nombre m? C'est $m = 2$. Ici si l'on suppose m entier on a une limite exacte. En ce qui concerne les séries relatives aux fonctions *Zétafuchsiennes*, je n'ai au contraire qu'une limite approximative. Ce qui m'a le plus intéressé dans votre lettre c'est ce que vous me dites au sujet des fonctions qui admettent comme espaces lacunaires une infinité de cercles. J'ai rencontré aussi de semblables fonctions et j'en ai donné un exemple dans une ou deux de mes Notes. Mais j'y suis arrivé par une voie absolument différente de la vôtre. Il est probable que vos fonctions et les miennes doivent avoir une étroite parenté; cependant il n'est nullement évident qu'elles soient identiques. Je croirais volontiers que votre méthode ainsi que la mienne est susceptible d'une généralisation très étendue et qu'elles conduiraient toutes deux à une grande classe de transcendantes comprenant comme cas particuliers celles que nous avons déjà rencontrées.

Vous me parlez de tirages à part de mes travaux. Voulez-vous parler de mes Notes des *Comptes rendus?* Je n'en ai pas fait faire de tirages à part et il serait malheureusement difficile maintenant d'en obtenir, au moins pour les premières d'entre elles.

Je vous enverrai prochainement et dès que je les aurai reçus les tirages à part de deux travaux plus récents; le premier *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (²). Il s'agit d'étudier la forme géométrique des courbes définies par les équations différentielles du premier ordre. Malheureusement la première partie de ce Mémoire est seule imprimée jusqu'ici et ne contient que les préliminaires. Le second travail a pour objet les formes

(¹) *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*Acta Math.*, t. 1, 1882, p. 193-294); *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 169-257.

(²) *J. Math. pures et appl.*, 3ᵉ série, t. 7, 1881, p. 375-422 et t. 8, 1882, p. 251-296. *Œuvres*, t. I, p. 3-84.

cubiques ternaires, dont je veux faire l'étude arithmétique. J'ai voulu rappeler d'abord certains résultats algébriques qui remplissent la première partie du Mémoire. Cette première partie a seule été imprimée dans le 50[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, le reste devant paraître dans le 51[e] cahier. Cette première partie ne vous intéressera donc pas beaucoup. Il y a cependant une étude sur les transformations linéaires et sur certains groupes *continus* contenus dans le groupe linéaire à trois et quatre variables.

A propos, je ne me souviens plus si je vous ai envoyé ma thèse, ainsi que des travaux plus anciens sur les équations différentielles et un travail sur les fonctions à espaces lacunaires.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

POINCARÉ.

XXIII.

Leipzig, 14 mai 1882.

SEHR GEEHRTER HERR!

In Beantwortung Ihres eben eintreffenden Briefes möchte ich Ihnen mit 2 Worten mitteilen, wie ich die „ Kontinuität " verwende. Freilich nur im Prinzip; denn die Ausführung im Einzelnen, die bei der Redaktion viel Mühe machen wird, lässt sich jedenfalls mannigfach modifizieren. Ich will mich auf den Fall der durchaus unverzweigten η-Funktion der zweiten Art, wie ich sie in meiner Note nannte, beschränken. Hier handelt es sich vor allem um den Nachweis, dass die beiden zu Vergleich kommenden Mannigfaltigkeiten : die Mannigfaltigkeit der in Betracht kommenden Substitutionssysteme und andererseits die Mannigfaltigkeit der überhaupt existirenden Riemann'schen Flächen, nicht nur dieselbe Dimensionenzahl ($6p-6$ reelle Dimensionen) besitzen, sondern dass sie auch *analytische* Mannigfaltigkeiten mit *analytischen* Grenzen sind (im Sinne der von Weierstrass eingeführten Terminologie). Diese beiden Mannigfaltigkeiten sind nun infolge des 1. in meinem vorigen Briefe angeführten Lemma's $(1-x)$-deutig auf einander bezogen, wo x dem 2. Lemma zufolge für die verschiedenen Partieen der zweiten Mannigfaltigkeit nur 0 oder 1 sein kann. Nun aber erweist sich jene Beziehung als eine *analytische* und zwar, wie wieder aus den beiden Hülfssätzen folgt, als eine analytische *von nirgends verschwindender Funktionaldeterminante*. Hieraus schliesse ich, dass x durchweg 1 sein muss. Gäbe es nämlich einen Uebergang von Gebieten mit $x=0$ zu solchen mit $x=1$, so würden den Punkten des Uebergangsgebietes wegen des analytischen Charakters der Zuordnung bestimmte (wirklich erreichbare) Punkte der anderen Mannigfaltigkeit entsprechen und für diese müsste dann, dem Bemerkten zuwider, die Funktionaldeterminante der Beziehung verschwinden. So weit mein Beweis. Einen ganz anderen, doch auch auf Kontinuitätsbetrachtungen beruhenden, teilte mir Hr. Schwarz mit, als ich ihn neulich (am 11. April) in Göttingen besuchte. Ohne gerade von ihm autorisirt zu sein, meine ich Ihnen doch auch davon schreiben zu sollen. Schwarz denkt sich die Riemann'sche Fläche in geeigneter Weise zerschnitten, sodann unendlichfach überdeckt und die verschiedenen Ueberdeckungen in den Querschnitten so zusammengefügt, dass eine Gesamtfläche entsteht, welche der Gesamtheit der in der Ebene nebeneinander zu legenden Polygone entspricht. Diese Gesamtfläche ist, sofern man von solchen Attributen bei unendlich ausgedehnten Flächen sprechen kann (was eben erläutert werden muss), im Falle der η-Function 2. Art (auf die sich Schwarz zunächst beschränkte) *einfach zusammenhängend und einfach berandet*, und es handelt sich also nur darum, einzusehen, dass man auch eine solche einfach zusammenhängende, einfach berandete Fläche in der bekannten Weise auf das Innere eines Kreises abbilden kann. Dieser Schwarz'sche Gedankengang ist jedenfalls sehr schön.

Sie fragen wegen der Separatabzüge. Ich möchte Ihnen da vor allem natürlich nicht lästig fallen, und dies um so weniger, als ich mir ja alle Ihre Publikationen, mit alleiniger Ausnahme Ihrer Thèse, immer verschaffen kann. Aber lieb wäre mich freilich, eine möglichst vollständige Sammlung derselben zu haben. Wenn Sie mir also einige Sachen zuschicken können (ich besitze noch keine derselben), so wird es mir sehr angenehm sein.

Haben Sie vielleicht einmal Lie's Theorie der Transformationsgruppen gelesen? Lie denkt sich die in seine Gruppen eingehenden Parameter immer als komplexe Grössen; es wäre interessant zu sehen, wie sich seine Resultate vervollständigen liessen, wenn man auch solche Gruppen in Betracht zöge, die nur durch *reelle* Wiederholung gewisser ∞ kleiner Operationen entstehen.

Hermite schickte mir vor längerer Zeit eine Nummer seines lithographierten *Cours d'Analyse*. Wäre es vielleicht möglich (natürlich gegen Bezahlung) das Ganze zu bekommen? Ich würde das für mein Seminar in Anbetracht der Zwecke, die ich eben jetzt verfolge, mit besonderer Freude begrüssen.

Wie immer
Ihr ergebenster

F. Klein.

XXIV.

Paris, 18 mai 1882.

Monsieur,

Je n'ai pas besoin de vous dire combien votre dernière lettre m'a intéressé. Je vois clairement maintenant que votre démonstration et la mienne ne peuvent différer que par la terminologie et par des détails; ainsi il est probable que nous n'établissons pas de la même manière le caractère analytique de la relation qui lie les deux *Mannigfaltigkeiten* dont vous parlez; pour moi, je relie ce fait à la convergence de mes séries, mais il est évident qu'on peut arriver au même résultat sans passer par cette considération.

Les idées de M. Schwarz ont une portée bien plus grande; il est clair que le théorème général en question, s'il était démontré, aurait son application dans la théorie d'un très grand nombre de fonctions et en particulier dans celle des fonctions définies par des équations différentielles *non linéaires*. C'est en étudiant de pareilles équations que j'avais été conduit de mon côté à chercher si une surface de Riemann à une infinité de feuillets pouvait être étendue sur un cercle, et j'avais été amené au problème suivant, qui permettrait de démontrer la possibilité de cette extension :

On donne une équation aux différences partielles

$$X_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + X_2 \frac{d^2 u}{dx\, dy} + X_3 \frac{d^2 u}{dy^2} + X_4 \frac{du}{dx} + X_5 \frac{du}{dy} = 0$$

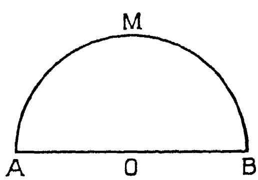


Fig. 4.

et une demi-circonférence AMBO, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont des fonctions données de x et de y; ces fonctions sont analytiques à l'intérieur de la demi-circonférence et cessent de l'être sur son périmètre. Peut-on trouver toujours une fonction u de x et de y satisfaisant à l'équation, analytique à l'intérieur de la demi-circonférence, tendant vers 1 quand le point x, y se rapproche de la demi-circonférence et vers zéro quand il se rapproche du diamètre AOB ? Tous mes efforts dans ce sens ont été jusqu'ici infructueux, mais j'espère que M. Schwarz qui a si bien résolu le problème dans le cas plus simple, sera plus heureux que moi.

Je vous envoie les tirages à part de mes travaux anciens, et j'espère pouvoir vous adresser d'ici peu les autres Mémoires plus récents que je vous ai annoncés et dont je ne saurais tarder à recevoir le tirage à part.

Quant au cours lithographié de M. Hermite, il est édité chez Hermann, Librairie des Lycées, rue de la Sorbonne ; le prix de l'abonnement est 12 francs. Je ne crois pas que l'éditeur envoie de tirage à part à M. Hermite.

Veuillez agréer l'assurance de mes sentiments les plus dévoués et de mon estime sincère.

POINCARÉ.

XXV.

Leipzig, den 19 Sept. 82.
Sophienstr. 10 II.

SEHR GEEHRTER HERR !

Im Begriffe, meinerseits eine längere Arbeit über die neuen Funktionen abzuschliessen, habe ich soeben Ihren Aufsatz in Bd. 19 der *Annalen* noch einmal durchgesehen. Es ist da ein Punkt, den ich nicht verstehe. Sie sprechen an zwei Stellen (p. 558 Mitte und p. 560 unten) von *fonctions fuchsienne*, die nur in einem Raume existiren, der von unendlich vielen Kreisen begrenzt ist, welche auf dem Hauptkreise senkrecht stehen. Nun kenne ich sehr wohl solche Funktionen (wie ich Ihnen schon vor einem Vierteljahr schrieb), die unendlich viele Kreise als natürliche Grenze haben. Aber an der zugehörigen Gruppe partizipieren immer solche Substitutionen, welche nur den einzelnen, beliebig herausgegriffenen Begrenzungskreis invariant lassen. Nun definiren Sie *fuchsiennes* als solche Funktionen, deren Substitutionen *sämmtlich* reell sind (p. 552), und diese Definition wird durch die Verallgemeinerung auf p. 557, wo an Stelle der reellen Axe ein beliebiger Kreis tritt, nicht wesentlich modifiziert. Die von mir gekannten Funktionen fallen also nicht unter Ihre Definition der *fuchsiennes.* Ist da ein Missverständnis auf meiner Seite oder eine Ungenauigkeit des Ausdruck's auf der Ihrigen? ([1]). Was meine Arbeit angeht, so beschränke ich mich darauf, die geometrische Auffassung darzulegen, vermöge deren ich im Riemann'schen Sinne die neuen Funktionen définiert denke. Dabei sind, wie es in der Natur der Sache liegt, viele Berührungspunkte auch mit Ihrer geometrischen Auffassung des Gegenstandes. Die allgemeinste Gruppe, welche ich in Betracht ziehe, erzeuge ich aus einer beliebigen Zahl ,, isolierter " Substitutionen und aus einer Anzahl von Gruppen ,, mit Hauptkreis " (der reell oder imaginär sein kann oder auch in einen Punkt ausgeartet) durch ,, Ineinanderschiebung ". Die Theoreme meiner beiden Annalennoten subsumieren sich dann als spezielle Fälle unter einen allgemeinen Satz, der etwa so lautet : *dass zu jeder Riemannschen Fläche mit beliebig vorgegebener Verzweigung und Zerschneidung immer eine und nur eine η-Funktion des betreffenden Typus zugehört.*

([1]) Cf. *Ueber den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereichs* (*Math. Annalen*, t. 40, 1892, p. 130-139); F. KLEIN, *Ges. math. Abh.*, Berlin, t. 3, 1923, n° 104, p. 711-720.

Von Mittag-Leffler hörte ich, dass Sie eben auch mit grösseren Ausarbeitungen (¹) beschäftigt sind. Ich brauche nicht zu sagen, wie sehr es mich interessiren wird, darüber Genaueres zu erfahren. Wenn Sie in einem Monate in Paris sind, werden Sie meinen Freund S. Lie kennen lernen, der eben ein paar Tage bei mir zu Besuch war und der, obwohl selbst bislang nicht Funktionentheoretiker, doch lebhaft sich für die Fortschritte interessiert, die die Funktionentheorie in neuerer Zeit gemacht hat.

Hochachtungsvoll

Ihr

F. Klein.

XXVI.

Nancy, le 22 septembre 1882.

Monsieur,

Voici quelques détails sur ces fonctions dont j'ai parlé dans ma Note des *Annalen* et dont la limite naturelle est formée d'une infinité de cercles. Pour plus de simplicité dans l'exposition, je prendrai par exemple un cas très particulier. Supposons quatre points a, b, c, d sur le cercle fondamental et quatre cercles coupant orthogonalement celui-ci : le premier en a et en b, le deuxième en b et en c; le troisième en c et en d; le quatrième en d et en a. On obtient ainsi un quadrilatère curviligne. Considérons deux substitutions (hyperboliques ou paraboliques) la première changeant le cercle ab dans le cercle ad; la deuxième changeant le cercle cb dans le cercle cd. Les *Wiederholungen* de notre quadrilatère vont recouvrir la surface du cercle fondamental, ou une portion seulement de cette surface; mais dans tous les cas le groupe sera évidemment discontinu. On reconnaît aisément que le cercle fondamental ne sera recouvert tout entier que dans un seul cas; lorsque les quatre points $abcd$ seront harmoniques et que les deux substitutions (ab, ad) et (cb, cd) seront paraboliques. On a affaire alors à la fonction modulaire. Dans tous les autres cas, on trouve que les *Wiederholungen* en question ne recouvrent qu'un

(¹) Il s'agit ici des cinq Mémoires suivants : *Théorie des groupes fuchsiens* (*Acta Math.*, t. 1, 1882, p. 1-62); *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (*ibid.*, t. 1, 1882, p. 193-294); *Mémoire sur les groupes kleinéens* (*ibid.*, t. 3, 1883, p. 49-92); *Sur les groupes des équations linéaires* (*ibid.*, t. 4, 1884, p. 201-311); *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes* (*ibid.*, t. 5, 1884, p. 209-278); *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris, t. 2, 1916, p. 108-462.

domaine limité par une infinité de cercles. Maintenant le plan tout entier peut être *abgebildet* sur notre quadrilatère et de telle façon que deux points *correspondants* du périmètre correspondent au même point du plan. Cette *Abbildung* définit une fonction n'existant que dans le domaine recouvert par les *Wiederholungen*. Mais ici il faut faire une remarque importante. Le groupe dérivé des deux substitutions (ab, ad) et (cb, cd) peut être considéré comme engendré d'une autre manière. Considérons quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 coupant tous quatre orthogonalement le cercle fondamental et ne se coupant pas entre eux de façon à être extérieurs les uns aux autres. Soit deux substitutions changeant C_1 en C_2 et C_3 en C_4; le groupe qui en dérive est évidemment discontinu et si les quatre cercles sont convenablement choisis, il peut être identique au groupe dont il a été question plus haut. La portion du plan extérieure aux quatre cercles est une sorte de quadrilatère qui peut être *abgebildet* sur une surface de Riemann de genre 2 et qui engendre ainsi une fonction existant dans tout le plan. Voilà donc le même groupe donnant naissance à deux fonctions essentiellement différentes. On peut se poser à ce sujet une foule de questions délicates que je ne puis aborder ici.

En résumé, vous voyez qu'il s'agit bien de fonctions n'existant que dans un domaine limité par une infinité de cercles et cependant de « fonctions fuchsiennes » puisque toutes les substitutions du groupe conservent le cercle fondamental. Chacun des cercles de la frontière est conservé par une des substitutions du groupe, laquelle conserve en même temps le cercle fondamental. Vous savez en effet que toute substitution hyperbolique conserve tous les cercles qui passent par les deux points doubles.

J'apprends avec plaisir que vous préparez un grand travail sur l'objet qui nous intéresse tous deux. Je le lirai avec le plus grand plaisir. Comme vous l'a dit M. Mittag-Leffler je prépare moi-même un travail sur ce sujet; mais vu sa longueur, je l'ai partagé en cinq Mémoires :

le premier qui va paraître cette année, sur les groupes à substitutions réelles (que j'ai appelés groupes fuchsiens);

le deuxième sur les fonctions fuchsiennes; j'en acheverai prochainement la rédaction;

le troisième sur les groupes et fonctions plus générales que j'ai appelées kleinéennes.

Dans le quatrième j'aborderai un ordre de questions que j'ai laissées de côté dans le deuxième Mémoire; c'est-à-dire la démonstration de l'existence de fonctions satisfaisant à certaines conditions, par exemple la démonstration de ce fait qu'à toute surface de Riemann correspond une semblable fonction et la détermination des constantes correspondantes.

Enfin dans le cinquième je parlerai des fonctions zétafuchsiennes et de l'intégration des équations linéaires.

Je dois retourner à Paris après-demain; je serai donc là au moment du passage de M. Lie. Je serais désolé de perdre l'occasion de voir ce célèbre géomètre. Vous avez dû recevoir la première partie de mon travail sur les courbes définies par les équations différentielles. Je vous en enverrai prochainement la seconde partie; je vous enverrai en même temps mon Mémoire sur les formes cubiques.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

POINCARÉ.

LETTRES DE HENRI POINCARÉ
A M. MITTAG-LEFFLER
CONCERNANT LE MÉMOIRE COURONNÉ
DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II (1)

Acta Mathematica, t. 38, p. 161-173 (1911)

18 avril 1883.

. . . .

J'ai lu avec un grand intérêt la lettre de M. Weierstrass dont vous m'avez donné copie (2). Il est bien clair comme le dit M. Weierstrass que les coordonnées des planètes ne peuvent s'exprimer en séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$ que si l'on est certain d'avance que les planètes ne se rencontreront pas, et d'autre part on ne peut jamais en être certain.

Aussi je n'ordonnais pas suivant les puissances de $\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$ mais suivant celles de $\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$. s est une variable auxiliaire qui jouit des propriétés suivantes :

1° t s'exprime comme les coordonnées en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$.

2° Si les planètes ne se rencontrent pas, quand s varie de $-\infty$ à $+\infty$, t croît constamment de $-\infty$ à $+\infty$.

(1) H. Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la mécanique* (*Acta Math.*, t. 13; *Œuvres*, t. 7, p. 262-479).

(2) *Acta Math.*, t. 35, p. 35-36; *cf.* aussi p. 45.

3° Si elles se rencontrent au temps t_0, quand s varie de $-\infty$ à $+\infty$, t croît constamment de $-\infty$ à t_0. Les formules ne donnent plus rien à partir du temps t_0 et c'est d'ailleurs ce qu'elles ont de mieux à faire.

Maintenant je n'avais pas eu spécialement en vue le problème de la Mécanique céleste; mon but était de montrer qu'on pouvait toujours résoudre des équations différentielles algébriques par des séries toujours convergentes pour toutes les valeurs réelles des variables. Les solutions de ce problème sont en nombre infini et celle que j'ai donnée n'est qu'un exemple. Il est clair que dans chaque cas particulier, il faut choisir la plus *zweckmässig*. Or je ne crois pas que dans le cas de la Mécanique céleste celle que j'ai donné soit la plus *zweckmässig*, je crois qu'il y a mieux à trouver (1).

. . . .

Paris, 16 juillet 1887.

. . . .

Je n'ai pas oublié le prix du roi Oscar et je vous dirai même que ce prix me préoccupe exclusivement depuis un ou deux mois.

Mon ambition était de résoudre la première question, celle qui se rapporte au problème des n corps. Mais je n'ai pas arrivé encore à des résultats complètement satisfaisants, au moins dans le cas général.

J'ai toutefois obtenu quelques résultats qui ne sont pas sans intérêt et dont je ne veux vous citer qu'un seul.

Il s'agit du cas particulier ou des trois corps, le premier et le deuxième ont une masse finie et le troisième une masse nulle. Le premier et le deuxième décrivent une circonférence autour de leur centre de gravité commun et le troisième se meut dans le plan de ces circonférences.

Dans ce cas particulier, j'ai trouvé une démonstration rigoureuse de la stabilité et un moyen de déterminer des limites précises pour les éléments du troisième corps (2).

Vous savez que dans ce cas particulier M. Hill avait déjà donné une limite

(1) On sait que M. K. F. Sundman a démontré récemment qu'on peut choisir la variable auxiliaire s de sorte que les séries en question convergent pour toutes les valeurs de t même s'il y a des chocs entre les corps, pourvu que les constantes des aires ne soient pas toutes nulles (*cf. Acta Math.*, t. 36, p. 105-179).

(2) On se rappelle que Poincaré a démontré que la masse nulle repassera une infinité de fois aussi près qu'on voudra de sa position initiale, si l'on n'est pas placé dans certaines conditions initiales exceptionnelles dont la probabilité est infiniment petite.

supérieure du rayon vecteur; j'ai reçu dernièrement un Mémoire de M. Bohlin inséré dans le tome X des *Acta* où cette solution de M. Hill est reprise et complétée. Mais, il n'y a pas de limite inférieure et de plus la limite supérieure trouvée est très éloignée de la limite précise. D'ailleurs possédant cette limite précise, j'ai plusieurs moyens de représenter le mouvement du troisième corps par des séries convergentes.

Maintenant, est-ce bien là ce qu'avait trouvé Lejeune-Dirichlet et même avait-il réellement trouvé quelque chose, je n'en sais rien; mais je suis sûr maintenant qu'on ne doit pas chercher à intégrer le problème par les fonctions connues ou par rien qui y ressemble. Car les particularités inattendues que présentent les fonctions où je suis conduit les éloignent tout à fait de toutes les fonctions connues.

J'espère maintenant que je pourrai aborder le cas général et que d'ici au 1er juin j'aurai, sinon résolu complètement la question (cela, je ne l'espère pas) mais trouvé des résultats assez complets pour pouvoir être envoyés au concours. Je crois me rappeler qu'on ne doit envoyer au concours que des Mémoires *inédits*, et que le nom de l'auteur doit rester secret, étant enfermé sous un pli cacheté qu'on ne doit ouvrir qu'au dernier moment.

Quant au mot inédit, il doit je pense être entendu dans un sens absolu, c'est-à-dire que les résultats n'auront pu être antérieurement énoncés et résumés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

. . . .

5 février 1889.

. . . .

Merci de votre lettre; malheureusement je ne puis pas vous donner des renseignements plus complets au sujet de la méthode de M. Gyldén; je ne puis démontrer la divergence de ses développements, mais je n'en puis non plus démontrer la convergence.

Pour établir cette convergence, si toutefois elle a lieu, il me faudrait d'abord avoir une idée tout à fait nette de la façon dont ces développements peuvent être obtenus. Or c'est ce que je ne puis faire sans avoir étudié à fond le Mémoire de M. Gyldén en commençant par la première ligne et finissant par la dernière. C'est là un travail que je n'ai pas encore eu le temps de faire.

Vous avouerai-je que je trouve le style de M. Gyldén un peu rebutant et qu'il me donne beaucoup de mal à lire.

J'ai l'habitude, quand je lis un Mémoire, de le parcourir d'abord rapidement de façon à me donner une idée de l'ensemble et de revenir ensuite sur les points qui me semblent obscurs. Je trouve plus commode de refaire les démonstrations que d'approfondir celles de l'auteur. Mes démonstrations peuvent être généralement beaucoup moins bonnes mais elles ont pour moi l'avantage d'être miennes. Or c'est ce qu'il m'est impossible de faire avec M. Gyldén, ses résultats ne sont jamais assez *übersichtlich* pour cela.

Tout cela soit dit pour vous expliquer comment je n'ai pas pris encore une connaissance plus approfondie du Mémoire en question. Toutefois j'en ai vu assez pour voir qu'il obtient dans certains cas une *libration*; or ce qui fait que les développements de M. Lindstedt sont certainement divergents c'est ceci. S'ils convergeaient il n'y aurait jamais de libration, et il y en a certainement.

Les mêmes raisons n'existent donc pas pour conclure à la divergence des séries de M. Gyldén. Maintenant il reste bien entendu que, jusqu'à nouvel ordre, je regarde la divergence comme plus probable.

Une autre raison qui m'empêche de rien pouvoir affirmer, c'est que dans ces développements, autant que je puis comprendre, les termes ne se déduisent pas les uns des autres par une règle inflexible. A chaque approximation il faut faire intervenir sa *jugeotte* (comme on dit vulgairement) pour décider dans quel sens on doit aiguiller (comme on dit dans les chemins de fer).

Or c'est là un élément qu'il est difficile d'introduire dans une démonstration de convergence ou de divergence.

. . . .

1er mars 1889.

. . . .

Venons à ce que vous me dites de M. Gyldén. M. Gyldén dit avoir démontré l'existence des solutions asymptotiques et nous nous prétendons qu'il ne l'a pas fait. D'où vient cela ! De ce que les mots démonstration et convergence n'ont pas le même sens pour lui et pour nous. M. Gyldén croît avoir démontré la convergence d'une série lorsqu'il a fait voir que les premiers termes vont en décroissant et qu'il est invraisemblable qu'un des 99 premiers termes par exemple ait une valeur plus grande.

Cela peut être très suffisant pour les applications astronomiques mais ne saurait contenter le géomètre.

Venons au détail.

Voici l'équation étudiée par M. Gyldén :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum A \sin(a\zeta + bt + c), \tag{1}$$

A, a, b et c étant des constantes qui dans les notations de M. Gyldén ont une expression assez compliquée. Il existe il est vrai d'autres arguments ζ', ζ''; mais M. Gyldén les regarde provisoirement comme connus en fonctions du temps de sorte que nous pouvons les faire rentrer dans le terme bt. L'équation est ainsi ramenée au deuxième ordre. Il y aurait évidemment des objections à faire à cette façon de simplifier le problème; mais il ne convient pas d'y insister, puisqu'elles sont de même nature que celles que soulève l'intégration de l'équation simplifiée elle-même. Considérons donc seulement l'équation (1) qui est de même forme que celles dont je me suis le plus occupé et qui correspondent aux cas où il n'y a que deux degrés de liberté.

M. Gyldén commence par faire un triage parmi les termes du second membre. Il met à part ceux qui lui semblent devoir jouer un rôle important et qu'il appelle caractéristiques. Voilà un premier exemple de cette intervention de l'appréciation personnelle, de la jugeotte dont je vous parlais la dernière fois qui donne aux méthodes de M. Gyldén une grande souplesse mais ne me permet pas d'aborder une démonstration de la convergence.

M. Gyldén pose ensuite [p. 213 ([1])] :

$$\zeta = c + nt + Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots$$

et il détermine Z_0, Z_1, etc. par une série d'équations analogues à (1) en s'arrangeant de telle façon que chacune d'elles ne contienne qu'un seul terme caractéristique.

Quant au menu fretin des termes non caractéristiques il les répartit entre ces équations d'une façon arbitraire; deuxième intervention de la jugeotte. Chacune des équations est ensuite intégrée par le moyen des fonctions elliptiques; mais est-elle intégrée définitivement ? Non, quand on aura intégré la première, puis la seconde, il faudra modifier la première et l'intégrer de nouveau et ainsi de suite. Voici en effet ce que dit à ce sujet M. Gyldén (p. 243) :

« Bei dem Fortgange dieser Operationen muss man sich indessen erinnern; dass bei der Bildung der Functionen (X) Glieder entstehen können, von denen

([1]) *Acta Math.*, t. 9.

ein Theil mit vorhergehenden charact. Gliedern zu vereinigen sind und *also die Werthe der vorhergehenden Moduln etwas verändern*,... »

Ces retours en arrière doivent, ce me semble, prodigieusement agacer les calculateurs, et j'ai cherché avec soin à les éviter. On les rencontre non seulement dans la méthode de M. Gyldén mais dans celle de Delaunay. Vous concevez sans peine qu'ils rendent impossible toute démonstration de convergence.

M. Gyldén arrive ensuite à une série (20), page 244 dont il dit qu'elle converge parce que dit-il :

« Die Verhältnisse $\frac{K}{K_1}, \frac{K_1}{K_2}, \cdots$ *unseren Annahmen nach*, ... eine gegebene Grösse nicht übersteigen ».

En réalité, cela veut dire que la série ne converge que si l'on *suppose* (unseren Annahmen nach) que ces rapports restent inférieurs à une certaine limite, et que si cela n'avait pas lieu il faudrait avoir recours à une autre méthode, celle qui est exposée pages 257 à 263. Mais comment pourra-t-on savoir d'avance si cette condition est remplie; puisque le module k, calculé d'abord, va être incessamment modifié par les retours en arrière dont je parlais tout à l'heure et qu'il n'est pas certain qu'il ne va pas s'approcher indéfiniment de 1.

Mais ce n'est pas tout. La série (20) n'est pas l'expression complète de Z. On l'obtient en laissant de côté les termes provenant des termes non caractéristiques que M. Gyldén considère comme trop petits pour pouvoir altérer la convergence. Cela est-il légitime ? De ce que ces termes sont très petits, il suit que leur influence ne sera pas sensible avant la 50ᵉ approximation par exemple, mais non qu'elle ne le sera jamais, ni même qu'elle ne pourra pas devenir très grande.

Bornons-nous donc à une des équations qui donnent Z_0, Z_1, etc. c'est-à-dire à une équation de la forme (1) ne contenant qu'un seul terme caractéristique.

La méthode de M. Gyldén consiste à appeler $2V$ l'argument de ce terme caractéristique et à écrire ensuite l'équation sous la forme

$$\frac{d^2V}{dt^2} + A \sin 2V = \lambda X.$$

A est une constante, λX représente l'ensemble des termes non caractéristiques et λ est un coefficient très petit. (M. Gyldén ne met pas ce coefficient en évidence de cette façon, mais il entre dans ses termes.) Ensuite il développe V suivant les puissances croissantes de λ. Mais là encore il ne parvient pas à démontrer d'une façon satisfaisante la convergence de son procédé. Il est évident que les approximations successives introduiront de nouveaux termes caractéristiques. Il est probable que s'il s'introduit de semblables termes. M. Gyldén en tient compte comme des premiers et introduit de nouvelles équations de Lamé, qui vont encore nous forcer à modifier notre module primitif et à retourner en arrière comme je l'ai expliqué plus haut. Il me paraît impossible de fonder là-dessus aucune démonstration rigoureuse de la convergence.

Les solutions asymptotiques correspondent au cas où l'un des modules devient égal à 1. M. Gyldén annonce que ce cas ne peut pas se présenter pour plus d'un module; c'est là un point important sur lequel je crois nécessaire d'insister.... Après avoir examiné à fond la démonstration que donne M. Gyldén de son affirmation, j'ai reconnu qu'elle est suffisante bien que cela n'apparaisse pas ainsi au premier abord. Il me semble toutefois que si M. Gyldén avait dirigé son calcul comme il le fait dans le paragraphe II au lieu de le diriger comme il le fait dans le paragraphe III, il aurait pu rencontrer plusieurs modules égaux à 1; mais cela demanderait à être examiné de plus près.

Voyons ce qu'il dit au sujet de la démonstration de la convergence (*cf.* dans mon Mémoire 1^re^ partie, chap. I, § 2, et chap. III, § 13). M. Gyldén dit page 261 : « Die Glieder in V_1 mit dem Factor $e^{-\xi}$ oder mit ganzen positiven Potenzen dieser Grösse multiplicirt erscheinen und also mit wachsendem ξ sehr rasch abnehmen... also schliessen wir dass die Darstellung der Function V_1 immer convergent ist, wenn ξ auf positive Werthe beschränkt bleibt. »

Ce qui revient à admettre le principe suivant :

Toute série procédant suivant les puissances croissantes d'une variable plus petite que 1 est convergente à moins qu'on n'ait des raisons sérieuses de douter de cette convergence.

Remarquons que cette série n'est qu'une première approximation mais que les approximations suivantes introduiraient des séries qui seraient de même forme.

Je crois pouvoir conclure ainsi :

M. Gyldén n'a pas démontré la convergence de ses séries. Si sa démonstration est bonne pour les séries de la page 261 qui convergent effectivement, pourquoi ne l'est-elle pas pour les séries des pages 237, 243, etc., qui sont très probablement divergentes.

Le raisonnement par lequel M. Gyldén croit pouvoir établir l'existence des solutions asymptotiques n'est ni plus rigoureux que celui par lequel Delaunay l'établissait avant lui, ni plus rigoureux que celui par lequel M. Lindstedt démontre qu'il n'y en a pas.

Allons bon ! voilà que je suis encore une fois obligé de retirer ce que je viens de dire, ce diable de M. Gyldén est vraiment difficile à saisir et l'on y découvre à chaque instant du nouveau. Je vous disais tout à l'heure que les raisons d'après lesquelles M. Gyldén établit qu'un seul module pouvait être égal à 1 me semblaient bonnes. Je ne le crois plus maintenant. Voici pourquoi. Reportez-vous aux pages 260 à 261 de son Mémoire. Nous y trouvons la formule (32) qui donne le terme de V_1 qui correspond au terme de X qui a pour coefficient P_0. Envisageons le terme qui a pour coefficient P_1 et qui s'écrit

$$- s\Lambda_1 P_1 \sin\varphi \cos(2\lambda_1 nt + 2\Delta_1).$$

Introduisons ce terme dans la formule (30) à la place de X nous aurons une formule analogue à (32) et dont le second terme s'écrira (remarquez que ce terme ne se détruira pas avec le premier :

$$V_1 = \frac{\beta}{2\alpha^2}\,\frac{1}{e^{\xi}+e^{-\xi}}\int \cos\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\,\xi + \mathrm{H}_1\right)\sin\varphi(e^{\xi}-e^{-\xi})\,d\xi,$$

β étant un coefficient analogue à β_1. Si nous négligeons les puissances supérieures de $e^{-\xi}$ il vient

$$\frac{1}{e^{\xi}+e^{-\xi}} = e^{-\xi}; \qquad \sin\varphi(e^{\xi}-e^{-\xi}) = \frac{\sqrt{2}\,e^{-\xi}}{\sqrt{1+e^{-2\xi}}}(e^{\xi}-e^{-\xi}) = \sqrt{2},$$

d'où

$$V_1 = \frac{\beta}{2\sqrt{2}\,\alpha\lambda_1}\,e^{-\xi}\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\,\xi + \mathrm{H}_1\right).$$

Le diviseur d'intégration est $\alpha\lambda_1$ et je ne vois aucune raison pour qu'il soit plus grand que α^2 contrairement à ce que dit M. Gyldén page 263, ligne 13 et 14.

M. Gyldén objecterait que $e^{-\xi}$ devient très petit mais cela ne saurait suffire.

Encore une remarque; M. Gyldén ne suppose nulle part que les quantités qu'il appelle λ, λ_1, etc. soient commensurables entre elles; or cette condition est nécessaire pour qu'il y ait une solution asymptotique. C'est la preuve que sa démonstration est insuffisante.

En relisant ma lettre je m'aperçois que j'ai l'air de vouloir démolir complètement le Mémoire de M. Gyldén; ce n'est nullement mon intention: j'y trouve de très belles choses; j'ai cherché seulement à faire ressortir combien les mots démonstration et convergence ont un sens différent pour lui et pour nous.

Le problème n'est abordé qu'au point de vue de l'astronomie purement pratique qui est peut-être le plus important, mais qui n'est pas le mien. Je crois que même à ce point de vue, mes méthodes seront plus simples et paraîtront telles quand je les aurai développées suffisamment; mais peut-être est-ce moi qui ne comprend pas encore bien celles de M. Gyldén.

Pardon, mon cher ami, de vous imposer la lecture d'une lettre aussi longue et aussi décousue. Je voulais la jeter au feu; car je vais vous en écrire une autre plus posément après avoir approfondi le Mémoire de M. Gyldén. Je vois que je ne le possède pas encore à fond puisque je trouve encore de temps en temps des sujets d'étonnement.

J'ai cru néanmoins devoir vous envoyer celle-ci de telle sorte que vous puissiez la lire et correspondre encore avec moi avant le 13 mars.

. . . .

5 mars 1889.

. . . .

Dans ma dernière lettre, j'ai cherché à vous montrer que les démonstrations de convergence de M. Gyldén sont insuffisantes; il me reste à examiner si ses développements convergent effectivement (bien qu'il ne l'ait pas démontré) en me bornant au cas où il existe réellement des solutions asymptotiques.

Je considère donc l'équation suivante :

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + n^2 s \mathrm{A} \sin \mathrm{V} \cos \mathrm{V} = n^2 (\mathrm{X}),$$

où

$$(\mathrm{X}) = \sum s_1 \mathrm{A}_1 \sin(\lambda_1 nt + m\mathrm{V} + h).$$

h est une constante et je suppose pour éviter quelques-unes des difficultés que je vous signalais la dernière fois que λ_1 et m sont entiers.

Que fait M. Gyldén ? Il pose

$$V = V_0 + V_1, \qquad V_0 = -2 \operatorname{arctg} e^{-\xi} + \frac{\pi}{2} \quad (\text{p. } 257),$$
$$\xi = \alpha n t + c.$$

α est un coefficient qu'on se réserve de modifier à chaque approximation. Sa valeur exacte est cependant entièrement déterminée et *ne peut pas ne pas l'être* puisque αn n'est autre chose que ce que j'ai appelé l'exposant caractéristique.

L'équation devient alors

$$\frac{d^2 V_1}{d\xi^2} - (2 \sin^2 V_0 - 1) V_1 = \frac{1}{\alpha^2}(X) + \left(1 - \frac{s A}{\alpha^2}\right) \sin V \cos V + Y,$$
$$Y = -\sin V \cos V + \sin V_0 \cos V_0 - V_1 (2 \sin^2 V_0 - 1).$$

M. Gyldén donne le développement de Y suivant les puissances de V_1, page 236, ligne 7 (en comptant les formules pour une ligne). En appelant $\frac{1}{\alpha^2} X$ le second membre de l'équation précédente, il vient

$$(1) \qquad \frac{d^2 V_1}{d\xi^2} - (2 \sin^2 V_0 - 1) V_1 = \frac{X}{\alpha^2}$$

qui ne diffère pas de l'équation (6) de M. Gyldén, page 236.

Cela posé, voici comment on fera pour intégrer (1) par approximations successives. On fera d'abord dans X, $V_1 = 0$, on aura une équation linéaire en V_1, on l'intégrera, on substituera dans X à la place de V_1 la valeur approchée ainsi obtenue, on aura une nouvelle équation linéaire qui donnera une valeur plus approchée de V_1 qu'on substituera de nouveau dans X et ainsi de suite.

A chaque approximation on dispose de trois arbitraires à savoir : deux constantes d'intégration et α qu'on s'est réservé de modifier à chaque approximation.

L'intégration de l'équation (1) quand on y regarde X comme connu nous donne conformément à la formule (32) de la page 261 :

$$\begin{aligned} -2\alpha^2 V_1 = (e^{\xi} - e^{-\xi}) &\left[\int_{-\infty}^{\xi} \frac{X\, d\xi}{e^{\xi} + e^{-\xi}} + C_1\right] \\ &- \frac{1}{e^{\xi} + e^{-\xi}} \left[\int_{-\infty}^{\xi} X (e^{\xi} - e^{-\xi})\, d\xi + C_2\right] \\ &+ \frac{4}{e^{\xi} + e^{-\xi}} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi \left(\int_{-\infty}^{\xi} \frac{X\, d\xi}{e^{\xi} + e^{-\xi}} + C_1\right). \end{aligned}$$

Je n'écris pas la formule tout à fait comme M. Gyldén afin de mettre en évidence les deux constantes d'intégration C_1 et C_2.

Considérons d'abord les valeurs *négatives* de ξ; pour ces valeurs X peut être développé suivant les puissances croissantes de e^ξ, de V_1 et suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{\xi}{\alpha}$. Si on remplace V_1 par la valeur trouvée dans l'approximation précédente, X sera développé suivant les puissances de e^ξ et les sinus des multiples de $\frac{\xi}{\alpha}$.

Nous voulons que l'approximation suivante de V_1 donnée par la formule (32) soit de même forme. Elle ne doit donc contenir, ni terme en $e^{-\xi}$, ni terme en ξe^ξ.

Pour qu'elle ne contienne pas de terme en $e^{-\xi}$, il faut que la constante C_1 soit nulle.

Pour qu'elle ne contienne pas de terme en ξe^ξ, il faut que X ne contienne pas de terme en e^ξ.

Supposons donc que X ne contienne pas de terme en e^ξ et choisissons $C_1 = 0$.

Il nous reste deux arbitraires C_2 et α; nous pourrons en disposer et *cela d'une infinité de manières* de telle façon qu'à l'approximation suivante X ne contienne encore pas de terme en e^ξ.

Nous pouvons donc d'une infinité de manières trouver une série satisfaisant formellement à l'équation (1) et développée suivant les puissances de e^ξ et les sinus des multiples de $\frac{\xi}{\alpha}$. Parmi ces séries, en nombre infini, *une seule* peut être convergente pour les valeurs négatives de ξ; en effet j'ai dit plus haut que la valeur de α devait être entièrement déterminée.

Considérons maintenant les valeurs positives de ξ.

Pour ces valeurs X peut être développé suivant les puissances croissantes de $e^{-\xi}$. Nous voulons que V_1 soit de même forme, et ne contienne ni terme en e^ξ, ni terme en $\xi e^{-\xi}$.

Pour qu'il ne contienne pas de terme en e^ξ il faut que

$$C_1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X\, d\xi}{e^\xi + e^{-\xi}}.$$

Pour qu'il ne contienne pas de terme en $\xi e^{-\xi}$, il faut que X ne contienne pas de terme en $e^{-\xi}$.

Nous supposerons qu'il en soit ainsi et nous voulons qu'il en soit encore ainsi à l'approximation suivante. Nous disposerons donc de C_2 et de α pour annuler les termes en $e^{-\xi}$ dans l'approximation suivante de X.

Nous pouvons le faire d'une infinité de manières, nous obtenons donc encore une infinité de séries, parmi lesquelles *une seule* peut converger.

Admettons, ce qui est probablement exact (je dis probablement parce que je n'ai pas entièrement vérifié l'identité de ces séries avec les miennes) qu'il y ait effectivement une série qui converge pour les valeurs positives de ξ et une autre pour les valeurs négatives.

Ces deux séries sont-elles la continuation analytique l'une de l'autre, correspondent-elles aux mêmes valeurs de C_1, de C_2 et de α ? M. Gyldén ne le dit pas expressément mais son texte le laisse entendre et je crois que c'était bien là sa pensée. Je sais d'ailleurs qu'il en est effectivement ainsi, puisque j'ai démontrée que les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées ; mais dans les démonstrations de M. Gyldén, je ne vois aucune bonne raison de le croire.

1° Pour que C_1 ait la même valeur pour ξ négatif et pour ξ positif, il faut que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X\,d\xi}{e^{\xi}+e^{-\xi}} = 0.$$

Pourquoi en serait-il ainsi ; si je prends un des termes de X, par exemple :

$$\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right),$$

je reconnais aisément que l'intégrale correspondante qui est très facile à calculer, n'est pas nulle à moins que H_1 ne soit nul.

Pourquoi les intégrales provenant des différents termes se détruiraient-elles ? Je n'en verrais aucune raison si je ne savais d'avance que les surfaces asymptotiques sont fermées ([1]).

2° Je veux maintenant que C_2 et α aient même valeur pour ξ positif ou négatif.

Il faut donc que je dispose de ces deux constantes de façon qu'à l'approximation suivante, si l'on développe X suivant les puissances de e^{ξ}, on n'ait pas

---

([1]) Poincaré a reconnu plus tard que le théorème sur lequel il s'appuie ici n'est pas exact. Nous avons cru pourtant devoir reproduire cette lettre parce que c'est un point de moindre importance pour la question dont il s'agit.

de terme en e^{ξ} et si l'on développe X suivant les puissances de $e^{-\xi}$, on n'ait pas de terme en $e^{-\xi}$. Il est clair que je puis le faire, puisque j'ai deux arbitraires et deux conditions à remplir. Mais pourquoi parmi les séries en nombre infini qu'on peut former, la seule série convergente serait-elle précisément celle qui correspond à ce choix particulier de C_2 et de α.

Il n'y a ici encore aucune raison pour le croire, à moins qu'on ne sache d'avance que les surfaces asymptotiques sont fermées.

3° Ce n'est d'ailleurs pas ce choix que fait M. Gyldén au moins si l'on rapporte à sa formule (3) de la page 236.

Il commence par disposer de α de façon à annuler le terme en e^{ξ} (ou $e^{-\xi}$) dans $X - (X)$ et probablement se servirait ensuite de la constante C_2 pour annuler le terme correspondant dans (X).

Ce choix doit conduire à un résultat divergent puisque nous venons de voir que la manière d'obtenir une série convergente est *unique*.

En résumé, si l'on suit à la lettre les indications de M. Gyldén en se fiant à sa formule (3), page 237 on arrive à une série divergente.

Si on laisse de côté cette formule à laquelle je suppose que M. Gyldén ne tient guère, on arrive à une infinité de séries dont une seule converge et l'on n'a aucun moyen de reconnaître quelle est celle qui converge.

Il me paraît probable qu'on obtiendra cette série convergente en choisissant les constantes de façon que la série pour ξ négatif et celle pour ξ positif se raccordent. Mais je ne vois dans le Mémoire de M. Gyldén aucune bonne raison pour cela, je n'y suis conduit que par une application des résultats de mon travail couronné (encore faudrait-il pour en être absolument sûr, un examen plus approfondi).

Un dernier mot; la dernière fois j'ai parlé des raisonnements par lesquels Delaunay établit l'existence des solutions asymptotiques. Il faut bien s'entendre. Delaunay n'a énoncé nulle part un pareil résultat, j'ai voulu dire simplement que sa méthode appliquée au cas particulier traité par M. Gyldén l'aurait conduit à des développements de même forme.

. . . .

SUR

LES HYPOTHÈSES FONDAMENTALES DE LA GÉOMÉTRIE

Bulletin de la Société mathématique de France, t. 15, p. 203-216 (séance du 2 novembre 1887).

C'est surtout en Logique que rien ne se tire de rien; dans toute démonstration, la conclusion suppose des prémisses. Les sciences mathématiques doivent donc reposer sur un certain nombre de propositions indémontrables. On peut discuter si l'on doit donner à ces propositions le nom d'*axiomes*, d'*hypothèses* ou de *postulat*, si l'on doit les considérer comme des faits expérimentaux, ou comme des jugements analytiques, ou encore comme des jugements synthétiques *a priori*; mais leur existence même n'est pas douteuse.

Nous sommes donc conduit à nous poser le problème suivant, intéressant au point de vue logique : quelles sont les prémisses de la Géométrie, les propositions indémontrables sur lesquelles repose cette science, en excluant, bien entendu, les propositions qui sont déjà nécessaires pour fonder l'Analyse? car nous regardons les résultats de l'Algèbre et de l'Analyse pure comme déjà connus au moment où l'on aborde l'étude de la Géométrie. Bien que ce problème ait depuis longtemps préoccupé les géomètres, la question ne saurait être regardée comme épuisée.

On a établi que le *postulatum* d'Euclide est indémontrable. Mais ce postulat ne peut être la proposition unique sur laquelle repose toute la Géométrie; car bien des résultats peuvent être démontrés sans lui.

On ne saurait se contenter non plus des propositions énoncées, sous le nom d'*axiomes*, au début des Traités de Géométrie. Si on les soumet à un examen sérieux, on reconnaîtra qu'aucun de ces axiomes ne doit prendre rang parmi les prémisses de la Géométrie. Les uns sont des propositions déjà nécessaires pour fonder l'Analyse, et, si ce sont des hypothèses (ce que l'on peut contester), ce ne sont certainement pas des hypothèses propres à la Géométrie; tel est, par exemple, l'axiome suivant : *Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles.* D'autres axiomes ne sont que des définitions; d'autres enfin ne peuvent être regardés comme indémontrables, tel est, par exemple, le suivant : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

Mais, en dehors des axiomes explicitement énoncés, il y a un grand nombre d'hypothèses que l'on fait implicitement au début de la démonstration des différents théorèmes.

Mais ces hypothèses échappent généralement au lecteur, à moins qu'il ne soit particulièrement attentif; car, bien qu'elles ne soient pas évidentes, au point de vue de la pure logique, elles nous semblent telles par suite d'habitudes invétérées de nos sens et de notre esprit.

D'ailleurs ces hypothèses explicites ou implicites ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres; on pourrait se contenter d'en introduire un moins grand nombre et les autres s'en déduiraient comme des conséquences.

Nous sommes donc amenés à poser le problème en ces termes : énoncer toutes les hypothèses nécessaires et n'énoncer que celles-là. Je crois que ce problème n'est pas encore résolu et je cherche à contribuer à sa solution.

Nous n'envisageons d'abord que la géométrie à deux dimensions, ou géométrie plane.

Géométries quadratiques.

Nous connaissons déjà trois géométries à deux dimensions :

1° La géométrie euclidienne, où la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits;

2° La géométrie de Riemann, où cette somme est plus grande que deux droits;

3° La géométrie de Lobatchevski, où elle est plus petite que deux droits.

Ces trois géométries reposent sur les mêmes hypothèses fondamentales, si l'on excepte le *postulatum* d'Euclide que la première admet et que les deux autres rejettent. De plus, le principe, d'après lequel deux points déterminent complètement une droite, comporte une exception dans la géométrie de Riemann et n'en comporte aucune dans les deux autres.

Quand on se borne à deux dimensions, la géométrie de Riemann est susceptible d'une interprétation très simple; elle ne diffère pas, comme on le sait, de la géométrie sphérique, pourvu qu'on convienne de donner le nom de *droites* aux grands cercles de la sphère.

Je vais commencer par généraliser cette interprétation de façon à pouvoir l'étendre à la géométrie de Lobatchevski.

Considérons une surface du second ordre quelconque. Nous conviendrons de donner le nom de *droites* aux sections planes diamétrales de cette surface et le nom de *circonférences* aux sections planes non diamétrales.

Il reste à définir ce que l'on doit entendre par l'angle de deux droites qui se coupent ou par la longueur d'un segment de droite.

Par un point pris sur la surface faisons passer deux sections planes diamétrales (que nous sommes convenus d'appeler *droites*). Envisageons alors les tangentes à ces deux sections planes et les deux génératrices rectilignes de la surface qui passent par le point envisagé. Ces quatre droites (au sens ordinaire du mot) ont un certain rapport anharmonique. L'angle que nous cherchons à définir sera alors le logarithme de ce rapport anharmonique si les deux génératrices sont réelles, c'est-à-dire si la surface est un hyperboloïde à une nappe; dans le cas contraire, notre angle sera ce même logarithme divisé par $\sqrt{-1}$.

Considérons un arc de conique faisant partie d'une section plane diamétrale (c'est ce que nous sommes convenus d'appeler un *segment de droite*). Les deux extrémités de l'arc et les deux points à l'infini de la conique ont un certain rapport anharmonique comme tout système de quatre points situés sur une conique. Nous conviendrons alors d'appeler *longueur du segment* considéré le logarithme de ce rapport si la conique est une hyperbole et ce même logarithme divisé par $\sqrt{-1}$ si la conique est une ellipse.

Il y aura, entre les angles et les longueurs ainsi définis, un certain nombre de relations, qui constitueront un ensemble de théorèmes analogues à ceux de la géométrie plane.

Cet ensemble de théorèmes peut prendre le nom de *géométrie quadratique*, puisque notre point de départ a été la considération d'une quadrique ou surface du second ordre fondamentale.

Il y a plusieurs géométries quadratiques, car il y a plusieurs espèces de surfaces du second ordre.

Si la surface fondamentale est un ellipsoïde, la géométrie quadratique ne diffère pas de la géométrie de Riemann.

Si la surface fondamentale est un hyperboloïde à deux nappes, la géométrie quadratique ne diffère pas de celle de Lobatchevski.

Si cette surface est un paraboloïde elliptique, la géométrie quadratique se réduit à celle d'Euclide; c'est un cas limite des deux cas précédents.

Il est clair que nous n'avons pas épuisé la liste des géométries quadratiques; car nous n'avons considéré, ni l'hyperboloïde à une nappe, ni ses nombreuses dégénérescences.

Nous pouvons donc dire qu'il y a trois géométries quadratiques principales, qui correspondent aux trois espèces de surfaces du second ordre à centre.

Nous devrons y ajouter d'ailleurs les géométries qui correspondent aux cas limites et parmi lesquelles prendra rang la géométrie d'Euclide.

Comment se fait-il donc que la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe ait jusqu'ici échappé aux théoriciens? C'est qu'elle entraîne les propositions suivantes :

1° La distance de deux points situés sur une même génératrice rectiligne de la surface fondamentale est nulle.

2° Il y a deux sortes de droites correspondant, les premières aux sections diamétrales elliptiques, les autres aux sections diamétrales hyperboliques; il est impossible, par aucun mouvement réel, de faire coïncider une droite de la première sorte avec une droite de la seconde.

3° Il est impossible de faire coïncider une droite avec elle-même par une rotation réelle autour d'un de ses points, ainsi que cela a lieu dans la géométrie d'Euclide quand on fait tourner une droite de 180° autour d'un de ses points.

Tous les géomètres ont implicitement supposé que ces trois propositions sont fausses, et vraiment ces trois propositions sont trop contraires aux habitudes de notre esprit pour qu'en les niant les fondateurs de la géométrie aient cru faire une hypothèse et aient songé à l'énoncer.

Applications de la théorie des groupes.

D'après ce qui précède, le problème que j'ai posé au début de ce travail se décompose en deux parties :

1° Quelles sont les hypothèses communes à toutes les géométries quadratiques?

2° Quelles sont les hypothèses qui distinguent la géométrie d'Euclide des autres géométries quadratiques?

La seconde partie du problème peut être regardée comme résolue; nous n'avons donc à nous occuper que de la première partie.

Il y a deux hypothèses que l'on est obligé de faire au début de toute géométrie à deux dimensions et que l'on peut énoncer ainsi :

A. Le plan a deux dimensions.

B. La position d'une figure plane dans son plan est déterminée par trois conditions.

Les personnes peu familières avec les travaux récents des géomètres trouveront extraordinaire qu'on puisse tirer de pareilles prémisses des conclusions précises.

Mais ce résultat n'étonnera pas les mathématiciens qui ont lu les remarquables travaux de M. Sophus Lie sur la théorie des groupes. M. Lie démontre en effet un résultat, très surprenant au premier abord, et qui peut se traduire ainsi dans le langage géométrique :

Si la position d'une figure plane dans son plan dépend d'un nombre fini de conditions, le nombre de ces conditions ne peut surpasser huit.

Nous ferons d'ailleurs dans la suite de fréquents emprunts au Mémoire du savant norvégien.

Nous allons chercher quelles conséquences il est permis de tirer des deux hypothèses A et B.

Le plan ayant deux dimensions, la position d'un point dans son plan est déterminée par deux coordonnées x et y. Nous ne faisons, pour le moment, aucune hypothèse sur le choix du système des coordonnées; mais nous nous réservons de le déterminer plus complètement dans la suite.

Supposons qu'une figure plane se déplace; soient x, y les coordonnées primitives d'un point de cette figure; et x_1, y_1 les coordonnées de ce même point après le déplacement. On aura

$$x_1 = \varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma),$$
$$y_1 = \psi(x, y, \alpha, \beta, \gamma),$$

où φ et ψ sont deux fonctions de x et de y, et de trois paramètres α, β, γ, il y aura trois paramètres, puisque la position de la figure dépend de trois conditions.

L'opération

$$[x, y;\ \varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma),\ \psi(x, y, \alpha, \beta, \gamma)]$$

définira l'un des mouvements possibles d'une figure plane et l'ensemble de ces opérations ou mouvements devra former un *groupe*. Ce groupe, d'après le langage de M. Lie, sera continu et d'ordre 3, puisque les opérations dépendent de trois paramètres.

Parmi les opérations du groupe, on devra trouver l'opération identique. Par conséquent, pour certaines valeurs des paramètres α, β, γ, on devra avoir

$$\varphi = x, \qquad \psi = y.$$

Nous pouvons toujours supposer que cela ait lieu pour

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Nous appellerons alors opération infinitésimale (ou mouvement infinitésimal) une opération par laquelle α, β, γ ont des valeurs infiniment petites et que nous pourrons écrire

$$\left(x, y;\ x + \alpha \frac{d\varphi}{d\alpha} + \beta \frac{d\varphi}{d\beta} + \gamma \frac{d\varphi}{d\gamma};\ y + \alpha \frac{d\psi}{d\alpha} + \beta \frac{d\psi}{d\beta} + \gamma \frac{d\psi}{d\gamma}\right):$$

Dans cette expression on suppose, bien entendu, que, dans les dérivées $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, $\frac{d\varphi}{d\beta}$, $\ldots$, on a fait

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

M. Lie représente une pareille opération par la notation suivante :

$$S = p\left(\alpha \frac{d\varphi}{d\alpha} + \beta \frac{d\varphi}{d\beta} + \gamma \frac{d\varphi}{d\gamma}\right) + q\left(\alpha \frac{d\psi}{d\alpha} + \beta \frac{d\psi}{d\beta} + \gamma \frac{d\psi}{d\gamma}\right),$$

de telle façon que, si l'on pose

$$A = p \frac{d\varphi}{d\alpha} + q \frac{d\psi}{d\alpha}, \qquad B = p \frac{d\varphi}{d\beta} + q \frac{d\psi}{d\beta}, \qquad C = p \frac{d\varphi}{d\gamma} + q \frac{d\psi}{d\gamma},$$

on ait, pour une opération infinitésimale quelconque,

$$S = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

A, B, C et S sont donc des fonctions de x, de y, de p et de q.

Les opérations A, B, C peuvent s'appeler les *substitutions fondamentales* et toute opération infinitésimale n'en est qu'une combinaison linéaire; le choix des substitutions fondamentales reste d'ailleurs arbitraire dans une certaine mesure; car on peut remplacer ces trois opérations A, B, C par trois quelconques de leurs combinaisons linéaires.

M. Lie a fait voir que, si l'on pose

$$[A, B] = \frac{dA}{dp}\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dx}\frac{dB}{dp} + \frac{dA}{dq}\frac{dB}{dy} - \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dq}$$

et si α et β sont deux quantités infiniment petites quelconques, l'opération

$$(\alpha A)(\beta B)(\alpha A)^{-1}(\beta B)^{-1},$$

qui fait forcément partie du groupe, est une substitution infinitésimale du second ordre, qui peut s'écrire

$$\alpha\beta[A, B].$$

Il résulte de là que $[A, B]$, $[A, C]$ et $[B, C]$ sont des combinaisons linéaires de A, B et C, et qu'on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} [A, B] &= \lambda A + \mu B + \nu C,\\ [A, C] &= \lambda' A + \mu' B + \nu' C,\\ [B, C] &= \lambda'' A + \mu'' B + \nu'' C.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients λ, μ, ν sont des constantes; mais ils ne sont pas quelconques; car on doit avoir identiquement

$$(2)\qquad \big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C, [A, B]\big] = 0.$$

Ce qui précède contient le point de départ de toute la discussion, mais cette discussion peut être considérablement simplifiée :

1° Par un choix convenable du système des coordonnées x et y;

2° Par un choix convenable des trois substitutions fondamentales A, B et C.

On peut d'abord choisir les substitutions fondamentales de telle façon que

$$\lambda = \nu = 0$$

ou que

$$[A, B] = \mu B.$$

On peut ensuite choisir le système de coordonnées, de telle sorte que A se réduise à p, et par conséquent que l'on ait

$$[A, B] = \frac{dB}{dx} = \mu B.$$

Nous en déduirons pour B la forme suivante :

$$B = e^{\mu x}[h\theta_1(y) + q\theta_2(y)].$$

Nous avons fait tout à l'heure une hypothèse sur le choix du système des coordonnées; mais cette hypothèse ne détermine pas complètement ce système.

Nous pouvons encore, sans que A cesse de se réduire à p, remplacer y par une fonction arbitraire de y et ajouter à x une fonction arbitraire de y.

Nous pouvons faire ce nouveau changement de coordonnées de façon à simplifier l'expression de B. Si θ_2 n'est pas nul, nous pouvons le faire de façon que $\theta_2 = 1$, $\theta_1 = 0$. Si θ_2 est nul, il restera nul après le changement de coordonnées, mais on pourra réduire θ_1 soit à y, soit à 1. Nous sommes donc amenés à l'une des trois hypothèses suivantes :

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1; \qquad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 0; \qquad \theta_1 = y, \quad \theta_2 = 0.$$

Nous pouvons distinguer deux cas :

1° Ou bien μ est nul, ce qui signifie que les deux substitutions A et B sont permutables. (Remarquons en passant que l'hypothèse qu'il existe deux mouvements permutables peut être regardée comme un des énoncés du *postulatum* d'Euclide.)

On a alors, soit

$$A = p, \qquad B = q;$$

soit

$$A = p, \qquad B = yp.$$

2° Ou bien μ n'est pas nul. On a alors, soit

$$A = p, \qquad B = qe^{\mu x},$$

soit

$$A = p, \qquad B = pe^{\mu x},$$

soit

$$A = p, \qquad B = pye^{\mu x}.$$

Examinons successivement ces cinq cas :

Premier cas :

$$A = p, \qquad B = q.$$

Les équations (1) se réduisent alors à

$$\frac{dC}{dx} = \lambda' p + \mu' q + \nu' C,$$

$$\frac{dC}{dy} = \lambda'' p + \mu'' q + \nu'' C.$$

Si ν' et ν'' ne sont pas nuls à la fois, les équations ne seront compatibles que si l'on a

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = \frac{\mu'}{\mu''} = \frac{\nu'}{\nu''}.$$

Il est permis alors de supposer que

$$\lambda' = \mu' = \lambda'' = \mu'' = 0,$$

d'où

$$C = e^{\nu' x + \nu'' y}(ap + bq),$$

a et b étant deux constantes.

Le groupe

$$A = p, \qquad B = q, \qquad C = e^{\nu' x + \nu'' y}(ap + bq)$$

définit une géométrie entièrement nouvelle. Pourquoi Euclide ne l'a-t-il pas rencontrée ? ou plutôt quelle est l'hypothèse qu'il a faite implicitement et qui l'a empêché de rencontrer cette géométrie ?

Une substitution infinitésimale quelconque a pour expression

$$\alpha p + \beta q + \gamma e^{\nu' x + \nu'' y}(ap + bq).$$

Quels sont les points que cette substitution laisse immobiles ? Ces points sont donnés par les équations

$$e^{\nu' x + \nu'' y} = -\frac{\alpha}{\gamma a} = -\frac{\beta}{\gamma b},$$

d'où cette conclusion : si l'on n'a pas $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$, aucun point ne reste immobile. Si l'on a $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$, une infinité de points demeurent immobiles.

Or il est bien aisé de se rendre compte qu'Euclide fait à chaque instant, sans l'énoncer, l'hypothèse suivante :

Si une figure plane ne quitte pas son plan et si deux de ses points restent immobiles, elle reste tout entière immobile.

C'est cette hypothèse qui nous forcera à rejeter la géométrie particulière qui est fondée sur la considération du groupe dont je viens de parler.

Si $\nu' = \nu'' = 0$, on trouve

$$C = p(\lambda' x + \lambda'' y) + q(\mu' x + \mu'' y),$$

et le groupe dérivé de A, B et C nous conduit à la géométrie d'Euclide.

Deuxième cas :

$$A = p, \qquad B = yp.$$

On trouve alors, dans le cas le plus général,

$$C = [ax + f(y)]p + bq,$$

a et b étant des constantes et $f(y)$ une fonction arbitraire de y qu'on peut d'ailleurs supposer nulle si l'on choisit convenablement le système des coordonnées.

Une substitution infinitésimale quelconque s'écrit

$$(\alpha + \beta y + a\gamma x)p + (\gamma b)q.$$

Ce groupe doit encore être rejeté en vertu de l'hypothèse faite plus haut.

En effet, si γb n'est pas nul, aucun point ne reste immobile; si au contraire γb est nul, tous les points qui satisfont à l'équation

$$\alpha + \beta y + a\gamma x = 0$$

restent immobiles.

Troisième cas :

$$A = p, \qquad B = pye^{\mu x}.$$

On trouve

$$C = -\frac{p}{\gamma} + q.$$

Les substitutions A et C sont permutables; on est donc ramené à l'un des deux cas précédents.

Quatrième cas :

$$A = p, \qquad B = pe^{\mu x}.$$

On trouve encore une substitution C permutable à A et l'on est ramené par conséquent aux deux premiers cas.

Cinquième cas :

$$A = p, \qquad B = qe^{\mu x},$$

On trouve ici pour C quatre formes différentes :

1° $C = e^{\nu' x}[ap + \mu(ay + b)q]$ (a, b, et c étant des constantes),

2° $C = [ap + (by + c)q]$,

3° $C = e^{\mu x}[ap + (bx - a\mu y + c)q]$,

4° $C = e^{-\mu x}\left[(ay + b)p + \mu q\left(\frac{a}{2}y^2 + by + c\right)\right]$.

La première forme doit être rejetée parce que B et C sont permutables; la deuxième parce que A et C sont permutables, la troisième parce que B et C sont permutables. Si l'on adoptait l'une de ces trois formes, on serait donc toujours ramené à l'un des deux premiers cas.

Il reste la quatrième forme, qui nous conduit aux géométries quadratiques.

Le même résultat pourrait être obtenu en discutant les trois relations qui lient les neuf coefficients λ, μ, ν et qu'on peut déduire de l'identité (2).

Conclusions.

Nous pouvons donc énoncer ainsi les hypothèses qui sont nécessaires et suffisantes pour servir de prémisses à la Géométrie plane.

A. Le plan a deux dimensions.

B. La position d'une figure plane dans son plan est déterminée par trois conditions.

Ces deux premières hypothèses nous laissent le choix entre les diverses géométries quadratiques et les deux géométries caractérisées par les deux groupes suivants :

$$[p,\ q,\ e^{\nu' x+\nu'' y}(ap+bq)]$$
$$(p,\ yp,\ axp+bq).$$

Ces deux géométries sont exclues si l'on fait encore l'hypothèse suivante :

C. Quand une figure plane ne quitte pas son plan et que deux de ses points restent immobiles, la figure tout entière reste immobile.

Nous n'avons plus alors que le choix entre les diverses géométries quadratiques.

Faisons encore les deux hypothèses suivantes :

D. La distance de deux points ne peut être nulle que si ces deux points coïncident;

E. Lorsque deux droites se coupent, on peut faire tourner l'une d'elles autour du point d'intersection de façon à la faire coïncider avec l'autre.

Ces deux hypothèses sont liées nécessairement l'une à l'autre; il suffit d'admettre l'une d'elles pour être obligé d'admettre l'autre et d'exclure la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe.

Introduisons encore l'hypothèse suivante :

F. Deux droites ne peuvent se couper qu'en un point, et la Géométrie sphérique se trouvera exclue à son tour.

Il ne reste plus qu'à introduire le *postulatum* d'Euclide :

G. La somme des angles d'un triangle est une constante.

Nous pouvons remarquer que ce *postulatum* nous dispense des hypothèses D, E et F qui en sont des conséquences nécessaires.

Remarques diverses.

Le lecteur qui aura bien voulu me suivre jusqu'ici ne manquera pas de se reporter au célèbre Mémoire de Riemann (*Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grundeliegen*) et de remarquer certaines différences entre les méthodes et les résultats. Riemann caractérise une géométrie par l'expression de l'élément d'arc en fonction des coordonnées. Il est ainsi conduit à un très grand nombre de géométries logiquement possibles et dont je n'ai pas même parlé. Cela tient à ce que j'ai pris pour point de départ la possibilité du mouvement ou plutôt l'existence d'un groupe de mouvements qui n'altèrent pas les distances.

On peut se demander maintenant ce que sont ces hypothèses. Sont-ce des faits expérimentaux, des jugements analytiques ou synthétiques *a priori*? Nous devons répondre négativement à ces trois questions. Si ces hypothèses étaient des faits expérimentaux, la Géométrie serait soumise à une incessante révision, ce ne serait pas une science exacte; si elles étaient des jugements synthétiques *a priori*, ou à plus forte raison des jugements analytiques, il serait impossible de s'y soustraire et de rien fonder sur leur négation.

On peut montrer que l'Analyse repose sur un certain nombre de jugements synthétiques *a priori;* mais il n'en est pas de même de la Géométrie.

Que devons-nous donc penser des prémisses de la Géométrie? En quel sens peut-on, par exemple, dire que le *postulatum* d'Euclide soit vrai?

D'après ce que nous venons de voir, la Géométrie n'est autre chose que l'étude d'un groupe et, en ce sens, on pourrait dire que la vérité de la géométrie d'Euclide n'est pas incompatible avec celle de la géométrie de Lobatchevski, puisque l'existence d'un groupe n'est pas incompatible avec celle d'un autre groupe.

Nous avons choisi, parmi tous les groupes possibles, un groupe particulier pour y rapporter les phénomènes physiques, comme nous choisissons trois axes de coordonnées pour y rapporter une figure géométrique.

Maintenant, qu'est-ce qui a déterminé ce choix : c'est d'abord la simplicité du groupe choisi; mais il y a une autre raison : il existe dans la nature des corps remarquables qu'on appelle les *solides* et l'expérience nous apprend que les divers mouvements possibles de ces corps sont liés à fort peu près par les mêmes relations que les diverses opérations du groupe choisi.

Ainsi les hypothèses fondamentales de la Géométrie ne sont pas des faits expérimentaux; c'est cependant l'observation de certains phénomènes physiques qui les fait choisir parmi toutes les hypothèses possibles.

D'autre part, le groupe choisi est seulement plus commode que les autres et l'on ne peut pas plus dire que la géométrie euclidienne est vraie et la géométrie de Lobatchevski fausse, qu'on ne pourrait dire que les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses.

Je n'insiste pas d'avantage; car le but de ce travail n'est pas le développement de ces vérités qui commencent à devenir banales.

LES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE [1]

Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. 26, p. 249-272 (septembre 1902).

Quels sont les principes fondamentaux de la Géométrie; quelle en est l'origine, la nature et la portée? Ce sont là des questions qui ont de tout temps préoccupé les mathématiciens et les penseurs, mais qui, il y a un siècle environ, ont pris pour ainsi dire une figure toute nouvelle, grâce aux idées de Lobatchevski et de Bolyai.

On s'est longtemps efforcé de démontrer la proposition connue sous le nom de *postulatum d'Euclide*, on a constamment échoué; nous connaissons maintenant la raison de ces échecs. Lobatchevski est parvenu à construire un édifice logique, aussi cohérent que la Géométrie d'Euclide, mais où le célèbre postulatum est supposé faux, et où la somme des angles d'un triangle est toujours plus petite que deux droits. Riemann a imaginé un autre système logique, également exempt de contradiction, et où cette somme est au contraire toujours plus grande que deux droits. Ces deux géométries, celle de Lobatchevski et celle de Riemann, sont ce qu'on appelle les *géométries non euclidiennes*.

Le postulatum d'Euclide ne peut donc être démontré, et cette impossibilité est aussi absolument certaine que n'importe quelle vérité mathématique. Ce qui n'empêche pas l'Académie des Sciences de recevoir chaque année plusieurs démonstrations nouvelles auxquelles elle refuse naturellement l'hospitalité des *Comptes rendus*.

On a déjà beaucoup écrit sur les géométries non euclidiennes; après avoir crié au scandale, on s'est habitué à ce qu'elles ont de paradoxal; plusieurs personnes sont allées jusqu'à douter du postulatum, à se demander si l'espace

(1) Analyse et discussion de l'Ouvrage de Hilbert : *Les fondements de la Géométrie* (*Grundlagen der Geometrie*).

réel est plan, comme le supposait Euclide, ou s'il ne présente pas une légère *courbure*. Elles croyaient même que l'expérience pouvait leur donner une réponse à cette question. Inutile d'ajouter que c'était là méconnaître complètement la nature de la Géométrie, qui n'est pas une science expérimentale.

Mais pourquoi, parmi tous les axiomes de la Géométrie, le postulatum serait-il le seul qu'on pût nier sans dommage pour la Logique? D'où tiendrait-il ce privilège? On ne le voit pas très bien et, à ce compte, bien d'autres conceptions sont possibles.

Cependant beaucoup de géomètres contemporains ne semblent pas penser ainsi. En accordant le droit de cité aux deux géométries nouvelles, ils croient sans doute avoir été jusqu'au bout des concessions possibles. C'est pourquoi ils ont imaginé ce qu'ils appellent la *Géométrie générale*, qui comprend comme cas particuliers les trois systèmes d'Euclide, de Lobatchevski et de Riemann, et qui n'en comprend pas d'autres. Et cette épithète de *générale* signifie évidemment, dans leur esprit, qu'aucune autre géométrie n'est concevable.

Ils perdront cette illusion s'ils lisent l'Ouvrage de M. Hilbert. Ils y verront éclater de toutes parts les cadres dans lesquels ils avaient voulu nous enfermer.

Pour bien comprendre cette tentative nouvelle, il faut se rappeler quelle a été depuis cent ans l'évolution de la pensée mathématique, non seulement en Géométrie, mais en Arithmétique et en Analyse. La notion de nombre s'est éclaircie et précisée; en même temps elle a reçu des généralisations diverses. La plus précieuse pour les analystes est celle qui résulte de l'introduction des *imaginaires* dont les mathématiciens modernes ne pourraient plus se passer; mais on ne s'est pas arrêté là et l'on a fait entrer dans la Science d'autres généralisations du nombre, ou, comme on dit, d'autres catégories de nombres complexes.

Les opérations de l'Arithmétique ont été de leur côté soumises à la critique, et les quaternions de Hamilton nous ont montré un exemple d'une opération qui présente une analogie presque parfaite avec la multiplication, que l'on peut appeler du même nom, et qui pourtant n'est pas commutative, c'est-à-dire dont le produit change quand on intervertit l'ordre des facteurs. C'était là, en Arithmétique une révolution toute pareille à celle qu'avait faite Lobatchevski en Géométrie.

Notre façon de concevoir l'infini s'est également modifiée. M. G. Cantor nous a appris à distinguer des degrés dans l'infini lui-même (qui n'ont d'ailleurs rien de commun avec les infiniment petits des différents ordres créés par Leibniz en vue du calcul infinitésimal ordinaire). La notion du continu, longtemps regardée comme primitive, a été analysée et réduite à ses éléments.

Mentionnerai-je également les travaux des Italiens qui se sont efforcés de créer un symbolisme logique universel et de réduire le raisonnement mathématique à des règles purement mécaniques ?

Il faut se rappeler tout cela si l'on veut comprendre comment des conceptions, qui auraient fait bondir Lobatchevski lui-même, tout révolutionnaire qu'il fût, nous semblent aujourd'hui presque naturelles et ont pu être proposées par M. Hilbert avec une parfaite tranquillité.

La liste des axiomes. — La première chose à faire était d'énumérer tous les axiomes de la Géométrie. Ce n'était pas si facile qu'on pourrait le croire ; il y a les axiomes que l'on voit et ceux qu'on ne voit pas, ceux qu'on introduit inconsciemment et sans s'en apercevoir. Euclide lui-même, que l'on croit un logicien impeccable, en applique souvent qu'il n'énonce pas.

La liste de M. Hilbert est-elle définitive ? Il est permis de le croire, car elle semble avoir été dressée avec soin. Le savant Professeur répartit les axiomes en cinq groupes :

I. Axiome der Verknüpfung (je traduirai par *axiomes projectifs* au lieu de chercher une traduction littérale, comme par exemple *axiomes de la connexion*, qui ne saurait être satisfaisante).

II. Axiome der Anordnung (axiomes de l'ordre).

III. Axiome d'Euclide.

IV. Axiomes de la congruence ou axiomes métriques.

V. Axiome d'Archimède.

Parmi les axiomes projectifs, nous distinguerons ceux du plan et ceux de l'espace; les premiers sont ceux qui dérivent de la proposition bien connue : *par deux points passe une droite et une seule;* mais je préfère traduire littéralement afin de bien faire comprendre la pensée de M. Hilbert.

« Imaginons trois systèmes d'objets que nous appellerons *points*, *droites* et *plans*. Imaginons que ces points, droites et plans soient liés par certaines relations que nous exprimerons par les mots *être situé sur*, *entre*, etc.

« I. — 1. Deux points différents A et B déterminent toujours une droite a;

ce que nous écrirons

$$AB = a \quad \text{ou} \quad BA = a.$$

« Au lieu du mot *déterminent* nous emploierons également d'autres tournures de phrase qui seront synonymes; nous dirons : A est situé sur a, A est un point de a, a passe par A, a joint A à B, etc.

« I. — 2. Deux points quelconques d'une droite déterminent cette droite, c'est-à-dire que si $AB = a$ et que $AC = a$, et si B est différent de C, on a aussi $BC = a$. »

Voici les réflexions que doivent nous inspirer ces énoncés : les expressions, *être situé sur*, *passer par*, etc., ne sont pas destinées à évoquer des images; elles sont simplement des synonymes du mot *déterminer*. Les mots *point*, *droite* et *plan* eux-mêmes ne doivent provoquer dans l'esprit aucune représentation sensible. Ils pourraient indifféremment désigner des objets d'une nature quelconque, pourvu qu'on pût établir entre ces objets une correspondance telle qu'à tout système de deux des objets appelés *points* correspondît un des objets appelés *droites*, et un seul. Et c'est pourquoi il devient nécessaire d'ajouter (I, 2) que, si la droite qui correspond au système des deux points A et B est la même que celle qui correspond au système des deux points B et C, c'est aussi la même qui correspond au système des deux points A et C.

Ainsi M. Hilbert a, pour ainsi dire, cherché à mettre les axiomes sous une forme telle qu'ils puissent être appliqués par quelqu'un qui n'en comprendrait pas le sens parce qu'il n'aurait jamais vu ni point, ni droite, ni plan. Les raisonnements doivent pouvoir, d'après lui, se ramener à des règles purement mécaniques, et il suffit, pour faire la Géométrie, d'appliquer servilement ces règles aux axiomes, sans savoir ce qu'ils veulent dire. On pourra ainsi construire toute la Géométrie, je ne dirai pas précisément sans y rien comprendre, puisqu'on saisira l'enchaînement logique des propositions, mais tout au moins sans y rien voir. On pourrait confier les axiomes à une machine à raisonner, par exemple au *piano raisonneur* de Stanley Jevons, et l'on en verrait sortir toute la Géométrie.

C'est la même préoccupation qui a inspiré certains savants italiens, tels que MM. Peano et Padoa, qui se sont efforcés de créer une *pasigraphie*, c'est-à-dire une sorte d'Algèbre universelle où tous les raisonnements sont remplacés par des symboles ou des formules.

Cette préoccupation peut sembler artificielle et puérile; et il est inutile de faire observer combien elle serait funeste dans l'enseignement et nuisible au développement des esprits; combien elle serait desséchante pour les chercheurs, dont elle tarirait promptement l'originalité. Mais, chez M. Hilbert, elle s'explique et se justifie, si l'on se rappelle le but poursuivi. La liste des axiomes est-elle complète, ou en avons nous laissé échapper quelques-uns que nous appliquons inconsciemment? Voilà ce qu'il faut savoir. Pour cela nous avons un critère, et nous n'en avons qu'un. Il faut chercher si la Géométrie est une conséquence logique des axiomes explicitement énoncés, c'est-à-dire si ces axiomes confiés à la machine à raisonner peuvent en faire sortir toute la suite des propositions.

Si oui, on sera certain de n'avoir rien oublié. Car notre machine ne peut fonctionner que conformément aux règles de la Logique pour lesquelles elle a été construite; elle ignore ce vague instinct que nous appelons *intuition*.

Je ne m'étendrai pas sur les axiomes projectifs de l'espace que l'auteur numérote I, 3, 4, 5, 6. Rien n'est changé aux énoncés habituels.

Un mot seulement sur l'axiome I, 7, qui se formule ainsi :

« Sur toute droite il y a au moins deux points; sur tout plan, il y au moins trois points non en ligne droite; dans l'espace il y a au moins quatre points qui ne sont pas dans un même plan. »

Cet énoncé est caractéristique. Quiconque aurait laissé à l'intuition une place, si petite qu'elle fût, n'aurait pas songé à dire que sur toute droite il y a au moins deux points, ou bien il aurait ajouté tout de suite qu'il y en a une infinité; car l'intuition de la droite lui aurait révélé immédiatement et simultanément ces deux vérités.

Passons au second groupe, celui des axiomes de l'ordre. Voici l'énoncé des deux premiers :

« Si trois points sont sur une même droite, il y a entre eux une certaine relation que nous exprimons en disant que l'un des points, et un seulement, est entre les deux autres. Si C est entre A et B, et si D est entre A et C, D sera aussi entre A et B, etc. »

Ici encore nous ne faisons pas intervenir l'intuition; nous ne cherchons pas à approfondir ce que signifie le mot *entre*, toute relation satisfaisant aux axiomes pourrait être désignée par le même mot. Voilà qui est bien propre à nous éclairer sur la nature purement formelle des définitions mathématiques; mais je n'insiste pas, car je n'aurais qu'à répéter ce que j'ai dit à propos du premier groupe.

Mais une autre réflexion s'impose. Les axiomes de l'ordre sont présentés comme dépendant des axiomes projectifs, et ils n'auraient plus aucun sens si l'on n'admettait pas ces derniers, puisqu'on ne saurait ce que c'est que trois points en ligne droite. Et cependant il existe une géométrie particulière, purement qualitative, et qui est absolument indépendante de la Géométrie projective, qui ne suppose connues ni la notion de droite, ni celle de plan, mais seulement celles de ligne et de surface; c'est ce qu'on appelle l'*Analysis situs.* Ne serait-il pas préférable de donner aux axiomes du deuxième groupe une forme qui les affranchît de cette dépendance et les séparât complètement du premier groupe? Il reste à savoir si cela serait possible, en conservant à ces axiomes leur caractère purement logique, c'est-à-dire en fermant complètement la porte à toute intuition.

Le troisième groupe ne contient qu'un seul axiome, qui est le célèbre postulatum d'Euclide; je remarquerai seulement que, contrairement à l'usage ordinaire, il est présenté avant les axiomes métriques.

Ces derniers forment le quatrième groupe. Nous y distinguerons trois sous-groupes. Les propositions IV, 1, 2, 3 sont les axiomes métriques des segments : ces axiomes servent à définir les longueurs. On conviendra de dire qu'un segment pris sur une droite peut être congruent (égal) à un segment pris sur une autre droite; c'est l'axiome IV, 1; mais cette convention n'est pas tout à fait arbitraire; elle doit être faite de façon que deux segments congruents à un même troisième soient congruents entre eux (IV, 2); on définit ensuite par une convention nouvelle l'addition des segments, et cette convention, à son tour, doit être faite de façon qu'en additionnant des segments égaux on trouve des sommes égales; et c'est là l'axiome IV, 3.

Les propositions IV, 4, 5 sont les axiomes correspondants pour les angles. Mais cela ne suffit pas encore : aux deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles il faut adjoindre l'axiome métrique des triangles (que M. Hilbert numérote IV, 6); si deux triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux, les autres angles de ces deux triangles sont égaux chacun à chacun.

On retrouve là l'un des cas connus de l'égalité des triangles, que l'on démontre d'ordinaire par superposition, et qu'on doit poser en postulat si l'on veut éviter de faire appel à l'intuition. Quand d'ailleurs on se servait de l'intuition, c'est-à-dire de la superposition, on voyait du même coup que les troisièmes côtés étaient égaux dans les deux triangles, et les deux propositions étaient unies pour ainsi dire dans une même aperception; ici, au contraire, nous les séparons; de l'une d'elles nous faisons un postulat, mais nous n'érigeons pas l'autre en postulat, parce qu'elle peut se déduire logiquement de la première.

Autre remarque : M. Hilbert dit bien que le segment AB est congruent à lui-même, mais (et de même pour les angles) il devrait, semble-t-il, ajouter qu'il est congruent au segment inverse BA. Cet axiome (qui implique la symétrie de l'espace) n'est pas identique à ceux qui sont explicitement énoncés. Je ne sais s'il pourrait s'en déduire logiquement; je crois que oui, mais, étant donnée la marche des raisonnements de M. Hilbert, il me semble que ce postulat est appliqué sans être énoncé (p. 17, ligne 18).

Je regretterai aussi que, dans cet exposé des axiomes métriques, il ne reste plus aucune trace d'une notion dont Helmholtz avait, le premier, compris l'importance : je veux parler du déplacement d'une figure invariable. On aurait pu conserver à cette notion son rôle naturel, sans sacrifier le caractère logique des axiomes. On aurait pu dire, par exemple : Je définis entre les figures une certaine relation que j'appelle *congruence*, etc.; deux figures congruentes à une même troisième sont congruentes entre elles; deux figures congruentes sont identiques quand trois points de l'une, non en ligne droite, sont identiques aux trois points correspondants de l'autre, etc. On aurait évité ainsi l'introduction artificielle de cet axiome IV, 6, et les postulats auraient été rattachés à leur véritable origine psychologique.

Le cinquième groupe ne comprend qu'un seul axiome, celui d'Archimède.

Soient deux points quelconques A et B sur une droite D; soit a un segment quelconque; construisons sur D, à partir du point A, et dans la direction AB, une série de segments tous égaux entre eux et égaux à a : $AA_1, A_1A_2, \ldots A_{n-1}A_n$; on pourra toujours prendre n assez grand pour que le point B se trouve sur l'un de ces segments.

C'est-à-dire que, si l'on se donne deux longueurs quelconques l et L, on peut toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que, en ajoutant n fois à elle-même la longueur l, on obtienne une longueur totale plus grande que L.

Indépendance des axiomes. — La liste des axiomes une fois dressée, il faut voir si elle est exempte de contradictions. Nous savons bien que oui, puisque la Géométrie existe; et M. Hilbert répond oui également, en construisant une géométrie. Mais, chose étrange, cette géométrie n'est pas tout à fait la nôtre, son espace n'est pas le nôtre, ou du moins ce n'en est qu'une partie. Dans l'espace de M. Hilbert, il n'y a pas tous les points qui sont dans le nôtre, mais ceux seulement qu'on peut, en partant de deux points donnés, construire par le moyen de la règle et du compas. Dans cet espace, par exemple, il n'existerait pas, en général, un angle qui serait le tiers d'un angle donné.

Je crois bien que cette conception aurait été regardée par Euclide comme plus raisonnable que la nôtre. Toujours est-il que ce n'est pas le nôtre. Pour retrouver notre géométrie, il faudrait ajouter un axiome.

« Si, sur une droite, il y a une double infinité de points A_1, A_2, ..., A_n, ..., B_1, B_2, ..., B_n, ..., tels que B_q soit compris entre A_p et B_{q-1}, et A_p entre B_q et A_{p-1}, quels que soient p et q, il y aura sur cette droite au moins un point C qui sera entre A_p et B_q, quels que soient p et q. »

On doit se demander ensuite si les axiomes sont indépendants, c'est-à-dire si l'on peut sacrifier l'un des cinq groupes en conservant les quatre autres et obtenir néanmoins une géométrie cohérente. C'est ainsi qu'en supprimant le groupe III (postulatum d'Euclide) on obtient la géométrie non euclidienne de Lobatschevski.

On peut également supprimer le groupe IV. M. Hilbert a réussi à conserver les groupes I, II, III et V, ainsi que les deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles, tout en rejetant l'axiome métrique des triangles, c'est-à-dire la proposition IV, 6.

Voici comment il y parvient : considérons, pour simplifier, une Géométrie plane et soit P le plan dans lequel nous opérons; nous conserverons aux mots *points* et *droites* leur sens habituel; de même nous conserverons aux angles leurs mesures habituelles; mais il n'en sera pas de même pour les longueurs. Une longueur sera mesurée *par définition* par sa projection sur un plan Q différent de P, cette projection conservant elle-même sa mesure habituelle. Il est clair que tous les axiomes subsisteront, sauf les axiomes métriques. Les axiomes métriques des angles subsisteront également, puisque nous ne changeons rien à la mesure des angles; ceux des segments sont vrais également, puisque, chaque segment du plan P est mesuré par un autre segment qui est sa projection sur le plan Q, et que ce dernier segment est mesuré à la manière habituelle. Au contraire, les théorèmes sur l'égalité des triangles, tels que l'axiome IV, 6, ne sont plus vrais. Cette solution ne me satisfait qu'à moitié ; les angles ont été définis indépendamment des longueurs, sans qu'on se soit préoccupé de mettre les deux définitions d'accord (où plutôt en les mettant en désaccord à dessein). Il suffirait de changer l'*une* des deux définitions pour retomber sur la Géométrie classique. Je préférerais qu'on donnât des longueurs une définition telle qu'il devînt impossible de trouver une définition des angles satisfaisant aux axiomes métriques des angles et des triangles. Cela ne serait d'ailleurs pas difficile.

Il aurait été facile à M. Hilbert de créer une géométrie où les axiomes de l'ordre seraient abandonnés, tandis que tous les autres seraient conservés. Ou plutôt cette Géométrie existe déjà, ou plutôt encore il en existe déjà deux. Il y a celle de Riemann, pour laquelle, il est vrai, le postulatum d'Euclide (groupe III) est abandonné également, puisque la somme des angles d'un triangle est plus grande que deux droits. Pour bien faire comprendre ma pensée, je me bornerai à considérer une géométrie à deux dimensions. La Géométrie de Riemann à deux dimensions n'est autre chose que la Géométrie sphérique, à une condition toutefois : c'est que l'on ne regarde pas comme distincts deux points diamétralement opposés sur la sphère. Les éléments de cette Géométrie seront donc les différents diamètres de cette sphère. Or, si l'on envisage trois diamètres d'une même sphère situés dans un même plan diamétral, on n'a aucune raison de dire que l'un deux est *entre* les deux autres. Le mot *entre* n'a plus de sens, et les axiomes de l'ordre tombent d'eux-mêmes.

Si nous voulons maintenant une Géométrie où les axiomes de l'ordre ne subsisteront pas, et où l'on conservera le postulatum d'Euclide avec les autres, nous n'avons qu'à prendre pour éléments les points et les droites *imaginaires* de l'espace ordinaire. Il est clair que les points imaginaires de l'espace ne nous sont pas donnés comme *rangés* dans un ordre déterminé. Mais il y a plus : on peut se demander s'ils sont susceptibles d'être ainsi rangés; cela serait sans doute possible, comme l'a montré G. Cantor (à la condition, bien entendu, de ne pas toujours ranger dans le voisinage l'un de l'autre des points que nous regardons comme infiniment voisins, de rompre par conséquent la continuité de l'espace). On pourrait bien, dis-je, les ranger, mais cela ne pourrait pas se faire de telle façon que cet ordre ne soit pas altéré par les diverses opérations de la Géométrie (perspective, translation, rotation, etc.). Les axiomes de l'ordre ne sont donc pas applicables à cette Géométrie.

La Géométrie non archimédienne. — Mais la conception la plus originale de M. Hilbert, c'est celle de la Géométrie non archimédienne, où tous les axiomes restent vrais, sauf celui d'Archimède. Pour cela il fallait d'abord construire un *système de nombres non archimédiens*, c'est-à-dire un système d'éléments entre lesquels ont pût concevoir des relations d'égalité et d'inégalité et auxquels on pût appliquer des opérations correspondant à l'addition et à la multiplication arithmétiques, et cela de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Les règles arithmétiques de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité, etc.; *Aritmetische Axiome der Verknupfung*) subsistent sans changement.

2° Les règles du calcul et de la transformation des inégalités (*Arithmetische Axiome der Anordnung*) subsistent également.

3° L'axiome d'Archimède n'est pas vrai.

On peut arriver à ce résultat en choisissant pour élément des séries de la forme suivante :

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \dots,$$

où m est un entier positif ou négatif et où les coefficients A sont réels, et en convenant d'appliquer à ces séries les règles ordinaires de l'addition et de la multiplication. Il faut ensuite définir les conditions d'inégalité de ces séries, de façon à *ranger* nos éléments dans un ordre déterminé. Nous y arriverons par la convention suivante : nous attribuerons à notre série le signe de A_0 et nous dirons qu'une série est plus petite qu'une autre quand, retranchée de celle-ci, elle donne une différence positive.

Il est clair qu'avec cette convention, les règles du calcul des inégalités subsistent; mais l'axiome d'Archimède n'est plus vrai; et, en effet, si nous prenons les deux éléments 1 et t; le premier, additionné à lui-même autant de fois qu'on le voudra, restera toujours plus petit que le second. On aura toujours $t > n$, quel que soit l'entier n, puisque la différence $t - n$ sera toujours positive, le coefficient du premier terme t, qui, par définition, donne son signe, restant toujours égal à 1.

Nos nombres vulgaires rentrent comme cas particuliers parmi ces *nombres* *non archimédiens*. Les nouveaux nombres viennent s'intercaler pour ainsi dire dans la série de nos nombres vulgaires, de telle façon qu'il y ait, par exemple, une infinité de nombres nouveaux plus petits qu'un nombre vulgaire donné A et plus grands que tous les nombres vulgaires inférieurs à A.

Cela posé, imaginons un espace à trois dimensions où les coordonnées d'un point seraient mesurées, non pas par des nombres vulgaires, mais par des nombres non archimédiens, mais où les équations habituelles de la droite et du plan subsisteraient, de même que les expressions analytiques des angles et des longueurs. Il est clair que dans cet espace tous les axiomes resteraient vrais, sauf celui d'Archimède.

Sur une droite quelconque, entre nos points vulgaires, viendraient s'intercaler des points nouveaux. Si, par exemple, D_0 est une droite vulgaire, D_1 la droite non archimédienne correspondante; si P est un point vulgaire quelconque de D_0, et si ce point partage D_0 en deux demi-droites S et S' (j'ajoute, pour préciser, que je considère P comme ne faisant partie ni de S ni de S'), il y aura sur D_1 une infinité de points nouveaux tant entre P et S qu'entre P et S'. Il y aura également sur D_1 une infinité de points nouveaux qui seront à droite de tous les points vulgaires de D_0. En résumé, notre espace vulgaire n'est qu'une partie de l'espace non archimédien.

Au premier abord, l'esprit se révolte contre de pareilles conceptions. C'est que, par une vieille habitude, il cherche une représentation sensible. Il faut qu'il se débarrasse de cette préoccupation s'il veut arriver à comprendre, et cela est encore plus nécessaire que pour la Géométrie non euclidienne. M. Hilbert ne s'est proposé qu'une chose : construire un système d'éléments susceptibles de certaines relations logiques, et il lui suffit de montrer que ces relations n'impliquent pas de contradiction interne.

Qu'on remarque cependant ceci : la Géométrie non euclidienne respectait pour ainsi dire notre conception qualitative du continu géométrique tout en bouleversant nos idées sur la mesure de ce continu. La Géométrie non archimédienne détruit cette conception, elle dissèque le continu pour y introduire des éléments nouveaux.

Quoi qu'il en soit, M. Hilbert poursuit les conséquences de ses prémisses et il cherche comment on pourrait refaire la Géométrie sans se servir de l'axiome d'Archimède. Pas de difficulté en ce qui concerne les Chapitres que les écoliers appellent le *premier* et le *deuxième* Livre. Cet axiome n'y intervient nulle part.

Le troisième Livre traite des proportions et de la similitude. Voici, en substance, la marche que suit M. Hilbert pour le reconstituer sans avoir recours à l'axiome d'Archimède. Il prend la construction habituelle de la quatrième proportionnelle comme définition de la proportion, mais une pareille définition a besoin d'être justifiée; il faut montrer d'abord que le résultat est le même, quelles que soient les lignes auxiliaires employées dans la construction, et ensuite que les règles ordinaires du calcul s'appliquent aux proportions ainsi définies. C'est cette justification que M. Hilbert nous donne d'une façon satisfaisante.

Le quatrième Livre traite de la mesure des aires planes; si cette mesure peut s'établir facilement sans le secours du principe d'Archimède, c'est parce que deux polygones équivalents ou bien peuvent être décomposés en triangles de telle façon que les triangles élémentaires de l'un et ceux de l'autre soient égaux chacun à chacun (ou, en d'autres termes, peuvent être ramenés l'un à l'autre par le procédé du casse-tête chinois), ou bien peuvent être regardés comme des différences de polygones susceptibles de ce mode de décomposition (c'est toujours le même procédé, en admettant non seulement des triangles additifs, mais encore des triangles soustractifs). Mais nous devons observer qu'une circonstance analogue ne paraît pas se retrouver pour deux polyèdres équivalents, de sorte qu'on peut se demander si l'on peut déterminer, par exemple le volume de la pyramide sans un appel plus ou moins déguisé au calcul infinitésimal. Il n'est donc pas certain qu'on pourrait se passer aussi facilement de l'axiome d'Archimède dans la mesure des volumes que dans celle des aires planes. M. Hilbert ne l'a d'ailleurs pas tenté.

Une question restait à traiter toutefois; étant donné un polygone, est-il possible de le décomposer en triangles et d'enlever l'un des morceaux de façon que le polygone restant soit équivalent au polygone donné, c'est-à-dire de façon qu'en transformant ce polygone restant par le procédé du casse-tête chinois, on puisse retomber sur le polygone primitif. D'ordinaire, on se borne à dire que cela est impossible parce que le tout est plus grand que la partie. C'est là invoquer un axiome nouveau, et, quelque évident qu'il nous paraisse, le logicien serait plus satisfait si l'on pouvait l'éviter. M. Schur a trouvé la démonstration, il est vrai, mais en s'appuyant sur l'axiome d'Archimède; M. Hilbert voulait y arriver sans se servir de cet axiome. Voici par quel artifice il y parvient; il admet que la *surface* du triangle est *par définition* le demi-produit de sa base par sa hauteur, et il justifie cette définition en montrant que deux triangles équivalents (au point de vue du casse-tête chinois) ont même *surface* (au sens de la nouvelle définition) et que la *surface* d'un triangle décomposable en plusieurs autres est la somme des *surfaces* des triangles composants. Une fois cette justification terminée, tout le reste suit sans difficulté. C'est donc toujours la même marche. Pour éviter d'incessants appels à l'intuition, qui nous fournirait sans cesse de nouveaux axiomes, on transforme ces axiomes en définitions, et l'on justifie après coup ces définitions en montrant qu'elles sont exemptes de contradictions.

La Géométrie non arguésienne. — Le théorème fondamental de la Géométrie projective est le théorème de Desargues. Deux triangles sont dits *homologues* lorsque les droites qui joignent chacun à chacun les sommets correspondants se coupent en un même point. Desargues a démontré que les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles homologues sont sur une même ligne droite; la réciproque est également vraie.

Le théorème de Desargues peut s'établir de deux manières :

1° En se servant des axiomes projectifs du plan et des axiomes métriques du plan;

2° En se servant des axiomes projectifs du plan et de ceux de l'espace.

Le théorème pourrait donc être découvert par un animal à deux dimensions, à qui une troisième dimension paraîtrait aussi inconcevable qu'à nous une quatrième, qui par conséquent ignorerait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui aurait vu se déplacer, dans le plan qu'il habite, des figures invariables analogues à nos corps solides, et qui, par conséquent, connaîtrait les axiomes métriques. Le théorème pourrait être découvert également par un animal à trois dimensions qui connaîtrait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui, n'ayant jamais vu se déplacer de corps solides, ignorerait les axiomes métriques.

Mais pourrait-on établir le théorème de Desargues sans se servir ni des axiomes projectifs de l'espace, ni des axiomes métriques, mais seulement des axiomes projectifs du plan? On pensait que non, mais on en n'était pas sûr. M. Hilbert a tranché la question en construisant une *géométrie non arguésienne*, qui est, bien entendu, une géométrie plane. Considérons une ellipse E. A l'extérieur de cette ellipse, le mot *droite* conserve son sens habituel; à l'intérieur le mot *droite* prend un sens différent et il s'applique à un arc de cercle qui, prolongé, irait passer par un point fixe P extérieur à l'ellipse. Une droite qui traverse l'ellipse E se composera donc de deux parties rectilignes, au sens ordinaire du mot, raccordées à l'intérieur de l'ellipse par un arc de cercle; tel un rayon lumineux qui serait dévié de sa trajectoire rectiligne en traversant un corps réfringent.

Les axiomes projectifs du plan seront encore vrais si l'on suppose le point P assez éloigné de l'ellipse E.

Plaçons maintenant deux triangles homologues en dehors de l'ellipse E, et de telle façon que leurs côtés ne rencontrent pas E; les trois droites qui joignent deux à deux les sommets correspondants, *si on les entend au sens ordinaire du mot*, iront se couper en un même point Q d'après le théorème de Desargues; supposons que ce point Q soit à l'intérieur de E. *Si maintenant nous entendons le mot* droite *au sens nouveau*, les trois droites qui joignent les sommets correspondants seront déviées en pénétrant à l'intérieur de l'ellipse. Elles n'iront donc plus passer en Q, elles ne seront plus concourantes. Le théorème de Desargues n'est plus vrai dans notre nouvelle géométrie, c'est une géométrie non arguésienne.

La Géométrie non pascalienne. — M. Hilbert ne s'arrête pas là et il introduit encore une nouvelle conception. Pour bien la comprendre, il nous faut d'abord retourner un instant dans le domaine de l'Arithmétique. Nous avons vu plus haut s'élargir la notion de nombre, par l'introduction des *nombres non archimédiens*. Il nous faut une classification de ces nombres nouveaux, et pour l'obtenir nous allons classer d'abord les axiomes de l'Arithmétique en quatre groupes qui seront :

1° Les lois d'associativité et de commutativité de l'addition, la loi d'associativité de la multiplication, les deux lois de distributivité de la multiplication; ou en résumé toutes les règles de l'addition et de la multiplication, sauf la loi de commutativité de la multiplication;

2° Les axiomes de l'ordre, c'est-à-dire les règles du calcul des inégalités;

3° La loi de commutativité de la multiplication, d'après laquelle on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit;

4° L'axiome d'Archimède.

Les nombres qui admettront les axiomes des deux premiers groupes seront dits *arguésiens;* ils pourront être *pascaliens* ou *non pascaliens* selon qu'ils satisferont ou ne satisferont pas à l'axiome du troisième groupe, ils seront *archimédiens* ou *non archimédiens*, suivant qu'il satisferont ou non à l'axiome du quatrième groupe. Nous ne tarderons pas à voir la raison de ces dénominations.

Les nombres ordinaires sont à la fois arguésiens, pascaliens et archimédiens. On peut démontrer la loi de commutativité en partant des axiomes des deux premiers groupes et de l'axiome d'Archimède; il n'y a donc pas de nombres arguésiens, archimédiens et non pascaliens.

En revanche, nous avons cité plus haut un exemple de nombres arguésiens, pascaliens et non archimédiens; c'est ce que j'appellerai les *nombres du système* T, et je rappelle qu'à chacun de ces nombres correspond une série de la forme

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots$$

où les A sont des nombres réels ordinaires.

Il est aisé de former, par un procédé analogue, un système de nombres arguésiens, non pascaliens et non archimédiens. Les éléments de ce système seront des séries de la forme

$$S = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \ldots,$$

où s est un symbole analogue à t, n un entier positif ou négatif, et T_0, T_1, ... des nombres du système T; si donc on remplaçait les coefficients T_0, T_1, ... par les séries en t correspondantes, on aurait une série dépendant à la fois de t et de s. On additionnera les séries S d'après les règles ordinaires, et de même pour la multiplication de ces séries on admettra les règles de distributivité et et d'associativité, mais on admettra que la loi de commutativité n'est pas vraie et qu'au contraire $st = -ts$.

Il reste à *ranger* les séries dans un ordre déterminé, pour satisfaire aux axiomes de l'ordre. Pour cela, on attribuera à la série S le signe du premier coefficient T_0; on dira qu'une série est plus petite qu'une autre, quand, retranchée de celle-ci, elle donnera une différence positive. C'est donc toujours la même règle : t est regardé comme très grand par rapport à un nombre réel ordinaire quelconque, et s est regardé comme très grand par rapport à un nombre quelconque du système T.

La loi de commutativité n'étant pas vraie, ce sont bien des nombres non pascaliens.

Avant d'aller plus loin, je rappelle que Hamilton a depuis longtemps introduit un système de nombres complexes où la multiplication n'est pas commutative; ce sont les *quaternions*, dont les Anglais font un si fréquent usage en Physique mathématique. Mais, pour les quaternions, les axiomes de l'ordre ne sont pas vrais; ce qu'il y a donc d'original dans la conception de M. Hilbert, c'est que ses nouveaux nombres satisfont aux axiomes de l'ordre sans satisfaire à la règle de commutativité.

Revenons à la Géométrie. Admettons les axiomes des trois premiers groupes, c'est-à-dire les axiomes projectifs du plan et de l'espace, les axiomes de l'ordre et le postulat d'Euclide; le théorème de Desargues s'en déduira, puisqu'il est une conséquence des axiomes projectifs de l'espace.

Nous voulons constituer notre géométrie *sans nous servir des axiomes métriques;* le mot de *longueur* n'a donc encore pour nous aucun sens; nous n'avons pas le droit de nous servir du compas; en revanche, nous pouvons nous servir de la règle, puisque nous admettons que par deux points on peut faire passer une droite, en vertu de l'un des axiomes projectifs; nous savons également mener par un point une parallèle à une droite donnée, puisque nous admettons le postulatum d'Euclide. Voyons ce que nous pouvons faire avec ces ressources.

Nous pouvons définir l'homothétie de deux figures; deux triangles seront dits *homothétiques* quand leurs côtés seront parallèles deux à deux, et nous en conclurons (par le théorème de Desargues que nous admettons) que les droites qui joignent les sommets correspondants sont concourantes. Nous nous servirons ensuite de l'homothétie pour définir les proportions. Nous pouvons aussi définir l'égalité dans une certaine mesure.

Les deux côtés opposés d'un parallélogramme seront égaux *par définition;* nous savons ainsi reconnaître si deux segments sont égaux entre eux, pourvu qu'ils soient parallèles.

Grâce à ces conventions, nous sommes maintenant en mesure de comparer les longueurs de deux segments; mais *pourvu que ces segments soient* PARALLÈLES. La comparaison de deux longueurs dont la direction est différente n'a aucun sens, et il faudrait pour ainsi dire une unité de longueur différente pour chaque direction. Inutile d'ajouter que le mot *angle* n'a aucun sens.

Les longueurs seront ainsi exprimées par des nombres; mais ce ne seront pas forcément des nombres ordinaires. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que, si le théorème de Desargues est vrai comme nous l'admettons, ces nombres appartiendront à un système satisfaisant aux axiomes arithmétiques des deux premiers groupes, c'est-à-dire à un *système arguésien.* Inversement, étant donné un système quelconque S de nombres arguésiens, on peut construire une géométrie telle que les longueurs des segments d'une droite soient justement exprimées par ces nombres.

Voici comment peut se faire cette construction : un point de ce nouvel espace sera *défini* par trois nombres x, y, z du système S qui s'appelleront les *coordonnées* de ce point. Si aux trois coordonnées des divers points d'une figure on ajoute trois constantes (qui sont, bien entendu, des nombres arguésiens du système S), on obtient une autre figure transformée de la première, et de telle façon qu'à un segment quelconque de l'une des figures corresponde dans l'autre un segment égal et parallèle (au sens donné plus haut à ce mot). Cette transformation est donc une translation, de sorte que ces trois constantes définissent une translation. Si maintenant nous multiplions les trois coordonnées de tous les points d'une même figure par une même constante, nous obtiendrons une seconde figure qui sera homothétique de la première.

L'équation du plan sera une équation linéaire comme dans la Géométrie analytique ordinaire; mais, comme dans le système S la multiplication ne sera pas commutative en général, il importe de faire une distinction et de dire que dans chacun des termes de cette équation linéaire ce sera la coordonnée qui jouera le rôle de multiplicande, et le coefficient constant qui jouera le rôle de multiplicateur.

Ainsi, à chaque système de nombres arguésiens correspondra une géométrie nouvelle satisfaisant aux axiomes projectifs, à ceux de l'ordre, au théorème de Desargues et au postulatum d'Euclide. Quelle est maintenant la signification géométrique de l'axiome arithmétique du troisième groupe, c'est-à-dire de la règle de commutativité de la multiplication? *La traduction géométrique de cette règle, c'est le théorème de Pascal;* je veux parler du théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique, en supposant que cette conique se réduit à deux droites.

Ainsi, le théorème de Pascal sera vrai ou faux, selon que le système S sera pascalien ou non pascalien; et, comme il y a des systèmes non pascaliens, *il y aura également des géométries non pascaliennes.*

Le théorème de Pascal peut se démontrer en partant des axiomes métriques; il sera donc vrai, si l'on admet que les figures peuvent se transformer non seulement par homothétie et translation, comme nous venons de le faire, mais encore par rotation.

Le théorème de Pascal peut également se déduire de l'axiome d'Archimède, puisque nous venons de voir que tout système de nombres arguésiens et archimédiens est en même temps pascalien; *toute géométrie non pascalienne est donc en même temps non archimédienne.*

Le Streckenüberträger. — Citons encore une autre conception de Hilbert. Il étudie les constructions qu'on pourrait faire, non pas à l'aide de la règle et du compas, mais par le moyen de la règle et d'un instrument particulier qu'il appelle *Streckenüberträger*, et qui permettrait de porter sur une droite un segment égal à un autre segment pris sur une autre droite. Le *Streckenüberträger* n'est pas l'équivalent du compas; ce dernier instrument permettrait de construire l'intersection de deux cercles ou d'un cercle et d'une droite quelconque; le *Streckenüberträger* nous donnerait seulement l'intersection d'un cercle et d'une droite *passant par le centre de ce cercle.* M. Hilbert cherche donc quelles sont les constructions qui seront possibles avec ces deux instruments, et il arrive à une conclusion bien remarquable.

Les constructions qui peuvent se faire par la règle et le compas peuvent se faire également par la règle et le *Streckenüberträger*, *si ces constructions sont telles que le résultat en soit toujours réel.* Il est clair, en effet, que cette condition est nécessaire; car un cercle est toujours coupé *en deux points réels* par une droite menée par son centre. Mais il était difficile de prévoir que cette condition serait également suffisante.

Géométries diverses. — Je voudrais, avant de terminer, voir quelle place occupent dans la classification de M. Hilbert les diverses géométries proposées jusqu'ici. Et d'abord *les* géométries de Riemann; je ne veux pas parler de *la* géométrie de Riemann que j'ai signalée plus haut et qui est l'opposé de celle de Lobatchevski; je veux parler des géométries relatives aux espaces à courbure variable envisagés par Riemann dans sa célèbre *Habilitationsschrift.*

Dans cette conception, on attribue par définition une longueur à une courbe quelconque, et c'est sur cette définition que tout repose. Le rôle des droites est joué par les géodésiques, c'est-à-dire par les lignes de longueur minima menées d'un point à un autre. Les axiomes projectifs ne sont plus vrais, et il n'y a aucune raison, par exemple, pour que deux points ne puissent être joints que par une seule géodésique. Le postulat d'Euclide ne peut plus évidemment avoir aucun sens. L'axiome d'Archimède reste vrai, ainsi que les axiomes de l'ordre *mutatis mutandis*; Riemann n'envisage, en effet, que les systèmes de nombres ordinaires. En ce qui concerne les axiomes métriques, on voit aisément que ceux des segments et ceux des angles restent vrais, tandis que l'axiome métrique des triangles (IV, 6) est évidemment faux.

Et ici nous retrouvons l'objection qu'on a le plus souvent faite à Riemann.

Vous parlez de longueur, lui a-t-on dit; or longueur suppose mesure, et, pour mesurer, il faut pouvoir transporter un instrument de mesure qui doit demeurer invariable; d'ailleurs, vous le reconnaissez vous-même. Il faut donc que l'espace soit partout égal à lui-même, qu'il soit homogène pour que la congruence y soit possible. Or, votre espace ne l'est pas, puisque sa courbure est variable; il ne peut donc y être question ni de mesure, ni de longueur.

Riemann n'aurait pas eu de peine à répondre. Supposons une géométrie à deux dimensions pour simplifier; nous pourrons alors nous représenter l'espace de Riemann comme une surface dans l'espace ordinaire. Nous pourrions mesurer des longueurs sur cette surface à l'aide d'une ficelle, et cependant une figure ne pourrait pas se déplacer en restant appliquée sur cette surface et de façon que les longueurs de tous ses éléments demeurent invariables. Car la surface n'est pas, en général, applicable sur elle-même.

C'est ce que M. Hilbert traduirait en disant que les axiomes métriques des segments sont vrais, et que celui des triangles ne l'est pas. Les premiers sont concrétisés pour ainsi dire dans notre ficelle; celui des triangles supposerait le déplacement d'une figure dont tous les éléments auraient une longueur constante.

Quelle sera la place d'une autre géométrie que j'ai proposée autrefois et qui rentre pour ainsi dire dans la même famille que celle de Lobatchevski et celle de Riemann? J'ai montré qu'on peut imaginer trois géométries à deux dimensions, qui correspondent respectivement aux trois sortes de surfaces du second degré, l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et l'hyperboloïde à une nappe; la première est celle de Riemann, la seconde est celle de Lobatchevski, et la troisième est la géométrie nouvelle. On trouverait de même quatre géométries à trois dimensions.

Où viendrait se ranger cette géométrie nouvelle dans la classification de M. Hilbert? Il est aisé de s'en rendre compte. Comme pour celle de Riemann, tous les axiomes subsistent, sauf ceux de l'ordre et celui d'Euclide; mais, tandis que dans la géométrie de Riemann, les axiomes sont faux sur toutes les droites, au contraire, dans la géométrie nouvelle, les droites se répartissent en deux classes, les unes sur lesquelles les axiomes de l'ordre sont vrais, les autres sur lesquelles ils sont faux.

Conclusions. — Mais ce qui est le plus important, c'est de nous rendre compte de la place qu'occupent les conceptions nouvelles de M. Hilbert dans l'histoire de nos idées sur la philosophie des Mathématiques.

Après une première période de naïve confiance où l'on nourrissait l'espoir de tout démontrer, est venu Lobatchevski, l'inventeur des géométries non euclidiennes.

Mais le véritable sens de cette invention n'a pas été pénétré tout de suite; Helmholtz a montré d'abord que les propositions de la géométrie euclidienne n'étaient autre chose que les lois des mouvements des corps solides, tandis que celles des autres géométries étaient les lois que pourraient suivre d'autres corps analogues aux corps solides, qui sans doute n'existent pas, mais dont l'existence pourrait être conçue sans qu'il en résultât la moindre contradiction, des corps que l'on pourrait fabriquer si on le voulait. Ces lois ne pouvaient, toutefois, être regardées comme expérimentales, puisque les solides naturels ne les suivent que grossièrement et, d'ailleurs, puisque les corps fictifs de la géométrie non euclidienne, n'existant pas, ne peuvent être accessibles à l'expérience. Helmholtz, toutefois, ne s'est jamais expliqué sur ce point avec une parfaite netteté.

Lie a poussé l'analyse beaucoup plus loin. Il a cherché de quelle manière peuvent se combiner les divers mouvements possibles d'un système quelconque, ou plus généralement les diverses transformations possibles d'une figure. Si l'on envisage un certain nombre de transformations et qu'on les combine ensuite de toutes les manières possibles, l'ensemble de toutes ces combinaisons formera ce qu'il appelle *un groupe*. A chaque groupe correspond une géométrie, et la nôtre, qui correspond au groupe des déplacements d'un corps solide, n'est qu'un cas très particulier. Mais tous les groupes que l'on peut imaginer posséderont certaines propriétés communes, et ce sont précisément ces propriétés communes qui limitent le caprice des inventeurs de géométries; ce sont elles, d'ailleurs, que Lie a étudiées toute sa vie.

Il n'était pourtant pas entièrement satisfait de son œuvre. Il avait, disait-il, toujours envisagé l'espace comme une *Zahlenmannigfaltigkeit*. Il s'était borné à l'étude des groupes continus proprement dits auxquels s'appliquent les règles de l'Analyse infinitésimale ordinaire. Ne s'était-il pas ainsi artificiellement restreint? N'avait-il pas ainsi négligé un des axiomes indispensables de la Géométrie (c'est en somme de l'axiome d'Archimède qu'il s'agit)? Je ne sais si l'on trouverait trace de cette préoccupation dans ses œuvres imprimées, mais dans sa correspondance, ou dans sa conversation, il exprimait sans cesse ce même regret.

C'est précisément la lacune qu'a comblée M. Hilbert; les géométries de Lie restaient toutes assujetties aux formes de l'Analyse et de l'Arithmétique qui semblaient intangibles. M. Hilbert a brisé ces formes ou, si l'on aime mieux, il les a élargies. Ses espaces ne sont plus des *Zahlenmannigfaltigkeiten*.

Les objets qu'il appelle *point*, *droite* ou *plan* deviennent ainsi des êtres purement logiques qu'il est impossible de se représenter. On ne saurait s'imaginer, sous une forme sensible, ces points qui ne sont que des systèmes de trois séries. Peu lui importe, il lui suffit que ce soient des *individus* et qu'il ait des règles sûres pour distinguer ces individus les uns des autres, pour établir conventionnellement entre eux des relations d'égalité ou d'inégalité et pour les transformer.

Une autre remarque : les groupes de transformations au sens de Lie ne semblent plus jouer qu'un rôle secondaire. C'est du moins ce qu'il semble quand on lit le texte même de M. Hilbert. Mais, si l'on y regardait de plus près, on verrait que chacune de ses géométries est encore l'étude d'un groupe. Sa géométrie non archimédienne est celle d'un groupe qui contient toutes les transformations du groupe euclidien, correspondant aux divers déplacements d'un solide, mais qui en contient encore d'autres susceptibles de se combiner aux premières d'après des lois simples.

Lobatchevski et Riemann rejetaient le postulatum d'Euclide, mais ils conservaient les axiomes métriques; dans la plupart de ses géométries, M. Hilbert fait l'inverse. Cela revient à mettre au premier rang un groupe formé des transformations de l'espace par homothétie et par translation; et à la base de sa géométrie non pascalienne, c'est un groupe analogue que nous retrouvons, comprenant non seulement les homothéties et les translations de l'espace ordinaire, mais d'autres transformations analogues se combinant aux premières d'après des lois simples.

M. Hilbert semble plutôt dissimuler ces rapprochements, je ne sais pourquoi. Le point de vue logique paraît seul l'intéresser. Étant donné une suite de propositions, il constate que toutes se déduisent logiquement de la première. Quel est le fondement de cette première proposition, quelle en est l'origine psychologique, il ne s'en occupe pas. Et même si nous avons, par exemple, trois propositions A, B, C, et si la logique permet, en partant de l'une quelconque d'entre elles, d'en déduire les deux autres, il lui sera indifférent de regarder A comme un axiome et d'en tirer B et C, ou bien, au contraire, de regarder C comme un axiome, et d'en tirer A et B. Les axiomes sont posés, on ne sait pas d'où ils sortent, il est donc aussi facile de poser A que C.

Son œuvre est donc incomplète; mais ce n'est pas une critique que je lui adresse. Incomplet, il faut bien se résigner à l'être. Il suffit qu'il ait fait faire à la philosophie des Mathématiques un progrès considérable, comparable à ceux que l'on devait à Lobatchevski, à Riemann, à Helmholtz et à Lie.

RÉFLEXIONS SUR DEUX NOTES DE M. A. S. SCHÖNFLIES ET DE M. E. ZERMELO (1)

Acta Mathematica, t. 32, p. 195-200 (2 février 1909).

Les considérations présentées par M. Schönflies au sujet de la Note de M. Richard seront lues avec intérêt; non qu'aucune de ses critiques puisse résister à un examen approfondi, mais par ce qu'elles peuvent suggérer d'utiles réflexions.

1. On sait que M. Richard considère l'ensemble E des nombres *qui peuvent être définis en un nombre fini de mots*. Il démontre que cet ensemble est dénombrable et c'est cette démonstration que M. Schönflies conteste.

Et pourquoi? Parce qu'on peut, dit-il, définir par une même formule une infinité d'objets mathématiques. Il est évident qu'une pareille formule ne peut constituer une définition, au moins au sens où M. Richard emploie ce mot. Et en effet ce qui caractérise précisément une définition, c'est qu'elle permet de distinguer l'objet défini de tous les autres objets; si elle s'applique à une infinité d'objets, elle ne permet pas de les discerner les uns des autres; elle n'en définit aucun; elle n'est plus une définition.

Ainsi pour prendre le premier exemple de M. Schönflies; quand on dit « une fonction constante », on a une formule d'un nombre fini de mots et qui s'applique à une infinité de fonctions; mais qui ne les définit pas, qui définit

(1) Intitulées : *Ueber eine vermeintliche Antinomie der Mengenlehre* (*Acta Math.*, t. 32, 1909, p. 177-184) et *Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète* (*Acta Math.*, t. 32, 1909, p. 185-193).

seulement leur relation avec un certain nombre, à savoir la valeur constante de la fonction. Pour achever de définir une de ces fonctions, il faut définir cette valeur constante.

C'est seulement si cette valeur constante peut être définie en un nombre fini de mots, que la fonction elle-même pourra l'être. Il n'est donc pas exact de dire que cette formule définit en un nombre fini de mots un ensemble de fonctions qui a la puissance du continu, c'est-à-dire la puissance de toutes les constantes possibles; cette formule permet de définir en un nombre fini de mots un ensemble de fonctions qui a même puissance que l'ensemble des constantes définissables en un nombre fini de mots, et ce dernier, d'après la démonstration de M. Richard est dénombrable.

La première critique de M. Schönflies ne tient donc pas debout; et ce que je viens de dire s'applique sans changement à tous ses autres exemples. Dans tous les cas qu'il cite, il définit un objet A comme ayant une relation B avec un autre objet C. Cette relation B ne suffit pas pour définir A; il faut définir également l'objet C; pour que A se trouve défini en un nombre fini de mots, il faut que non seulement B, mais encore C soient définis en un nombre fini de mots. Les autres critiques qui s'appuient sur la première, tombent évidemment du même coup.

2. Il n'en est pas moins vrai qu'on peut faire les réflexions suivantes. Il n'y a pas d'infini actuel; ce que nous appelons l'infini, c'est uniquement la possibilité de créer sans cesse de nouveaux objets, quelque nombreux que soient les objets déjà créés. Seulement ces nouveaux objets ne sont concevables eux-mêmes que s'ils sont susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots. Il en résulte qu'un ensemble, dont chaque élément ne peut pas être défini en un nombre fini de mots, est un pur néant; on n'en peut rien dire, ni rien penser.

C'est bien ainsi que pense M. Richard; et je signalerai en passant une très intéressante démonstration de l'axiome de Zermelo que ce savant vient de publier dans l'*Enseignement Mathématique* et où il s'exprime à ce sujet de la façon la plus nette.

Mais alors il n'y a pas d'autre ensemble que ceux dont tous les éléments sont définissables en un nombre fini de mots; et comme on peut leur appliquer la démonstration de M. Richard, il semble qu'on doive conclure que *tous* les ensembles sont dénombrables. Que signifie alors la distinction des puissances, et en quoi le continu diffère-t-il de l'ensemble des nombres entiers?

On peut démontrer cependant qu'il y a une différence et c'est en cela, au fond, que consiste l'antinomie Richard.

Il est impossible de trouver une formule définissant en un nombre fini de mots une relation entre un nombre réel et un nombre entier et qui soit telle que tout nombre réel définissable en un nombre fini de mots corresponde à un nombre entier en vertu de cette formule. Quelle que soit cette formule, on pourra toujours définir en un nombre fini de mots un nombre réel que cette formule ne fait correspondre à aucun nombre entier. Voilà ce que Cantor démontre et voilà ce qu'on entend quand on dit que la puissance du continu n'est pas celle de l'ensemble des entiers.

Comment cela s'accorde-t-il avec la démonstration de M. Richard qui nous enseigne que tout ensemble dont les éléments sont définissables en un nombre fini de mots est dénombrable? Considérons une formule F définissant une relation entre les divers entiers et divers nombres réels (qui se trouveront par là définis en un nombre fini de mots) l'ensemble E de ces nombres réels sera dénombrable. Nous pourrons ensuite définir d'autres nombres réels ne faisant pas partie de E; ces définitions ne contiendront qu'un nombre fini de mots mais parmi ces mots figurera le nom de l'ensemble E. Soit E' l'ensemble de ces nouveaux nombres réels. La démonstration de Cantor nous apprend que l'ensemble E' n'est pas nul et celle de Richard nous apprend que l'ensemble $E+E'$ est dénombrable. On pourra donc trouver une formule F' définissant une relation entre les divers entiers et les divers nombres de l'ensemble $E+E'$.

Mais alors on pourra de nouveau trouver d'autres nombres ne faisant pas partie de $E+E'$ et dont on pourra donner une définition ne contenant qu'un nombre fini de mots parmi lesquels les noms des ensembles E et E'. Ici encore l'ensemble E'' de ces nombres ne sera pas nul et il sera dénombrable. Et ainsi de suite.

3. Et alors dira-t-on; tous ces nombres, ceux de E, de E', de E'', ceux des ensembles suivants, sont tous définissables en un nombre fini de mots, de sorte qu'en vertu de la démonstration de Richard, il devrait exister une formule d'un nombre fini de mots qui permette de les dénombrer. C'est là l'antinomie dont M. Richard donne l'explication; on doit après avoir formé le tableau de tous les assemblages possibles de syllabes, rejeter ceux qui n'ont aucun sens ou qui ne définissent pas un nombre. Tant que l'ensemble E n'est pas défini, ceux de ces assemblages où figure le nom de cet ensemble sont dénués de sens et doivent

être rejetés. Quand on a défini l'ensemble E, ils prennent un sens et il faut les reprendre. La démonstration de M. Richard suppose au contraire que l'on fait ce triage d'un seul coup et sans s'y reprendre à plusieurs fois.

Je ne puis résister à la tentation de rappeler ici un exemple curieux cité par M. Russell et où l'on retrouve la même contradiction apparente, expliquée de la même manière, mais où l'on n'a pas à envisager l'infini, ce qui permet peut-être de mieux se rendre compte des faits. Quel est le plus petit nombre qui n'est pas susceptible d'être défini par une phrase formée de moins de cent mots français? Ce nombre existe-t-il?

Oui, car par une phrase formée de moins de cent mots français, on peut définir au plus n^{100} nombres, n étant le nombre des mots du dictionnaire français. On ne peut donc définir tous les nombres, et parmi ceux qui ne peuvent l'être il y en a certainement un qui est plus petit que tous les autres et qui est par là entièrement défini.

Non, car ce nombre s'il existait impliquerait contradiction; car il serait défini par une phrase de moins de cent mots, à savoir par la phrase même qui annonce qu'il ne peut pas l'être.

C'est que cette phrase tantôt a un sens, tantôt n'en a aucun, selon que tous les autres nombres ont été ou n'ont pas été préalablement définis.

4. J'arrive à la dernière objection de M. Schönflies (§ 9). M. Richard a tort de dire d'après lui que *toute* définition introduisant la notion de l'ensemble total Δ doit être rayée de son tableau. Et M. Schönflies cherche à le prouver par un exemple. Il considère une série de définitions G_1, G_2, ... et l'ensemble G de ces définitions. Aucune de ces définitions, excepté la définition G_r (*où r est un nombre impair*) n'introduit la notion de l'ensemble G. Quant à G_r, elle définit une fraction décimale δ_r en nous apprenant que la $\mu^{\text{ième}}$ décimale de δ_r dépend d'après une certaine loi de la $\mu^{\text{ième}}$ décimale de la fraction $\delta_{2\mu}$ définie par la définition $G_{2\mu}$. Donc dans la définition G_r figure la notion du $2^{\text{ième}}$ élément $G_{2\mu}$ de l'ensemble G, et par conséquent la notion de l'ensemble G. M. Richard la rayerait donc de son tableau, et cependant elle est exempte de contradiction et de cercle vicieux.

Cette objection est sans valeur. Et en effet nous pouvons définir l'ensemble G′ formé par les éléments d'ordre pair G_2, G_4, ...

Soit alors δ_r la fraction décimale dont la $\mu^{\text{ième}}$ décimale dépend d'après une certaine loi de la $\mu^{\text{ième}}$ décimale de la fraction $\delta_{2\mu}$ définie par le $\mu^{\text{ième}}$ élément $G_{2\mu}$ de l'ensemble G′.

Cette phrase que je puis appeler G'_r a même sens que la phrase G_r, mais elle n'introduit plus la notion de l'ensemble G, mais seulement celle de l'ensemble G'. Ces deux phrases figureront dans le tableau de M. Richard; mais G_r devra être effacée comme contenant la notion de G, tandis que G'_r qui est indépendante de cette notion devra être conservée. La fraction δ_r qui est définie aussi bien par G'_r que par G_r restera donc dans notre tableau des fractions δ_μ. Il n'y a donc là aucune difficulté.

5. Je vous envoie en même temps une Note de M. Zermelo. Cette Note n'a pu me convaincre et M. Zermelo ne s'en étonnera pas; puisqu'il signale lui-même que la définition de l'ensemble qu'il appelle M_0 est de celles que je ne regarde pas comme légitimes. Je sais que M. Zermelo doit exposer ses idées sur ce point dans un Mémoire plus étendu, mais ce Mémoire n'ayant pas encore été publié, il convient d'en attendre la publication pour apprécier ses raisons.

Je ne puis me faire pour le moment une idée de ces raisons que par les quelques lignes qui sont à la fin du paragraphe 3; et je vais tâcher de rétablir l'objection de M. Zermelo, sans, je l'espère, m'écarter de sa pensée.

Je veux démontrer qu'une équation algébrique $F = 0$ a toujours une racine; pour cela je remarque que $|F|$ est toujours positif et a par conséquent une limite inférieure ou minimum, qu'une fonction continue atteint toujours son minimum, et je démontre enfin que $|F|$ ne peut avoir d'autre minimum que zéro; j'en conclus qu'il y a un point pour lequel $|F| = 0$.

Dans cette démonstration on parle : 1° de l'ensemble E des valeurs de $|F|$; 2° de l'une de ces valeurs e qui est la plus petite de toutes celles de E; et 3° de la valeur correspondante de x. La définition de e où figure l'ensemble E est *non prédicative*, puisque la notion de E devrait être à la fois antérieure à celle de e dont la définition dépend de E et postérieure à celle de e qui est un élément de E. On ne pourrait donc rejeter l'emploi des définitions non prédicatives sans rejeter une démonstration admise par tous les mathématiciens.

Cela serait grave; heureusement il est aisé de remettre la démonstration sur ses pieds sans y laisser subsister de pétition de principe. Soit x la variable indépendante; soit y une valeur de x dont les parties réelle et imaginaire soient des nombres rationnels (je dirai pour abréger que y est une valeur rationnelle de x). Soit E' l'ensemble des valeurs que peut prendre $|F(y)|$. Soit e la limite inférieure, ou minimum des diverses valeurs de l'ensemble E'.

On démontre ensuite successivement qu'il y a une valeur de x non rationnelle en général et telle que $|F(x)| = e$, et que e ne peut être différent de zéro.

La pétition de principe a disparu puisque dans la définition de e figure seulement la notion de l'ensemble E' et que e ne fait pas en général partie de E'. Si l'on examine avec quelque attention les détails de la démonstration d'ailleurs bien connue, dont nous n'avons fait que rappeler les lignes générales, on reconnaîtra que c'en est bien là le véritable sens.

Plus généralement, si nous envisageons un ensemble E de nombres réels positifs, par exemple, on peut démontrer que cet ensemble possède une limite inférieure e; cette limite inférieure est définie *après* l'ensemble E; et il n'y a pas de pétition de principe puisque e ne fait pas en général partie de E. Dans certains cas particuliers, il peut arriver que e fasse partie de E. Dans ces cas particuliers, il n'y a pas non plus de pétition de principe puisque e ne fait pas partie de E *en vertu de sa définition*, mais par suite d'une démonstration postérieure à la fois à la définition de E et à celle de e.

La raison invoquée par M. Zermelo ne saurait donc suffire pour justifier l'emploi des définitions « non prédicatives », car l'assimilation qu'il fait est inexacte. M. Zermelo invoque également l'autorité de MM. Peano et Russell; je ferai seulement remarquer que M. Peano se borne à une affirmation qu'il ne justifie pas, et que M. Russell admet au contraire que les définitions non prédicatives ne sont pas légitimes en général (c'est même lui qui a employé le premier le mot de non prédicatif), mais qu'elles peuvent l'être à certaines conditions dont je n'ai pu comprendre l'énoncé.

ÜBER TRANSFINITE ZAHLEN

Sechs Vorträge über ausgewählte gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik, Fünfter Vortrag, p. 43-48 (27 avril 1909).

Meine Herren! Ich will heute über den Begriff der transfiniten Kardinalzahl vor Ihnen sprechen; und zwar will ich zunächst von einem *scheinbaren* Widerspruch reden, den dieser Begriff enthält. Dazu schicke ich folgendes voraus: meiner Ansicht nach ist ein Gegenstand nur dann denkbar, wenn er sich mit einer endlichen Anzahl von Worten definieren lässt. Einen Gegenstand, der in diesem Sinne endlich definierbar ist, will ich zur Abkürzung einfach ,,definierbar" nennen. Demnach ist also ein nicht definierbarer Gegenstand auch undenkbar. Desgleichen will ich ein Gesetz ,,aussagbar" nennen, wenn es in einer endlichen Anzahl von Worten ausgesagt werden kann.

Herr Richard hat nun bewiesen, dass die Gesamtheit der definierbaren Gegenstände abzählbar ist, d. h. dass die Kardinalzahl dieser Gesamtheit $\aleph_0$ ist. Der Beweis ist ganz einfach: sei α die Anzahl der Wörter des Wörterbuches, dann kann man mit n Wörtern höchstens α^n Gegenstände definieren. Lässt man nun n über alle Grenzen wachsen, so sieht man, dass man nie über eine abzählbare Gesamtheit hinauskommt. Die Mächtigkeit der Menge der denkbaren Gegenstände wäre also $\aleph_0$. Herr Schoenflies hat gegen diesen Beweis eingewandt, dass man mit einer einzigen Definition mehrere, ja sogar unendlich viele Gegenstände definieren könne. Als Beispiel führt er die Definition der konstanten Funktionen an, deren es offenbar unendlich viele gibt. Dieser Einwand ist deshalb unzulässig, weil durch solche Definitionen gar nicht die einzelnen Gegenstände, sondern ihre Gesamtheit, in unserem Beispiel also die *Menge* der konstanten Funktionen definiert wird, und diese ist ein einziger Gegenstand. Der Einwand von Herrn Schoenflies ist also nicht stichhaltig.

Nun hat bekanntlich Cantor bewiesen, dass das Kontinuum nicht abzählbar ist; dies widerspricht dem Beweise von Richard. Es fragt sich also, welcher von beiden Beweisen richtig ist. Ich behaupte, sie sind beide richtig, und der Widerspruch ist nur ein scheinbarer. Zur Begründung dieser Behauptung will ich einen neuen Beweis für den Cantorschen Satz geben : Wir nehmen also an, es sei eine Strecke AB gegeben und ein Gesetz, durch welches jedem Punkte der Strecke eine ganze Zahl zugeordnet wird. Wir wollen der Einfachheit halber die Punkte durch die ihnen zugeordneten Zahlen bezeichnen. Wir teilen nun unsere Strecke durch zwei beliebige Punkte A_1 und A_2 in drei Teile, die wir als Unterstrecken 1. Stufe bezeichnen; diese teilen wir wieder in je drei Teile und erhalten Unterstrecken 2. Stufe; dieses Verfahren denken wir uns ins Unendliche fortgesetzt, wobei die Länge der Unterstrecken unter jede Grenze sinken soll. Der Punkt 1 gehört nun einer oder höchstens, wenn er mit A_1 oder A_2 zusammenfällt, zweien der Unterstrecken erster Stufe an, es gibt also sicher eine, der er nicht angehört. Auf dieser suchen wir den Punkt mit der niedrigsten Nummer, die nun mindestens 2 sein muss, auf. Unter den 3 Unterstrecken 2. Stufe, die zu derjenigen Strecke 1. Stufe gehören, auf der wir uns befinden, ist nun wieder mindestens eine, der der zuletzt betrachtete Punkt nicht angehört. Auf dieser setzen wir das Verfahren fort und erhalten so eine Folge von Strecken, die folgende Eigenschaften hat : jede von ihnen ist in allen vorhergehenden enthalten, und eine Strecke n^{ter} Stufe enthält keinen der Punkte 1 bis $n-1$. Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass es mindestens einen Punkt geben muss, der ihnen allen gemeinsam ist; aus der zweiten Eigenschaft folgt aber, dass die Nummer dieses Punktes grösser sein muss als jede endliche Zahl, d. h. es kann ihm keine Zahl zugeordnet werden.

Was haben wir nun zu diesem Beweise vorausgesetzt? Wir haben ein Gesetz vorausgesetzt, das jedem Punkte der Strecke eine ganze Zahl zuordnet. Dann konnten wir einen Punkt definieren, dem keine ganze Zahl zugeordnet ist. In dieser Hinsicht unterscheiden sich die verschiedenen Beweise dieses Satzes nicht. Dazu musste aber das Gesetz zuerst feststehen. Nach Richard müsste anscheinend ein solches Gesetz existieren, aber Cantor hat das Gegenteil bewiesen. Wie kommen wir aus diesem Dilemma heraus? Fragen wir einmal nach der Bedeutung des Wortes „definierbar“. Wir nehmen die Tafel aller endlichen Sätze und streichen daraus alle diejenigen, die keinen

Punkt definieren. Die Uebrigbleibenden ordnen wir den ganzen Zahlen zu. Wenn wir jetzt die Durchmusterung der Tafel von neuem vornehmen, so wird es sich im allgemeinen zeigen, dass wir jetzt einige Sätze stehen lassen müssen, die wir vorher gestrichen haben. Denn die Sätze, in welchen man von dem Zuordnungsgesetz selbst sprach, hatten früher keine Bedeutung, da die Punkte den ganzen Zahlen noch nicht zugeordnet waren. Diese Sätze haben jetzt eine Bedeutung, und müssen in unserer Tafel bleiben. Würden wir jetzt ein neues Zuordnungsgesetz aufstellen, so würde sich dieselbe Schwierigkeit wiederholen und so ad infinitum. Hierin liegt aber die Lösung des scheinbaren Widerspruchs zwischen Cantor und Richard. Sei M_0 die Menge der ganzen Zahlen, M_1 die Menge der nach der ersten Durchmusterung der Tafel aller endlichen Sätze definierbaren Punkte unserer Strecke, G_1 das Gesetz der Zuordnung zwischen beiden Mengen. Durch dieses Gesetz kommt eine neue Menge M_2 von Punkten als definierbar hinzu. Zu $M_1 + M_2$ gehört aber ein neues Gesetz G_2, dadurch entsteht eine neue Menge M_3 usw. Richards Beweis lehrt nun, dass, wo ich auch das Verfahren abbreche, immer ein Gesetz existiert, während Cantor beweist, dass das Verfahren beliebig weit fortgesetzt werden kann. Es besteht also kein Widerspruch zwischen beiden.

Der Schein eines solchen rührt daher, dass dem Zuordnungsgesetz von Richard eine Eigenschaft fehlt, die ich mit einem von den englischen Philosophen entlehnten Ausdruck als „prädikativ“ bezeichne. (Bei Russell, dem ich das Wort entlehne, ist eine Definition zweier Begriffe A und A′ nicht prädikativ, wenn A in der Definition von A′ und umgekehrt vorkommt). Ich verstehe darunter folgendes: Jedes Zuordnungsgesetz setzt eine bestimmte Klassifikation voraus. Ich nenne nun eine Zuordnung prädikativ, wenn die zugehörige Klassifikation prädikativ ist. Eine Klassifikation aber nenne ich prädikativ, wenn sie durch Einführung neuer Elemente nicht verändert wird. Dies ist aber bei der Richardschen nicht der Fall, vielmehr ändert die Einführung des Zuordnungsgesetzes die Einteilung der Sätze in solche, die eine Bedeutung haben, und solche, die keine haben. Was hier mit dem Wort „prädikativ“ gemeint ist, lässt sich am besten an einem Beispiel illustrieren: wenn ich eine Menge von Gegenständen in eine Anzahl von Schachteln einordnen soll, so kann zweierlei eintreten: entweder sind die bereits eingeordneten Gegenstände endgültig an ihrem Platze, oder ich muss jedesmal, wenn ich einen neuen Gegenstand einordne, die anderen oder wenigstens einen Teil von ihnen wieder herausnehmen. Im ersten Falle nenne ich die Klassifikation prädikativ, im zweiten nicht. Ein gutes Beispiel für eine nicht prädikative Definition hat Russell gegeben : A sei die kleinste ganze Zahl, deren Definition mehr als hundert deutsche Worte erfordert. A muss existieren, da man mit hundert Worten jedenfalls nur eine endliche Anzahl von Zahlen definieren kann. Die Definition, die wir eben von dieser Zahl gegeben haben, enthält aber weniger als hundert Worte. Und die Zahl A ist also *definiert* als *undefinierbar*.

Zermelo hat nun gegen die Verwerfung der nicht prädikativen Definitionen den Einwand erhoben, dass damit auch ein grosser Teil der Mathematik hinfällig würde, z. B. der Beweis für die Existenz einer Wurzel einer algebraischen Gleichung.

Dieser Beweis lautet bekanntlich folgendermassen :

Gegeben ist eine Gleichung $F(x) = 0$. Man beweist nun, dass $|F(x)|$ ein Minimum haben muss; sei x_0 einer der Argumentwerte, für den das Minimum eintritt, also

$$|F(x)| \geqq |F(x_0)|.$$

Daraus folgt dann weiter, dass $F(x_0) = 0$ ist. Hier ist nun die Definition von $F(x_0)$ nicht prädikativ, denn dieser Wert hängt ab von der Gesamtheit der Werte von $F(x)$, zu denen er selbst gehört.

Die Berechtigung dieses Einwandes kann ich nicht zugeben. Man kann den Beweis so umformen, dass die nicht prädikative Definition daraus verschwindet. Ich betrachte zu diesem Zwecke die Gesamtheit der Argumente von der Form $\frac{m+ni}{p}$, wo m, n, p ganze Zahlen sind. Dann kann ich dieselben Schlüsse wie vorher ziehen, aber der Argumentwert, für den das Minimum von $|F(x)|$ eintritt, gehört im allgemeinen nicht zu den betrachteten. Dadurch ist der Zirkel im Beweise vermieden. Man kann von jedem mathematischen Beweise verlangen, dass die darin vorkommenden Definitionen usw. prädikativ sind, sonst wäre der Beweis nicht streng.

Wie steht es nun mit dem klassischen Beweise des Bernsteinschen Theorems? Ist er einwandfrei? Das Theorem sagt bekanntlich aus, dass, wenn drei Mengen A, B, C gegeben sind, wo A in B und B in C enthalten ist, und wenn A äquivalent C ist, auch A äquivalent B sein muss. Es handelt sich also auch hier um ein Zuordnungsgesetz. Wenn das erste Zuordnungsgesetz (zwischen A und C prädikativ ist, so zeigt der Beweis, dass es auch ein prädikatives Zuordnungsgesetz zwischen A und B geben muss.

Was nun die zweite transfinite Kardinalzahl $\aleph_1$ betrifft, so bin ich nicht ganz überzeugt, dass sie existiert. Man gelangt zu ihr durch Betrachtung der Gesamtheit der Ordnungszahlen von der Mächtigkeit $\aleph_0$; es ist klar, dass diese Gesamtheit von höherer Mächtigkeit sein muss. Es fragt sich aber, ob sie abgeschlossen ist, ob wir also von ihrer Mächtigkeit ohne Widerspruch sprechen dürfen. Ein aktual Unendliches gibt es jedenfalls nicht.

Was haben wir von dem berühmten *Kontinuumproblem* zu halten? Kann man die Punkte des Raumes wohlordnen? Was meinen wir damit? Es sind hier zwei Fälle möglich : entweder behauptet man, dass das Gesetz der Wohlordnung endlich aussagbar ist, dann ist diese Behauptung nicht bewiesen; auch Herr Zermelo erhebt wohl nicht den Anspruch, eine solche Behauptung bewiesen zu haben. Oder aber wir lassen auch die Möglichkeit zu, dass das Gesetz nicht endlich aussagbar ist. Dann kann ich mit dieser Aussage keinen Sinn mehr verbinden, das sind für mich nur leere Worte. Hier liegt die Schwierigkeit. Und das ist wohl auch die Ursache für den Streit über den fast genialen Satz Zermelos. Dieser Streit ist sehr merkwürdig : die einen verwerfen das Auswahlpostulat, halten aber den Beweis für richtig, die anderen nehmen das Auswahlpostulat an, erkennen aber den Beweis für richtig, die anderen nehmen das Auswahlpostulat an, erkennen aber den Beweis nicht an.

Doch in könnte noch manche Stunde darüber sprechen, ohne die Frage zu lösen.

LA NOTATION DIFFÉRENTIELLE ET L'ENSEIGNEMENT

L'Enseignement mathématique, t. 1, p. 106-110 (15 mars 1899).

Dans un article très intéressant de M. H. Laurent [1] sur les mathématiques spéciales en France, je lis la phrase suivante. « Ce n'est pas, je pense, ici qu'il convient de montrer combien la notation différentielle est plus commode que celle des dérivées; c'est aux gens compétents que je m'adresse et non à des élèves, et je pense que personne ne contestera la haute portée philosophique de la doctrine différentielle. »

Je ne dirai pas que j'ai lu cette phrase avec étonnement; car elle exprime une opinion assez répandue; mais, en ce qui me concerne, je conteste absolument les avantages de la notation différentielle et je crois qu'on ne doit l'enseigner aux débutants que quand ils sont déjà familiarisés avec la notation des dérivées.

La notation de Leibniz, dit M. Laurent, est plus commode que celle de Lagrange. Pourquoi plus commode? J'en cherche les raisons et je n'en trouve que deux :

1° Si on emploie les accents pour représenter les dérivées, on sera privé de cette ressource pour distinguer les unes des autres des quantités analogues, mais différentes; on ne pourra plus dire, par exemple : soient x, y, z, et x', y', z', deux points dans l'espace;

2° Pour faire connaître la variable par rapport à laquelle on différentie, il faut affecter les lettres d'indices qui peuvent devenir gênants pour le typographe si la lettre porte déjà d'autres indices pour une autre cause.

(1) Voir *l'Enseignement mathématique*, n° 1, p. 38.

Ce sont là des inconvénients tout matériels, tout extérieurs et qui peuvent être compensés par des avantages de même ordre, tel que le suivant :

Je veux représenter la valeur que prend la dérivée de $f(x)$ pour $x = 0$; je n'ai aucun moyen de le faire avec la notation de Leibniz; avec celle de Lagrange je n'ai qu'à écrire $f'(0)$.

Mais, dira-t-on, c'est là prendre la question par le petit côté. Que sont ces considérations purement matérielles auprès de la haute portée philosophique d'une notation qui rappelle à chaque instant la définition, le sens profond des quantités que l'on a à manier?

Hélas, elle ne les rappelle que trop, et il vaudrait mieux les rappeler moins que de les rappeler imparfaitement. Neuf fois sur dix, on n'évitera les erreurs qu'en tâchant d'oublier la signification primitive de ces symboles; c'est ce que je vais montrer bientôt.

Quant à moi, j'emploie d'ordinaire la notation différentielle, d'abord parce que c'est la langue que parlent la plupart de mes contemporains et ensuite à cause des petites raisons matérielles que j'ai exposées plus haut. Mais si j'écris en différentielles, le plus souvent je pense en dérivées.

J'ai dit que la notation différentielle est imparfaite et nous expose à l'erreur; c'est ce qu'il me reste à démontrer.

Tout va bien quand on se borne aux différentielles du premier ordre et quand il n'y a qu'une variable indépendante. Oh alors, j'approuve sans réserve tout ce qu'on peut dire au sujet de la portée philosophique du symbole leibnizien et de ses avantages.

Mais, dès que l'on passe aux dérivées du second ordre, on nage dans l'absurdité; soit z une fonction d'une variable y qui est elle-même fonction de x; j'écris

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Dans cette formule j'écris deux fois $d^2 z$, et ce symbole a deux significations différentes. Dans le second membre, il signifie que si je donne à y deux accroissements successifs *égaux*, la fonction z subit deux accroissements successifs dz et $dz + d^2 z$. Dans le premier, il signifie que si je donne à x deux accroissements successifs égaux, d'où résultent pour y deux accroissements successifs *inégaux*, la fonction z subit deux accroissements successifs dz et $dz + d^2 z$.

La difficulté s'aggrave si l'on a plusieurs variables indépendantes ; j'écris

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

Là encore nous avons trois fois le symbole dz avec trois significations différentes. La première fois dz représente l'accroissement subi par z quand x et y se changent en $x + dx$ et $y + dy$; la seconde fois l'accroissement de z quand x et y se changent en $x+dx$ et y ; la troisième fois l'accroissement de z quand x et y se changent en x et $y + dy$.

Que de pièges à éviter ! Aussi les débutants ne les évitent-ils pas. J'ai vu un élève intelligent et déjà avancé exposer comme il suit la théorie de la vitesse du son, en masquant seulement par quelques artifices ce que sa démonstration avait de choquant.

Nous avons à intégrer l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 z}{dx^2};$$

je divise par $d^2 z$ et je multiplie par dx^2 ; j'ai

$$\frac{dx^2}{dt^2} = a^2,$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = \pm a,$$

ce qui prouve que le son peut se propager dans les deux sens avec la vitesse a.

« C'est singulier, répondait l'examinateur, excellent physicien que je ne veux pas nommer ; votre démonstration est bien plus simple que toutes celles que je connaissais » ; et il lui donna la note 19.

Si je voulais être méchant, il ne serait pas difficile de trouver des erreurs analogues dans des livres imprimés.

L'emploi des ∂ ronds est un palliatif insuffisant. Ce n'est pas deux formes de d qu'il faudrait, il en faudrait cinq, il en faudrait dix.

Pourquoi en somme est-on peu choqué de ces anomalies, pourquoi engendrent-elles relativement peu d'erreurs ? C'est parce qu'on oublie l'origine de ces notations, qu'on ne considère pas $\frac{d^2 z}{dx^2}$ comme le quotient de deux quantités $d^2 z$ et dx^2 envisagées séparément, mais qu'on regarde au contraire cette fraction comme un *bloc*, comme la dérivée seconde de z par rapport à x. C'est en un mot *parce qu'on pense en dérivées*.

Il faut donc apprendre à penser en dérivées ; quand on aura pris cette habitude on pourra sans danger se servir de la notation leibnizienne. Il est clair que le meilleur moyen de donner cette habitude aux élèves, c'est de leur enseigner d'abord la notation de Lagrange. Quand ils seront familiarisés avec ce langage, quand ils s'en seront servis dans de nombreux exercices, quand ils sauront faire un changement de variables, on pourra sans inconvénient leur parler de la notation de Leibniz. Jusque-là on doit s'en abstenir, ou tout au moins se borner aux *différentielles du premier ordre et seulement dans le cas où il n'y a qu'une variable indépendante.*

Si au contraire dès le début on veut leur apprendre à faire des changements de variables avec la notation de Leibniz, ils ne sauront jamais les faire correctement.

Je ne veux pas dire qu'il ne faut pas, *plus tard*, leur enseigner la notation différentielle; ils faut qu'ils puissent manier ce langage qui est usité par tout le monde, de même qu'il faut savoir l'allemand, bien que cette langue ait des règles de construction ridicules et un alphabet qui n'a pas de sens commun, parce qu'elle est parlée par soixante millions d'hommes dont beaucoup sont des savants.

Il est un cas cependant où la notation différentielle reprend tous ses avantages, où ses inconvénients disparaissent, et où l'on ne peut lui refuser une haute valeur philosophique et éducative. C'est celui où l'on n'envisage que des différentielles du premier ordre et avec une seule variable indépendante. Il peut être utile de se familiariser de bonne heure avec cette notion, d'apprendre ainsi à raisonner correctement sur les infiniment petits. On comprendra ainsi facilement la théorie des petites erreurs, si importante pour la pratique.

En résumé, en mathématiques spéciales, on doit employer presque exclusivement la notation de Lagrange; on fera connaître aux élèves les différentielles premières, en insistant surtout sur le cas où il n'y a qu'une variable indépendante. Si l'on aborde le cas où il y en a plusieurs, on se servira exclusivement de la notation de Lagrange pour les dérivées partielles; on n'écrira jamais

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

mais

$$df = f'_x\,dx + f'_y\,dy.$$

On s'abstiendra absolument de parler des différentielles secondes.

A l'École polytechnique et dans les Facultés, on enseignera la notation différentielle et on l'emploiera de préférence.

LA LOGIQUE ET L'INTUITION

DANS

LA SCIENCE MATHÉMATIQUE ET DANS L'ENSEIGNEMENT

L'enseignement mathématique, t. I, p. 157-162 (15 mai 1889).

Pour bien faire comprendre la question que je vais traiter et qui est à mes yeux d'une importance capitale pour l'enseignement mathématique, il faut que je jette un petit coup d'œil rétrospectif sur l'histoire du développement de la science.

Si nous lisons un livre écrit il y a cinquante ans, la plupart des raisonnements que nous y trouverons nous sembleront dépourvus de rigueur.

On admettait à cette époque qu'une fonction continue ne peut pas changer de signe sans s'annuler; on le démontre aujourd'hui; on admettait que les règles ordinaires du calcul sont applicables aux nombres incommensurables; on le démontre aujourd'hui. On admettait bien d'autres choses qui quelquefois étaient fausses.

Nous voyons donc qu'on a marché vers la rigueur; j'ajouterai qu'on l'a atteinte et que nos raisonnements ne paraîtront pas ridicules à nos descendants; je veux parler, bien entendu, de ceux de nos raisonnements qui nous satisfont.

Mais comment a-t-on atteint la rigueur? C'est en restreignant de plus en plus la part de l'intuition dans la science, et en faisant plus grande celle de la logique formelle. Autrefois, on partait d'un grand nombre de notions, regardées comme primitives, irréductibles et intuitives; telles étaient celles de nombre entier, de fraction, de grandeur continue, d'espace, de point, de ligne, de surface, etc. Aujourd'hui une seule subsiste, celle du nombre entier; toutes les autres n'en sont que des combinaisons, et à ce prix on atteint la rigueur parfaite.

Nos pères inscrivaient dans une aire plane une série de rectangles, et obtenaient comme limite de la somme de ces rectangles une intégrale qui représentait cette aire plane. En effet, disaient-ils, la différence entre la surface cherchée et la somme tend vers zéro ; car on peut la rendre plus petite que toute quantité donnée. Ils faisaient ce raisonnement sans scrupule, parce qu'ils croyaient savoir ce que c'est qu'une surface. Nous, au contraire, ce raisonnement ne nous satisfait plus, parce que nous savons qu'on ne sait pas ces choses-là en naissant, qu'on ne peut savoir ce que c'est qu'une surface que quand on sait le calcul intégral. Nous ne démontrons plus que la surface est égale à l'intégrale, mais nous considérons l'intégrale comme la définition de la surface. Cette notion de surface, autrefois fondée sur l'intuition, ne nous paraît plus légitime par elle-même.

D'autre part, les notions mathématiques n'ont acquis cette pureté parfaite qu'en s'éloignant de la réalité. On peut parcourir tout le domaine mathématique sans rencontrer aucun des obstacles qui le hérissaient autrefois ; mais ces obstacles n'ont pas disparu, ils ont seulement été transportés à la frontière ; et l'on aura à les vaincre de nouveau si l'on veut franchir cette frontière pour entrer dans le domaine de la pratique.

On possédait une notion plus ou moins vague, formée d'éléments disparates, les uns *a priori*, les autres fournis par la généralisation de données d'expériences ; on croyait connaître par intuition ses principales propriétés. Aujourd'hui on rejette tous les éléments empiriques, on ne conserve que les éléments *a priori*; on prend l'une des propriétés pour définition et on en déduit toutes les autres par un raisonnement rigoureux. Mais il reste à prouver que la propriété qui sert de définition appartient en effet aux objets réels, que nous connaissions par l'expérience, et d'où nous déduisions autrefois la notion intuitive par une généralisation inconsciente. C'est ce que M. Milhaud a fort bien mis en évidence dans la thèse qu'il a soutenue devant la Faculté des Lettres de Paris.

Voilà dans quel sens la science a évolué depuis un demi-siècle.

C'est alors qu'on vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivées, etc. Bien plus, au point de vue logique, ce sont ces fonctions étranges qui sont les plus générales ; au contraire, celles qu'on rencontre sans les avoir cherchées, et qui suivent des lois simples, n'apparaissent plus que comme un cas très particulier ; il ne leur reste plus qu'un tout petit coin.

Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela.

Or, si la logique doit être notre seul guide dans les questions d'enseignement, c'est évidemment par les fonctions les plus bizarres qu'il faut commencer. C'est le débutant qu'il faut d'abord familiariser avec ce musée tératologique. Faute de l'avoir fait, on n'atteindra jamais la rigueur, ou on ne l'atteindra que par étapes.

Voilà à quoi la logique absolue voudrait nous condamner; devons-nous lui faire ce sacrifice? Telle est la question à laquelle, pour mon compte, je n'hésite pas à répondre non.

Sans doute il est dur pour un maître d'enseigner un raisonnement qui ne le satisfait pas entièrement; et ce ne sera à ses yeux qu'un palliatif insuffisant de dire : nous admettons que, ou : il arrive souvent que, au lieu de dire : il est évident que.

Mais la satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseignement, et l'on doit se préoccuper avant tout de ce qu'est l'esprit de l'élève et de ce qu'on veut qu'il devienne.

Les zoologistes prétendent que le développement embryonnaire d'un animal résume en un temps très court toute l'histoire de ses ancêtres des époques géologiques. Il semble qu'il en est de même du développement des esprits. La tâche de l'éducateur est de faire repasser l'esprit de l'enfant par où a passé celui de ses pères, en passant rapidement par certaines étapes mais en n'en supprimant aucune. A ce compte, l'histoire de la science doit être notre guide.

Quand un élève commence sérieusement à étudier les mathématiques, il croit savoir ce que c'est qu'une fraction, ce que c'est que la continuité, ce que c'est que l'aire d'une surface courbe; il considère comme évident, par exemple, qu'une fonction continue ne peut changer de signe sans s'annuler. Si, sans autre préparation, vous venez lui dire : Non, tout cela n'est pas évident, il faut que je vous le démontre; et si dans la démonstration vous appuyez sur des prémisses qui ne lui semblent pas plus évidentes que la conclusion, que pensera ce malheureux? Il pensera que la science mathématique n'est qu'un entassement arbitraire de subtilités inutiles; ou bien il s'en dégoûtera, ou bien il s'en amusera comme d'un jeu et il arrivera à un état d'esprit analogue à celui des sophistes grecs.

Au contraire, quand il sera plus avancé, quand il se sera familiarisé avec le raisonnement mathématique et que son esprit se sera mûri par cette fréquentation même, les doutes naîtront d'eux-mêmes, et alors votre démonstration sera la bienvenue. Elle en éveillera de nouveaux, et les questions se poseront successivement à l'enfant, comme elles se sont posées successivement à nos pères, jusqu'à ce que la rigueur parfaite puisse seule le satisfaire. Il ne suffit pas de douter de tout, il faut savoir pourquoi l'on doute.

Ce n'est pas tout; j'ai dit qu'au point de vue de la pure logique, il ne reste plus qu'une notion irréductible, celle du nombre entier, et que toutes les autres n'en sont que des combinaisons. Mais des combinaisons pareilles, on en peut imaginer des milliers; pourquoi celles-là plutôt que d'autres? Le choix ne s'explique que par le souvenir de la notion intuitive dont cette combinaison a pris la place; et si ce souvenir même fait défaut, le choix semblera injustifié. Or, pour comprendre une théorie, il ne suffit pas de constater que le chemin que l'on a suivi n'est pas coupé par un obstacle, il faut se rendre compte des raisons qui l'ont fait choisir. Pourra-t-on donc jamais dire qu'on comprend une théorie si on veut lui donner d'emblée sa forme définitive, celle que la logique impeccable lui impose, sans qu'il reste aucune trace des tâtonnements qui y ont conduit? Non, on ne la comprendra pas réellement, on ne pourra même la retenir, ou on ne la retiendra qu'à force de l'apprendre par cœur.

Le but principal de l'enseignement mathématique est de développer certaines facultés de l'esprit, et parmi elles l'intuition n'est pas la moins précieuse. C'est par elle que le monde mathématique reste en contact avec le monde réel; et quand même les mathématiques pures pourraient s'en passer, il faudrait toujours y avoir recours pour combler l'abîme qui sépare le symbole de la réalité. Le praticien en aura donc toujours besoin, et pour un géomètre pur il doit y avoir cent praticiens.

Mais pour le géomètre pur lui-même, cette faculté est nécessaire; c'est par la logique qu'on démontre, mais c'est par l'intuition qu'on invente; et il ne suffit pas d'être à même de critiquer les théorèmes des autres, il faut en inventer de nouveaux. Il ne suffit pas de savoir faire des combinaisons correctes, il faut posséder l'art de choisir entre toutes les combinaisons possibles. Cet art, j'ai dit plus haut pourquoi, c'est l'intuition qui nous l'apprend. Sans elle le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées.

Or, comment cette faculté se développerait-elle si dès qu'elle se montre, on la pourchasse et on la proscrit, si on apprend à s'en défier avant de savoir ce qu'on en peut tirer de bon?

Mais l'art de raisonner juste n'est-il pas aussi une qualité précieuse, que le professeur de mathématiques doit avant tout cultiver? Je n'ai garde de l'oublier, et on doit s'en préoccuper avant tout dès le début; mais on a assez d'occasions d'exercer les élèves au raisonnement correct, dans les parties des mathématiques où les inconvénients que j'ai signalés ne se présentent pas. On a de longs enchaînements de théorèmes où la logique absolue a régné du premier coup et pour ainsi dire tout naturellement, qui ont par conséquent conservé la forme que les premiers géomètres leur avait donnée.

Ce qu'il faut éviter seulement, c'est de chercher la petite bête dans l'exposition des premiers principes. Cela n'empêche pas d'apprendre à raisonner juste, pourvu que l'on ait soin de ne pas donner aux élèves des idées fausses. Quelquefois il faudra pour cela beaucoup de tact de la part du maître; souvent il lui suffira, comme je l'expliquais plus haut, de dire : nous admettrons que, au lieu de dire : il est évident que.

Parmi les jeunes gens qui reçoivent une éducation mathématique complète, les uns doivent devenir des ingénieurs; ils apprennent la Géométrie pour s'en servir; il faut avant tout qu'ils apprennent à bien voir et à voir vite; c'est de l'intuition qu'ils ont besoin d'abord. Les autres, moins nombreux, doivent à leur tour devenir des maîtres; il faut donc qu'ils aillent jusqu'au fond; une connaissance approfondie et rigoureuse des premiers principes leur est avant tout indispensable. Mais ce n'est pas une raison pour ne pas cultiver chez eux l'intuition, car ils se feraient une idée fausse de la science s'ils ne la regardaient jamais que d'un seul côté, et d'ailleurs ils ne pourraient développer chez leurs élèves une qualité qu'ils ne posséderaient pas eux-mêmes.

J'ai écrit un bien long article sur une question bien abstraite et bien générale. Pour que le lecteur me le pardonne, je vais énoncer quelques conclusions précises.

En spéciales et dans la première année d'École Polytechnique, on ne parlera pas des fonctions sans dérivées, on n'en parlera que pour dire : il peut y en avoir, mais nous ne nous en occuperons pas.

La première fois qu'on parlera aux élèves des intégrales, il faudra les définir par les surfaces et ce n'est que quand ils auront pris beaucoup d'intégrales qu'on leur donnera la définition rigoureuse.

NOTES

Dans les tomes I à X des *Œuvres de Henri Poincaré* a été inséré l'ensemble des articles, notes, mémoires, à caractère scientifique et classés par Ernest Lebon dans sa *Bibliographie analytique des écrits de Henri Poincaré* dans les sections Analyse mathématique, Mécanique analytique et Mécanique céleste, Physique mathématique. Figurent reproduits ci-dessus dans la première partie du tome XI quelques textes parmi les plus importants des publications de Henri Poincaré classés dans la *Bibliographie* d'E. Lebon dans les sections Philosophie scientifique (articles, discours, conférences), Histoire des Sciences (discours nécrologiques, articles et notices nécrologiques, discours, rapports, articles, préfaces, analyses), Publications diverses (notes, articles, conférences, discours, rapports, préfaces, analyses). Nous y avons ajouté en outre les correspondances entre Henri Poincaré et Mittag-Leffler, L. Fuchs et F. Klein publiées dans les tomes 38 et 39 des *Acta mathematica.*

La *Bibliographie* d'Ernest Lebon mentionne donc un grand nombre d'écrits, qui ne seront pas insérés dans les œuvres scientifiques. Parmi ceux-ci nous signalerons notamment l'importante série d'articles publiés par Henri Poincaré dans la *Revue de Métaphysique et Morale.* Toutefois ceux-ci ont pour la plupart été réinsérés sans modification par Henri Poincaré dans ses Ouvrages de Philosophie scientifique. Citons : *Le continu mathématique* (*Rev. Mét. Mor.*, t. 1, 1893, p. 26-34) dans *La Science et l'hypothèse* (chap. 2) ; *Sur la Nature du raisonnement mathématique* (*ibid.*, t. 2, 1894, p. 371-384) dans *La Science et l'hypothèse* (chap. 1) ; *L'espace et la géométrie* (*ibid.*, t. 3, 1894, p. 631-646) dans *La Science et l'hypothèse* (chap. 4) ; *La mesure du temps* (*ibid.*, t. 6, 1898, p. 1-13) dans *La valeur de la Science* (chap. 2) ; *Sur la valeur objective de la Science* (*ibid.*, t. 10, 1902, p. 263-293) dans *La valeur de la Science* (chap. 11) ; *L'espace et ses trois dimensions* (*ibid.*, t. 11, 1903, p. 281-301 et 407-409) dans *La valeur de la Science* (chap. 4) ; *Les Mathématiques et la Logique* (*ibid.*, t. 13, 1905, p. 815-835 et t. 14, 1906, p. 17-34 et 294-317) dans *Science et Méthode* (chap. 3); *La logique de l'infini* (*ibid.*, t. 17, 1909, p. 461-482) dans *Dernières pensées* (chap. 4). De même la célèbre conférence de Henri Poincaré au Congrès international des Mathématiciens tenu à Zürich en 1897, *Sur les rapports* de l'*Analyse pure et de la Physique mathématique* (*Acta Math.*, t. 21, 1897, p. 331-341) a été réinsérée par H. Poincaré dans *La valeur de la Science* (p. 136-155) et l'adresse de Henri Poincaré à la Section de Mathématiques du Congrès international d'Arts et de Science de l'Exposition universelle de Saint-Louis : *L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 28, 1re partie, 1904, p. 302-324) a été republiée dans *La valeur de la Science* (p. 170-211).

HOMMAGES

A HENRI POINCARÉ

HENRI POINCARÉ,

EN MATHÉMATIQUES SPÉCIALES A NANCY

PAR P. APPELL

(*Lettre à M. Mittag-Leffler.*)

Acta Mathematica, t. 38, p. 189-195 (1921).

Vous me demandez, mon cher ami, de vous raconter mes souvenirs de Collège sur Henri Poincaré. Je vais tâcher de le faire, le plus simplement possible, avec le seul souci de la sincérité et de la vérité, sans me laisser dominer par l'émotion que soulève en moi l'évocation de ces années de jeunesse, à la fois si lointaines et si proches, où naquit entre Poincaré et moi une amitié profonde, chaque jour accrue, si cruellement brisée.

C'est en octobre 1872 que je le vis pour la première fois.

Après les fêtes de Pâques, ma mère m'avait envoyé de Strasbourg à Nancy, pour suivre la classe préparatoire à l'École Polytechnique. Je tombai, jeune écolier inexpérimenté, dans la classe de M. Pruvost, qui voulut bien m'admettre, quoique les cours fussent très avancés, et qui me donna des conseils dont je lui garde une grande reconnaissance. A la rentrée d'octobre, la classe de spéciales fut confiée à un jeune agrégé des plus distingués, Elliot (1), mathématicien de valeur qui eut la plus heureuse influence sur tous les élèves.

(1) Elliot, élève de la promotion de 1866 à l'École Normale, agrégé en 1869, docteur en 1876 après soutenance d'une thèse : *Détermination du nombre des intégrales abéliennes de première espèce* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 2e série, t. 4); collaborateur des *Acta;* mort en 1894, étant professeur à la Faculté des Sciences de Besançon. Je tiens de M. le Recteur Liard le fait suivant : pendant les vacances de Pâques en 1873, Elliot, rencontrant à Paris son camarade Liard, lui dit « J'ai dans ma classe un élève qui est un monstre de mathématiques »; il parlait de Poincaré (P.A.).

Dès la première classe, un de mes camarades me dit, en montrant Poincaré : « voilà un type très fort, il vient d'être reçu second à l'École Forestière, il a remporté le premier prix de mathématiques élémentaires au concours général, il a résolu tout seul l'année dernière le problème donné à l'École Polytechnique ».

La physionomie de Poincaré me frappa : il n'avait pas, à première vue, le type ordinaire de l'élève intelligent : il était comme absorbé dans ses pensées intérieures, avec des yeux en quelque sorte voilés par la réflexion : quand il parlait, ses yeux s'animaient d'une expression de bonté, à la fois malicieuse et profonde. Je me sentis attiré vers lui : comme nous étions externes tous deux, nous échangeâmes quelques mots en sortant. Je fus frappé de sa façon de parler un peu brève et saccadée, entrecoupée de longs silences.

Dès les premières interrogations en classe, sa supériorité apparut éclatante : il répondait aux questions en supprimant les raisonnements intermédiaires, avec une brièveté et une concision telles, que le professeur lui demandait toujours de développer ses réponses : il lui disait : « Si vous répondez ainsi à l'examen, vous risquez de n'être pas compris ».

Nous prîmes l'habitude, Poincaré et moi, de causer en sortant de classe et bientôt nous fûmes tout à fait liés.

Deux de nos camarades demeuraient assez loin du lycée; l'un nancéien, Henry, aujourd'hui professeur agrégé au lycée de Saint-Quentin, habitait en ville, rue de Malzéville; l'autre strasbourgeois, Hartmann, aujourd'hui commandant d'artillerie en retraite, chef des travaux de Mécanique à l'École Polytechnique, habitait le village de Malzéville. Accompagner ces deux camarades devint notre promenade quotidienne après la classe de l'après-midi. Nous ne prenions pas toujours le chemin le plus court. Parfois, tout en discutant un problème de mathématiques, nous interrompions notre promenade : sur le mur voisin, Poincaré traçait du doigt une figure géométrique idéale, qui nous aidait à suivre son raisonnement. Après avoir traversé la grande rue Ville-Vieille, nous franchissions les portes de la Craffe et de la citadelle, pour arriver jusqu'à la rue de Malzéville, où nous laissions Henry; quelquefois nous allions plus loin, mais, ordinairement, nous revenions Poincaré et moi, seuls ou avec Hartmann, et nous allions jusqu'à la porte de Poincaré, 6, rue Lafayette. Nous parlions des grands événements qui venaient de bouleverser notre pays, de la guerre, de la Commune, de la libération du territoire, de l'Alsace-Lorraine et de son immuable attachement à la France : puis aussi des incidents de la vie publique, de l'élection Barodet-Rémusat, des débats de l'Assemblée nationale, des partis politiques....

Nancy était occupé par les vainqueurs ; la tristesse de la défaite, l'annexion de l'Alsace-Lorraine pesaient lourdement sur nos entretiens : mais nous avions une confiance entière dans l'avenir : nous désirions que Thiers pût fonder une République ordonnée et active, qui nous apparaissait comme le régime le plus capable de relever la Patrie et de lui rendre sa place dans le monde. Cette opinion, qui était celle de la grande majorité de nos camarades, se manifesta quand Thiers fut renversé le 16 mai : une adresse de sympathie et de protestation, au Président tombé, circula sur les bancs, pendant une classe d'Allemand, et fut signée par tous les élèves de spéciales, à l'exception d'un seul.

Dans nos promenades nous parlions aussi, comme on peut le penser, de nos études, des problèmes posés par notre professeur, des généralisations qu'on pouvait leur apporter, des solutions fournies par la géométrie. Il nous arrivait quelquefois de philosopher : Poincaré souriait doucement de la psychologie et de la théodicée naïves qu'on enseignait alors en vue du baccalauréat. Je me souviens également de longues conversations, sur les raisons scientifiques et philosophiques de croire à l'existence de la vie dans les autres planètes.

Poincaré lisait beaucoup : il étudiait l'algèbre de J. Bertrand, l'analyse de Duhamel, la géométrie supérieure de Chasles, la géométrie de Rouché. Avec la plus grande simplicité et la camaraderie la plus cordiale, il donnait à ses condisciples tous les renseignements et toutes les explications qu'ils désiraient. Il avait des aperçus synthétiques des problèmes ; ainsi, le professeur ayant demandé le lieu géométrique des points d'où l'on voit une ellipse sous un angle donné, Poincaré dit immédiatement : la tangente de l'angle sera un rapport ; au numérateur se trouvera le premier membre de l'équation de l'ellipse, au dénominateur le premier membre de l'équation du cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits : il reste à voir seulement avec quels exposants et quels facteurs constants, figureront ces polynomes. Dans les problèmes de Géométrie analytique il donnait des solutions géométriques souvent très élégantes. En voici des exemples qui me reviennent à la mémoire :

A la question de trouver analytiquement le lieu des projections, d'un point fixe, P, sur les tangentes à une parabole, Poincaré donna immédiatement la solution géométrique suivante. Soient F le foyer, AB la tangente au sommet de la parabole, TH une tangente qui rencontre AB en H, M la projection de P sur cette tangente ; projetons F sur PM en I et prenons PK égal et parallèle à FH, de même sens que FH; le point I décrit une circonférence de diamètre PF, le point K une droite DD′ parallèle à AB. On peut donc définir le lieu du point M à l'aide d'une droite et d'un cercle, de la façon suivante : on donne une circonférence et une droite fixes, un point P fixe sur la circonférence, on mène par P une sécante variable PKI qui coupe la droite en K, la circonférence en I, et on prend, sur cette sécante, IM = PK, les deux segments ayant le même sens; trouver le lieu du point M. Partant de là, Poincaré discute la forme de la courbe suivant les positions relatives de la droite et du cercle, trouve l'asymptote, les tangentes au point P, et reconnaît les cas particuliers où la courbe est une cissoïde ou une strophoïde.

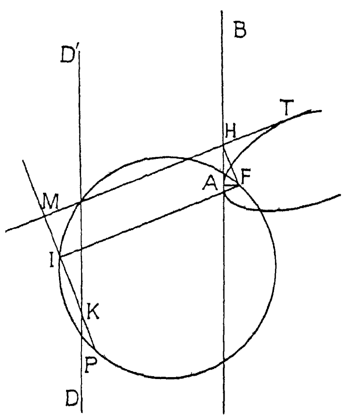


Fig. 1.

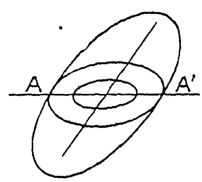


Fig. 2.

Pour résoudre le problème de Géométrie analytique, de trouver les directions de diamètres conjugués communes à deux coniques données, Poincaré rend les coniques concentriques en considérant en même temps les coniques conjuguées; il fait varier l'une d'elles homothétiquement par rapport au centre commun, jusqu'à ce qu'elles soient bitangentes (si cela est possible) : la corde des contacts AA′ et la parallèle aux tangentes communes en A et A′ forment le système cherché; la discussion découle facilement de cette méthode.

Notre professeur donnait quelquefois des devoirs spéciaux aux élèves les plus avancés : un de ces exercices consistait dans l'étude des fonctions $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$: addition des arguments, division par deux et par trois. Tandis que nous cherchions à résoudre directement la question, Poincaré se servant de la formule d'Euler qu'il avait vue dans Duhamel, ramena immédiatement le problème aux fonctions circulaires.

En Physique, il s'intéressait beaucoup au cours qui était très bien fait; la Chimie par contre, enseignée par le même professeur, l'ennuyait, probablement parce qu'il était visible que le professeur ne s'y intéressait pas. Ce professeur, qui nous enseignait aussi la Mécanique, nous donna un jour à traiter, comme exercice, l'étude du mouvement d'un point qui peut glisser sans frottement sur une droite tournant, dans un plan horizontal, avec une vitesse angulaire constante ω, autour d'un de ses points supposé fixe. Le professeur croyait que la trajectoire était toujours une spirale logarithmique. Poincaré contesta son raisonnement, en imaginant un observateur qui serait entraîné avec la droite et qui observerait le mouvement relatif. Il donna l'équation exacte du problème :

$$r'' = \omega^2 r$$

et en conclut la véritable trajectoire. Le professeur maintint son opinion et l'on prit comme arbitre le professeur Bach de la Faculté des Sciences, qui dut donner raison à l'élève.

Au concours général de mathématiques spéciales, la composition de Poincaré, non seulement fut classée la première sur l'ensemble de Paris et des départements, mais fut très remarquée des correcteurs.

A l'approche des examens, notre professeur manifestait de plus en plus la crainte que Poincaré fît des réponses trop elliptiques, qui pourraient paraître obscures aux examinateurs. Il arriva, en effet, qu'à l'École Normale Supérieure, un des examinateurs, mort aujourd'hui, trouva que Poincaré s'exprimait mal et qu'il ne serait pas un bon professeur; aussi lui donna-t-il une note qui, à notre stupéfaction générale, le fit recevoir cinquième. Étrange destinée du génie qui ne peut rentrer dans les classifications des hommes ordinaires! Erreur moins grave pourtant que celle qui fit refuser Galois à l'École Polytechnique, sur une question relative aux logarithmes, à la suite d'une discussion, dans laquelle il avait eu raison contre son examinateur.

A ce même concours de l'École Normale, se place un incident amusant. Les candidats admissibles, devaient faire à Paris, au moment des examens oraux, une épure de Géométrie descriptive : en voici le sujet, que je dois à l'obligeance de M. Caron, alors maître de conférences de Géométrie descriptive à l'École.

« Intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'un cône de révolution dont les axes se rencontrent. Le centre de l'hyperboloïde est le point $x = 0$, $y = 10$ cm, $z = 10$ cm; l'axe est vertical; le rayon du cercle de gorge est de

2 cm ; enfin les génératrices font, avec l'axe, un angle de 45°. Le sommet du cône est le point $x = 0$, $y = 10$ cm, $z = 9$ cm : l'axe est parallèle à la ligne de terre et les génératrices font, avec l'axe, un angle de 45°. Solide commun ».

Poincaré, qui ne voyait aucun intérêt mathématique à tracer des lignes de rappel et à faire un dessin minutieux qui l'ennuyait, préféra, après avoir mis toutes les données en place, chercher par le calcul l'équation de la projection horizontale de la courbe d'intersection. Il trouva ainsi cette courbe, avec une perfection que n'atteignirent pas ceux qui avaient employé les constructions classiques : mais, en la dessinant sur sa feuille, il eut une distraction et la plaça à l'envers, la faisant tourner de 180°. Le correcteur fut très intrigué par cette solution, à la fois inexacte et parfaite.

Après les examens de l'École Normale, nous revînmes à Nancy, faire les compositions écrites pour l'École Polytechnique du 4 au 6 août 1873. Nous trouvâmes la ville dans l'allégresse : des drapeaux partout, à toutes les maisons, à toutes les voitures, jusqu'aux charrettes des laitiers ou des maraîchers : les troupes allemandes venaient de partir, et précisément, pendant la composition de lavis, l'avant-garde de l'armée française fit son entrée à Nancy. Jour de joie et de délivrance, bien mélancolique pour nous, les Alsaciens, qui ne pouvions pas perdre de vue que la libération du territoire français allait s'arrêter, pour longtemps peut-être, aux Vosges. Poincaré, rendu nerveux par l'émotion, avait particulièrement mal réussi son lavis, exercice auquel il n'excellait pas d'ailleurs ; il avait collé sa feuille de papier trop vite, puis il avait étendu trop rapidement les couches d'encre de Chine successives, avant que les précédentes fussent sèches. Il avait hâte de rejoindre, à l'Hôtel de Ville, sa famille qui attendait l'arrivée des troupes françaises sur la place Stanislas.

Pendant que nous préparions les examens oraux de l'École Polytechnique, Poincaré, pour rendre service, consentait à interroger ses camarades : il prenait les feuilles d'examens et, imitant les intonations des examinateurs, reproduisant leurs habitudes d'esprit, il poussait des colles terribles, dont il riait ensuite discrètement. Il demandait, par exemple, à un candidat, de construire la courbe

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin 2\vartheta}},$$

de chercher l'asymptote, les points de rencontre de la courbe et de l'asymptote avec les axes, avec la bissectrice des axes ... points qui coïncidaient tous, jusqu'à ce qu'enfin le candidat découvrit que la courbe se confondait avec son asymptote. Je le vois encore disant, avec un air de pince-sans-rire, à un candidat d'un collège voisin, terrifié par cette révélation, que l'examinateur Moutard demandait les propriétés du limaçon de pascaloïde de révolution.

Après des examens très brillants et un examen de Géométrie particulièrement remarquable avec Tissot, il fut reçu premier à l'École Polytechnique.

Nous nous retrouvâmes, à la rentrée suivante, à Paris, Poincaré à l'École Polytechnique, et moi à l'École Normale. Mais je dois m'arrêter, puisque je ne parle que de Nancy.

Vous voyez, mon cher ami, que, dès le lycée, Poincaré était un grand intuitif, rapide et sûr, pénétrant et fin, un bon français, un ami fidèle, un camarade simple et dévoué : tel il était alors, tel je l'ai toujours connu, admiré et aimé.

Paris, le 22 décembre 1912.

LETTRE DE M. PIERRE BOUTROUX

A M. MITTAG-LEFFLER

Acta Mathematica, t. 38, p. 197-201 (1921).

Vous voudriez avoir, cher Monsieur, quelques détails sur la vie intime de mon oncle, sur la façon dont il travaillait, sur ses habitudes et son caractère? Je n'ai cependant rien d'extraordinaire à vous raconter. Les enquêtes sensationnelles, faites un peu bruyamment par certains psychologues modernes, tendraient à nous faire croire qu'un savant est un être anormal dont tous les actes doivent être étranges. Vous savez pourtant qu'on ne pourrait imaginer une existence plus simple, plus exempte d'événements, plus uniforme en apparence, que celle de Henri Poincaré. L'activité de sa pensée lui suffisait et se suffisait. Point ne lui était besoin de chercher des excitations au dehors, ou d'entretenir chez lui par des moyens artificiels cette exaltation spéciale, cette fièvre intellectuelle, sans laquelle certains inventeurs ne sauraient produire. Il ne fuyait pas, il recherchait même, les distractions, les voyages, les plaisirs artistiques; mais c'est qu'il y était porté par un intérêt véritable, par une curiosité naturelle très étendue, en même temps que par le besoin de se délasser. C'est chez lui, en famille, c'est dans le calme de son existence journalière, qu'il a accompli la plus grande partie de sa tâche.

Dans son paisible cabinet de travail, rue Claude-Bernard, ou sous les ombrages de son jardin, à Lozère, Henri Poincaré s'asseyait quelques heures par jour devant une main de papier écolier réglé, et l'on voyait alors les feuillets se couvrir, avec une rapidité et une régularité surprenantes, de son écriture fine et anguleuse. Presque jamais une rature, très rarement une hésitation. En quelques jours un long Mémoire se trouvait achevé, prêt à être imprimé, et mon oncle ne s'y intéressait plus désormais que comme à une chose du passé. A peine consentait-il — ses éditeurs en savent quelque chose — à jeter un rapide coup d'œil sur les épreuves.

Voilà à quoi se bornait le travail, je veux dire le travail apparent d'Henri Poincaré. A quel labeur sa pensée avait-elle dû se livrer au préalable, lui seul l'a jamais su. Il pensait dans la rue lorsqu'il se rendait à la Sorbonne, lorsqu'il allait assister à quelque réunion scientifique, ou lorsqu'il faisait, après son déjeuner, une de ces grandes marches à pied dont il était coutumier. Il pensait dans son antichambre, où dans la salle des séances de l'Institut, lorsqu'il déambulait à petits pas, la physionomie tendue, en agitant son trousseau de clefs. Il pensait à table, dans les réunions de famille, dans les salons même, s'interrompant souvent brusquement au milieu d'une conservation, et plantant là son interlocuteur, pour saisir au passage une pensée qui lui traversait l'esprit. Tout le travail de découverte se faisait mentalement chez mon oncle, sans qu'il eût besoin, le plus souvent, de contrôler ses calculs par écrit ou de fixer ses démonstrations sur le papier. Il attendait que la vérité fondît sur lui comme le tonnerre, et il comptait sur son excellente mémoire pour la conserver.

On a souvent remarqué que Henri Poincaré gardait jalousement pour lui ses pensées. A l'inverse de certains savants, il ne croyait pas que les communications orales, l'échange verbal des idées, pussent favoriser la découverte. Cette réserve de mon oncle me frappa spécialement lorsque, passant quelques mois à Göttingen, je fus témoin d'habitudes toutes différentes. On sait quel admirable foyer de pensée en commun et de travail collectif est la célèbre université allemande. Là tout se passe au grand jour. A peine l'étranger est-il débarqué dans la petite cité hanovrienne, qu'il sait déjà quels sont les travaux dont s'occupent les illustrations du lieu, jusqu'où elles sont parvenues et quelles difficultés les arrêtent. Les idées, colportées, confrontées, discutées, au cours des promenades dans la forêt et aux séances de la Société mathématique, mûrissent d'elles-mêmes dans ce milieu fertile, où la curiosité toujours alerte et la néomaïeutique de M. Klein contribuent à entretenir un ferment inépuisable. Le profit que peuvent retirer les jeunes gens d'un contact aussi intime avec leurs maîtres est manifeste. Ce n'est point, cependant, par accident, ou par besoin égoïste de solitude, que mon oncle s'abstenait d'imiter sur ce point ses collègues allemands. Nul n'était plus liant que lui, nul n'était plus porté à la sympathie, pour les jeunes en particulier. Mais mon oncle se faisait de la découverte mathématique une idée qui excluait toute possibilité de collaboration. La recherche telle qu'il la comprenait doit être une lutte à deux. C'est un corps-à-corps avec la réalité fuyante et rebelle, qu'il s'agit de frapper au cœur. Dans un tel duel il n'y a pas de place pour des témoins. L'intuition, par où s'opère la découverte, est une communion directe, sans intermédiaires possibles, de l'esprit et de la vérité. Il ne convient pas, il faut se garder, de troubler ce tête-à-tête.

Sans doute, une fois l'idée conquise, il peut être utile de se mettre à plusieurs pour l'exploiter. Mais c'est là une besogne, en partie mécanique, qui n'avait qu'un intérêt secondaire, il faut bien le dire, aux yeux de Henri Poincaré. — Avez-vous l'idée, demandait-il? Si vous ne l'avez pas, je ne puis vous être d'aucun secours pour la découvrir. En revanche, je suis prêt à vous faire crédit, Quoi qu'il me semble de la voie où vous vous engagez, je ne vous adresse aucune critique, aucune objection de principe. Je sais trop bien que la vérité surgit souvent aux carrefours où l'on s'attendait le moins à la rencontrer.

Je m'explique ainsi que mon oncle ait été, à l'égard des débutants, l'un des juges les plus bienveillants, les plus larges d'esprit, que j'aie rencontrés, et, en même temps, l'un des plus sévères. Loin de prétendre entraîner ses élèves à sa suite et de leur dicter leur tâche, il voulait laisser à chacun une initiative complète; il était toujours disposé à s'intéresser aux recherches les plus inusitées, les plus paradoxales mêmes; aucune nouveauté ne lui faisait peur. Mais, quand venait le moment d'apprécier les résultats, il se montrait extrêmement exigeant. Si vous ne lui apportiez que des propositions qu'il considérait comme acquises — et, dans sa tendance à aller de l'avant, il regardait comme virtuellement acquis tout ce dont nous n'étions plus séparés par des difficultés de principe — si vous ne lui ouvriez pas des aperçus nouveaux pour lui, on devinait qu'il avait aux lèvres l'éternel et décourageant « à quoi bon? »; non que vous eussiez, selon lui, perdu votre temps; mais vous lui aviez appris que votre méthode — sur laquelle il avait jusque-là réservé son jugement — n'offrait, en réalité, aucun avantage.

Ceux qui approchèrent mon oncle de près ont été surpris de le voir rarement se servir de livres. Il lisait peu, en effet — je ne parle ici, bien entendu, que de ses lectures scientifiques —, et il lisait d'une façon très particulière. Henri Poincaré ne pouvait s'astreindre à suivre la longue chaîne de déductions, la trame serrée de définitions et de théorèmes, que l'on trouve généralement dans les Mémoires de mathématiques. Mais, allant tout droit au résultat qui lui paraissait le centre du Mémoire, il l'interprétait et le repensait à sa manière; il le contrôlait par ses propres moyens; après quoi, seulement, reprenant le livre en mains, il jetait un rapide regard circulaire sur les lemmes propositions, et corollaires, qui constituaient la garniture du Mémoire.

Il faut insister sur ces détails, car nous touchons ici peut-être à l'un des caractères distinctifs de la pensée de mon oncle. Au lieu de suivre une marche linéaire, son esprit rayonnait du centre de la question qu'il étudiait vers la périphérie. De là vient que dans l'enseignement et même dans la conversation ordinaire, il était souvent difficile à suivre et parfois semblait obscur. Qu'il exposât une théorie scientifique, ou qu'il contât une anecdote, il ne commençait presque jamais par le commencement. Mais, *ex abrupto*, il lançait en avant le fait saillant, l'événement caractéristique, ou le personnage central, personnage qu'il n'avait point même pris le temps d'introduire et dont parfois son interlocuteur ignorait jusqu'au nom.

Cette tournure d'esprit explique comment la pensée de Henri Poincaré a pu être si agile et s'appliquer à tant d'objets différents, comment, par suite, il lui a été possible de satisfaire une curiosité presque universelle.

Habitué à négliger les détails et à ne regarder que les cimes, il passait de l'une à l'autre avec une promptitude surprenante; et les faits qu'il découvrait, se groupant d'eux-mêmes autour de leurs centres, étaient instantanément et automatiquement classés dans sa mémoire. D'ailleurs mon oncle n'était pas de ceux qui vivent sur les trésors acquis et qui se complaisent à faire chez eux le tour du propriétaire. Il se contentait de savoir qu'il possédait et, sans regarder en arrière, il travaillait sans relâche à remplir de nouvelles cases de son cerveau.

Henri Poincaré avait un goût marqué pour la géographie et pour les voyages. Conformément à ses tendances ordinaires, il voulait voir dans chaque pays les sites et les monuments les plus caractéristiques, et il n'éprouvait point le désir de s'écarter des routes traditionnelles. Il était l'opposé de ces romantiques qui voyagent pour donner un cadre à leurs rêveries et qui, souhaitant ce cadre inédit, s'efforcent de s'isoler du flot des touristes. Ses jouissances à lui étaient d'un ordre tout intellectuel. Extrayant d'ailleurs du premier coup, et traduisant immédiatement en concepts, les traits essentiels des impressions qu'il recueillait, il n'avait que rarement besoin de voir deux fois les mêmes contrées. Sans doute, il est possible qu'à la fin de sa vie, mon oncle ait été sensible, lui aussi, à l'attrait qu'exercent sur presque tous les hommes l'évocation de leurs souvenirs et les lieux qui leur sont déjà familiers. Cependant le besoin incessant de voir du nouveau, a bien été, si je ne me trompe, un trait dominant de son caractère.

Dès sa jeunesse Henri Poincaré lisait avec un intérêt passionné les récits de voyage du *Tour du Monde* et suivait au jour le jour les progrès de l'exploration du continent africain. C'est, je crois, un sentiment du même genre qui, en toutes circonstances et dans tous les domaines, le lançait vers la poursuite de l'inconnu, et lui faisait assigner à sa vie et à la science un but simple et précis : comme les grands voyageurs de l'Afrique, remplir les espaces blancs de la carte du monde.

Je me rappelle qu'un jour, parlant devant Henri Poincaré d'un mathématicien qui quittait ses études pour d'autres occupations, quelqu'un laissa échapper cette remarque : « Tout se vaut, après tout; il sera sans doute aussi heureux que s'il avait continué à faire des mathématiques ». Mon oncle eut un mouvement de protestation qui arrêta la conversation. Venant d'un spécialiste enfermé dans des études étroites, pareille intransigeance n'eût point étonné, et on l'eût mise sur le compte d'une foi un peu naïve. Mais Henri Poincaré n'avait point les défauts des spécialistes; il avait des goûts très variés et ne prétendait nullement placer ses propres occupations au-dessus de toutes les autres. Que signifiait donc sa protestation? Très catégoriquement, je crois, mon oncle estimait que si l'on s'est une fois mis au service de la science, on n'a plus le droit de déserter son poste. Tant qu'il reste des blancs sur la carte du monde, il ne nous est pas permis de nous reposer.

En effet, bien qu'il ait été sensible autant qu'aucun autre à la grandeur et la beauté de la science, mon oncle n'appartenait pas à cette école de dilettantes qui se livrent aux mathématiques parce qu'elles leur procurent des jouissances esthétiques. La recherche était pour lui un devoir, d'autant plus attachant qu'il lui coûtait plus de peine. Je n'ai jamais entendu mon oncle parler du travail scientifique — du sien ou de celui d'autrui — qu'avec le plus grand sérieux et le plus grand respect : lui, si gai à ses heures de délassement, lui qui aimait et pratiquait l'ironie, il n'en avait point lorsque la science était en cause.

Voilà, cher Monsieur, quelques-unes des réflexions qui me venaient à l'esprit, voilà ce que je sentais ou croyais deviner quand j'avais le bonheur de converser avec mon oncle. Henri Poincaré, je vous l'ai dit, ne parlait guère de ses travaux; encore moins se fût-il complu à décrire ses sentiments intimes et les ressorts de son intelligence; mais il aimait faire causer les autres, et, lorsqu'on se trouvait exprimer une idée qui lui était chère, lorsqu'on découvrait une pensée conforme à la sienne, son sourire et son regard révélaient le plaisir qu'il éprouvait. C'est par de tels signes à peine perceptibles qu'Henri Poincaré manifestait sa sympathie et sa bienveillance. Lui qui, par discrétion, n'a pas voulu se faire des disciples, lui que sa réserve naturelle faisait passer pour froid, il avait un cœur chaud, un grand désir de se sentir entouré, un profond besoin d'affection.

Paris, le 18 juin 1913.

L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE POINCARÉ

PAR JACQUES HADAMARD

Acta Mathematica, t. 38, p. 203-287 (1921).

Poincaré lui-même a fourni aux lecteurs des *Acta* une analyse détaillée de son œuvre [1].

On comprendra que, sur tous les points qui ont été portés à leur connaissance dans un des styles les plus lumineux, les plus définitifs que la langue scientifique — et la langue française — aient connus, nous nous croyons dispensés d'insister. Il nous arrivera donc très souvent de renvoyer à l'*Analyse* dont il s'agit.

Nous n'essaierons pas, d'autre part, de chercher dans tout l'ensemble de cette œuvre une unité, d'en dégager une personnalité intellectuelle. Cette tentative, qui s'imposerait pour tout autre, serait, à notre sens, chimérique en ce qui concerne Poincaré, et nous croirions diminuer en même temps que dénaturer son œuvre en nous y essayant. Ce serait méconnaître cette pensée « capable de faire tenir en elle toutes les autres pensées, de comprendre jusqu'au fond, et par une sorte de découverte renouvelée, tout ce que la science humaine peut aujourd'hui comprendre » [2].

Assurément, tout penseur tend à marquer de son sceau personnel ce que son cerveau façonne. Mais si cette tendance est une des forces de l'artiste, le savant, lui, bien loin de chercher à l'entretenir, la subirait plutôt. Elle est,

---

(1) *Analyse de ses travaux scientifiques* (*Acta Math.*, t. 38).
(2) PAINLEVÉ, *Temps* du 18 juillet 1912.

chez lui, combattue par une nécessité toute contraire, celle de l'objectivité. « Nous sommes serviteurs plutôt que maîtres en mathématiques », aimait à dire Hermite, et l'adage tout analogue de Bacon est aussi vrai des mathématiques elles-mêmes que des sciences expérimentales. Le savant — surtout le mathématicien — ne dispose guère, au fond, des moyens d'attaque. Tout au plus suit-il en général son tempérament dans le choix du terrain.

Poincaré ne fit même point ainsi. Il emprunta ses sujets d'étude non aux ressources de son esprit, mais aux besoins de la science. Il a été présent partout où il y avait une lacune grave à combler, un grand obstacle à surmonter. Lorsque nous aurons essayé d'énumérer — même aussi rapidement qu'il nous faudra le faire — les questions auxquelles il s'est attaqué, il nous semblera avoir touché à toutes celles auxquelles peuvent s'intéresser les mathématiciens et qui nécessitent encore leurs efforts. Son œuvre est devenue, dès lors, le patrimoine commun de tous. Si Poincaré a une « manière », si même on peut employer à son égard ce mot qui ressemble à « manie », nous en avons tous hérité, et elle est en chacun de nous.

De ses résultats se dégage souvent une unité; mais celle-ci n'est pas inhérente à l'auteur. Elle est elle aussi, objective et réside dans les faits eux-mêmes. Nul mieux que Poincaré ne sut, en effet, decouvrir, entre les diverses parties de la science, des relations imprévues, parce que personne ne sut mieux dominer cette science de tous les côtés à la fois.

Cette souplesse et cette universalité, cette adaptation rapide et parfaite à tous les problèmes posés par les mathématiques et leurs applications, se sont manifestées de manière d'autant plus éclatante qu'à notre époque, l'une des sciences qui dictent surtout ces problèmes, la Physique, évolue avec une plus déconcertante rapidité. On sait, — et d'autres le diront ici mieux que moi — à quel degré Poincaré, dès qu'il s'est mêlé à cette évolution, a su toujours la suivre et souvent la guider.

L'histoire de l'œuvre de Poincaré ne sera donc, au fond, autre chose que l'histoire même de la science mathématique et des problèmes qu'elle s'est posés à notre époque.

Le plus important d'entre eux est encore aujourd'hui le même qui est apparu à la suite de l'invention du Calcul infinitésimal.

Nous sommes loin d'avoir résolu les difficultés qu'il présente. Mais là même où nous y sommes arrivés, ce n'a été, le plus souvent, qu'en modifiant profondément nos idées sur ce qu'il faut entendre par « solution ». Celles que nous avons acquises aujourd'hui se résument toutes dans la forte parole que Poincaré prononçait en 1908 [1] :

« Il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas, il y a seulement des problèmes *plus ou moins* résolus » — c'est-à-dire qu'il y a des solutions donnant lieu à des calculs plus ou moins simples, nous renseignant plus ou moins directement et aussi plus ou moins complètement sur l'objet de notre étude.

On peut dire, à ce point de vue, qu'une première solution est acquise dans la plupart des cas, — et cette conquête, ébauchée dès Newton, est surtout l'œuvre de Cauchy et de Weierstrass : — des relations entre états *infiniment* voisins, on sait déduire, ce qui est fort différent, la connaissance de tous les états *suffisamment voisins* d'un état donné. Si, par exemple, le phénomène à étudier dépend de la position d'un point dans un plan, on sait l'étudier dans toute une petite région entourant un point quelconque donné.

En un certain sens, il peut être ainsi considéré comme connu, puisque, avec de petites régions de cette espèce accolées les unes aux autres, on peut constituer des régions plus étendues et même aussi étendues qu'on le voudra.

Mais cette connaissance est souvent très insuffisante, beaucoup plus encore que ne le serait, pour un voyage d'un bout à l'autre d'un pays, la possession des feuilles partielles de la carte à quelqu'un qui ne disposerait d'aucune autre donnée géographique. Elle l'est à des degrés divers suivant la nature du problème posé; mais dans la plupart des cas, le résultat est connu, dans chaque domaine partiel, par des opérations d'une convergence médiocre, c'est-à-dire assez mal et assez péniblement; d'autant plus mal et d'autant plus péniblement même que le domaine en question est plus petit.

Quoi qu'il en soit, ces premiers résultats, même si l'on n'est pas réduit à s'en contenter, servent tout au moins d'intermédiaires obligés pour en obtenir de meilleurs, de sorte que, presque partout, la marche de la science mathématique actuelle comporte deux étapes :

La solution locale des problèmes;

Le passage de celle-ci à une solution d'ensemble, si cette sorte de synthèse est possible.

Le premier problème qui avait arrêté le Calcul infinitésimal, celui des

---

(1) Conférence prononcée au Congrès international des Mathématiciens, Rome; t. 1, p. 173 des *Actes du Congrès*.

quadratures, est, en somme, résolu, au sens précédent, d'une manière assez satisfaisante. Cette solution diffère assurément beaucoup de celle que cherchaient, — sans aucune chance de succès, nous le savons maintenant — les contemporains de Leibnitz. Elle contient cependant l'essentiel de ce qu'on peut savoir dans le cas général et des renseignements beaucoup plus importants dans tous les cas particuliers les plus usuels.

Mais le problème général des équations différentielles est autrement difficile. Les petites régions dont nous parlions ne peuvent même plus être considérées indépendamment les unes des autres. On doit les ranger dans un ordre déterminé, et les calculs relatifs à l'une d'elles ne peuvent être commencés sans qu'on ait exécuté jusqu'au bout ceux qui concernent les précédentes. En général, il arrive qu'on ignore *a priori* jusqu'à l'amplitude des pas successifs qu'on peut ainsi effectuer, c'est-à-dire jusqu'aux dimensions des régions partielles successives : c'est ce qu'on ne connaît qu'au moment même où l'on atteint chacune d'elles.

Les difficultés dont nous venons de parler s'aggravent encore — et même d'autres toutes différentes apparaissent — si, au lieu d'équations différentielles ordinaires, on a à traiter des équations aux dérivées partielles.

L'intégration des équations différentielles et aux dérivées partielles est restée jusqu'ici le problème central de la mathématique moderne. Elle en restera vraisemblablement encore l'un des problèmes capitaux, même si la Physique poursuit vers le discontinu l'évolution qui se dessine à l'heure actuelle.

La théorie des équations différentielles fut aussi la première à attirer l'attention de Poincaré. Elle fait l'objet de sa Thèse (1879).

Notons cependant que, sous l'influence du maître qui gouverna la génération précédente, j'ai nommé Hermite, le débutant ne craignait pas de suivre presque au même moment une voie pour ainsi dire opposée à la première, celle de l'Arithmétique.

La Thèse de Poincaré contient déjà sur les équations différentielles un résultat d'une forme remarquable, destiné à être plus tard pour lui un puissant levier dans ses recherches de Mécanique céleste. Dès ce premier travail, il était, d'autre part, conduit à perfectionner le principal outil dont se fût servi jusque là, la théorie des équations différentielles, outil qu'il allait utiliser mieux que qui que ce soit, en même temps que, le premier, il allait enseigner à s'en passer : la théorie des fonctions analytiques.

Celle-ci allait, presque immédiatement après, lui devoir une de ses plus belles conquêtes : c'est en 1880 que les *fonctions fuchsiennes* vinrent désigner Poincaré à l'attention et à l'admiration de tous les géomètres.

I. — La théorie des fonctions.

1. LES FONCTIONS FUCHSIENNES.

Auxiliaire puissant pour tout le Calcul infinitésimal, la Théorie des fonctions analytiques a fait ses preuves de façon particulièrement éclatante dans la résolution du problème des quadratures, mais surtout lorsqu'il s'est agi de celles qui portent sur des fonctions algébriques, c'est-à-dire des intégrales elliptiques et abéliennes ([1]).

On sait — et, avant de parler des fonctions fuchsiennes, nous rappellerons — les circonstances grâce auxquelles ce degré de perfection a pu être atteint.

La première d'entre elles n'est autre que la polydromie de l'intégrale cherchée, c'est-à-dire, par un phénomène qui n'est pas isolé en Mathématiques — n'a-t-on pas dit de Cauchy que ses deux grandes forces furent ce qui avait été l'effroi de ses prédécesseurs, l'infini et l'imaginaire ! — le fait même qui paraissait devoir constituer la principale difficulté de son étude. C'est à cette polydromie que la fonction inverse, obtenue en prenant l'intégrale considérée u comme variable indépendante, doit sa double périodicité.

Cette fontion inverse doit, par contre, être uniforme et, pour qu'il en soit ainsi, on doit choisir de manière convenable l'intégrale elliptique qui sert de point de départ. Ici, ce choix — celui de l'intégrale de première espèce — est aisé à faire.

La double périodicité, à son tour, donne la clef de toutes les autres propriétés. Il y a plus. L'analyse moderne laisse complètement de côté, au premier abord, le problème d'intégration posé et prend pour premier objet l'étude générale des fonctions doublement périodiques d'une variable. Parmi celles-là, on découvre ensuite les solutions du problème en question.

On obtient ainsi tout l'ensemble de résultats qui font de l'intégration des

---

([1]) Poincaré a eu ici même à retracer l'histoire de ces théories : *voir* sa *Notice sur Weierstrass*, t. 22 des *Acta Mathematica*, p. 1-18.

différentielles elliptiques l'un des problèmes les mieux résolus de l'Analyse : celui même que Poincaré, dans la conférence à laquelle nous faisions allusion plus haut, prenait comme exemple typique à cet égard.

Les propriétés des fonctions abéliennes sont assurément moins simples et surtout moins commodes pour le calcul numérique que celles des fonctions elliptiques : elles sont toutes parallèles, néanmoins, et ne contentent pas moins complètement ce sens de la beauté dans lequel Poincaré nous a appris à discerner le véritable mobile du savant.

La notion de périodicité suffit à elle seule pour constituer ces deux théories, modèles d'harmonie et d'élégance.

Mais par cela même, on peut dire qu'elle avait rendu tous les services qu'on en pouvait attendre, et nulle autre notion fonctionnelle analogue ne paraissait offrir la même fécondité.

Les deux exemples qui ont inspiré Poincaré étaient cependant déjà connus : je veux parler de la fonction modulaire et de l'inversion de la série hypergéométrique, objets l'une des admirables travaux d'Hermite, l'autre du Mémoire fondamental qu'on doit à M. Schwarz. Ils n'avaient pas fait apercevoir aux géomètres la généralisation hardie qui devait conduire aux *fonctions fuchsiennes*.

Cette généralisation était si audacieuse que le premier mouvement de Poincaré fut de la regarder comme impossible. Il nous apprend lui-même (1) qu'il s'efforça tout d'abord de montrer l'*inexistence* des fonctions dont il s'agit. C'est par une de ces intuitions d'apparence spontanée dont on verra l'histoire dans *Sciences et Méthode*, qu'il s'engagea dans la voie opposée.

Poincaré va se placer dans des conditions incomparablement plus générales et plus variées que les fondateurs de la théorie des fonctions elliptiques; mais la marche suivie sera cependant toute semblable de part et d'autre.

A la place du problème de quadrature, il considère une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques. Ce problème dépasse le premier de toute la distance qui sépare l'intégration des équations différentielles de la

(1) L'exemple des fonctions fuchsiennes est précisément, on le sait, celui que Poincaré a choisi pour décrire au point de vue psychologique, l'invention mathématique et montrer le rôle essentiel qu'y joue l'inconscient.

Ajoutons que, chez Poincaré, l'idée première d'une recherche est toujours mise en évidence avec une merveilleuse netteté qu'on est loin de trouver toujours au même degré chez les plus grands maîtres. C'est dire que l'accusation d'obscurité lancée parfois contre lui nous paraît, du moins au point de vue du lecteur qui va au fond des choses, exprimer le contraire de la vérité.

simple recherche des primitives; parmi les équations différentielles, toutefois, les équations linéaires se présentaient à lui comme les plus simples de toutes.

La polydromie des fonctions obtenues par quadratures se retrouve chez celles qui sont définies par des équations linéaires; quoique plus complexe que le premier, ce nouveau mode de polydromie était bien connu par les recherches de Fuchs, auquel Poincaré sera ainsi conduit à dédier la nouvelle conception.

On aperçoit dès lors immédiatement ce qui devra correspondre à la notion de périodicité : ce rôle appartient à un certain *groupe* de substitutions linéaires.

Tout ceci apparaissait sur les deux exemples que nous citions tout à l'heure, de la fonction modulaire et de la série hypergéométrique. Dans ces deux cas, c'est bien un groupe de substitutions linéaires qui intervient, et ce groupe satisfait à la condition indispensable — nous renvoyons sur ce point à l'exposé de Poincaré (1) — d'être *discontinu*, c'est-à-dire tel que les transformés d'un même point n'aillent pas en s'accumulant en nombre infini dans le voisinage immédiat de l'un quelconque d'entre eux (sauf dans certaines régions particulières ou, plus exactement, le long de certaines lignes du plan).

Il possède même la seconde propriété par laquelle, entre les groupes linéaires discontinus, Poincaré distingue les groupes fuchsiens, à savoir celle de laisser invariant un certain cercle (dit cercle *fondamental*).

Mais il restait à s'inspirer plus étroitement encore de l'exemple des fonctions elliptiques : je veux dire, conformément à ce qui précède, à partir *a priori* du groupe en question, en laissant de côté d'abord l'équation différentielle.

Il fallait même faire un pas de plus, et cette première transformation de la question, suffisante dans les cas traités antérieurement, ne l'était plus cette fois; c'est sans doute pour cette raison que les découvertes mentionnées plus haut d'Hermite et de Schwarz étaient jusque là restées isolées et n'avaient pas mis sur la voie de l'infinie multiplicité d'autres groupes analogues qui allait s'offrir à Poincaré. Dans le problème actuel, on ne remonte pas assez loin en s'adressant à la notion du groupe, trop complexe elle-même pour nous servir de fondement premier. Il faut, si nous osons nous exprimer ainsi, placer plus bas encore les fondations et appuyer à son tour la notion du groupe sur un autre substratum.

---

(1) *Voir* son *Analyse*, p. 43, *Œuvres*, t. I, p. VIII.

Ce substratum est essentiellement géométrique : Poincaré le trouve dans le *polynome générateur*, c'est-à-dire (¹) dans la figure qui est au groupe ce que le parallélogramme des périodes est à la double périodicité.

Cette notion intervenait forcément dans les exemples d'Hermite et de Schwarz. Mais Poincaré montre qu'elle caractérise tout groupe discontinu. Pure intuition dans le premier Mémoire sur les groupes fuchsiens, ce fait est établi en toute rigueur dans un des Mémoires suivants (²), et une règle générale est énoncée d'après laquelle, à chaque point, on peut faire correspondre un de ses transformés et un seul (à des cas limites près) de manière que, le premier prenant toutes les positions possibles, le second décrive le polynome générateur demandé.

Mais, nous l'avons dit, loin de chercher systématiquement ce dernier en partant du groupe, Poincaré suit bien plutôt la marche inverse et part de la notion du polygone, aussi intuitive pour nous que celle du groupe nous est, au fond, peu familière encore. L'expression de « polygone générateur » exprime d'une manière parfaite comment les choses se passent dans l'Analyse de Poincaré : c'est lui qui engendre véritablement le groupe. Non seulement il suffit entièrement à le définir, mais on lit immédiatement et sans la moindre difficulté, sur cette figure, toutes les propriétés essentielles que l'on veut en connaître : substitutions fondamentales, relations entre ces substitutions, etc.

En particulier, il convient de noter, au point de vue des applications des fonctions fuchsiennes, la simplicité avec laquelle s'exprime ainsi la relation entre un groupe et ses sous-groupes : le polygone générateur P' du sous-groupe est formé par la juxtaposition du polygone générateur P (correspondant au groupe contenant) et de quelques-uns des transformés de P.

On voit combien serait chimérique, ici, la distinction, dont on a tant abusé, entre la tendance géométrique et la tendance analytique. Tout n'est que formes et que vue géométrique à la base de cette série de Mémoires auxquels la haute Analyse allait devoir un de ses progrès les plus importants ; et toute l'œuvre de Poincaré offre des exemples analogues.

La théorie est ainsi fondée moyennant une hypothèse essentielle, à laquelle doit satisfaire un polygone générateur pour donner naissance à un groupe

(¹) Voir *Analyse*, p. 44, *Œuvres*, t. I, p. IX.
(²) *Acta Mathematica*, t. 4 (1884), p. 201-312, *Œuvres*, t. II, p. 300.

discontinu : il faut que ce polygone et ses homologues successifs puissent paver, sans chevauchement ni lacune, le plan, ou plutôt une portion déterminée du plan (dans le cas des groupes fuchsiens, l'intérieur de ce cercle fondamental qui est supposé invariant par toutes les substitutions du groupe). Nous ne redirons pas en détail, après Poincaré (1) comment la condition qu'il indiqua à cet effet, si simple que fût son énoncé géométrique, était d'une démonstration particulièrement difficile, ni comment, pour triompher de cette difficulté, il fut conduit à faire intervenir un auxiliaire inattendu, la géométrie non euclidienne. La forme sous laquelle il l'employa, — voisine, au surplus, de celles de Cayley et de M. Darboux (2) — diffère à peine, au fond, de l'image bien connue par laquelle, plusieurs années plus tard (3), il mettait en évidence, d'une manière frappante, l'impossibilité de trouver une contradiction dans cette géométrie.

La même méthode est employée pour fonder la théorie des groupes kleinéens (groupes linéaires discontinus autres que les groupes fuchsiens, c'est-à-dire sans cercle fondamental invariant), mais avec un caractère nouveau sur lequel il y a peut-être lieu de dire un mot. Poincaré est conduit à une introduction de l'espace à trois dimensions tout analogue à la théorie des imaginaires qui est, géométriquement parlant, la géométrie du plan employée à éclairer celle de la droite. On sait qu'une telle généralisation de la théorie des imaginaires à l'espace n'est pas viable en général. Elle est possible, cependant, quand les raisonnements ne font intervenir que certaines opérations particulières, les transformations *conformes* de l'espace (c'est-à-dire les inversions et leurs combinaisons); et c'est précisément ce qui a lieu pour l'étude des groupes kleinéens.

Mais nous n'en avons pas encore fini avec l'aspect géométrique de la question. Non seulement nous venons de voir qu'il fournit à la théorie sa meilleure base, celle qui lui assure la marche la plus claire et la plus intuitive, mais, en lui même, il réservait à Poincaré de surprenantes découvertes.

Le groupe admet en effet toujours des points *singuliers*, en lesquels son caractère discontinu disparaît, c'est-à-dire que, au voisinage de l'un d'entre eux, les homologues du polygone générateur se font de plus en plus petits et

(1) *Analyse*, p. 45, *Œuvres*, t. I. p. x.

(2) Poincaré se rapprocha plus étroitement encore de ces dernières dans les applications qu'il fit des fonctions fuchsiennes et de la géométrie non euclidienne à l'Arithmétique.

(3) *Revue générale des Sciences*, t. 3, 1892, p. 75.

de plus en plus serrés, de sorte que les homologues d'un même point quelconque vont en s'y condensant à l'infini : points qui sont forcément singuliers pour la fonction correspondante.

Dans les groupes fuchsiens, ces points sont forcément tous situés sur le cercle fondamental. Ils peuvent constituer par leur ensemble ce cercle tout entier, lequel sera alors, pour la fonction, une *ligne singulière ou coupure essentielle*.

La connaissance de ce genre de singularité des fonctions analytiques était alors relativement récente. Toutefois, la fonction modulaire (qui, nous l'avons dit, est une fonction fuchsienne particulière) en avait déjà offert un exemple intéressant. A côté de ce premier exemple, les fonctions fuchsiennes viennent en offrir toute une catégorie d'autres analogues.

Le cas opposé, où les points singuliers, tout en étant encore en nombre infini sur la circonférence du cercle fondamental, ne l'occupent pas tout entière, de sorte que la fonction fuchsienne considérée est prolongeable au-delà de ce cercle, semblait au premier abord plus simple et plus conforme à la norme ordinaire que celui où ce cercle est une coupure. Il est, en réalité, beaucoup plus remarquable encore. La figure formée par ces points singuliers n'est autre, en effet, que l'ensemble *parfait non continu*, l'une des conquêtes les plus importantes de la théorie des ensembles.

Or, à cette époque, celle-ci n'était pas encore constituée.

C'est seulement après l'apparition de la théorie des groupes fuchsiens que M. Bendixson et Cantor lui-même retrouvèrent ces ensembles si paradoxaux. C'est avec elle, par conséquent, qu'ils firent leur première apparition dans la Science.

Ce n'est pas tout. Les groupes kleinéens peuvent, eux aussi, admettre des lignes singulières. Mais celles-ci ne sont plus des cercles. Elles ne cessent d'affecter cette forme simple que pour prendre une de celles que l'ancienne Mathématique ignorait, que, sans le secours de l'Analyse, notre esprit est impuissant à concevoir, et auxquelles est attaché le nom de M. Jordan.

C'est une courbe jordanienne qui, comme le montre Poincaré, tient la place du cercle lorsqu'on passe de l'étude des groupes fuchsiens à celle des groupes kleinéens, et une courbe jordanienne dépourvue soit de tangente, soit de courbure en tous ses points.

Certes, les exemples de courbes sans tangentes, sont classiques depuis

Riemann et Weierstrass; mais tout le monde comprendra la différence profonde qui existe entre un fait obtenu dans des circonstances rassemblées à plaisir, sans autre but et sans autre intérêt que d'en montrer la possibilité, sorte de pièce de musée tératologique, et le même fait rencontré au cours d'une théorie qui a toutes ses racines dans les problèmes les plus usuels et les plus essentiels de l'Analyse générale.

La théorie des groupes kleinéens offre le premier exemple de cette espèce, — le seul même que l'on connaisse, si nous ne nous trompons — en ce qui concerne la notion de courbe jordanienne. Le fait qu'on conduise ainsi nécessairement à cette notion nous fait sentir, dès cet exemple, combien les résultats de Poincaré pénètrent profondément dans la nature intime des choses.

*
* *

La notion des groupes fuchsiens et kleinéens étant ainsi fondée, une *fonction fuchsienne* (ou kleinéenne) est celle qui reste invariante par toutes les substitutions d'un de ces groupes, Pour trouver un tel invariant, Poincaré forme d'abord un *invariant relatif*, c'est-à-dire une fonction qui, au lieu de rester inaltérée par une quelconque des substitutions en question, est multipliée par un facteur de forme connue et simple. C'est un intermédiaire classique dans beaucoup de recherches de cette nature non seulement dans la théorie des fonctions elliptiques (lesquelles se présentent comme quotients de fonctions Θ) mais dans celle des invariants de l'algèbre, ou même de certains invariants différentiels [1]. Pour les fonctions thêtafuchsiennes, comme pour les invariants algébriques, le facteur dont il s'agit est une puissance du déterminant de la substitution. Par là, et par leur mode même de formation, les fonctions thêtafuchsiennes diffèrent des fonctions Θ ordinaires et tendent bien plutôt à se rapprocher de la fonction elliptique pu elle-même, telle que la forme Weierstrass. Mais celle-ci possède la propriété d'invariance absolue et évite, par conséquent, le détour employé dans la théorie actuelle, détour dont la nécessité, comme un peu de réflexion suffit à le faire apercevoir, est indissolublement liée à la présence des points singuliers du groupe.

Par contre, Poincaré a montré que la méthode ainsi modifiée s'applique à un groupe discontinu quelconque.

Une fois obtenues les fonctions thêtafuchsiennes, le quotient de deux

(1) *Voir*, par exemple, plusieurs travaux de M. Tresse.

d'entre elles, c'est-à-dire de deux invariants relatifs, donne, comme dans la théorie classique des formes algébriques, une des fonctions invariantes cherchées.

Les *fonctions fuchsiennes* sont formées.

La nouvelle notion ainsi créée, si supérieure en généralité, en extension, à celles sur le modèle desquelles elle avait été édifiée, ne leur cède en rien sous le rapport de la compréhension. Si l'on ne dispose pas, cette fois, de séries rapidement convergentes à la façon des séries Θ, on peut dire que toutes les autres propriétés dont l'imposant ensemble forme la théorie des fonctions elliptiques trouvent encore leurs analogues. Une seule, le théorème d'addition, n'a été étendue par Poincaré qu'à certaines catégories de fonctions fuchsiennes, en relation, comme nous le dirons plus loin, avec les applications arithmétiques.

Mais l'une d'elles domine toutes les autres : les fonctions fuchsiennes présentent, comme les fonctions elliptiques, ce caractère que deux quelconques d'entre elles appartenant au même groupe, sont liées par une relation algébrique.

Dans le cas des fonctions elliptiques, cette relation est forcément très particulière : elle est de genre 0 ou 1. Au contraire, ce qui fait l'importance des fonctions fuchsiennes, c'est que toute équation algébrique à deux variables donnée peut être obtenue par leur moyen.

Dans la démonstration de cette proposition résidait une autre, la plus profonde peut-être des grandes difficultés du problème.

L'opération qu'il s'agit d'effectuer est déjà de celles auxquelles s'appliquent les réflexions émises par Poincaré dans son Analyse (1), c'est-à-dire qu'elle correspond, dans la nouvelle théorie, à ce qu'est le choix de l'intégrale de première espèce dans celle des fonctions elliptiques (2). Mais autant sont simples les règles qui président à ce dernier choix, autant celui de la variable à l'aide de laquelle les coordonnées d'une courbe algébrique s'expriment par des fonctions fuchsiennes est un résultat caché.

Poincaré y parvint par une audacieuse méthode de continuité. M. Klein, qui avait été immédiatement frappé par la puissance de la nouvelle conception

---

(1) Page 48, *Œuvres*, t. I, p. XIII.

(2) C'est ainsi que la représentation d'une cubique par les fonctions elliptiques repose sur l'introduction de l'intégrale *de première espèce* attachée à cette courbe.

et avait attiré sur elle l'attention générale, obtenait à peu près en même temps, par une voie analogue, le même résultat, à une objection près que Poincaré fut seul à apercevoir et dont la réfutation n'est pas une des parties les moins délicates de cette délicate méthode [1].

Celle-ci repose, en effet, sur la comparaison de deux multiplicités, l'une dont un point quelconque correspond à un groupe fuchsien et a pour coordonnées certains paramètres dont dépend ce groupe, l'autre dont chaque point correspond de même a une équation linéaire du second ordre satisfaisant à certaines conditions données. Or ces multiplicités, entre lesquelles il s'agit d'établir une correspondance univoque, sont limitées, et la démonstration n'est complète que moyennant une étude approfondie de leurs frontières.

Ainsi fut établie cette grandiose proposition qui, suivant l'expression de M. Humbert, apportait « les clefs du monde algébrique » en versant sur les propriétés les plus cachées des courbes algébriques quelconques la même lumière dont les fonctions elliptiques avaient éclairé celles des courbes du troisième degré.

D'autre part, la méthode employée exprimait déjà, par les fonctions fuchsiennes, les intégrales de certaines équations différentielles linéaires du second ordre ayant pour coefficients des fonctions algébriques attachées à la courbe considérée.

Ces équations étaient particulières, et devaient forcément l'être pour les raisons mêmes dont nous avons parlé tout à l'heure.

Mais une fois trouvées ces équations linéaires particulières qui s'intègrent par des fonctions fuchsiennes et dont la recherche est l'objet de la méthode de continuité, celles-ci à leur tour, moyennant une nouvelle extension de la méthode, conduisent à l'intégration de toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Il suffit, pour cela, d'introduire un nouvel algorithme, généralisation du premier : les fonctions *zétafuchsiennes*.

Ainsi, ce que les fonctions elliptiques et abéliennes avaient donné pour le problème des quadratures, la théorie nouvelle le fournit pour le problème beaucoup plus général et beaucoup plus difficile, de l'intégration des équations différentielles linéaires.

---

[1] Plus tard, une remarque de M. Schwarz devait fournir à Poincaré l'occasion de revenir après M. Picard sur cette question et de donner du même théorème une seconde démonstration se rattachant à ses recherches de Physique mathématique.

Ce grand résultat aurait, à lui seul, attiré sur cette théorie et sur son auteur l'attention universelle des géomètres, si l'ampleur des généralisations, la hardiesse des méthodes, l'importance des obstacles surmontés n'y avaient pas suffi.

Comme dans toute la suite de ses travaux, Poincaré n'avait pas seulement enrichi la science de faits, mais de toute une catégorie nouvelle de méthodes. Combien celle-ci étaient fécondes en progrès ultérieurs, c'est ce que montrait, immédiatement après, la belle théorie des groupes hyperfuchsiens due à M. Picard et que, d'ailleurs, Poincaré lui-même devait, à son tour, perfectionner (1), en même temps qu'il allait définir une autre catégorie de transcendantes remarquables, celles qui admettent un théorème de multiplication (2).

Mais surtout les fonctions fuchsiennes donnent un nouvel instrument, le plus puissant que l'on possède, pour l'étude des fonctions algébriques et de leurs intégrales : instrument qui a fait ses preuves entre les mains de plusieurs auteurs — citons, entre autres, les résultats obtenus par M. Humbert relativement aux sommes qui font l'objet du théorème d'Abel. C'est, d'autre part, grâce à lui, nous allons le voir, que Poincaré a réalisé une partie des progrès qu'il a fait faire à cette étude.

*
* *

La théorie des fonctions elliptiques est aujourd'hui, sinon achevée — mot qui n'est guère de mise à propos de science — du moins suffisamment éclaircie, et Poincaré n'a pas eu à s'y attaquer directement, bien que, à l'occasion de ses recherches arithmétiques, dont nous parlerons plus loin, il ait formé plusieurs développements nouveaux de ces fonctions.

Mais les fonctions abéliennes posent encore, et ont posé à Poincaré, toute une série de problèmes.

Pour une partie, ces recherches se rattachent étroitement à celles qui précèdent, en vertu des relations qui existent entre les fonctions fuchsiennes et la théorie des fonctions algébriques, avec laquelle celle des fonctions abéliennes ne fait qu'un.

---

(1) Voir *Analyse* p. 85. *Œuvres*, t. IV, p. 296.

(2) On sait les résultats essentiels que M. Picard a également obtenus dans cette dernière voie en formant les fonctions qui subissent des transformations birationnelles lorsqu'on augmente la variable de certaines périodes.

C'est ainsi que Poincaré put découvrir les relations particulières très cachées qui prennent naissance entre les périodes des intégrales abéliennes lorsque la courbe algébrique dont elles dérivent vérifie une équation différentielle linéaire, grâce à l'isomorphisme qui a lieu entre le groupe de cette équation linéaire et celui que la théorie des fonctions fuchsiennes conduit à introduire pour représenter la courbe. Par l'intermédiaire des belles recherches de MM. Frobenius et Cartan, cette analyse, dont il faudrait aussi dire les relations avec l'Algèbre proprement dite et la théorie de Galois, se rattache à une autre découverte de Poincaré, la liaison entre les quantités complexes les plus générales et la théorie des groupes.

Ce sont également, pour une grande partie, les fonctions fuchsiennes qui lui permirent de traiter les cas singuliers des fonctions abéliennes; il s'agit des cas de *réduction*, dans lesquels, parmi les intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique, en figurent une ou plusieurs susceptibles de dériver d'une courbe plus simple, c'est-à-dire de genre inférieur.

On verra par son *Analyse* (1) comment, conduit une première fois à cette question par la précédente, il y fut ramené un peu plus tard par deux théorèmes de Weierstrass. Lorsqu'il eut fourni et généralisé la démonstration de ces théorèmes (que Weierstrass n'avait pas publiée), d'autres conséquences lui apparurent.

Ici encore, ce fut la théorie des fonctions fuchsiennes qui lui fit apercevoir quelques-unes des plus lointaines, et cela non seulement parce qu'elle domine la question au point de vue analytique, mais aussi parce qu'elle apporta l'aide efficace de sa figuration géométrique, si lumineuse, nous l'avons dit, en ce qui regarde les relations d'un groupe fuchsien avec ses sous-groupes.

Poincaré considère en particulier les cas où la réduction entraîne, entre deux courbes algébriques, une correspondance simplement rationnelle. De cette propriété ressortent, lorsqu'on lui applique les principes de la théorie des fonctions fuchsiennes, une série de conséquences aussi simples et aussi élégantes qu'elles sont cachées au premier abord.

Les cas de dégénérescence dont nous venons de parler ne furent pas simplement pour Poincaré des difficultés à résoudre. Ce furent, au contraire, les propriétés de ces fonctions dégénérées qui l'aidèrent par la suite à pénétrer celles des autres fonctions abéliennes.

---

(1) Deuxième partie, X. *Œuvres*, t. IV, p. 290-298.

Mais cette deuxième catégorie de recherches découle d'une tout autre source, et, avant de les aborder, il nous faut avoir laissé de côté les transcendantes particulières pour nous occuper de la théorie générale des fonctions analytiques.

2. Relations avec l'Arithmétique. Ensembles. Groupes continus.

Toutefois, avant d'abandonner les groupes et les fonctions fuchsiennes, nous parlerons de travaux qui, dans l'œuvre de Poincaré, s'y rattachent plus ou moins étroitement.

Tel est d'abord le cas pour la partie de cette œuvre qui touche à l'Arithmétique.

A côté des perspectives largement ouvertes de l'Analyse pure et de ses applications géométriques et physiques, la théorie des nombres, isolée, au moins en apparence, du reste de la Science, n'a pas cessé cependant d'être cultivée par les mathématiciens de race. Avec MM. Jordan et Picard, c'est surtout Poincaré qui contribua à perpétuer à cet égard, dans notre pays, la tradition d'Hermite. Nous avons dit que de cette tradition procèdent des notes presque contemporaines de la Thèse dont nous avons parlé en commençant. Poincaré transporte dès cette époque les méthodes d'Hermite au cas le plus général des formes de degré quelconque à un nombre quelconque de variables.

Nul domaine où ces généralisations soient plus cachées que celui de l'Arithmétique qui nous occupe en ce moment. La discontinuité qui en fait le caractère essentiel s'y révèle en quelque sorte, au point de vue logique, par celle qui sépare souvent les notions destinées à se montrer analogues entre elles, en ne les laissant se rattacher les unes aux autres que par un fil ténu. En lisant les Notes dans lesquelles Poincaré traite ainsi les notions de *genre* et d'*ordre* d'une forme, on se convaincra à quel point de telles analogies sont difficiles à saisir. Poincaré sut les rendre claires et évidentes et par conséquent, là comme ailleurs, introduire la simplicité et la cohésion là où semblait devoir régner l'artifice. C'est ce qui apparaît encore à un haut degré dans ses recherches sur la réduction des formes.

M. Jordan venait de montrer que la méthode même d'Hermite permet d'établir pour les formes quelconques, le théorème d'après lequel le nombre des classes algébriquement équivalentes est fini. Poincaré, poursuivant la même voie, put ainsi généraliser la notion de réduction, généralisation que (comme la précédente, d'ailleurs) Hermite n'avait donnée, du moins pour des variables en nombre supérieur à 2, que relativement aux formes décomposables en facteurs linéaires.

Avec Poincaré, on peut dire que toute question disparaît, en ce sens qu'une idée d'une rare simplicité fournit d'un seul coup la règle applicable à tous les problèmes de cette catégorie. La réduction demandée est décomposée en deux opérations dont l'une ne dépend que de l'Algèbre : c'est la réduction de la forme donnée, au sens purement algébrique du mot. L'autre opération est entièrement indépendante de la forme considérée et ne dépend que des propriétés du groupe arithmétique : c'est une sorte de réduction par rapport à ce groupe, des substitutions du groupe linéaire de l'Algèbre, réduction qu'on sait effectuer par cela même qu'on sait réduire les formes quadratiques définies.

La solution de cette seconde partie du problème élimine, en somme, toutes les difficultés de nature arithmétique.

La réduction des formes cubiques ternaires se présente comme application immédiate de ce principe.

Ces recherches, ainsi que celles que Poincaré consacra à l'étude des points de coordonnées rationnelles sur une courbe du troisième degré, sont fondamentales dans la théorie, si peu explorée encore, des formes de degré supérieur.

La théorie des formes quadratiques dut, elle aussi, à Poincaré des progrès essentiels; et ceci nous ramène aux fonctions fuchsiennes.

C'est, on le sait, un titre de gloire de quelques-uns des plus grands mathématiciens du XIX^e siècle — de Dirichlet, de Riemann, d'Hermite entre autres — que d'avoir su éclairer l'Arithmétique à l'aide de l'analyse du continu qui semblait, au premier abord, ne devoir jamais y pénétrer.

Ce résultat remarquable a même été obtenu de deux manières entièrement différentes. Le point de départ de Riemann est le même que celui de Dirichlet (et aussi, au fond, que celui qui a servi à Jacobi dans les *Fundamenta*). Mais celui d'Hermite est sans rapport avec le premier.

Grâce aux fonctions fuchsiennes, Poincaré réussit à son tour à établir une alliance analogue, et cela sous deux formes, elles-mêmes profondément distinctes, respectivement en relation avec les deux grands principes qui viennent d'être mentionnés. Aux idées d'Hermite se rattachent les recherches que Poincaré entreprend sur les formes quadratiques, dans le cas qui appelle le plus de recherches, celui des formes indéfinies. La particularité qui fait la difficulté et l'intérêt de cette catégorie de formes est, on le sait, que chacune d'elles se reproduit sans altération par une infinité de substitutions linéaires formant un groupe discontinu. Or on est ainsi ramené aux groupes fuchsiens.

Non seulement ceux-ci se trouvent ainsi — et cela, comme le montre Poincaré ([1]), par l'intermédiaire de la Géométrie non euclidienne — éclairer la théorie des nombres, mais il est remarquable qu'en l'espèce l'inverse a également lieu : c'est par cette voie qu'on étend à certaines fonctions fuchsiennes la seule propriété remarquable des fonctions elliptiques dont l'extension, dans ce domaine, ne paraît pas pouvoir se faire d'une manière entièrement générale, le théorème d'addition. Poincaré montre, en invoquant une fois de plus les propriétés géométriques des polygones générateurs, que cette extension dépend d'une sorte de commensurabilité entre le groupe de la fonction fuchsienne et une substitution déterminée, non comprise dans ce groupe; et cette commensurabilité, qui n'existe pas dans le cas général, se présente au contraire lorsque le groupe fuchsien considéré a une origine arithmétique.

Mais ce rapprochement n'est pas, nous l'avons dit, le seul que Poincaré ait établi entre les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique. Dès le début de ses recherches, en effet, il a donné du problème de l'équivalence une solution générale toute nouvelle, fondée sur l'extension au domaine arithmétique de la notion d'invariants. Grâce à la discontinuité des groupes auxquels conduit la théorie des nombres, les invariants arithmétiques existent là même où il n'y a point d'invariants algébriques et, indépendamment d'expressions par intégrales définies, ils en possèdent d'autres sous forme de séries sur lesquelles leur propriété d'invariance est mise immédiatement en évidence. Les séries auxquelles on aboutit ainsi sont très voisines des séries connues de Dirichlet, mais leur formation, qui par conséquent se rattache aux recherches de ce géomètre, s'inspire cependant, comme on le voit, d'un principe d'une bien plus grande généralité et dont la relation avec les méthodes suivies en Algèbre apparaît immédiatement.

Elles sont, d'autre part, étroitement liées aux séries Θ d'une part, aux fonctions fuchsiennes de l'autre et montrent la relation qui existe entre ces deux sortes de fonctions par l'intermédiaire de la fonction modulaire. C'est ce point de vue qui a donné à Poincaré de nouveaux développements des fonctions elliptiques.

L'étude de la catégorie de fonctions fuchsiennes à laquelle appartient ainsi

([1]) *Analyse*, p. 97. *Œuvres*, t. V, p. 8.

la fonction modulaire devait attirer à nouveau son attention; elle fait l'objet du dernier travail qu'il nous ait laissé (¹).

Outre la théorie des formes, les deux principaux chapitres de l'Arithmétique moderne sont la théorie des nombres premiers et celle des idéaux. Poincaré les a abordés tous deux ensemble dans le Mémoire intitulé *Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff*. La méthode du géomètre russe, conservée dans son principe général, a dû subir d'importantes modifications pour s'adapter à ces nouvelles circonstances. Il est remarquable que le résultat obtenu soit indépendant de deux éléments qui s'introduisent d'une manière nécessaire dans les calculs, le nombre des unités indépendantes du corps considéré et celui des classes d'idéaux qu'il renferme, et que d'autre part, ce résultat relatif aux nombres imaginaires puisse servir à étudier la distribution des nombres premiers réels entre les formes $4n+1$, $4n+3$.

Enfin, rappelons qu'une des premières publications de Poincaré avait enrichi, en même temps que rassemblé dans une synthèse particulièrement lumineuse, les propriétés des corps quadratiques et des idéaux correspondants, en les rattachant à une nouvelle théorie géométrique des réseaux (au sens de Bravais). On sait avec quel succès une synthèse analogue fut reprise plus tard par M. Klein.

*
* *

D'autre part, vers le même temps où Poincaré se révélait, deux théories générales nouvelles sont venues modifier la marche de la science : la théorie des *groupes continus* de S. Lie et celle des *ensembles* de Cantor.

L'une et l'autre ne pouvaient manquer de recevoir de Poincaré d'importantes contributions.

La première lui doit une étude nouvelle de ses notions générales, qu'il éclaire (²) grâce à un remarquable emploi de l'intégrale de Cauchy, en montrant, en particulier, que les problèmes que Lie avait réussi à ramener à des équations différentielles peuvent se résoudre par quadratures, sinon par des opérations entièrement algébriques.

Mais la théorie des groupes continus vaut surtout par ses applications. On

(¹) Ce Mémoire (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1913. *Œuvres*, t. 2, p. 592-618). n'a paru qu'après la mort de Poincaré et ne figure pas dans la liste qui précède son *Analyse*.

(²) *Voir* p. 93 de son *Analyse*, *Œuvres*, t. V, p. 4.

doit à Poincaré l'une des plus remarquables et des plus inattendues, celle qui est relative aux *quantités complexes* en général, c'est-à-dire aux diverses généralisations que, après Hamilton, Grassmann et d'autres, on peut essayer de donner à la théorie des imaginaires. Poincaré montre que ce problème se ramène entièrement à l'étude et à la discussion de certains groupes continus linéaires.

La théorie de Lie intervient d'ailleurs dans plusieurs autres travaux de Poincaré. Elle joue par exemple, un rôle essentiel dans les recherches dont nous parlerons plus loin sur la représentation conforme et les fonctions de deux variables et c'est par elle, ne l'oublions pas, qu'il guida la théorie naissante de la relativité.

Ailleurs, il montre que son emploi s'impose dans un sujet qui semblait épuisé, la mise en équations des problèmes de Mécanique rationnelle. Dans la méthode classique suivie à cet égard, les déplacements virtuels sur lesquels on opère sont obtenus en faisant varier isolément chaque paramètre; si au contraire, comme Poincaré est obligé de le faire en vue de certaines applications à la Mécanique céleste, ces déplacements virtuels sont choisis d'une manière quelconque, il montre qu'on doit les traiter comme des transformations infinitésimales et introduire la structure du groupe ainsi défini.

L'histoire des relations de Poincaré avec la théorie des ensembles est plus curieuse. Nous avons dit, en effet, qu'il la devança (*voir* plus haut, p. 161) en l'appliquant avant même qu'elle fût née, et cela dans un de ses résultats les plus saillants et les plus justement célèbres.

Cette théorie s'est depuis constamment remontrée vers la plume. Qu'il s'agisse de théorie des fonctions, d'équations différentielles, on la verra toujours se présenter à lui, comme elle s'imposera désormais à tout géomètre qui, dans un domaine quelconque, tentera d'aller véritablement au fond des choses.

Les hauts problèmes qu'elle soulève en elle-même ne pouvaient, eux non plus, laisser Poincaré indifférent. Il les a traités ici-même ([1]) et repris souvent dans ses livres. Le terme de « définition non prédicative » qu'il a introduit, suffit à réfuter plusieurs des sophismes dont les notions fondamentales relatives aux ensembles étaient l'objet ([2]).

([1]) *Acta*, t. 32, 1909, p. 195-200. *Œuvres* : Ce Volume p. 114-119.

([2]) Le seul raisonnement que nous défendrions contre les critiques de Poincaré à ce point de vue est celui de M. Zermelo sur la possibilité d'ordonner un ensemble quelconque.

3. La théorie générale.

Avec Gauss, Cauchy, Riemann, Weierstrass, la notion précise de ce qu'on doit entendre par *fonction analytique* était acquise. La théorie en était faite, au fond, sur le modèle qu'offrait naturellement l'Algèbre. Toute fonction analytique peut être représentée, dans tout domaine suffisamment restreint, sauf au voisinage de certains points particuliers, par un développement en série entière.

Certaines d'entre elles peuvent être ainsi représentées, par un développement unique, pour toutes les valeurs de la ou les variables : ce sont les *fonctions entières*. Dans le cas d'une seule variable indépendante, Weierstrass avait réussi à étendre à ces fonctions le théorème de la décomposition en facteurs, sous une forme identique à celle des polynomes, à ceci près qu'aux facteurs binomes classiques de l'Algèbre venaient s'adjoindre, et cela à deux titres différents, des facteurs exponentiels.

Après ces fonctions entières viennent les fonctions *méromorphes*, analogues aux fonctions rationnelles et qui se comportent comme elles au voisinage d'un point quelconque (à distance finie). Grâce au théorème qui lui a donné la décomposition en facteurs, Weierstrass montre qu'une fonction méromorphe d'une seule variable est le quotient de deux fonctions entières, pendant que le théorème de M. Mittag-Leffler étend à ce domaine la décomposition en éléments simples.

Ces deux cas sont les plus élémentaires. D'autres beaucoup plus compliqués peuvent se présenter, même si l'on se borne aux fonctions uniformes. Mais celles-ci sont loin d'être la règle. La grande difficulté de la théorie est précisément l'existence des fonctions non uniformes, qui, en un certain sens, mettent en défaut la définition même de la notion de fonction.

De ces fonctions non uniformes, on n'avait qu'une notion purement négative, du moins dans le cas général. Quelques catégories particulières avaient seules été étudiées. A la plus classique d'entre elles, celle des fonctions algébriques, Poincaré avait, dès la Thèse dont nous avons parlé plus haut, adjoint sa généralisation la plus naturelle et la plus importante, celle des fonctions *algébroïdes*, que ses recherches de Mécanique analytique devaient ramener souvent sous sa plume.

Dès que le nombre des variables devenait supérieur à 1, il ne restait de tout cela que le point de départ : le développement en série entière, applicable à une fonction analytique quelconque dans le voisinage d'un point non singulier, et à une fonction entière dans tout l'espace. En particulier, la décomposition en facteurs de ces fonctions entières n'ayant plus lieu, la démonstration donnée par Weierstrass de l'expression d'une fonction méromorphe par le quotient de deux fonctions entières disparaissait du même coup.

De l'outil qui permet de manier si sûrement les fonctions d'une variable, la théorie des fonctions de deux variables ne possédait que le manche.

Tel était l'état de cette branche de la science à la venue de Poincaré. Voyons comment, grâce à lui, l'évolution ultérieure fut possible.

Tout paraissait dit, en un sens, en ce qui regarde les *fonctions entières d'une variable*. Cependant, Laguerre avait montré, à l'aide de la formule de décomposition en facteurs, que, comme les polynomes, les fonctions entières ne devaient pas être placées toutes sur le même plan et présentaient des degrés de complication inégaux tout au moins sous ce point de vue. Avec une pénétration qui a été justement admirée, il avait appris à mesurer cette complication par un nombre, *le genre*, qui fait intervenir à la fois les deux espèces de facteurs exponentiels mentionnées plus haut.

Le problème se posa alors, pour Poincaré, de savoir si cette complication plus ou moins grande de la décomposition en facteurs de Weierstrass avait ou non son retentissement sur les autres propriétés de la fonction. Il put montrer qu'en effet toute limitation supposée connue pour le genre en entraînait une correspondante pour l'ordre de grandeur du module de la fonction elle-même et aussi pour celui des coefficients de son développement, c'est-à-dire pour ses propriétés les plus simples et, en général, les plus aisément constatables.

Ainsi fut fondée la nouvelle théorie des fonctions entières. C'est, en effet, de ce résultat et aussi, ajoutons-le, d'un célèbre théorème dû à M. Picard, qu'est sortie toute cette théorie, telle qu'elle s'est développée dans le cours de ces dernières années.

C'est d'ailleurs de la même source que découlent encore les progrès apportés, principalement par MM. Borel et Boutroux, à l'étude des fonctions méromorphes : car la méthode employée en cette circonstance dérive manifestement de celle qui est appliquée aux fonctions entières.

On peut même en dire autant pour le point essentiel : c'est en effet dans le même ordre d'idées que les fonctions présentant cette singularité, et elle seule, autrement dit les fonctions *quasi entières*, ont été traitées par M. Maillet.

Les *singularités non isolées* des fonctions uniformes sont un des sujets qui ont le plus particulièrement préoccupé Weierstrass et les géomètres qui, avec lui, ont exploré la théorie des fonctions, et la réalisation des diverses possibilités qui peuvent se présenter à cet égard a été l'un des buts principaux de leurs efforts. Or, parmi les dispositions les plus étranges qui peuvent se rencontrer, il n'en est pas une dont Poincaré n'ait formé, comme eux, des exemples, mais avec une signification nouvelle.

L'existence de coupures essentielles pour les fonctions dont il s'agit était connue depuis Weierstrass. Mais ce sont les fonctions fuchsiennes, — après la fonction modulaire, il est vrai — qui sont venues nous montrer combien il s'en fallait qu'on dût voir là un simple objet de curiosité.

En même temps, nous avons vu ces mêmes fonctions fuchsiennes imposer à Poincaré une nouvelle catégorie de singularités que l'imagination de ses prédécesseurs n'avait pu concevoir : les points singuliers formant un ensemble parfait non continu.

Reste enfin, à côté de la notion de ligne singulière, la notion toute voisine *d'espace lacunaire*. C'est à Poincaré que l'on doit, à cet égard, l'exemple peut être le plus général et en tout cas, le plus fécond, car la méthode qui y conduit, fondée sur l'introduction d'une série de fractions rationnelles, est celle qui, ultérieurement, a permis à M. Borel d'étendre nos connaissances sur ce sujet.

Mais ici encore, ce n'est pas uniquement pour elle-même et pour mettre en évidence ses singularités que Poincaré forme la série dont il s'agit. Il y est amené nécessairement par les recherches sur les équations différentielles qui font l'objet de sa thèse. Les intégrales qu'il forme n'existent, comme nous le rappellerons plus loin, que moyennant des conditions d'inégalité convenables entre certains coefficients qui figurent dans l'équation et, dès lors, considérées comme fonctions d'un de ces coefficients, elles présentent précisément la singularité qui nous occupe.

Le rôle de Poincaré, à propos des fonctions à espaces lacunaires, a donc été le même que nous lui avions vu jouer vis-à-vis des lignes singulières, des ensembles parfaits discontinus, des courbes sans courbure.

Certes, même si l'une ou l'autre de ces circonstances avait été destinée à ne jamais se rencontrer dans les applications, leur découverte n'en aurait pas moins été importante pour nous. Poincaré nous a montré, dans un de ses discours (1), combien il faut rendre grâces à l'Astronomie d'avoir élargi notre

(1) Voir *La valeur de la Science*, Chap. VI.

esprit par la seule notion de ses distances énormes et d'avoir permis ainsi que « notre imagination, comme l'œil de l'aigle que le Soleil n'éblouit pas, puisse regarder la vérité face à face ». Les singularités dont nous venons de parler tiennent une place analogue, à ceci près qu'elles ont soumis notre imagination à des épreuves autrement rudes encore, et jeté un désarroi passager, non seulement dans les habitudes que nous tenons de nos sens, mais dans celles que nous pouvions croire issues de notre logique elle-même.

Poincaré n'a pas laissé à l'avenir le soin d'utiliser la leçon qui s'en dégageait. Au lieu de signaler de loin d'étranges régions que la science pouvait être exposée à rencontrer sur sa route, il les a traversées pour trouver, au-delà, le but qu'elle avait à poursuivre. Ses découvertes semblent ainsi aller d'un coup aux limites, non seulement de ce que l'humanité d'aujourd'hui peut découvrir, mais de ce qu'elle peut comprendre.

C'est ce que la théorie des fonctions vient à nouveau de nous montrer. La même impression s'imposera à nous, et plus fortement même, lorsqu'il s'agira des équations différentielles. Plus complexe encore qu'en Théorie des fonctions, la vérité que nous verrons alors se dégager des travaux de Poincaré dépasse probablement la capacité actuelle de nos cerveaux.

La théorie des *fonctions non uniformes* fut tirée du néant grâce à un théorème d'une démonstration des plus délicates.

Une fonction analytique quelconque (par conséquent, non uniforme en général) :

$$z = f(x)$$

étant donnée, on peut exprimer x en fonction *uniforme* d'une variable auxiliaire t, de manière que z soit aussi une fonction *uniforme* de t. La conclusion s'étend même à un nombre quelconque de fonctions d'une même variable.

La théorie des fonctions non uniformes est ainsi ramenée à celle des fonctions uniformes.

Un tel fait ne pouvait manquer de s'imposer à un Poincaré après la découverte des fonctions fuchsiennes. Celles-ci, nous l'avons vu, le mettaient en évidence, et fournissaient la variable auxiliaire cherchée, en ce qui regarde les fonctions algébriques. Il y a plus, elles permettent de le démontrer, sinon dans le cas général, du moins dans un cas très étendu, à savoir, toutes les fois que les points singuliers sont en nombre fini et tous réels.

Mais si l'on veut ne faire aucune restriction relativement aux points singuliers, d'autres moyens d'action sont nécessaires.

Ici (comme déjà d'ailleurs pour les fonctions fuchsiennes) ce sont les principes mêmes sur lesquels Riemann avait fondé la théorie des fonctions abéliennes qui s'élargissent entre les mains de Poincaré, et acquièrent l'ampleur nouvelle que la question comporte. D'une part, tout le calcul va reposer sur la formation d'un domaine géométrique, la surface de Riemann, par lequel on peut se représenter la variation simultanée de z et de x. En second lieu, un élément physico-mathématique, la théorie du potentiel, joue dans ce calcul le rôle principal. Mais son maniement exige une puissance d'analyse nouvelle, en raison de la complication de la surface de Riemann qui est ici à une infinité de feuillets. La notion d'une telle surface de Riemann, et surtout des fonctions harmoniques correspondantes est très délicate et ne peut être atteinte que par des passages à la limite appropriés.

On aboutit ainsi à la formation d'une certaine fonction analytique t. La propriété essentielle de cette quantité consiste en ce qu'elle ne prend jamais deux fois la même valeur sur la surface. C'est ce que l'on établit aisément à l'aide de l'intégrale classique de Cauchy, étant donné que t est la limite de fonctions t_n qui possèdent la propriété en question.

Cette grandiose découverte de *l'uniformisation des fonctions analytiques* ne pouvait manquer de provoquer les recherches des géomètres, du moins de ceux qui, capables de ressentir son importance, avaient aussi les forces nécessaires pour aborder ce sujet (1). A la suite de ces travaux, Poincaré revint lui-même sur sa découverte pour la compléter.

Dans l'intervalle, il avait donné, pour la résolution des problèmes fondamentaux de la théorie du potentiel, une méthode nouvelle, celle du *balayage*. Créée, semble-t-il, en dehors de la préoccupation du problème qui nous occupe, cette méthode se trouvait cependant s'y adapter d'une manière remarquablement parfaite. L'une des difficultés de la question est, nous l'avons dit, la présence d'une infinité de feuillets de la surface de Riemann, dont, par suite de cette circonstance, la forme *totale* et en particulier la frontière ne peuvent, au moins au premier abord, être définies sans de sérieuses difficultés. Or il se trouve que celles-ci ne gênent en aucune façon l'application de la méthode du balayage, pour laquelle il suffit de suivre la marche même, classique depuis Weierstrass, de la définition d'une fonction analytique par une suite indéfinie d' « éléments ».

---

(1) Outre les auteurs dont nous parlerons dans un instant, nous nous contenterons de citer ici M. Kœbe.

Poincaré avait, d'autre part, à l'occasion de son enseignement à la Faculté des Sciences de Paris, perfectionné toute la technique de la théorie des fonctions harmoniques : il avait, par exemple, reconnu tout le parti qu'elle peut tirer d'un remarquable théorème de Harnack.

Fort de ces nouveaux moyens d'action, il put, répondant à un desideratum de M. Hilbert, écarter en toute certitude pour les fonctions cherchées, les trois points singuliers dont le raisonnement primitif n'excluait pas la possibilité.

D'autre part, les fonctions obtenues ont, en général, un domaine d'existence limité par une ligne singulière essentielle (un théorème de M. Picard est venu montrer que la solution n'est pas possible sans l'introduction de fonctions présentant ce caractère). MM. Osgood et Brodén s'étaient préoccupés de déterminer la forme exacte du domaine qui, dans le plan de la variable t, correspond ainsi à la surface de Riemann donnée. La nouvelle méthode de démonstration permet de préciser davantage les résultats de ces deux auteurs.

Enfin, chose plus précieuse encore, elle fournit la solution la plus simple, — et non plus une solution quelconque —, du problème posé. Dès lors, cette solution est parfaitement déterminée, du moins à une substitution linéaire près. De là ressort encore, comme conséquence, une propriété fonctionnelle qui place les fonctions obtenues à côté des fonctions fuchsiennes.

Ce n'est pas la seule contribution que Poincaré ait apportée à la théorie des fonctions non uniformes. Tout d'abord, c'est à lui qu'on doit la limitation, — au sens de la théorie des ensembles — de la multiplicité des valeurs que peut prendre une telle fonction pour une valeur unique de la variable et aussi des « éléments » (au sens de Weierstrass) qui suffisent à la représenter : limitation essentielle d'ailleurs au second raisonnement par lequel il a établi le théorème d'uniformisation.

De plus, il a indiqué une méthode permettant d'établir que toute fonction analytique z — en général, non uniforme, — de la variable x peut être définie par une équation de la forme $G(z, x) = 0$, où G est une fonction entière : progrès moins essentiel peut-être que le théorème d'uniformisation, mais, néanmoins, extension importante aux fonctions transcendantes de la propriété fondamentale des fonctions algébriques.

Mais cette méthode est en relation avec les travaux dont nous avons à parler en second lieu, et qui concernent l'étude des fonctions de plusieurs variables.

*
* *

Pour celle-ci plus encore que pour la précédente, on peut dire que les impulsions décisives viennent de Poincaré.

Dans cet ordre d'idées, un seul théorème, le *Vorbereitungssatz* avait été antérieurement obtenu. Mais, par deux fois, il était resté ignoré du public scientifique. Weierstrass l'a réservé, comme il le faisait souvent, au cercle restreint de ses auditeurs, jusqu'en 1886, et M. Lindelöf a été le premier à découvrir ([1]) que le véritable auteur en est Cauchy.

Il peut n'être pas inutile, dans ces conditions, de noter que les résultats relatifs aux fonctions algébroïdes, obtenus par Poincaré dans sa Thèse, équivalent au théorème en question ([2]).

Celui-ci d'ailleurs, pour Poincaré comme pour Weierstrass, n'était que préparatoire. L'étude des fonctions de plusieurs variables ne fut véritablement inaugurée que lorsque, peu d'années après, Poincaré réussit à leur étendre le théorème de Weierstrass sur les fonctions *méromorphes*.

Quel que soit le nombre des variables, une telle fonction est caractérisée par la propriété de se comporter au voisinage d'un point quelconque — autrement dit, *localement* — comme une fonction rationnelle. Localement donc, elle s'exprime par le quotient de deux séries entières convergentes dans un rayon suffisamment petit. C'est ce résultat qu'il s'agit d'étendre à tout l'espace en exprimant la fonction considérée par le quotient de deux séries entières *toujours* convergentes.

Nous avons dit qu'on ne pouvait songer à employer, à cet effet, la méthode qui réussit dans le cas d'une variable. Poincaré recourt encore une fois à la théorie du potentiel ou plutôt à la théorie analogue dans l'espace à quatre dimensions, celle des fonctions V qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0.$$

Cette méthode semble cependant, au premier abord, inapplicable au problème actuel. L'équation aux dérivées partielles précédente ne suffit plus, en effet, à caractériser la partie réelle d'une fonction analytique : cette partie réelle doit satisfaire à quatre équations aux dérivées partielles et non à une seule. Il

---

([1]) *Voir* ses *Leçons sur la théorie des résidus* (Paris, Gauthier-Villars, 1905, note de la page 27).

([2]) Ils en fournissent même une extension, dans laquelle, au lieu de l'équation obtenue en égalant une fonction unique à zéro, on considère un système d'équations à plusieurs inconnues.

semble donc que la formation d'un potentiel vérifiant l'unique équation ci-dessus écrite soit sans valeur au point de vue du résultat final.

Il n'en est rien : si l'on a obtenu ce potentiel, Poincaré montre qu'il suffit d'y ajouter une fonction régulière convenable pour intégrer l'ensemble des quatre équations mentionnées tout à l'heure et en déduire la fonction qu'il a en vue, à savoir le logarithme du dénominateur cherché.

Quant à la formation du potentiel en question, elle consiste en une sorte de raccordement analytique entre plusieurs fonctions (les logarithmes des dénominateurs des diverses fonctions qui représentent localement la fonction donnée) définies chacune dans une portion seulement de l'espace, mais dont les différences mutuelles dans les régions où deux d'entre elles existent à la fois, sont régulières. Ce raccordement, l'emploi de potentiels, tous analogues aux potentiels de simples et de doubles couches, permet de l'opérer. Lorsqu'il s'agit enfin de passer à la limite pour le cas de l'espace indéfini en tous sens, la méthode à appliquer est connue : c'est celle par laquelle on démontre le théorème de M. Mittag-Leffler sur le développement des fonctions méromorphes d'une variable en série d'éléments simples.

Poincaré a eu à revenir sur la démonstration de ce théorème, pour l'adapter à la théorie des fonctions abéliennes. Dans ce cas, en effet, la fonction donnée étant périodique, il importe de diriger le calcul de manière que le numérateur et le dénominateur obtenus possèdent eux-mêmes, non la périodicité proprement dite, mais, à la façon des fonctions Θ (auxquelles, dès lors, ils se ramènent) — la périodicité de troisième espèce au sens d'Hermite, qui est à la périodicité ordinaire ce que l'invariance relative est à l'invariance absolue. Poincaré reprend, à cet effet, la démonstration de son théorème général, tant celle qu'il avait donnée que celle qui avait été fournie depuis par M. Cousin. Il en indique même, dans le même but, une autre, toute différente de celles dont il vient d'être question par la nature des potentiels employés. Au lieu d'être, dans l'hyperespace, les analogues d'un potentiel newtonien de surface, — comme dans la démonstration primitive — ceux-ci peuvent, en effet, être analogues à des potentiels (newtoniens) de lignes attirantes, de sorte que nous devons à cette circonstance la connaissance des singularités (en général logarithmiques) des potentiels de cette espèce.

Un autre point important de la théorie des fonctions d'une variable attirait l'attention au point de vue de son extension au cas actuel : la notion de *résidu*, base des plus belles découvertes de Cauchy. En général, c'est-à-dire dans toute région ne comprenant pas de points singuliers, l'intégrale d'une fonction analytique le long d'un contour fermé est nulle. Au contraire si ce contour contient à son intérieur un point singulier, l'intégrale est proportionnelle à un certain nombre déterminé, caractéristique et en quelque sorte, mesure de la singularité, qui est le résidu.

Cette pierre angulaire de la théorie de Cauchy devait être transportée à la théorie des fonctions de deux variables, si l'on voulait fonder utilement celle-ci. Il fallait, à cet effet, considérer les intégrales doubles prises le long de multiplicités fermées de l'espace à quatre dimensions, et montrer tout d'abord que ces intégrales étaient indépendantes de la forme de la surface d'intégration (tant que celle-ci varie continûment sans rencontrer de singularités), une condition d'intégrabilité analogue à celle qui intervient pour les différentielles totales ordinaires étant vérifiée.

Mais ceci fait, le calcul de la valeur de cette intégrale autour d'une singularité donnée, présentait des difficultés inattendues. Stieltjes qui l'avait effectué dans un cas particulier, n'avait pu le publier, le résultat donnant lieu à une objection qui semblait sans réplique. Dans l'intégrale qu'il avait traitée, la quantité sous le signe $\iint$ était de la forme $\frac{P}{QR}$, P, Q, R étant trois polynomes entiers dont les deux derniers s'annulent ensemble sur la singularité considérée. Or Stieltjes trouvait, pour le résidu, une valeur qui change de signe quand on permute entre eux les deux facteurs du dénominateur.

Pour faire cesser cette contradiction apparente, il fallait arriver à une vue exacte et pénétrante des propriétés géométriques d'une figure tracée dans l'hyperespace. Poincaré montra ainsi comment l'ordre des deux facteurs en question influe, dans cet exemple, sur le sens de l'intégration.

Ces deux séries de recherches de Poincaré restèrent longtemps la seule base des travaux entrepris sur les fonctions de deux variables [1]. Les plus importants, tels que celui de M. Cousin, dérivent du théorème sur les fonctions méromorphes et fournissent une seconde démonstration de ce théorème.

Ce vaste domaine des fonctions de plusieurs variables devait, plus tard, offrir encore à Poincaré un autre objet de méditations. La *représentation conforme*

---

[1] C'est seulement dans ces toutes dernières années que d'autres voies se sont ouvertes avec des travaux parmi lesquels nous nous contenterons de citer ceux de MM. Faber, Hahn, Hartogs, E. E. Levi, etc.

offre, dès le cas d'une variable, un remarquable exemple de la différence profonde qui existe entre les propriétés *locales* des fonctions et celles qui interviennent lorsqu'on les considère non plus au voisinage immédiat d'un point, mais dans tout leur domaine d'existence.

Le problème (problème *local*) qui consiste à représenter, par l'intermédiaire d'une fonction analytique, un *arc* (suffisamment petit) d'une courbe donnée c sur un arc d'une autre courbe donnée C a, en effet, une infinité de solutions dépendant d'une infinité d'arbitraires, tandis que le problème *étendu* qui consiste à représenter, dans les mêmes conditions, la courbe fermée c *tout entière*, sur la courbe fermée C (et l'aire s limitée par c sur l'aire S limitée par C) est, au contraire, déterminé à une substitution homographique près.

A cette différence, on aperçoit immédiatement deux raisons : la première résidant dans ce fait que les courbes c et C sont fermées et que dès lors le prolongement de la fonction cherchée tout le long de ces courbes doit présenter par rapport à l'arc de l'une d'elles, par exemple, une périodicité qui n'apparaissait point lorsqu'on se bornait à considérer des parties très petites des courbes en question ; la seconde, dans celui que la fonction cherchée ne doit pas seulement être définie au voisinage de c, mais dans tout l'intérieur de s.

C'est cette étude que Poincaré transporte au cas de deux variables, en séparant même, par l'introduction d'un problème intermédiaire (¹) (dans lequel on demande que les fonctions cherchées soient régulières sur toute la frontière, mais non dans tout le domaine qu'elle limite) ces deux caractères qui différencient l'un de l'autre le problème local et le problème étendu. Les résultats changent d'ailleurs notablement de forme dans cette extension. Le problème local cesse lui-même d'être possible en général. Une infinité de conditions de possibilité apparaissent et ces conditions de possibilité introduisent une série d'invariants différentiels, obtenus en écrivant que la transformation de l'une des frontières données en l'autre est possible, dans la région infiniment voisine d'un point donné, aux infiniment petits du $n^{\text{ième}}$ ordre près.

Ce Mémoire de Poincaré ouvre d'ailleurs la voie à toute une série de recherches où, comme il l'a montré, intervient d'une manière nécessaire l'étude approfondie de certains groupes continus.

*
* *

(¹) En vertu d'un théorème de M. Hartogs, il se trouve que la solution de ce problème intermédiaire peut être utilisée pour celle du problème étendu.

C'est à ces propositions fondamentales sur les fonctions de plusieurs variables qu'il faut rattacher les résultats obtenus par Poincaré sur les fonctions abéliennes, ceux qui dérivent de l'application des fonctions fuchsiennes exceptés. Leur point de départ est la distinction qu'il établit entre la théorie des *fonctions* abéliennes et celle des *intégrales* abéliennes, théories que, depuis Riemann, on était habitué à confondre l'une avec l'autre.

Si, comme on le sait depuis Riemann, les intégrales des fonctions algébriques s'expriment par le moyen des séries Θ, la solution ainsi obtenue dépasse en quelque sorte le but. Certaines fonctions Θ correspondent à des problèmes de quadrature de l'espèce indiquée, mais elles sont *spéciales;* il en existe une foule d'autres qui n'ont point une origine de cette espèce.

Quelles sont les relations qui caractérisent ainsi les fonctions Θ spéciales ? — et, d'autre part, que peut-on dire des autres fonctions Θ ?

Mais auparavant, une autre question analogue se présentait, qui s'était déjà posée à Riemann même (lequel l'avait signalée à Hermite, puis à Weierstrass et qui, en même temps que Poincaré préoccupa MM. Picard et Appell (1), celle de savoir si les fonctions périodiques obtenues comme quotients de fonctions Θ sont les plus générales parmi celles qui présentent le même nombre de périodes.

Cela est d'autant moins évident que les fonctions Θ ne peuvent pas être formées avec des périodes entièrement arbitraires. Au contraire il ne semble nullement *a priori*, que la définition des fonctions périodiques doive impliquer, entre ces périodes, une condition quelconque. C'est cependant ce qui a lieu et toute fonction méromorphe $2p$ fois périodique de p variables complexes peut être représentée par un quotient de séries Θ. Poincaré publia sur ce point, en collaboration avec M. Picard, une démonstration qui, un peu plus tard fut reconnue identique à celle qu'avait obtenue Weierstrass. Noüs avons dit que le même fait se présenta plus tard à lui comme une simple conséquence du théorème fondamental sur les fonctions méromorphes, moyennant une étude plus approfondie des opérations par lesquelles on établit ce théorème.

Ceci élucidé, il fallait entreprendre l'examen des fonctions Θ indépendamment de toute origine algébrique, pour apprendre à distinguer entre les fonctions Θ appelées plus haut *spéciales* (c'est-à-dire celles qui ont une telle origine) et les autres.

(1) Voir *Analyse*, p. 82; *Œuvres*, t. IV, p. 293,

Dans cet ordre d'idées, Poincaré, dès 1883, considère un système de p fonctions Θ à p variables, toutes aux mêmes multiplicateurs, et détermine le nombre des solutions (essentiellement distinctes, c'est-à-dire telles que la différence de deux quelconques d'entre elles ne soit pas une période) communes aux équations obtenues en égalant ces fonctions simultanément à zéro.

C'est à cette occasion que Poincaré utilise, pour la première fois, le théorème par lequel Kronecker venait d'exprimer le nombre des solutions d'un système donné, admirable instrument qui semblait avoir été créé en vue d'un tel ouvrier, et que nous retrouverons à tant de reprises dans l'étude de son œuvre. Grâce à lui, il put montrer que le nombre en question ne dépend que du nombre p des variables et du degré des fonctions Θ.

La différence entre le point de vue de Poincaré et celui de ses prédécesseurs apparaît par la comparaison entre cette question et celle que s'était posée Riemann relativement au nombre des zéros d'une fonction Θ du premier degré. Si, dans une telle fonction, on substitue aux p variables les valeurs des p intégrales abéliennes de première espèce attachées à un même point M de la courbe, on a une équation (à une inconnue, cette fois) qui admet p solutions.

Cet énoncé diffère, on le voit, du précédent, non pas seulement en ce que la fonction Θ considérée doit être spéciale, mais en ce que les variables ne peuvent prendre que des valeurs très particulières, ne dépendant que d'un seul paramètre et non de p. Poincaré étend d'ailleurs le résultat de Riemann aux fonctions Θ de degré quelconque (le nombre des solutions devenant alors égal à np) et à une série de questions qu'on peut considérer comme intermédiaires entre les deux précédentes.

La relation entre ces différents points de vue est également mise en lumière dans la représentation géométrique qu'il emploie.

Il y a n^p fonctions Θ de degré n ayant des multiplicateurs donnés. Si l'on considère les valeurs de ces n^p fonctions Θ comme des coordonnées homogènes dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions, le point qui a ces coordonnées — point qui reste inaltéré par l'addition aux variables d'une période quelconque, puisque toutes ses coordonnées sont multipliées par la même quantité, — décrit, dans cet espace, une variété p fois étendue V. Lorsque les fonctions Θ sont spéciales et dérivent d'une courbe algébrique C, si l'on remplace les variables par les intégrales abéliennes attachées à cette courbe, on a une courbe B située sur V. Le théorème de Riemann étendu par Poincaré montre que cette courbe est algébrique et fait connaître son degré. Poincaré constate d'ailleurs qu'elle est plane, ou, plus exactement, qu'elle est située sur une variété plane à $(n-1)p$ dimensions. Quant au théorème mentionné plus haut sur les zéros communs à p fonctions Θ, il fait connaître le degré de la variété V, laquelle est algébrique, et cela, cette fois, même si les fonctions Θ considérées ne sont pas spéciales.

Un seul résultat appartenant à cette catégorie porte, comme celui de Riemann, sur une seule équation à une seule inconnue, tout en n'exigeant pas que la fonction Θ qui y intervient soit spéciale. Il généralise la relation de Legendre entre les périodes des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce, relation que la théorie des fonctions nous a montrée dépendant du nombre des zéros de la fonction Θ dans un parallélogramme des périodes. Pour arriver à un résultat présentant ces caractères, il fallait vaincre une difficulté de nature géométrique par laquelle cette recherche se rapproche de celles que Poincaré avait développées sur la théorie générale des fonctions de plusieurs variables.

Après avoir, par son théorème de 1883, étendu une proposition classique sur le nombre des zéros d'une fonction elliptique, Poincaré va plus loin et donne une extension analogue à celle qui fait connaître la somme de ces zéros.

Dès le premier de ces deux théorèmes, on voit intervenir occasionnellement comme auxiliaires les cas de réduction dont nous avons parlé précédemment. Cette première intervention n'est toutefois qu'accessoire, pour ainsi dire : l'emploi du théorème de Kronecker ayant montré, comme nous l'avons dit, que le nombre des zéros communs est constant, l'examen d'un cas de réduction où tout se ramène aux fonctions elliptiques fournit simplement la valeur de cette constante.

Mais c'est seulement avec le théorème sur la somme des zéros que ces fonctions abéliennes réductibles jouent un rôle essentiel et, ainsi que les trajectoires périodiques de la Mécanique céleste auxquelles on pourrait à la rigueur les comparer, sont pour nous, toutes particulières qu'elles soient, le moyen d'atteindre toutes les autres fonctions abéliennes.

Poincaré remarque, en effet, qu'on peut trouver, d'une infinité de manières, des fonctions abéliennes réductibles aussi peu différentes qu'on le veut d'une fonction abélienne quelconque donnée, de même qu'au voisinage d'une incommensurable donnée, on peut trouver une infinité de nombres commensurables. Il suffit dès lors de résoudre le problème pour les fonctions réductibles, la solution s'étendant immédiatement, par voie de continuité aux fonctions abéliennes quelconques.

Un nouvel emploi des cas de réduction va également permettre d'aborder le problème principal dont nous avons donné tout à l'heure l'énoncé : la recherche des conditions moyennant lesquelles les fonctions Θ sont spéciales.

Ainsi est exploré tout d'abord l'aspect géométrique du problème. Comme on pouvait au fond, l'inférer des recherches de Lie, et comme Poincaré le démontre d'une façon nouvelle et particulièrement intuitive, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de fonctions Θ soit spécial est que la variété S dont l'équation s'obtient en égalant l'une d'entre elles à zéro soit de translation et cela de deux manières différentes. L'étude de la courbe dont la translation produit ainsi la variété S n'est autre que celle de la courbe spéciale B dont il a été question plus haut (*voir* p. 183). On est ainsi conduit à définir cette courbe en adjoignant à l'équation de S un système d'autres équations analogues. Mais, quoique les variétés représentées par ces équations soient en nombre suffisant pour définir par leur intersection une courbe, elles ne fournissent pas uniquement celle que l'on cherche : l'intersection se décompose, et la courbe cherchée n'est qu'une des composantes.

Pour rendre possible l'intelligence complète du mécanisme de cette décomposition, Poincaré est obligé de faire intervenir à nouveau les cas de réduction. La marche suivie en cette circonstance est celle même qui est classique en Calcul infinitésimal : l'étude (au moins l'étude approchée) des cas infiniment voisins d'un premier cas donné dans lequel la solution est connue ou peut être obtenue. Ce cas initial est ici un cas de réduction. Toutefois l'emploi de la méthode est ici particulièrement difficile. Si, en effet, la discussion d'un cas singulier tel que le cas de réduction est ici la seule prise que nous ayons sur le cas général, les mêmes raisons qui nous la rendent accessible font — et nous retrouverons ce fait à propos des équations différentielles — qu'elle nous offre de ce cas général une image plus ou moins fortement déformée, où toutes les propriétés ont en quelque sorte dégénéré. Aussi ne faut il point s'étonner de ne la voir élucidée que par une dissection d'une finesse extrême et d'y trouver les interprétations aussi délicates que l'est pour le naturaliste celle d'organes dont les formes atrophiées ou régressives sont seules accessibles à l'observation.

Mais la condition qui caractérise une fonction abélienne spéciale doit s'exprimer, en dernière analyse, par une relation entre les périodes. C'est la partie la plus difficile du problème, celle pour laquelle Poincaré ne peut fournir qu'un commencement de solution. La méthode précédente donne cependant, sinon la forme complète des premiers membres des relations cherchées entre les périodes, du moins les premiers termes de leurs développements.

*
* *

Peut-être convient-il de s'arrêter un instant pour jeter sur ce qui précède un coup d'œil chronologique. La théorie des fonctions fuchsiennes aurait à elle seule suffi pour fonder la gloire de Poincaré. Mais si elle fut d'abord la plus remarquée, d'autres, parmi les découvertes qui remontent à la même époque, ne lui cèdent nullement en importance et l'on ne peut enregistrer sans stupéfaction la rapidité avec laquelle elles se succédèrent à partir de 1879, date de la Thèse de doctorat de Poincaré. Parmi celles qui apparurent depuis cette date jusqu'en 1883, nous avons déjà signalé :

les fonctions fuchsiennes;

le théorème fondamental sur le genre, duquel découle toute la théorie des fonctions entières;

l'uniformisation des fonctions analytiques;

la représentation des fonctions méromorphes de deux variables par quotients de fonctions entières;

le théorème sur les zéros des fonctions Θ qui devait donner naissance à la nouvelle théorie des fonctions abéliennes;

l'extension des notions de genre et d'ordre aux formes de degré supérieur, et la notion d'invariants arithmétiques.

Nous avons essayé de donner une idée de l'importance fondamentale de ces différentes découvertes. Mais la plus essentielle peut-être nous reste à mentionner. Nous savons, en effet, que la théorie des fonctions, si grande que soit la place prise par elle dans les mathématiques contemporaines, n'est en somme qu'un moyen. On trouvera naturel, dès lors, que la *théorie des courbes définies par les équations différentielles*, dont nous aurons à parler tout à l'heure ait eu sur toute l'œuvre de Poincaré et sur toute la marche de la science une influence plus décisive encore que les recherches même dont il a été question jusqu'ici. Or, dans ses deux premières parties, elle remonte à la même époque, et de cette période encore date une courte Note, grosse de toute une révolution dans nos conceptions astronomiques.

En quatre années, dans les domaines les plus divers, dans les directions les plus opposées, quelle armée de découvertes primordiales dont chacune aurait suffi à consacrer une réputation. Encore n'avons-nous cité que celles — et non peut-être toutes — qui marquent comme un tournant pour une branche de la science.

Il n'est pas vrai que le temps ne fasse rien à l'affaire, dans la vie d'un grand savant. N'oublions pas que celle de Poincaré, sans avoir la tragique brièveté de la carrière d'un Galois ou d'un Abel devait être arrêtée en pleine fécondité.

L'accumulation de ces œuvres mémorables — un seul tome du *Bulletin de la Société mathématique de France* renferme trois de celles que nous venons de citer — n'en est d'ailleurs pas la seule caractéristique. Le dieu qui les inspirait manifeste son impatience dans leur style même. Dans nombre d'entre elles, — particulièrement dans ces trois articles du *Bulletin de la Société mathématique de France* — deux ou trois pages lumineuses autant que concises, suffisent au *veni*, *vidi*, *vici* d'un triomphe de l'esprit humain.

II. — **Les équations différentielles.**

1. Les voies classiques.

Le centre de la mathématique moderne est, nous l'avons dit, dans la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles.

Il nous faut maintenant montrer Poincaré aux prises avec ce double problème et tout d'abord, avec les équations différentielles.

La place n'est point de celles que l'on puisse emporter de haute lutte; il faut l'attaquer successivement sur toute sorte de points et se contenter d'avantages partiels. Essayons d'énumérer les directions à suivre.

I. On peut se préoccuper de perfectionner (spécialement autour des points singuliers) l'étude que nous avons appelée *locale* des solutions.

II. Il faut, d'autre part, savoir découvrir les cas où celles-ci s'expriment à l'aide de fonctions connues. C'était à eux que l'on réduisait le problème aux débuts du calcul infinitésimal. Tout déchus qu'ils soient de cette ancienne importance, il importe de ne pas les laisser échapper lorsque, exceptionnellement, ils existent.

III. A défaut des fonctions déjà existantes, il peut arriver que certaines transcendantes nouvelles, douées de propriétés qui en permettent l'étude et le calcul, gouvernent, d'autre part, une catégorie étendue d'équations différentielles dont elles permettent d'exprimer les intégrales.

IV. On peut étudier les solutions, supposées analytiques, au point de vue de la Théorie des fonctions et chercher les cas où elles se comportent à ce point de vue d'une manière remarquable.

V. On peut essayer de substituer, dans le cas général, aux développements en séries qui conviennent localement, des développements de forme différente valables pour toutes les valeurs de la variable, etc.

Poincaré suivit avec succès toutes ces voies, en même temps que nous le verrons en frayer d'autres sinon entièrement nouvelles, du moins presque inexplorées avant lui, et plus fécondes que les premières.

Sa Thèse marque surtout un progrès essentiel au premier point de vue qui, nous l'avons dit, dominait depuis Cauchy, celui de l'étude locale des solutions. Elle n'est, en un sens, qu'une généralisation des recherches de Briot et Bouquet sur les points singuliers en lesquels la valeur de $\frac{dy}{dx}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$: généralisation à un système d'équations du premier ordre (¹), au lieu que Briot et Bouquet n'avaient traité qu'une équation unique. Mais ici cette généralisation fait apparaître des résultats de forme toute nouvelle. Dans l'exemple de Briot et Bouquet, un seul coefficient influait sur la forme des résultats, et la discussion ne reposait que sur le signe de ce coefficient. Celle de Poincaré introduit au contraire plusieurs nombres (dépendant, comme le coefficient unique de Briot et Bouquet, des termes du premier degré de l'équation) et les conditions d'inégalité que l'on doit former ne s'expriment aisément que sous forme géométrique, en circonscrivant un polygone convexe au système des points qui ont pour affixes les nombres en question. Le résultat obtenu entraîne dès lors que, considérées comme fonctions de l'un d'eux, les solutions présentent un espace lacunaire (en l'espèce, un polygone rectiligne); c'est l'exemple dont il a déjà été parlé plus haut et qui, comme on le voit, ne pouvait être soupçonné tant qu'on s'en tenait au cas de Briot et Bouquet.

(¹) Poincaré considère plus spécialement, dans ce travail, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre équivalente au système.

Une autre question qui, bien qu'appartenant à cette première catégorie des études locales, soulève de sérieuses difficultés, non encore complètement surmontées, est le calcul des intégrales irrégulières des équations linéaires, les seules que la méthode de Fuchs ne permette pas d'obtenir. Deux sortes de développements, très semblables au premier abord, complètement différents en réalité, peuvent être proposés pour représenter les solutions : les uns sont convergents, mais on ne sait pas en trouver les termes [1], les autres peuvent être formés effectivement à l'aide des données de la question, mais ils sont divergents en général.

Poincaré, utilisant une transformation classique due à Laplace, montre, comme il le fera bientôt en Mécanique céleste, que ces développements divergents ont une signification : ils font connaître, jusqu'à tel ordre de petitesse qu'on le veut, l'allure de la fonction. De plus, il obtient par la même voie une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait convergence.

Sur un point, — la recherche de la limite vers laquelle tend la dérivée logarithmique de la solution — la méthode employée se rapproche beaucoup de celles que nous retrouverons plus loin à propos de l'étude, non plus locale, mais générale du problème des équations différentielles; et dans le fait que la question dont nous parlons en ce moment n'est « locale » qu'en apparence réside sans doute la véritable raison des grandes difficultés de cette question qui mériterait encore tant de nouvelles recherches.

La connaissance des cas où l'intégration se fait par les fonctions classiques a également été notablement étendue par Poincaré. Il en a été ainsi en particulier en ce qui concerne l'intégration des équations linéaires par les fonctions abéliennes. Mais surtout, il s'est attaqué à la question si simple d'énoncé, si difficile en réalité, qui se posait après les recherches de M. Darboux et qui consiste à reconnaître si l'intégrale générale est algébrique. Il a pu, dans plusieurs catégories de cas nouveaux, obtenir le résultat essentiel, la limitation du degré. Ici encore, une partie de ses résultats est due à l'intervention des fonctions fuchsiennes.

Si grandes que soient les difficultés de cette question, on ne doit aujourd'hui, nous l'avons dit, voir là que le petit côté du calcul intégral. Au lieu de recher-

---

(1) On connaît aujourd'hui, théoriquement parlant, grâce aux Mémoires de M. Helge von Koch, un moyen de combler cette lacune en calculant les termes dont il s'agit : nous dirons plus loin comment ce résultat dérive des travaux de Poincaré lui-même.

cher — non sans peine, nous venons de le dire, — si un extraordinaire hasard ne nous a pas mis en face d'une équation intégrable élémentairement, il est autrement important de disposer des transcendantes nécessaires pour intégrer les équations différentielles telles qu'elles se présentent en fait.

A ce point de vue, nul géomètre n'a remporté de victoire plus glorieuse que l'inventeur des fonctions fuchsiennes, qui permettent d'atteindre toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

L'étude des solutions analytiques au point de vue de la théorie générale des fonctions doit à Poincaré un travail qui a joué dans les recherches contemporaines un rôle primordial, quoique la conclusion en ait été essentiellement négative. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse imaginer en ce qui regarde la disposition, inconnue en général, des points singuliers des intégrales d'une équation différentielle, celle des équations a points critiques fixes, avait été pour la première fois considérée par Fuchs. Ce savant était parvenu à écrire un système de conditions moyennant lesquelles les points critiques sont les mêmes pour toutes les solutions d'une même équation du premier ordre. Mais il n'y avait là que l'amorce d'une réponse à la question ainsi posée; il restait à savoir quelles étaient les équations différentielles remplissant ces conditions et si, par leurs intégrales, on pouvait être conduit à des transcendantes nouvelles. Poincaré, pour qui les équations de cette nature se présentaient nécessairement comme généralisation naturelle des équations linéaires qu'il venait d'intégrer, montra que toutes se ramènent à des cas déjà étudiés.

Ceci semblait uniquement terminer, sans laisser apercevoir d'issue nouvelle, les recherches de Fuchs.

Il n'en était rien : ce Mémoire, et particulièrement la méthode employée par Poincaré — méthode sur laquelle nous reviendrons un instant plus loin — devaient servir de base à toute la théorie analytique des équations différentielles qu'on doit à M. Painlevé.

Enfin, dans le cas général, il importe tout d'abord, nous l'avons dit, de former des développements valables pour toutes les valeurs (au moins réelles) de la variable. Aucun résultat de cet ordre n'avait pu être atteint, et l'on voit quelle transformation essentielle un tel résultat devait opérer dans la question, puisque, jusque-là, c'était uniquement à propos d'équations très particulières qu'on avait pu aboutir à autre chose qu'à une étude locale.

Il s'agissait donc déjà de faire faire un pas à la théorie dans une voie toute nouvelle.

Poincaré lui fit franchir ce pas important; il montra qu'il suffit à cet effet d'opérer sur la variable indépendante un changement convenable, après quoi le développement de Taylor lui-même répond à la question.

Appliquée au problème des trois corps, cette méthode permet d'obtenir des développements valables pour toutes les valeurs du temps, sauf dans un seul cas d'exception, celui où, au cours du mouvement, deux corps viennent à se choquer.

C'est cette dernière lacune, — laquelle restait assez importante, car on ne sait pas, *a priori*, avec des circonstances initiales données, si le choc en question peut se produire, et encore moins quand il se produira — que les récents travaux de M. Sundman sont venus combler. L'idée première de sa belle analyse — à savoir, un prolongement analytique de la solution au-delà de l'instant du choc, — a elle-même, ajoutons-le, ses racines dans *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.*

Mais Poincaré n'a entendu donner cette application au problème des trois corps qu'à titre d'exemple. Si utiles que puissent être les développements dont nous venons de parler, il ne les considère nullement comme résolvant le problème général. Tout en élucidant celui-ci sous les différents aspects qui précèdent, il va montrer, en effet, qu'on en avait oublié d'autres plus difficiles encore, mais assurément non moins importants.

2. La théorie qualitative.

Le point de vue nouveau que nous allons voir apparaître est, en réalité, commun à toutes sortes de questions mathématiques.

Dans les cas élémentaires, l'expression des inconnues par les symboles usuels fournit, en général, aisément à leur égard tous les renseignements qu'on se propose d'obtenir.

C'est ce qui a lieu pour tous les problèmes mathématiques suffisamment simples. Pour peu que la question se complique, il en est autrement. Dans la lecture, si j'ose m'exprimer ainsi, faite par le mathématicien des documents qu'il possède, Poincaré met en évidence deux grandes étapes, l'une qu'on peut appeler qualitative, l'autre quantitative.

Ici nous citerons les réflexions même qu'il développe à cet égard : « ... Pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles : c'est la partie qualitative; puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. De même pour étudier une courbe algébrique. on commence par *construire* cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spéciales, c'est-à-dire qu'on cherche qu'elles sont les branches de courbes fermées, les branches infinies, etc. Après cette étude qualitative de la courbe, on peut en déterminer exactement un certain nombre de points.

« C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant : *Construire les courbes définies par des équations différentielles*.

« Cette étude qualitative, quand elle sera faite complètement, sera de la plus grande utilité pour le calcul numérique de la fonction.

« ... D'ailleurs cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt de premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. »

La plus importante d'entre elles est bien connue, et son exemple se présente de lui-même à tout esprit que préoccupent les progrès de l'Astronomie : c'est la *stabilité du système solaire*. Le fait seul que cette question soit essentiellement qualitative suffit à montrer la nécessité du point de vue dont il s'agit.

Ainsi l'étude qualitative de la variation d'une grandeur ou du déplacement d'un point est indispensable à la fois en elle-même et comme précédant presque nécessairement l'étude quantitative.

Cependant ce point de vue avait été presque complètement délaissé et comme ignoré par les prédécesseurs de Poincaré. Quelques remarquables exceptions sont à citer : la démonstration du théorème de Lagrange sur la stabilité de l'équilibre par Dirichlet; les travaux de Sturm; ceux de Liouville. Mais même ceux d'entre eux qui avaient frappé les géomètres, — ce n'est pas le cas pour tous, nous le verrons plus loin — étaient restés isolés; l'exemple significatif qu'ils donnaient n'avait pas été suivi.

La faute en est, pour une part, au grand développement de la théorie des fonctions analytiques, aux services mêmes qu'elle avait rendus, et qui détournaient complètement les esprits du domaine réel.

En abandonnant cet auxiliaire, Poincaré eut à rompre avec une tradition vieille d'un quart de siècle et à laquelle l'Analyse devait tous ses progrès durant cette période.

D'autre part, la Science se trouvait du coup complètement désarmée en face des hautes difficultés des questions ainsi posées, les premières pour lesquelles cette théorie des fonctions analytiques n'apportait aucune solution.

Comment ces difficultés — ou plutôt certaines d'entre elles, car il reste beaucoup à explorer dans cet immense domaine qui n'était hier encore que mystère pour nous — furent-elles surmontées par Poincaré ?

Ici se retrouve une circonstance qui était déjà apparue dans d'autres chapitres de l'histoire des mathématiques.

C'est ainsi que, dans la résolution algébrique des équations, il y eut une première période où l'on porta son attention sur la recherche d'une racine déterminée de l'équation proposée. Mais cette théorie ne passa d'un état quelque sorte empirique à l'état de perfection logique où l'amenèrent Lagrange, Rufini, Abel, Cauchy, Galois que lorsque l'on se décida, au contraire, à envisager simultanément toutes les racines cherchées. C'est en examinant les relations qui existent entre elles que furent conquis les principes modernes par lesquels, dans cette question, tout s'éclaire, s'explique et se prévoit.

Dans les premières recherches sur les équations différentielles et exception faite précisément pour certains des travaux que nous citions il y a un instant, on avait généralement étudié une à une les intégrales d'une équation différentielle donnée quelconque : en examinant chacune d'elles, on avait fait abstraction de toutes les autres.

Les Mémoires, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, vinrent montrer que ce point de vue était insuffisant et que les solutions d'un système d'équations différentielles, comme les racines d'une équation algébrique, devaient, même en vue de l'intelligence de chacune d'elles, être envisagées dans leurs rapports mutuels.

Ceci fait comprendre tout d'abord l'importance que prend, dans l'œuvre de Poincaré, le théorème démontré dans le Mémoire de 1889, *Sur le problème des trois corps* et dans *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, relativement à la possibilité de développer les solutions d'un système différentiel suivant les puissances des paramètres qu'il renferme ou qui interviennent dans les données initiales.

L'un des Mémoires mentionnés précédemment relève déjà du principe dont nous parlons, de la considération simultanée de toutes les intégrales d'une même équation différentielle : c'est celui qui traite des équations du premier ordre à points critiques fixes. Si, dans cette question, Poincaré put dégager le résultat décisif qui vidait le débat et qui avait échappé à Fuchs, c'est en considérant les valeurs de l'inconnue y comme fonctions, non plus de la variable indépendante x qui figure avec elle dans l'équation différentielle, mais bien de leurs déterminations initiales y_0 pour une valeur fixe x_0 donnée à cette variable. La solution du problème est précisément due à ce que, entre y et y_0, existe une correspondance birationnelle.

Nous verrons plus loin une autre série de découvertes de Poincaré partir du même principe, je veux parler des recherches relatives à la figure d'équilibre du fluide en rotation. Tous les progrès qu'il réalise sur cette question sont dus à ce qu'il n'envisage pas une des figures d'équilibre cherchées en elle-même, mais bien dans ses relations avec les figures d'équilibre voisines.

Poincaré procède dans le même esprit, pour l'étude des équations différentielles réelles, dès le premier cas auquel il s'attaque. Ce cas est le plus simple de tous, celui d'une équation unique du premier ordre et du premier degré, donnant $\frac{dy}{dx}$ en fonction rationnelle de x et y.

Quelles données possède-t-on sur les relations qui existent entre les différentes courbes intégrales de la même équation ? Une seule apparaît au premier abord : le fait que deux quelconques de ces courbes, si elles ne coïncident pas, ne peuvent se couper, sauf en certains points singuliers.

Ceci à défaut de toute autre considération, montrait la nécessité de discuter à part les points dont il s'agit. C'est encore une question locale, qui, en un sens, n'est pas nouvelle (c'est elle que Briot et Bouquet avait traitée dans le cas des équations différentielles à coefficients analytiques) mais qu'il fallait reprendre, avec quelques difficultés nouvelles, du moment que la distinction entre le réel et l'imaginaire s'imposait.

Dès cette première étude, on aperçoit combien le nouveau point de vue est nécessaire et combien vaines étaient les anciennes recherches, celles qui avaient en vue l'intégration formelle.

Les points singuliers qu'elle fait apparaître sont, en effet, de quatre espèces :

1° les *nœuds*, où viennent se croiser une infinité de courbes définies par l'équation différentielle;

2° les *cols*, autour desquels les courbes cherchées ont une disposition analogue à celle des hyperboles $xy = \text{const.}$;

3° les *foyers*, autour desquels ces courbes tournent en s'en rapprochant sans cesse à la façon d'une spirale logarithmique;

4° les *centres*, autour desquels ces courbes sont fermées et s'enveloppent mutuellement en enveloppant le centre à la façon d'ellipses homothétiques et concentriques.

Parmi toutes ces dispositions, quelles sont celles que l'on peut rencontrer lorsqu'on peut écrire l'intégrale générale de l'équation?

Il suffit, pour s'en rendre compte, de considérer l'exemple le plus familier que l'on puisse prendre à cet égard, celui des *lignes de niveau* sur une surface topographique quelconque. Il est clair que de telles lignes peuvent être considérées comme définies par une équation différentielle du premier ordre, dont l'intégrale générale est connue et s'obtient en égalant l'altitude à une constante arbitraire.

Quant aux points singuliers de cette équation, ils ne peuvent être ici que de deux espèces :

des *cols*, à savoir les points mêmes que la topographie désigne sous ce nom;
des *centres*, à savoir les fonds et les sommets du terrain.

Non seulement ces deux sortes de points singuliers sont les seules qui se présentent dans le problème des lignes de niveau, mais il en est de même toutes les fois que l'équation a une intégrale générale telle que

$$F = \text{const.},$$

F étant une fonction holomorphe, ou plus généralement une fonction bien déterminée et partout finie [1]. Les points singuliers sont ceux où les deux dérivées partielles de F s'annulent à la fois; on a ainsi un centre lorsque F est maximum ou minimum, un col dans le cas contraire.

Or si maintenant nous revenons à l'étude directe d'une équation différentielle quelconque, nous constatons que, des quatre espèces de points singuliers

(1) Un nœud peut exister même si l'intégrale générale est univoque $\left(\text{exemple}; \frac{y}{x} = \text{const.};\right)$; mais alors cette intégrale F s'y présente sous la forme $\frac{0}{0}$ et peut y prendre des valeurs aussi grandes qu'on le veut.

énumérés plus haut, trois se rencontrent dans le cas général (elles sont caractérisées par certaines conditions d'inégalité entre les termes de plus bas degré de l'équation au voisinage du point singulier) : ce sont les nœuds, les cols, et les foyers.

Mais il en est tout autrement des centres, c'est-à-dire des seuls points singuliers qui, avec les cols, puissent se rencontrer, comme nous l'avons vu, dans le cas d'une intégrale générale uniforme et finie. Ces centres sont des points singuliers tout exceptionnels. Pour que l'un d'eux se présente, il faut qu'une infinité *d'égalités* (auxquelles conduit le calcul du développement en série de la fonction F) soient vérifiées.

C'est ce qui ne saurait avoir lieu pour une équation écrite au hasard, et même si cela était, il serait impossible de s'en assurer par un nombre fini d'opérations (du moins en l'absence de données particulières sur les propriétés de l'équation).

En dehors des points singuliers, on peut utiliser sans restriction la propriété fondamentale rappelée tout d'abord et d'après laquelle deux courbes intégrales distinctes ne se croisent pas.

Ce point de départ, si ténu qu'il soit, donne à lui tout seul la solution du problème difficile qui nous occupe. Il suffit, à cet effet, de l'appliquer, non seulement à des courbes, complètement différentes, mais à des arcs convenablement choisis d'une même courbe intégrale.

Mais si la méthode employée est, au fond, très simple, les résultats sont tout à fait imprévus et montrent encore que la solution n'était aucunement préparée par toutes nos connaissances antérieures sur ce sujet.

Dans le cas des lignes de niveau, toutes les courbes cherchées sont fermées.

C'est ainsi que l'on serait presque fatalement amené à se figurer les choses si l'on voulait s'en faire une idée d'après les cas où l'on sait écrire l'intégrale générale. C'est ainsi, en effet, qu'elles se passent toutes les fois que cette intégrale F est uniforme (ou même uniforme au point de vue réel, c'est-à-dire bien déterminée en tout point réel) et partout finie. Tout au plus, en considérant des formes fractionnaires de F, peut-on, comme nous l'avons vu, obtenir des courbes intégrales aboutissant à des nœuds.

Que cette vue elle-même soit trop simpliste, à moins de compliquer encore notablement l'expression de F, c'est ce que l'on reconnaît dès l'exemple des lignes de pente. Ici on ne peut déjà plus, en général, obtenir l'intégrale élémentairement, mais il est évident que les lignes en question partent des sommets et aboutissent aux fonds (exception étant faite, toutefois, pour certaines d'entre elles, les lignes de faîte, qui aboutissent à un col).

Seulement, il y a, en général, plusieurs fonds et plusieurs sommets, et c'est l'un ou l'autre des fonds qui sert de point d'arrivée, suivant celle des courbes intégrales que l'on envisage : le passage des courbes qui aboutissent à un fond déterminé à celles qui aboutissent à un fond voisin se fait par l'intermédiaire d'une ligne de faîte.

Des dispositions de cette espèce sont déjà peu usuelles pour les équations différentielles dont l'intégrale générale a pu être écrite élémentairement.

Mais les résultats obtenus par Poincaré dans le cas général présentent un degré de complication de plus. Il existe alors un certain nombre de courbes intégrales qui sont des courbes fermées (des *cycles*, suivant la terminologie qu'il emploie). Toutes les autres, sauf celles qui aboutissent à des points singuliers ([1]) s'enroulent asymptotiquement autour de certains de ces cycles, dits *cycles limites*. L'enroulement a d'ailleurs lieu autour de l'un ou de l'autre des cycles limites, suivant que la courbe intégrale considérée est située dans l'une ou l'autre de certaines régions déterminées.

Rien de tout cela ne pouvait être prévu à l'aide des exemples traités antérieurement. Non seulement ceux-ci donnaient une idée fausse des choses; mais, on le voit, il était inévitable qu'il en fût ainsi.

Nos résultats sont, en effet, plus encore que tout à l'heure, contradictoires avec l'existence d'une intégrale générale que l'on puisse écrire avec les procédés élémentaires. Ils ne pouvaient, par conséquent, se rencontrer dans les problèmes que l'on avait résolus avant Poincaré. L'opinion s'était faite, jusque-là sur des figures exceptionnelles, dégénérées en quelque sorte, parce que c'étaient les seules que l'on avait su tracer.

Ces résultats si extraordinaires demandaient à être complétés par la recherche *effective* des cycles limites lorsque l'équation est donnée. C'est une question d'une extrême difficulté, même si l'on entend se borner à une détermination approximative.

Poincaré triomphe plus ou moins complètement de cette difficulté, suivant

([1]) Dans le cas des lignes de pente, ces dernières existaient seules. Cet exemple et autres analogues (tels que les lignes de force du spectre magnétique) étaient donc, eux aussi, incapables de faire prévoir la solution générale.

les cas. Pour des équations de forme convenable [1], il détermine exactement le nombre des cycles limites et obtient certaines régions dans lesquelles chacun d'eux doit nécessairement se trouver.

Il emploie, à cet effet, un second principe qui était déjà intervenu dans son étude des points singuliers et qui sert de fondement à toutes les autres recherches entreprises sur ce genre de questions.

Analytiquement, il consiste à chercher le sens dans lequel varie une fonction convenablement choisie des coordonnées, lorsqu'on se déplace le long d'une courbe intégrale. On sait avec quel succès un principe de cette nature fut appliqué, peu d'années après, par M. Liapounoff, dans son célèbre Mémoire sur la stabilité du mouvement.

Poincaré l'applique, non seulement à une trajectoire déterminée, mais à toutes celles qui traversent une courbe donnée. Géométriquement parlant, cela revient à considérer en chaque point d'une courbe arbitrairement donnée, le sens dans lequel elle est traversée par la courbe intégrale qui passe en ce point. Ce sens, qui peut être déterminé par des opérations élémentaires du moment que l'équation différentielle est donnée, ne change qu'en un point où les deux courbes sont tangentes. On comprend dès lors l'importance que prennent, dans la discussion, les courbes fermées ou cycles « sans contact » c'est-à-dire qui ne sont tangents en aucun de leurs points à une courbe intégrale et le long desquels, par conséquent, ce sens ne peut changer.

La manière dont varie, le long d'une courbe fermée quelconque, le sens dont il s'agit, est d'ailleurs liée à la disposition et à la nature des points singuliers de l'équation par une relation simple qui est d'un grand secours dans les discussions dont nous venons de parler, et que Poincaré retrouvera lorsqu'il passera aux équations d'ordre supérieur. Les considérations qui la fournissent équivalent, au fond, au théorème de Kronecker mentionné plus haut, et que plus tard Poincaré traduira explicitement.

Les résultats précédents ne subsistent pas pour toutes les équations du premier ordre et de degré supérieur au premier en $\frac{dy}{dx}$; mais ils s'étendent cependant d'eux-mêmes à un grand nombre d'entre elles.

Ce n'est pas, en effet, le degré qui joue ici un rôle essentiel : Poincaré rencontre une notion qui était apparue une première fois dans la science avec Riemann, mais dont les recherches que nous résumons en ce moment devaient

(1) Voir *Analyse*, p. 59; *Œuvres*, t. I, p. XXV.

montrer la véritable signification. C'est la *géométrie de situation*, la science des propriétés géométriques qui ne changent pas quelles que soient les déformations subies par une figure, pourvu qu'il n'y intervienne ni déchirure, ni soudure.

Tant que l'on se borne au point de vue local, rien ne fait prévoir la nécessité d'une pareille étude. Sinon toutes les figures que les géomètres ont pu imaginer, du moins toutes celles dont ils se sont servis effectivement, soit pour les étudier en elles-mêmes, soit pour représenter des relations analytiques, sont identiques entre elles au point de vue de la géométrie de situation lorsqu'on se borne à les considérer dans leurs portions suffisamment petites, pourvu qu'elles aient simplement le même nombre de dimensions : par exemple, toute portion suffisamment restreinte de surface quelconque peut être remplacée à ce point de vue par un petit disque circulaire.

Aussi cette découverte est-elle de celles qui se firent le plus attendre. La théorie des fonctions algébriques, à laquelle elle est indispensable, avait été inlassablement étudiée et perfectionnée avant que la nécessité en fût aperçue : cette nécessité avait échappé à Cauchy lui-même.

Puis, lorsqu'à cette occasion, Riemann l'eût mise en évidence d'une manière éclatante, ses successeurs ne virent point que la portée de ce principe n'était pas limitée à la circonstance particulière qui l'avait fait apparaître.

Mais, après le second exemple fourni par Poincaré, cette portée est clairement établie. Elle est indissolublement liée à ce passage du local au général qui est la plus grande préoccupation du Calcul infinitésimal. Dans tout passage de cette nature, on peut s'attendre à voir la géométrie de situation jouer son rôle.

Pour l'appliquer au problème qui nous occupe, on doit regarder x, y et $\frac{dy}{dx}$ comme trois coordonnées cartésiennes et considérer la surface définie, dans ces conditions, par l'équation différentielle. Quel que soit le degré de celle-ci, si cette surface est de genre zéro, c'est-à-dire a une forme analogue à celle d'une sphère, on aura, pour les courbes intégrales, la même disposition générale que dans l'équation du premier degré.

Pour d'autres formes de surfaces les conclusions peuvent être totalement différentes. Lorsque, après l'étude de la sphère, Poincaré entreprend, au même point de vue, celle du tore, il constate que ce second cas peut offrir une foule de circonstances nouvelles que le premier ne permettait nullement de prévoir.

Encore s'en faut-il qu'il arrive toujours à déterminer exactement ce qui se passe. Les difficultés, elles aussi, sont nouvelles, et telles qu'il est obligé de se poser un certain nombre de questions sans les résoudre.

Ces questions, qui soulèvent des problèmes ardus d'arithmétique, sont, depuis, restées sans réponse,

Avec le cas du second ordre, qui fait l'objet du quatrième et dernier Mémoire de cette série, ce sont déjà les difficultés du cas général qui sont abordées. Les remarques faites dans le cas précédent subsistent, mais ne suffisent plus, à elles seules, à résoudre le problème.

Celui-ci étant mis sous la forme de la recherche de courbes tracées dans l'espace ordinaire et vérifiant un système de deux équations du premier ordre, Poincaré généralise sans difficulté la classification des points singuliers obtenue pour une équation du premier ordre unique.

Il existe encore une relation entre leur distribution et les *surfaces fermées sans contact*, qui sont ici les analogues des cycles sans contact, c'est-à-dire les surfaces qui ne sont tangentes, en aucun de leurs points, à une courbe intégrale. Seulement, cette fois, la relation en question ne pourrait être démontrée si Poincaré ne partait de la formule de Kronecker.

C'est surtout dans la théorie actuelle, en effet, que cette formule se présente comme l'auxiliaire indiqué et même indispensable dont l'apparition, à l'heure même où l'œuvre de Poincaré allait naître, semble répondre à une sorte d'harmonie préétablie. Deux caractères : la manière dont il dépasse d'emblée le domaine local et, d'autre part, le peu d'hypothèses qu'il implique, font que nul autre n'a pu, jusqu'ici, lui être substitué à ce point de vue,

Poincaré en a notablement augmenté la puissance par une remarquable proposition qui, dans beaucoup de cas, dispense même du calcul de la formule en question. Celle-ci, — si, pour fixer les idées, nous la considérons dans l'espace ordinaire — fait, comme on le sait, intervenir un système de trois fonctions F, G, H et exprime le nombre des zéros communs à ces trois fonctions dans un volume déterminé V (ces zéros étant comptés avec des signes convenables) à l'aide des valeurs que les fonctions en question prennent sur la frontière S de ce volume.

Or, Poincaré trouve une condition très simple et très générale moyennant laquelle on est certain que le nombre ainsi obtenu ne change pas lorsqu'on remplace le système des fonctions F, G, H par un autre analogue quelconque f, g, h. Ou bien, en effet, on peut affirmer que le nombre en question restera inaltéré dans cette substitution, ou bien il existera sur S, au moins un point où F, G, H seront proportionnels à f, g, h et cela même avec un facteur de proportionnalité de signe connu à l'avance. Cette proposition a été obtenue à nouveau, un peu plus tard, sous une autre forme et avec une autre démonstration, par M. Bohr, à qui elle a fourni toute une nouvelle série de résultats dynamiques.

Elle s'applique immédiatement aux surfaces fermées sans contact, en prenant f, g, h proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à une telle surface S. Le nombre trouvé par la formule de Kronecker dépend alors de la *courbure totale de* S.

Mais cette première conclusion se simplifie encore, et tout se ramène à une question de géométrie de situation, la courbure totale ainsi introduite dépend uniquement du genre de S. Les résultats de ce type devaient donner lieu, on le sait, à d'importantes recherches de M. W. Dyck.

Avec le cas du second ordre apparaissent également les deux notions qui ont eu sur l'œuvre de Poincaré, dans le domaine de la Mécanique et, particulièrement, de la Mécanique céleste, la plus grande influence.

L'honneur d'avoir recherché spécialement, entre toutes les solutions des équations différentielles du mouvement des planètes, *une solution périodique*, telle, autrement dit, que les différents corps mobiles décrivent des courbes fermées (tout au moins par rapport à un système d'axes convenablement choisi) — revient à l'astronome Hill, qui a donné un premier exemple remarquable à cet égard, en ce qui concerne le problème des trois corps.

Mais c'est à Poincaré qu'il appartient d'avoir montré dans les solutions périodiques un instrument, l'un des plus puissants dont on dispose, pour la recherche et l'étude des autres solutions.

Que les solutions périodiques soient capables de jouer ce rôle capital, c'est ce que, après les réflexions qui précèdent, nous pouvons faire comprendre d'un mot. Une courbe intégrale fermée déterminée étant supposée connue, Poincaré considère toutes les courbes intégrales voisines de celle-là.

On voit immédiatement qu'une telle question est à cheval sur les deux points de vue entre lesquels pivote toute la théorie des équations différentielles ; et cela, en combinant les avantages de tous deux. Accessible aux mêmes procédés qui s'appliquent au domaine local, elle est d'emblée cependant en dehors de ce domaine, puisque les nouvelles trajectoires obtenues n'évoluent nullement au voisinage d'un point unique et sont étudiées sur des parcours aussi étendus que la solution périodique primitive elle-même.

Ainsi s'explique comment les solutions périodiques « se sont montrées la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable » [1].

En faisant pour le voisinage d'une solution périodique ce que nous avons fait pour le voisinage d'un point unique, c'est la même marche ascensionnelle que nous entreprendrons, mais avec un point de départ plus élevé.

Cette identité de méthode se vérifie bien lorsqu'on examine le détail des opérations. De même que tout le calcul infinitésimal repose sur la comparaison approchée des valeurs d'une fonction en un point et aux points infiniment voisins, on commencera par étudier, en vue du nouveau problème, les solutions infiniment voisines d'une solution donnée.

En prenant l'écart entre les deux solutions comme un infiniment petit principal et en en négligeant les puissances supérieures à la première, on est conduit ainsi, avec Poincaré, à introduire systématiquement les équations linéaires qu'il a appelées *équations aux variations* pendant que, de son côté. M. Darboux qui en a, lui aussi, découvert l'importance, leur donnait le nom d'équations *auxiliaires*.

Si la solution prise comme point de départ est périodique, il en est de même des coefficients des équations aux variations. Poincaré se trouvera ainsi ramené quel que soit l'ordre, à des systèmes dont les propriétés sont connues et dépendent essentiellement de certaines constantes qui vont jouer un rôle essentiel dans ses recherches dynamiques, les *exposants caractéristiques*. A chacun de ceux-ci correspond, pour le système, une solution possédant, non pas la périodicité proprement dite, mais une périodicité relative (périodicité de seconde espèce, au sens d'Hermite) caractérisée par le fait que toutes les valeurs des inconnues sont multipliées par un même facteur constant lorsque la variable augmente d'une quantité égale à la période des coefficients.

Par ces exposants caractéristiques se trouveront ainsi définies les principales relations entre une solution périodique et les solutions infiniment voisines. En particulier, toutes les propriétés analytiques de l'équation auront leur répercussion sur celles de ces exposants.

Cette étude prépare celle des courbes intégrales *suffisamment* (et non plus infiniment) voisines de la courbe fermée donnée. Poincaré entreprend cette

---

[1] POINCARÉ, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.*

dernière, en ce qui regarde le second ordre, dès le Mémoire dont nous parlons. L'analogie que nous avons essayé de faire ressortir tout à l'heure se manifeste d'une manière tout à fait imprévue dans les résultats. La disposition des courbes nouvelles L′ autour de la courbe primitive L rappelle d'une manière frappante les formes rencontrées précédemment dans l'étude des équations *du premier ordre* au voisinage immédiat d'un point singulier.

Imaginons, en effet, en un point quelconque P de L un petit élément de surface normal à L. Toute courbe intégrale L′ suffisamment voisine de L percera cet élément de surface en un nombre infini ou, en tout cas, très grand de points successifs P′.

La figure formée par ces points suffit à nous faire connaître la disposition des arcs successifs de la seconde courbe intégrale L′. Chacun d'eux nous renseigne en effet, sur l'arc qui le contient, puisque tous ces arcs, de part et d'autre de notre surface, cheminent plus ou moins parallèlement les uns aux autres et à la courbe primitive.

Si maintenant on joint chacun des points P′ au suivant, on aura une ligne, variable d'ailleurs avec celle des courbes L′ que l'on considère : c'est la disposition de ces lignes qui est tout analogue à celle des courbes intégrales d'une équation du premier ordre autour d'un point singulier.

Poincaré met d'ailleurs en évidence la raison de ce parallélisme. Elle doit être cherchée dans l'étroite parenté qui existe entre l'étude des équations différentielles et celles, beaucoup moins avancée, des équations aux différences finies. Ce n'est pas la première fois que Poincaré éclairait, par le même rapprochement, cette dernière question. Les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires (*voir* p. 189) lui avaient fourni une illustration du même principe, dont les travaux ultérieurs devaient montrer la fécondité.

Conformément à l'analogie dont il vient d'être parlé, il y a quatre dispositions principales possibles, correspondant aux quatre espèces de points singuliers de l'équation du premier ordre. Les exposants caractéristiques permettent (ainsi que le faisaient précédemment les coefficients des termes de plus bas degré autour du point singulier) de reconnaître trois d'entre elles, celles qui correspondent aux nœuds, aux foyer et aux cols.

Dans chacune de celles-ci, la même analogie nous montre que les points P′ peuvent aller en se rapprochant indéfiniment de P (puisque, dans chacune des trois hypothèses correspondantes relatives à l'équation du premier ordre, tout ou partie des courbes intégrales aboutissent au point singulier). On voit alors que toute la nouvelle courbe L′ va en se rapprochant indéfiniment de L, du moins si on la suit dans un sens convenable, ainsi que le faisaient tout à l'heure les courbes intégrales de l'équation du premier ordre vis-à-vis des cycles limites : c'est une *solution asymptotique*. Il peut en être ainsi quel que soit le choix de la courbe L′ dans le voisinage de L (ou, ce qui revient au même, celui du point P′ initial dans le voisinage de P) : c'est le cas correspondant à celui d'un nœud ou à celui d'un foyer.

Dans le cas correspondant à celui des cols, au contraire, le point P′ doit être choisi d'une façon convenable, à savoir sur l'une ou l'autre de deux courbes qui se croisent en P de sorte que les courbes intégrales asymptotiques à L se distribuent sur l'une ou l'autre de deux surfaces passant par L). Une page du quatrième Mémoire, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, résout, par une remarquable application du Calcul des limites de Cauchy, la question, en réalité difficile, du calcul de ces courbes et transforme ainsi la théorie des équations aux différences finies en intégrant une des catégories les plus étendues d'équations de cette espèce qu'il ait été possible de traiter jusqu'ici.

Plus tard, lorsqu'il eut à passer au problème des trois corps, cette même recherche se présenta à lui pour des systèmes d'ordre supérieur au second. La généralisation, remarquons-le, n'était pas évidente ou, plus exactement, ne l'aurait pas été sans le complément que la Thèse de Poincaré avait préalablement apporté à l'étude des systèmes différentiels au voisinage des points singuliers. Nous savons, en effet, que, dans ce cas, l'introduction de plusieurs inconnues crée une difficulté d'un genre nouveau dont on ne savait pas triompher avant le travail en question. C'est donc grâce à lui qu'il peut démontrer l'existence de ces solutions asymptotiques qui sont une importante conquête de la Mécanique analytique.

Jusqu'au moment dont nous parlons, d'ailleurs, celle-ci n'a pas été envisagée d'une manière spéciale. Les résultats précédents concernent un système quelconque d'équations différentielles.

3. Les cas des équations de la Dynamique.

Les propriétés particulières des équations de la Dynamique apparaissent une première fois dès le quatrième Mémoire, *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, et cela, à propos de la dernière hypothèse qui reste à examiner relativement aux courbes L′, d'après l'analogie même qui nous a guidés jusqu'ici : c'est celle qui correspondrait, pour l'équation du premier ordre, au cas d'un centre.

La disposition correspondante, pour le problème actuel, est celle où les points P′ sont disposés, autour de P, le long d'une ligne fermée, la même pour chaque courbe L′, les diverses lignes fermées ainsi obtenues s'emboîtant les unes les autres autour de P.

Notre courbe primitive L sera alors entourée d'une famille de surfaces fermées tubulaires (analogues aux tores contenant à leur intérieur une circonférence de l'espace) telles que chacune d'elles soit un lieu de courbes intégrales.

Absolument comme lorsqu'il s'agissait d'un centre, une telle disposition implique, comme condition nécessaire, l'évanouissement d'une infinité d'expressions constantes C.

C'est seulement si toutes ces constantes C sont nulles que les développements trigonométriques figurant dans l'équation polaire des courbes lieux de point P′ — et, par conséquent, dans celle des surfaces tubulaires — pourront être écrits.

Or c'est ce que, en l'absence d'autres renseignements, les calculs ne permettent jamais d'affirmer, si loin qu'on les pousse.

Pour les équations de la Dynamique il en est autrement, et l'on sait *a priori* que toutes les constantes C sont nulles.

Pour le démontrer, un nouveau principe intervient, la notion d'*invariant intégral*. Cette fois encore il s'agit, mais sous une nouvelle forme, de la considération simultanée des différentes courbes intégrales et des relations qu'elles ont entre elles.

Représentons-nous notre système d'équations différentielles comme définissant le mouvement d'une molécule fluide. Au lieu de considérer une seule trajectoire, c'est-à-dire le mouvement d'une molécule unique et déterminée, on considérera toutes les molécules qui, à un instant déterminé t, remplissent un volume déterminé V de l'espace (plus exactement de l'espace à $2n$ dimensions, s'il s'agit d'un problème de dynamique dans lequel l'état du système à étudier dépende de n paramètres).

Si maintenant on considère les nouvelles positions de ces mêmes molécules à un instant ultérieur T, celles-ci rempliront un nouveau volume V′.

Or, dans le cas des équations de la Dynamique, quel que soit T, ce nouveau volume est équivalent à l'ancien. Autrement dit V reste constant lorsque le temps varie : c'est, dans la terminologie de Poincaré un *invariant intégral.*

Ainsi qu'il a été reconnu ensuite, cette belle découverte, qui est, au fond, une propriété de la notion de multiplicateur, est déjà ancienne : on doit la faire remonter à Liouville (1).

Mais, lors de sa première apparition, elle était passée inaperçue. Un autre inventeur génial l'avait même — tant elle joue un rôle essentiel dans toute recherche profonde de Dynamique — rencontrée à son tour sur son chemin : Boltzmann l'avait énoncée (1871), ignorant le résultat de Liouville comme Poincaré a ignoré l'un et l'autre; elle est, depuis cette date, à la base de toutes les théories cinétiques (2).

Mais à ce premier invariant intégral, Poincaré en joindra toute une série d'autres dont il indiquera les relations avec le premier. Le « volume », considéré tout à l'heure, s'exprime par une intégrale d'ordre $2n$ étendue à une portion de l'espace. Poincaré constate que toute une série d'intégrales de tous les ordres, c'est-à-dire simples, doubles, etc., le volume n'étant que la dernière d'entre elles, possèdent la propriété d'invariance.

Quoiqu'il se soit jusqu'ici montré le plus fécond, les autres invariants que Poincaré a formés et dont il établit qu'ils se déduisent tous les uns des autres (en particulier de l'invariant intégral simple) constituent autant de propriétés importantes des équations de la Dynamique.

Dans le Mémoire qui nous occupe actuellement, le volume suffit à trancher la question relative aux constantes C ci-dessus mentionnées, c'est-à-dire à montrer que toutes ces expressions sont nulles. La liaison entre ces deux faits est encore due à la notion de surface sans contact : elle résulte de ce que, en présence d'un invariant intégral, une surface fermée sans contact ne peut exister. Or, comme le prouve Poincaré, on en pourrait tracer autour de la courbe donnée si l'une quelconque des constantes C était différente de zéro.

Avec l'analyse précédente, Poincaré entre de plain-pied dans le domaine de la Mécanique céleste.

Les développements en séries qui peuvent être écrits grâce aux conditions $C = 0$ sont, pour ce problème particulier, ceux par lesquels Lindstedt s'est proposé de représenter les éléments des orbites planétaires et les conditions

---

(1) *J. Math. pures et appl.*, t. 3, 1838, p. 348.

(2) Le théorème de la stabilité à la Poisson, l'une des applications les plus importantes des invariants intégraux, a été également énoncé et démontré par Gibbs, mais en 1898 seulement. Il ne se trouve pas, à notre connaissance, dans les travaux de Boltzmann.

dont il s'agit ne sont autres que celles qui, dans cette méthode, permettent de faire disparaître les termes séculaires.

C'est, au fond, dans l'existence des invariants intégraux que réside, par conséquent, la véritable raison de la validité (au point de vue formel) de la méthode de Lindstedt, validité qui est d'ailleurs établie sans les hypothèses restrictives que Linstedt lui-même était obligé de faire.

Les questions qualitatives liées aux calculs précédents sont des questions de stabilité tout analogues à celles qui préoccupent les astronomes.

Poincaré nous a appris à distinguer plusieurs sens du mot « stabilité » et nous a montré la fécondité de celui que Poisson avait substitué à l'acception primitive de Lagrange. Toutes les fois qu'il existe, dans le voisinage de L, un système de surfaces fermées sans contact, les courbes L′ ne pourront jouir de la stabilité à la Poisson, c'est-à-dire qu'elles ne repasseront pas dans le voisinage immédiat de leur point de départ. C'est, nous l'avons vu, ce qui arriverait si l'une des constantes C était différente de zéro.

L'instabilité (toujours au sens de Poisson) est également la règle pour les courbes L′ asymptotiques à L, telles qu'elles se présentent dans les premières hypothèses examinées précédemment.

Au contraire, dans l'hypothèse actuelle — et du moment que toutes les constantes C sont nulles — la stabilité devient possible.

Des conclusions analogues s'appliquent à la stabilité de la trajectoire primitive L elle-même. Mais le sens que l'on doit adopter alors (et que Poincaré adoptera également en Mécanique céleste, lorsqu'il étudiera, au point de vue de la stabilité, les solutions périodiques) est encore différent des deux premiers [1]. C'est celui qui avait déjà été considéré dans plusieurs cas importants par les auteurs anglais, mais qui n'a été précisé d'une manière complète et générale que quelques années après, par M. Liapounof, dans le Mémoire déjà cité, *Sur la stabilité du mouvement*, où le géomètre russe a repris, pour les systèmes dépendant d'un nombre quelconque de variables, les questions mêmes dont nous parlons en ce moment. Au lieu que la stabilité à la Lagrange ou à la Poisson est une propriété intrinsèque d'une solution déterminée, la stabilité de Liapounof, seule analogue d'ailleurs à la notion d'équilibre stable, concerne l'écart entre cette solution et les solutions voisines.

---

(1) Toute solution périodique est, par définition, stable au sens de Lagrange ou de Poisson.

Mais, en raison même de la signification astronomique de ses résultats, Poincaré se trouve du même coup aux prises avec les difficultés fondamentales de la Mécanique céleste, et particulièrement avec la plus classique d'entre elles, celle des « petits diviseurs ». Dans le cas du premier ordre, le fait, supposé établi, de l'évanouissement des constantes C aurait suffi pour mettre en évidence d'une manière certaine l'existence d'un centre : car Poincaré démontre la convergence du développement en série que l'on peut écrire dans ces conditions. Il n'en est plus de même cette fois. Nos calculs nous permettent d'écrire le développement; mais les petits diviseurs interviennent : ce développement peut n'être et n'est en général, que formel, de sorte que l'existence des surfaces tubulaires n'est nullement démontrée.

Par l'examen de ces difficultés, les Mémoires, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, inaugurent l'immense œuvre dynamique et astronomique de Poincaré.

*
* *

Cette œuvre se poursuit dans l'ouvrage qui devait être pour la jeune gloire de son auteur une consécration mondiale. C'est avec le Mémoire, *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique* que Poincaré remporta le prix dans le grand concours international ouvert à Stockholm en 1889, entre les Mathématiciens du monde entier.

Le grand traité intitulé : *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* prolonge à son tour les deux Mémoires précédents : c'est dans ces trois Ouvrages, et aussi dans une série d'articles insérés au *Bulletin Astronomique*, que se développent les idées de Poincaré sur le problème des n corps.

Il sera parlé ici même de ces problèmes au point de vue astronomique avec plus de compétence que nous ne pourrions le faire. Au point de vue analytique, — que nous ne saurions même épuiser tant il offre d'aspects divers dans *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, — l'œuvre dont il s'agit est double : elle présente un côté positif et un côté négatif. Ce dernier, comme il résulte de ce qui vient d'être dit en dernier lieu, se dessina, lui aussi, dès les Mémoires, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. Il était même apparu auparavant, car les résultats dont nous allons avoir à parler sur ce point ne sont que l'application de la note à laquelle nous avons fait allusion plus haut (p. 186).

Examinons donc comment, tant dans ces deux travaux que dans ceux qui les suivirent, Poincaré limite la portée des méthodes qui avaient été appliquées avant lui.

L'intégration, au sens élémentaire du mot, avait, depuis longtemps, été abandonnée. Pourrait-on songer à faire des progrès dans ce sens, c'est-à-dire à chercher de nouvelles intégrales ? Pour les équations de la Mécanique céleste, le nombre des intégrales connues est de dix. En peut-il, en général, exister d'autres exprimables par les moyens classiques de l'Analyse ? Il était vraisemblable que non.

La preuve rigoureuse d'impossibilités de cette nature est une catégorie de questions dont la difficulté a, de tout temps, éveillé l'intérêt des géomètres vraiment supérieurs. La démonstration de l'incommensurabilité entre le côté d'un carré et sa diagonale, dans l'antiquité, celles de l'impossibilité de la quadrature du cercle et de la non-résolubilité des équations algébriques au-delà du quatrième degré, dans les temps modernes, comptent à juste titre, parmi les plus belles conquêtes des mathématiques.

En ce qui concerne les intégrales des équations de la Mécanique céleste, une démonstration de l'espèce en question avait été partiellement fournie par Bruns ; mais c'est à Poincaré qu'il fut donné de la compléter et d'établir en toute rigueur l'inexistence non seulement d'intégrales algébriques, mais plus généralement, d'intégrales *uniformes* autres que les intégrales classiques.

Le résultat ainsi obtenu n'intéresse pas moins l'analyste pur que l'astronome. Sa portée n'est pas limitée au système différentiel particulier qui fait l'objet de la Mécanique céleste. La même méthode qui l'a fourni, permet de discuter le nombre des intégrales uniformes des problèmes de la Mécanique classique, et, lorsque ce nombre est insuffisant pour l'intégration, de trouver les seuls cas où il puisse s'accroître. Cette méthode est donc nécessairement à la base de toutes les recherches ultérieures sur ces sujets.

Elle ne doit pas moins attirer l'attention par les principes qu'elle fait intervenir. Elle a conduit Poincaré à étudier le développement de la fonction perturbatrice sous un jour nouveau, en en considérant, non plus seulement les premiers termes qu'ils ont pu former explicitement, mais au contraire les termes d'ordres très élevés. Dans cette étude, Poincaré utilise non seulement les résultats de la théorie des fonctions dus à ses prédécesseurs et particulièrement à M. Darboux, mais leur généralisation aux fonctions de plusieurs variables, telle que la lui ont fournie ses recherches sur les résidus et les périodes

des intégrales doubles. La Théorie des fonctions est ainsi appliquée d'une façon toute nouvelle à celle des équations différentielles.

Ces recherches fournissent, entre les coefficients successifs du développement, une infinité de relations qui montrent que, considérés comme fonctions des éléments des orbites, ils se réduisent à un nombre fini de transcendantes.

Un nouveau chapitre de la Mécanique céleste a été ainsi ouvert et a donné lieu, depuis, aux travaux de plusieurs de nos jeunes géomètres et astronomes.

Mais l'impossibilité d'intégrer sous forme élémentaire se dégage également, à un autre point de vue, des résultats qualitatifs.

Dès l'équation du premier ordre, et à propos du cas le plus simple, celui de la sphère, nous avons vu que, par leur aspect même, les formes des courbes intégrales ne sont pas de celles qu'on aurait pu obtenir à l'aide des moyens classiques.

Des faits du même ordre se passent dans le cas général de la Mécanique céleste, dès que le nombre des corps en présence est supérieur à 2. L'existence même des solutions asymptotiques est déjà du nombre. Mais plus topique encore est l'exemple des solutions *doublement asymptotiques*, dont la mise en évidence a été l'une des grandes difficultés qu'ait surmontées Poincaré sur ce sujet.

Soit une solution périodique L instable : elle admettra des solutions L′ asymptotiques pour $t=\infty$, et aussi des solutions L″ asymptotiques pour $t=-\infty$. Les premières engendreront une surface S′ passant par L, les secondes, une surface analogue S″.

Peut-il exister des solutions qui soient à la fois des courbes L′ et des courbes L″, c'est-à-dire qui après avoir été, pour $t=-\infty$, infiniment voisines de L, s'en écartent d'une quantité quelconque pour s'en rapprocher ensuite indéfiniment pour $t=+\infty$?

Cela revient à se demander si les surfaces S′ et S″ se coupent ailleurs que suivant L. Cette question est une des plus difficiles que Poincaré ait abordées. Ce sont les invariants intégraux qui, dans une hypothèse particulière (telle que les surfaces en question passent très près l'une de l'autre) lui ont permis d'y répondre. Eux seuls pouvaient évidemment remplir ce rôle, puisque (en l'absence d'intégrales connues) eux seuls renseignent sur ce que deviennent les trajectoires au bout de très longs intervalles de temps. Non seulement leur considération montre que les surfaces S′ et S″ se coupent, de sorte qu'il existe des solutions doublement asymptotiques, mais ces surfaces se coupent une infinité de fois, et la disposition des courbes d'intersection est extrêmement compliquée. En effet, sur une surface asymptotique quelconque, entre deux solutions doublement asymptotiques quelconques, il y en a une infinité d'autres.

On comprendra mieux encore ce que ce résultat a de singulier si l'on réfléchit que, au contraire, une surface S' ou une surface S'' ne peut jamais se couper elle-même.

Avec Poincaré, substituons aux deux surfaces en question les courbes obtenues en coupant par un plan. « Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau ».

« On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complexité du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme (1).... »

D'autres conséquences du même ordre découlent des mêmes prémisses.

Au lieu d'une seule solution doublement asymptotique à L, considérons en plusieurs, L_1, L_2, ... : toutes ces courbes seront, pour $t = -\infty$ situées sur S'' et, pour $t = +\infty$, sur S'.

Mais il résulte des faits établis par Poincaré que l'ordre dans lequel elles se succèdent sur S' est sans rapport avec celui dans lequel elles se succédaient sur S''. Si de deux solutions la première est plus voisine que la seconde de la solution périodique pour $t = -\infty$, il pourra arriver que pour $t = +\infty$, la première soit plus éloignée que la seconde de la solution périodique, mais il pourra arriver que ce soit le contraire.

« Cette remarque est encore de nature à nous faire comprendre toute la complication du problème des trois corps et combien les transcendantes qu'il faudrait imaginer pour le résoudre diffèrent de toutes celles que nous connaissons » (2).

---

(1) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 389.
(2) *Loc. cit.*, p. 391.

La voie de l'intégration proprement dite étant ainsi fermée, la Mécanique céleste procède par approximations successives. La tâche qui s'offre à Poincaré est de discuter la valeur des méthodes imaginées dans ce but ([1]).

On savait que, grâce surtout aux petits diviseurs, la convergence de toutes ces méthodes est très douteuse. Il se trouve cependant, — Poincaré montrera par quel mécanisme — qu'elles suffisent, en général, aux calculs numériques usuels.

Mais ceux-ci ne sont pas seuls en jeu. « Il ne s'agit pas seulement de calculer les éphémérides des astres, quelques années d'avance, pour les besoins de la navigation ou pour que les astronomes puissent retrouver les petites planètes déjà connues. Le but final de la Mécanique céleste est plus élevé : il s'agit de résoudre cette importante question : la loi de Newton peut-elle expliquer à elle toute seule tous les phénomènes astronomiques? Le seul moyen d'y parvenir est de faire des observations, aussi précises qus possible, de les prolonger pendant de longues années ou même de longs siècles et de les comparer ensuite aux résultats du calcul. Il est donc inutile de demander au calcul plus de précision qu'aux observations, mais on ne doit point non plus lui en demander moins. Aussi l'approximation dont nous pouvons nous contenter aujourd'hui deviendra-t-elle un jour insuffisante » ([2]).

Or, non seulement les séries classiques ne pouvaient nous assurer cette exactitude de plus en plus grande ; mais, en raison de leur forme même, on ne pouvait leur demander de conduire à coup sûr à de bons résultats pour une période par trop longue.

A plus forte raison ne pouvaient-elles nous renseigner sur la question de *la stabilité*, laquelle fait intervenir l'indéfinie durée des siècles.

Aussi, au XIXe siècle, des développements en séries de forme nouvelle ont-ils été proposés pour exprimer les éléments des orbites planétaires.

Ils ont pour but de diriger le calcul de manière à ne jamais introduire que des termes périodiques.

Une première difficulté de la question (celle qui provient des termes « sécu-

---

([1]) Leur nombre et la variété (au moins apparente) de leurs principes vient en quelque sorte, dans l'état actuel de la Science, ajouter un obstacle nouveau à toutes les difficultés qui entourent l'étude de la Mécanique céleste.

On doit à Poincaré d'avoir montré (*voir* en particulier t. 14, 15 du *Bulletin Astronomique*; *Œuvres*, t. VIII, p. 31-32 et 33-47) comment on peut passer des unes aux autres en changeant le groupement des termes.

([2]) POINCARÉ, *Revue Générale des Sciences*, t. 2, 1891, p. 1-2; *Œuvres*, t. VIII, p. 529-37.

laires »), est ainsi évitée. Mais celle des petits diviseurs subsiste ; et, par conséquent une question préjudicielle se pose : les séries ainsi obtenues — celles de Lindstedt, par exemple, — convergent-elles ?

Jusqu'à Poincaré, il paraissait de toute évidence qu'une réponse à cette question, dans le sens de l'affirmative, démontrait la stabilité. On était même tenté de présumer celle-ci par l'existence seule de séries telles que celles de Lindstedt.

En d'autres termes, si, grâce aux « petits diviseurs », les développements en séries formés pour rendre compte des mouvements des corps célestes sont divergents, on était porté à admettre qu'ils peuvent cependant fournir sur certaines propriétés des solutions — particulièrement sur les propriétés qualitatives — les indications qu'on se serait cru autorisé à en déduire en toute rigueur en cas de convergence.

Poincaré va décider ces questions en sens tout contraire. Non seulement les séries de Lindstedt sont, en général, divergentes ; mais il y a plus — et cette paradoxale découverte, qui a bouleversé les conceptions des astronomes, remonte aux premières années de son labeur —, la convergence même de séries de cette nature ne permettrait pas, à elle seule, d'affirmer la conclusion demandée, celle à laquelle on serait conduit en se fiant au calcul formel.

Poincaré montrera par des exemples que cette conclusion peut être fausse. Cette démonstration est donnée sur le cas du second ordre, où les représentations géométriques sont plus simples. Ici, toutefois, ce ne sont pas elles qui jouent le rôle important, et le point de vue purement analytique reprend ses droits.

Une Note, contemporaine, nous l'avons dit, des premiers travaux de Poincaré, contient les principes essentiels de la solution. Les développements habituellement considérés en Mécanique céleste sont, on le sait, des séries trigonométriques

$$\sum [A_n \cos(\alpha_n t) + A'_n \sin(\alpha_n t)]$$

mais bien différentes des séries de Fourier en ce que les arguments des sinus et cosinus s'obtiennent en multipliant la variable indépendante (autrement dit, le temps) par des coefficients α_n qui ne croissent pas nécessairement à l'infini et qui peuvent même tendre vers zéro.

C'est la théorie mathématique de ces séries qui a été fondée par Poincaré en quelques pages des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, puis du

Bulletin Astronomique. Les résultats en offrent, pour le moins, autant de singularités que ceux qui sont relatifs aux séries de Fourier; mais certaines propriétés essentielles de ces dernières trouvent, moyennant modification convenable, leur généralisation. La plus importante est l'expression des coefficients A_n, A'_n par des intégrales définies : seulement celles-ci, étant donné que les séries dont il s'agit ne sont pas périodiques, doivent être étendues, non plus à un intervalle fixe, mais à un intervalle indéfiniment croissant.

C'est cette expression qui permet à Poincaré de mettre en évidence d'une manière irréfutable l'erreur que l'on commet en voyant dans la convergence d'une série trigonométrique de cette espèce pour toutes les valeurs de la variable une preuve du fait que la somme de cette série reste finie même lorsque cette variable augmente indéfiniment. L'expression en question montre en effet que la somme de la série ne peut rester finie si les coefficients A, A′ eux-mêmes ne sont pas tous inférieurs en valeur absolue à une même limite fixe.

Or l'hypothèse que les coefficients A, ou certains d'entre eux, aillent en augmentant indéfiniment n'est nullement incompatible avec la convergence de la série, du moment que les coefficients α correspondants peuvent tendre vers zéro. Il en est ainsi même dans le cas de la convergence absolue, celui où surtout on pouvait être porté à croire le contraire, par analogie avec les autres types de séries connus.

A cet égard, les deux séries partielles formées, l'une par les termes cosinus, l'autre par les termes sinus, se comportent très différemment. La première

$$\sum A_n \cos(\alpha_n t)$$

ne saurait évidemment converger absolument poûr $t = 0$ sans converger *uniformément* pour toutes les valeurs réelles de t (la série des coefficients A étant absolument convergente) et représenter une fonction bornée.

Il en est autrement pour la série partielle des sinus

$$\sum A'_n \sin(\alpha_n t).$$

Tout ce qu'on peut dire, c'est que, si elle converge absolument dans un intervalle, si petit qu'il soit, autour de l'origine elle est absolument convergente pour toute valeur réelle de t : — théorème qui s'étend dès lors aisément à la série totale et au cas où l'intervalle où la convergence est donnée ne comprend pas l'origine —; mais cette convergence, si elle est absolue, n'est pas nécessairement uniforme et des exemples tels que celui de la série $\sum 2^n \sin\left(\frac{t}{3^n}\right)$ montrent qu'elle peut avoir lieu avec des coefficients indéfiniments croissants.

Les principes ainsi établis ne servent pas seulement à discuter les questions de stabilité dont nous parlons en ce moment. Combinés avec ceux que Poincaré indique d'un mot à une autre occasion (1), ils ont donné naissance à toute la théorie des fonctions quasi périodiques que l'on doit à MM. Bohr et Esclangon et qui est destinée à prendre une place importante en Mécanique céleste.

Si maintenant on applique ces principes aux trajectoires L, L′ considérées plus haut, et aux séries correspondantes qui, nous l'avons dit, ne sont autre chose que des séries de Lindstedt, on voit que non seulement ces développements en séries ne suffisent pas à démontrer l'existence des surfaces tubulaires, mais qu'en fait ces surfaces en question n'existent pas toujours et que plusieurs dispositions très différentes, tant stables qu'instables, sont possibles.

On voit alors « à quel point les difficultés que l'on rencontre en Mécanique céleste, par suite des petits diviseurs et de la quasi-commensurabilité des moyens mouvements, tiennent à la nature même des choses et ne peuvent être tournées. Il est extrêmement probable qu'on les retrouvera, quelle que soit la méthode que l'on emploie ».

Ajoutons que si l'on passe au problème des n corps lui-même, la divergence des séries de Lindstedt, du moins en général, — car la convergence reste encore, à la rigueur, possible quoique très improbable, pour des valeurs particulières des constantes d'intégration — ressortira, elle aussi, des propriétés des solutions et, en particulier, de celles des exposants caractéristiques.

Sur cette question, d'ailleurs, les conclusions de Poincaré ne furent pas purement négatives. S'il constate la divergence des séries en question, c'est lui qui a montré — à l'aide des principes déjà acquis par ses recherches sur les intégrales irrégulières des équations linéaires et qui ont reçu une portée nouvelle par les travaux ultérieurs de M. Borel — pourquoi elles peuvent être néanmoins utiles et dans quelles conditions on pouvait en faire un usage légitime : pourquoi, autrement dit, tout en étant incapables de fournir une approximation indéfinie, même si on les poursuivait indéfiniment, elles permettent néanmoins, les masses perturbatrices étant petites, de pousser cette approximation jusqu'à un certain point, heureusement suffisant en pratique.

(1) *Bull. Astr.*, t. 14; *Œuvres*, t. VIII, p. 10-26.

En même temps que Poincaré est amené à faire les réserves que nous venons d'indiquer sur la puissance des principaux moyens d'action employés avant lui, nous avons déjà vu qu'il en apporte, à son tour, de nouveaux.

Les invariants intégraux viennent rendre des services sinon égaux, du moins analogues à ceux qu'auraient pu fournir ces intégrales uniformes à la poursuite desquelles la Mécanique céleste doit renoncer. Comme elles, ils représentent des quantités qui restent constantes pendant tout le cours du mouvement, seule propriété qui permette d'établir des relations directes entre des phases éloignées de celle-ci.

Quant aux solutions périodiques et aux solutions asymptotiques qui en dérivent, nous avons dit qu'elles servent, non seulement en elles-mêmes, mais comme intermédiaires permettant d'arriver aux autres solutions.

C'est sous ce jour que les solutions périodiques apparaissent déjà dans les recherches dont nous avons précédemment parlé. Mais leur puissance, à cet égard, va surtout se manifester avec les méthodes mêmes par lesquelles Poincaré démontre leur existence.

Nul sujet n'a retenu davantage son attention. On peut dire qu'il s'en est préoccupé toute sa vie. Le premier travail qu'il y consacra date, en effet, de 1883; et l'ombre de la mort planait déjà sur lui lorsqu'il écrivit le dernier [1], en l'ouvrant par les nobles et mélancoliques paroles, véritable testament scientifique, que nul d'entre nous n'a oubliées.

Pour la formation des solutions périodiques, le Mémoire de 1883 emploie le théorème de Kronecker. Celui-ci se présente, en l'espèce, comme la généralisation naturelle au cas des systèmes d'équations à plusieurs inconnues (problème auquel peut se ramener en dernière analyse la détermination des solutions périodiques dont il s'agit) de la méthode la plus élémentaire qui existe pour déceler les racines d'une équation unique, celle qui est fondée sur les changements de signe du premier membre.

Une autre méthode classique qui permet évidemment, elle aussi, de montrer l'existence des solutions des systèmes d'équations peut être considérée comme une généralisation du théorème de Rolle : elle consiste à utiliser l'existence du maximum ou du minimum d'une fonction convenablement choisie des inconnues. On aura ainsi assurément une solution des équations obtenues en égalant à

---

(1) *Rendic. del. Circ. Mat. di Palermo*, t. 33, 1er semestre 1912, p. 375-407; *Œuvres*, t. VI, p. 499-538.

zéro les dérivées partielles de cette fonction. Poincaré ne l'emploie pas seulement sous cette forme, mais sous celle, sur laquelle nous reviendrons plus loin du Calcul des variations.

Ces différents procédés sont combinés entre eux, et surtout, comme nous allons le voir, avec les résultats que donne la théorie des fonctions implicites, en vue de l'étude plus particulière du problème des trois corps et des équations de la Mécanique céleste.

Au point de vue analytique, le système planétaire se présente comme un système dynamique dépendant d'un paramètre μ (masse perturbatrice ou facteur proportionnel aux masses perturbatrices) auquel on ne donne que de très petites valeurs. Pour $\mu = 0$, l'intégrale générale est connue : tous les points matériels qui composent le système décrivent des ellipses suivant la loi de Kepler.

Lorsqu'un système d'équations (en termes finis) à un nombre égal d'inconnues dépend d'un paramètre et que son jacobien n'est pas nul, le théorème classique relatif aux fonctions implicites montre l'existence d'une solution pour les petites valeurs de ce paramètre dès que la solution existe pour la valeur zéro.

Poincaré a parfois l'occasion d'appliquer ce principe sous la forme que nous venons de rappeler; — et le théorème précédemment cité (p. 193) sur la dépendance des intégrales des équations différentielles par rapport aux données initiales et aux paramètres lui permet même d'affirmer l'analyticité des solutions. Mais, en général, dans le type de problèmes qu'il traite, les choses se passent de manière un peu plus compliquée. Les équations relatives à $\mu = 0$, c'est-à-dire celles qu'on obtient quand on ne tient pas compte des perturbations, admettent une infinité de solutions périodiques, à savoir toutes celles dans lesquelles les moyens mouvements sont tous commensurables entre eux. Mais c'est précisément cette infinité — d'une manière plus précise, l'infinité continue de solutions qui correspondent à un seul et même système de valeurs des moyens mouvements — qui fait ici la difficulté : car elle entraîne cette conséquence que le jacobien est nul.

Le théorème classique ne suffit donc plus, et une étude plus approfondie des fonctions implicites dont il s'agit doit être entreprise. Géométriquement parlant, si, aux coordonnées initiales qui définissent la solution cherchée, on joint la valeur de μ pour définir ainsi un point de l'hyperespace, les équations qui expriment que la solution est périodique définissent, dans cet hyperespace, une variété dont certaines parties continues sont situées sur le domaine $\mu = 0$. On ne pourra avoir une série continue de solutions de ces équations correspondant à μ variable et dépendant analytiquement de μ que lorsque l'on aura une courbe de l'hyperespace appartenant à la variété en question et coupant le domaine $\mu = 0$, d'où résultera un *point multiple* de cette variété.

Poincaré, en usant des deux moyens d'actions indiqués plus haut et en reliant entre eux par des lemmes remarquables qui permettent d'établir l'existence de fonctions implicites dans des cas étendus où le jacobien est nul, établit l'existence de tels points multiples : à partir de l'un d'entre eux, la méthode classique devient applicable moyennant des modifications convenables et fournit une série de mouvements périodiques dont les éléments représentatifs sont développables suivant les puissances entières ou fractionnaires de μ.

Mais la méthode devait devenir plus souple et plus générale, grâce aux recherches que Poincaré développait vers le même temps (1889) sur la figure des planètes et dont il sera question plus loin. Là, on a à résoudre, et dans des conditions beaucoup plus difficiles encore, puisqu'il s'agit d'une infinité de variables, des questions de même nature. Les principales notions qu'il va introduire à cette occasion, celles de *forme de bifurcation* et de *coefficients de stabilité*, trouvent ici leurs analogues. Les formes de bifurcation correspondent aux points doubles de notre variété et, constituent par conséquent les éléments essentiels qui permettent de la construire; les coefficients de stabilité ne sont ici autres que les carrés des exposants caractéristiques, effectivement liés à la stabilité (à la Liapounof) d'une solution périodique quelconque.

Comme dans la théorie de la figure des planètes, il y a une sorte d'échange des stabilités chaque fois qu'on passe par une forme de bifurcation. Un fait du même ordre se produit d'ailleurs dans le cas qui s'oppose à un certain point de vue à celui de la bifurcation, celui où, au cours de la variation de μ, il y a disparition de solutions périodiques. Cette disparition se fait par couples comme celle des racines réelles des équations algébriques et les solutions qui disparaissent ensemble sont de stabilités différentes.

Mais, sur un arc de courbe tracé dans notre hyperespace et le long duquel μ varie constamment dans le même sens, le théorème de l'échange des stabilités admet au contraire une réciproque : il ne peut y avoir changement dans les stabilités autrement qu'en passant par les bifurcations. On ainsi un nouveau moyen efficace de mettre en évidence celles-ci et un nouvel exemple des services que peut rendre l'introduction des exposants caractéristiques.

Ainsi élargie, la méthode se généralise d'elle-même et suffit à faire apparaître des résultats d'une complication inattendue, lorsqu'ou passe à ce que Poincaré appelle les solutions périodiques du *second genre*.

Il donne ce nom à celles qui sont voisines d'une solution périodique déterminée de période T et qui sont également périodiques, mais dont la périodicité ne se retrouve qu'après k révolutions, de sorte que leur période est voisine non de T, mais de kT. Leurs points représentatifs, dans notre hyperespace, engendreront une variété analogue à la précédente, laquelle en fera d'ailleurs évidemment partie. Mais il y aura en outre, des branches nouvelles et, par conséquent, des points multiples nouveaux, intersections de ces branches nouvelles avec les anciennes; et nous trouverons ainsi de nouvelles séries de solutions périodiques, greffées, en quelque sorte, sur les premières.

L'emploi des exposants caractéristiques montre bien, en effet, la condition qui caractérise les nouveaux points doubles comme plus large que celle qui caractérisait les anciens.

Reste, il est vrai, à s'assurer, même lorsque cette condition est remplie, si les nouvelles branches de courbes dont elle fait prévoir l'existence sont réelles. Ce sont les invariants intégraux qui permettent de triompher de cette difficulté en la ramenant à l'étude des maxima et minima d'une certaine fonction, étroitement liée d'ailleurs au principe de la moindre action. Un lemme (analogue à ceux dont nous avons parlé page 218 ainsi qu'à ceux dont il sera question à propos de la figure des planètes), qui constitue en lui-même un progrès essentiel pour l'étude des fonctions implicites, fournit le moyen de constater que la condition précédemment écrite est bien suffisante.

Or, cette condition est que l'un des exposants caractéristiques soit un multiple de $\frac{2i\pi}{kT}$.

Comme k est un entier quelconque, on peut le prendre assez grand pour que les multiples de $\frac{2i\pi}{kT}$ soient aussi rapprochés les uns des autres qu'on veut. Comme ces exposants caractéristiques varient continûment avec μ, les bifurcations dont il s'agit se produiront dès lors à intervalles aussi petits qu'on le voudra, au cours de la variation de ce paramètre. Ce ne sont donc plus un certain nombre de familles de solutions périodiques qui sont ainsi mises en évidence, mais un réseau extrêmement compliqué de familles de cet espèce, distribuées comme le sont les nombres commensurables dans la suite totale des nombres. Les périodes correspondantes seront, par contre, indéfiniment croissantes, puisque ce seront des multiples plus ou moins éloignés de la période primitive T.

Il est aisé de comprendre qu'un tel résultat éclaire d'un jour nouveau les précédents et ouvre de nouvelles perspectives.

Nous avons vu Poincaré rattacher aux solutions périodiques toutes celles qui en sont suffisamment voisines. Étant donnée la manière dont les solutions périodiques dépendent des nombres commensurables, ne peut-on atteindre, par cette voie, toutes les solutions possibles (du moins toutes les solutions stables), de même que, à l'aide des nombres commensurables, on peut représenter par approximation tous les nombres réels ?

On aurait ainsi une voie conduisant en un sens à l'intégration complète du problème. Les choses se passent d'ailleurs effectivement de cette façon pour certains problèmes de Dynamique [1].

Un récent travail, auquel la question ainsi soulevée a conduit M. Birkhoff, est venu modifier nos idées sur ce point. Mais, en nous amenant à élargir le principe précédent, il ne tend pas, loin de là, à en affaiblir la portée. M. Birkhoff, en effet, arrive à établir la possibilité d'une approximation indéfinie, analogue à celle qu'avait en vue Poincaré, en remplaçant, toutefois, les solutions périodiques par une autre catégorie de solutions un peu plus générale.

Il semblerait, à un examen superficiel, que nous ayons ainsi épuisé toutes les solutions périodiques du problème de la Mécanique céleste correspondant aux valeurs suffisamment petites de μ, ou du moins toutes celles qui forment des séries continues. Nous savons, en effet, que toute série de cette espèce doit, à la limite, pour $\mu = 0$, donner une solution périodique du problème primitif, qui est celui où l'on ne tient pas compte des perturbations. Or il semble que nous ayons passé en revue toutes les solutions périodiques de ce problème primitif, et qu'il suffise, par conséquent, de chercher celles qui sont voisines de celles-là pour μ voisin de zéro.

Mais nous avons déjà vu, avec Poincaré, les difficultés d'un genre tout particulier que l'on rencontre lorsque, dans les questions vraiment ardues et vraiment mystérieuses comme celles auxquelles il s'attaque, on cherche à préjuger de la solution par l'étude des cas particuliers que l'on sait traiter. La simplifi-

---

[1] Par exemple pour les géodésiques des surfaces à courbure négative.

cation s'achète par une déformation où il peut arriver que tous les phénomènes deviennent méconnaissables. Nous sommes bien obligés d'accepter le marché (le cas des courbes définies par une équation différentielle du premier ordre est le seul où Poincaré ait pu opérer autrement) du moment que, en dehors de lui, nous serions condamnés à l'impuissance absolue; mais nous devons compter avec les pièges auxquels il nous expose. Nulle lecture n'est plus instructive à cet égard que celle des derniers paragraphes du *Mémoire sur le problème des trois corps*, ou du chapitre correspondant des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* [1].

Une chose rend suspecte, ici, la conclusion provisoire à laquelle nous songions tout à l'heure. Parmi les paramètres dont dépend l'état du système, un certain nombre (les anomalies des planètes sur leurs orbites osculatrices, ou les longitudes des périhélies ou des nœuds de ces orbites) sont angulaires : il ne serait dès lors pas nécessaire, pour la périodicité, que ces paramètres reviennent à leurs valeurs primitives au bout de la période T; il suffit que chacun d'eux (ou plutôt chacune de leurs différences mutuelles) ait alors augmenté de $2p\pi$, p étant un entier quelconque. Or, en ce qui concerne certains d'entre eux (les longitudes mentionnées en dernier lieu), cet entier p a toujours la valeur zéro lorsqu'il s'agit du mouvement képlérien sans perturbation. Il en est forcément de même sur toutes les solutions périodiques dont l'existence a été jusque-là établie pour μ voisin de zéro, puisque p ne peut, sans discontinuité, passer de zéro à une valeur entière non nulle.

Cependant, l'absence, pour μ différent de zéro, de solutions périodiques dans lesquelles les entiers p soient quelconques, nous apparaît, non seulement comme très peu probable, mais même comme tout à fait absurde lorsqu'on tient compte de ce que l'annulation des entiers p est une conséquence des propriétés toutes particulières du problème envisagé et n'aurait plus lieu si on le remplaçait par un autre problème de Dynamique infiniment voisin.

Il faut donc qu'il existe d'autres systèmes de solutions périodiques dégénérant, pour $\mu = 0$, en courbes limites autres que celles dont nous avons parlé jusqu'ici. C'est en effet ce qui a lieu. Poincaré en indique la raison, pour la première fois, dans la conclusion du *Mémoire sur le problème des trois corps*.

« Si $\mu = 0$, c'est que les masses des deux planètes sont infiniment petites et

---

[1] T. III, chap. XXXII.

qu'elles ne peuvent agir l'une sur l'autre d'une manière sensible, *à moins d'être à une distance infiniment petite l'une de l'autre.* Mais si ces planètes passent infiniment près l'une de l'autre, leurs orbites vont être brusquement modifiées comme si elles s'étaient choquées. On peut disposer des conditions initiales de telle façon que ces chocs se produisent périodiquement et on obtient ainsi des solutions discontinues qui sont de véritables solutions périodiques du problème du mouvement képlérien et que nous n'avons pas le droit de laisser de côté. »

Autour de ces courbes, composées chacune de plusieurs ellipses képleriennes et présentant des points anguleux, se groupent les nouvelles solutions périodiques, dites *de deuxième espèce*, que Poincaré examine d'ailleurs sommairement, dans *les Méthodes nouvelles*, en raison de leur peu d'analogie avec les orbites observées, mais qui, comme on le voit, n'en sont pas moins d'un haut intérêt analytique.

Poincaré reprend la recherche des solutions périodiques sous une autre forme, dix ans plus tard, dans un Mémoire des *Transactions* de la Société mathématique américaine. Nous dirons plus loin comment il lui applique les données du Calcul des variations.

C'est à ce même problème enfin, et sous sa forme la plus difficile, qu'est allée l'une des dernières méditations de sa vie, ce Mémoire des *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo* qui a douloureusement ému tous ses admirateurs par le triste pressentiment qui s'y trouve exprimé.

Poincaré y cherche à ne plus se borner, comme il l'avait fait dans *les Méthodes nouvelles*, aux petites valeurs de μ, c'est-à-dire à obtenir des solutions périodiques même si l'on n'est pas au voisinage d'un cas d'intégration connu.

Par une méthode de forme toute nouvelle, il montre que tout se ramène à un théorème de géométrie relatif aux transformations des figures planes (existence d'un point invariant sous des conditions très générales imposée à la transformation) et que, par conséquent, la démonstration de ce théorème équivaudrait à la résolution de la question posée, au moins dans le premier cas qu'on soit conduit à aborder.

Cette démonstration, que Poincaré s'excusait de ne pouvoir fournir, fut donnée, peu de mois après sa mort, par M. Birkhoff, de sorte que les résultats qu'il énonçait à titre hypothétique sont définitivement acquis aujourd'hui.

Invariants intégraux, solutions périodiques, solutions asymptotiques, sont les matériaux dont sont tissées *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. C'est par leur réaction mutuelle que sont obtenues les conquêtes qui ont fait l'admiration des géomètres et des astronomes.

Non seulement les notions ainsi créées sont grosses pour la Mécanique céleste de résultats nouveaux, mais elles constituent, pour les résultats obtenus par ailleurs, un important moyen de contrôle. Les invariants intégraux, par exemple, donnent une série de vérifications pour tous les calculs entrepris par les méthodes connues (1).

Les propriétés des solutions périodiques ont, à cet égard, fait leurs preuves d'une manière remarquable à l'occasion des mémorables travaux de G. Darwin (2). Les calculs du grand astronome anglais ont, on le sait, dans un exemple numérique déterminé, abouti à la formation d'une série d'orbites périodiques de formes entièrement nouvelles et souvent inattendues. Ces orbites sont de plusieurs catégories différentes; elles sont tantôt stables et tantôt instables. Certaines des transformations qu'elles subissent, lorsque la constante de Jacobi varie continûment, obéissaient bien aux lois établies par Poincaré. En particulier, on voyait à un certain moment apparaître simultanément deux d'entre elles, l'une stable et l'autre instable, et cependant très peu différentes l'une de l'autre lors de leur apparition.

Au contraire, une des familles d'orbites périodiques trouvées passait de la stabilité à l'instabilité dans des conditions où ce passage n'aurait pu se faire que moyennant échange de stabilités et, par conséquent, bifurcation. Celle-ci n'apparaissant pas en l'espèce, Poincaré fut conduit à présumer que les orbites instables n'étaient pas la continuation des orbites stables.

C'est ce qu'a confirmé ultérieurement, dans ce journal même (3), M. Hough, en reprenant l'étude des transformations mutuelles des orbites précédentes. On retrouve, dans cet exemple, les phénomènes généraux décrits dans *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

En particulier, serrant les calculs de plus près au voisinage du passage mis en doute par Poincaré, M. Hough constate que, effectivement, les apparences constatées par Darwin sont dues à ce que, en vertu des données numériques

---

(1) Les invariants intégraux possèdent d'ailleurs d'importantes propriétés formelles; S. Lie et depuis, MM. Kœnigs et Goursat leur ont consacré leurs efforts. On sait qu'on doit à M. de Donder plusieurs exposés de leurs propriétés.

(2) *Acta Math.*, t. 21.

(3) *Acta Math.*, t. 24, p. 257-288.

adoptées, l'apparition d'une famille de satellites coïncide approximativement avec la disparition de l'autre.

Ce sont les invariants intégraux qui ont permis à Poincaré de s'attaquer au problème de la stabilité des trajectoires, qui correspond, pour un système dynamique quelconque, à celui de la stabilité du système solaire (¹).

Laplace a, on le sait, démontré cette dernière stabilité en première approximation et Poisson a passé à l'approximation du second ordre. Mais nous savons maintenant que les méthodes d'approximation ne peuvent donner ici de réponse valable : on peut seulement en inférer une certaine stabilité temporaire, nous renseignant pour une très longue période.

C'est la stabilité au sens de Poisson (moins précis que celui de Laplace) que dans une catégorie étendue de mouvements (laquelle toutefois n'embrasse pas notre système solaire) Poincaré a pu démontrer d'une manière rigoureuse et non plus approximative.

Par contre, son résultat a une signification toute différente de ceux qui avaient été obtenus antérieurement. Il ne gouverne pas toutes les trajectoires sans exception, mais seulement à *des trajectoires exceptionnelles près*.

Les mots « trajectoires exceptionnelles » doivent s'interpréter, ici, à l'aide du Calcul des probabilités : ils veulent dire que, une trajectoire étant prise au hasard, la probabilité pour qu'elle soit une de celles qui mettent en défaut le théorème est *infiniment petite* (et non pas seulement très petite).

Autrement dit, il n'est pas absolument certain qu'une trajectoire arbitraire possède la stabilité à la Poisson, mais il y a infiniment peu de chances qu'il en soit autrement.

*
* *

Le *Calcul des probabilités*, auquel Poincaré était une première fois amené par la Dynamique, devait, par la suite, tenir une place importante dans son œuvre.

En même temps qu'il s'occupait d'en élucider les principes, il est un de ceux

---

(¹) Encore ne s'agit-il ici que de la question prise au point de vue théorique. Poincaré a soin de rappeler (*Annuaire du Bureau des Longitudes*, 1898; *Œuvres*, t. VIII, p. 538-547) que le problème analytique ainsi posé est tout différent du problème physique, l'influence des éléments négligés (les marées, entre autres, et le frottement qu'elles produisent) ne pouvant manquer de devenir, en fin de compte, prépondérante.

qui en ont poussé le plus loin l'application. Nous aurions à insister sur ces deux aspects de son œuvre si, à quelques exceptions près, le premier d'entre eux ne concernait le philosophe et le second le physicien.

C'est le développement des théories moléculaires qui a imprimé au génie de Poincaré cette dernière orientation. Au point de vue du mathématicien, les théories en question ont eu pour effet : 1° de faire passer au second plan les équations aux dérivées partielles, au profit des équations différentielles ordinaires; 2° de faire reposer toutes les déductions sur le Calcul des probabilités.

De là, et du rôle directeur que Poincaré sut prendre dans ce grand mouvement, découlent, par une conséquence nécessaire, les recherches qu'il eut à entreprendre dans cette dernière direction, recherches qu'il ne nous appartient pas de retracer dans leur ensemble.

Contentons nous d'en rappeler l'aspect proprement mathématique, tel qu'il est traité dans la deuxième édition des *Leçons sur le Calcul des probabilités* professées à la Faculté des Sciences de Paris.

Tout cet Ouvrage renferme des aperçus qu'il conviendrait de signaler : — telle est, par exemple, l'application nouvelle de la méthode des moindres carrés à l'interpolation, si adéquate, comme l'a montré M. Quiquet ([1]), aux besoins de la pratique par la manière dont les calculs faits en vue de l'approximation par un polynome de degré déterminé peuvent être utilisés pour former le polynome d'approximation de degré supérieur. Mais la question fondamentale au point de vue de l'application du Calcul des probabilités aux phénomènes moléculaires fait l'objet du dernier chapitre. C'est déjà elle qui est abordée lorsque Poincaré étudie le battage des cartes.

Pourquoi, lorsque le jeu a été battu assez longtemps, admettons-nous que toutes les permutations des cartes, c'est-à-dire tous les ordres dans lesquels ces cartes peuvent être rangées, doivent être également probables? Le joueur qui bat les cartes a cependant des habitudes instinctives et, grâce à elles, si l'ordre primitif des cartes est donné, on doit supposer que, pour l'ordre obtenu après un seul battage, certaines permutations sont plus probables que d'autres. Poincaré va montrer en toute rigueur que, si le nombre des battages est grand, le résultat obtenu sera totalement indépendant de ces habitudes inconnues du joueur, toutes les permutations ayant finalement la même probabilité.

La question qui se pose à la base des théories cinétiques est tout analogue,

---

([1]) *Congrès de Cambridge*, t. II, 1912, p. 385.

mais avec des difficultés nouvelles; car l'énoncé comporte, cette fois, des cas d'exception. Il doit, tout d'abord, subir une modification chaque fois que les équations différentielles du problème admettent des intégrales. Mais cette réserve n'est pas la seule à laquelle soit conduit Poincaré, au moins théoriquement; et quoique, physiquement parlant, la conclusion visée (à savoir que, une fois connues toutes les intégrales univoques, la probabilité de chaque état final du système peut être connue *a priori*, indépendamment du mécanisme de mélange) reste vraisemblable, on voit que les conditions de sa validité mathématique sont à préciser.

Les nouveaux aspects que prenait ainsi la théorie physique ont mis une fois de plus en évidence, en en faisant sentir tout le prix, cette universalité, cette maîtrise simultanée des domaines les plus divers, qui est une des caractéristiques du génie de Poincaré.

La substitution des équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles tendait évidemment à rapprocher les méthodes de la Physique mathématique des précédentes, de celles de la Mécanique céleste. Mais, grâce aux recherches ci-dessus mentionnées de Poincaré, on voit que l'introduction du Calcul des probabilités se trouvait agir dans le même sens. C'est, notons-le, sous la même forme que le Calcul des probabilités intervenait de part et d'autre : nous avons vu précédemment que le principe fondamental, à savoir l'existence de l'invariant intégral le plus usuel, est commun aux théories moléculaires et à la Dynamique de Poincaré.

Ce rapprochement entre les méthodes se retrouve d'une manière remarquable dans les résultats. Un astrologue aurait sans doute trouvé une preuve de l'identité du microcosme et du mégacosme dans cette similitude constatée entre l'étude de molécules dont il entre des millions de millions dans 1 mm^3 et celle d'astres séparés par des distances que la lumière met des milliers d'années à franchir, celles-là étant considérées pendant quelques milliardièmes de seconde et ceux-ci pendant des millions de siècles.

Ce sont, tout d'abord, nos connaissances sur le mouvement des planètes qui nous ont aidés à comprendre la vie des molécules.

Mais l'inverse s'est produit lorsque, d'un unique système planétaire tel que le nôtre, on a voulu passer à la foule de ceux qui composent le monde stellaire, même limité à notre voie lactée. C'est Lord Kelvin qui émit pour la première fois une idée de ce genre; mais c'est Poincaré qui montra tout ce qu'elle est capable de donner. Il suffit de parcourir son livre sur les *Hypothèses cosmogoniques* pour voir combien de relations nous commençons à pénétrer, qui nous resteraient encore incompréhensibles si nous n'avions à notre disposition les études statistiques entreprises par les physiciens sur le perpétuel et inextricable grouillement des molécules.

Ce livre fut un des derniers de son existence. Il était digne d'en marquer le couronnement.

Nul Ouvrage pour lequel il fût plus nécessaire. Pour éclairer les propriétés des molécules par celles des nébuleuses et inversement, il fallait dominer à la fois les unes et les autres. Il fallait un successeur de Laplace qui fût en même temps un successeur des Claüsius et des Boltzmann, pour écrire les *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*.

4. Analysis situs. Calcul des variations. Déterminants infinis.

D'autres parties de l'œuvre de Poincaré se rattachent encore à ses travaux sur les équations différentielles

Ceux-ci devaient, tout d'abord, l'amener logiquement à perfectionner la *Géométrie de situation*. Nous l'avons vu montrer qu'on ne saurait faire des progrès importants dans la théorie qualitative des équations différentielles sans rencontrer sur son chemin cette doctrine.

Pour les lignes et les surfaces de l'espace ordinaire, l'*Analysis sitūs*, du moins dans les conditions où les applications l'introduisent, tient tout entière dans les données utilisées par Riemann. Mais dès que l'on augmente le nombre des dimensions, les résultats se compliquent énormément, pendant qu'il devient impossible de les atteindre par l'intuition directe.

Poincaré se trouvait donc amené à traiter la géométrie de situation dans les espaces à plusieurs dimensions.

Il en est, en un sens, le premier fondateur, non qu'il ait été le premier à l'avoir abordée; mais seul, il a indiqué exactement les éléments qu'on doit se donner pour définir, à cet égard, une figure : ces éléments avaient été énumérés incomplètement avant lui.

Une première solution avait été fournie que l'on pouvait croire, au premier abord suffisante.

Betti avait généralisé à un nombre quelconque n de dimensions la notion d'ordre de connexion : il avait défini $n-1$ nombres jouant visiblement un rôle tout analogue à celui de l'ordre en question. De même qu'une surface est complètement définie, au point de vue de l'*Analysis situs*, par son ordre de connexion (lorsqu'on donne, en outre, le nombre de ses frontières), on admettait implicitement qu'une multiplicité quelconque était suffisamment caractérisée, au même point de vue, par ses nombres de Betti.

Pour fonder véritablement l'*Analysis situs* à plusieurs dimensions, Poincaré eut à corriger cette erreur. Il montra que, au point de vue dont il s'agit, la définition précise et complète d'une multiplicité à un nombre quelconque de dimensions exige la connaissance d'un certain groupe de substitutions que l'on peut en déduire. Ce groupe, — et, par conséquent, les propriétés topologiques de la multiplicité — peuvent être altérées dans certains cas où, cependant, les nombres de Betti conservent tous leurs valeurs.

Une loi remarquable fut énoncée par Poincaré sur ces nombres de Betti. A la suite d'une pénétrante critique de M. Heegaard, elle l'amena à constater que la définition de ces nombres peut être précisée de plusieurs façons différentes et que l'une de ces modifications s'impose, au point de vue de l'exactitude de la loi en question.

D'autres nombres que ceux de Betti furent découverts dans la suite de ces recherches et jouent également un rôle important en l'espèce : ce sont les *coefficients de torsion*, liés aux variétés à un seul côté que l'on peut tracer sur la variété donnée. Mais un exemple montre que, pour caractériser celle-ci, la connaissance simultanée des nombres de Betti et des coefficients de torsion est encore insuffisante.

La nouvelle *Analysis situs* ainsi fondée devait également, comme celle de Riemann, conduire à des applications algébriques.

La théorie des fonctions algébriques de deux variables venait, en effet, d'être fondée par les travaux de M. Picard. L'analogue de la surface de Riemann est, dans cette théorie, un domaine à quatre dimensions dont il est nécessaire d'étudier la connexion. C'est une étude que M. Picard avait déjà commencée. Poincaré y appliqua les données nouvelles dont il disposait.

Il faut dès lors définir et étudier, sur les surfaces algébriques, des *périodes d'intégrales doubles*, notion qui n'est pas sans relation avec celle des résidus des intégrales doubles considérées plus haut, mais qui est à celle-ci ce que les périodes cycliques des intégrales abéliennes classiques sont aux périodes polaires, et qui devaient jouer un rôle important dans les résultats qu'il obtint ensuite sur le développement de la fonction perturbatrice en Mécanique céleste.

Nous nous bornerons à ces indications en ce qui concerne les fonctions algébriques de deux variables. Il faudrait, si nous voulions insister et montrer quelle aide Poincaré a pu apporter à l'effort des Picard, des Castelnuovo, des Enriques, des Severi, retracer, plus longuement que nous ne saurions le faire ici, les principes de cette théorie et l'important développement qu'elle a pris dans ces dernières années.

Nous avons aussi constaté les relations de l'œuvre dynamique et astronomique de Poincaré avec le *Calcul des variations.*

Tous les travaux de Poincaré sur les équations différentielles, toutes les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* — et aussi toutes les recherches de Poincaré sur la figure des planètes — sont comme le remarque M. Hilbert (1), du Calcul des variations, si l'on prend ce mot au sens le plus large : l'étude des relations d'une fonction avec les fonctions voisines.

Quant au Calcul des variations proprement dit, il a été également, nous l'avons dit, essentiel à la recherche des solutions périodiques. Poincaré a même indiqué brièvement à cet égard des voies qu'il importerait de poursuivre (2) et par lesquelles on pourra démontrer immédiatement l'existence de solutions périodiques toutes les fois que, par des conventions convenables, on pourra considérer les lignes cherchées comme tracées sur des variétés à connexion (linéaire) multiple, en particulier chaque fois que certains des entiers désignés plus haut (p. 221) par p (nombre total de circonférences dont a augmenté pendant une période un paramètre angulaire) seront différents de zéro.

La question est beaucoup plus difficile lorsqu'on ne peut introduire de connexion multiple, ainsi qu'il arrive pour les géodésiques des surfaces convexes, auxquelles est consacré le Mémoire des *Transactions of the American Mathematical Society* mentionné plus haut. La propriété de minimum habituellement employée pour caractériser les géodésiques suffit encore à établir l'existence de géodésiques fermées si la surface est très peu différente d'une sphère, — c'est-à-dire, une fois de plus, dans une hypothèse infiniment voisine d'un cas d'intégration classique. Mais c'est en posant le problème d'une manière toute nouvelle, en en faisant un problème d'extremum lié, que Poincaré arrive au même résultat sur une surface fermée convexe quelconque.

---

(1) *Congrès international des Mathématiciens*, Paris, 1900, p. 107.
(2) Voir *Analyse*, p. 106; *Œuvres*, t. VII, p. 4.

Dans le Mémoire dont nous venons de parler, il utilise le Calcul des variations sans se préoccuper de le compléter. Au contraire, dans *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, il avait examiné la question de savoir si une courbe solution des équations différentielles fournit ou non un extremum de l'action.

On sait que la méthode obtenue par Weierstrass pour décider de l'extremum entre deux extrémités données, comme plusieurs des découvertes dont nous avons eu l'occasion de parler précédemment, avait été une de celles que le géomètre allemand s'était contenté d'enseigner oralement (les premiers Ouvrages portant trace de cet enseignement, la thèse de M. Zermelo et, — pour les intégrales doubles, le Mémoire de M. Kobb, — paraissaient vers le même moment que l'Ouvrage de Poincaré et l'exposé complet de M. Kneser, quelques années plus tard). Par contre, M. Darboux avait fait connaître, sur l'exemple particulier des lignes géodésiques, une autre méthode conduisant à la solution : M. Kneser devait (dans l'Ouvrage auquel nous venons de faire allusion) l'étendre au cas général.

Poincaré a-t-il retrouvé, de son côté, les résultats de Weierstrass? Dans la notice qu'il lui a consacré ([1]), le Calcul des variations n'est pas mentionné. D'autre part, dans *les Méthodes nouvelles* ([2]), la condition de Weierstrass est énoncée, mais non sous sa forme connue, quoique celle-ci et celle de Poincaré soient équivalentes.

Quoi qu'il en soit à cet égard, le résultat que Poincaré a en vue, en l'espèce, est nouveau et lui appartient en propre : c'est l'obtention des conditions nécessaires et suffisantes pour l'extremum lorsque la ligne arbitraire est assujettie non plus, comme dans le problème classique qui est celui auquel s'était attaqué Weierstrass, à joindre deux points donnés, mais à être fermée.

A cet effet, Poincaré emploie d'avance, mais sans en faire la théorie générale, quelques-uns des moyens dont s'est servi M. Kneser pour généraliser la méthode de M. Darboux. En particulier, si la notion d'orthogonalité suffit à l'étude de l'action correspondant au mouvement absolu, Poincaré est amené à construire des « transversales », lorsqu'il passe au mouvement relatif. Le « champ » qu'il fait intervenir est d'ailleurs remarquable : il n'a pas, à notre connaissance, eu d'autres applications et n'a sans doute pas rendu tous les

---

([1]) *Acta Math.*, t. 22, p. 1-18 (1898).
([2]) Tome III, p. 261.

services qu'on est en droit d'en attendre : il est formé par une des familles de solutions asymptotiques à la courbe fermée envisagée.

Le problème d'extremum tel qu'il se pose sous la forme classique, c'est-à-dire entre deux points donnés, figure d'ailleurs également dans les recherches de Poincaré sur les solutions périodiques, et la manière dont la solution dépend de la nature des foyers (suivant que ceux-ci sont des points ordinaires ou des points de rebroussement de l'enveloppe de la famille d'extrémales correspondantes), y est indiquée. Poincaré applique surtout sa discussion au cas où les deux extrémités données coïncident en un même point A. Avec une autre remarque géométrique également importante, l'influence du sens de l'angle ainsi formé au point anguleux A, cette étude est, pour lui, le moyen d'arriver à une conception simple des solutions périodiques du deuxième genre et de période k^{uple} qui naissent, comme nous l'avons dit, au voisinage de certaines solutions du premier genre convenablement choisies. Un exposant caractéristique étant, sur celles-ci, commensurable avec $\frac{2i\pi}{T}$ il en résulte que chaque point sera à lui-même son $2p^{\text{ième}}$ foyer, p étant un entier convenable ; tous ces foyers seront d'ailleurs points de rebroussement, et de même sorte (c'est-à-dire que le rebroussement y aura lieu dans le même sens).

Pour arriver à une solution périodique du deuxième genre, Poincaré fait varier d'une petite quantité, dans un sens convenable, le paramètre μ et constate que chaque point M de la courbe fermée primitive C peut être joint à lui-même par une ligne satisfaisant aux équations différentielles avec la nouvelle valeur du paramètre.

Si enfin on choisit M de manière que l'action le long de cette ligne soit la plus grande ou la plus petite possible, le point anguleux en M disparaît, et on a une solution périodique du deuxième genre, coupant C en $2p$ points.

C'est également, du moins pour une partie, à propos des trajectoires de la Dynamique, — en s'occupant de légitimer la méthode qui avait donné à Hill ses solutions périodiques du problème des trois corps et, en même temps, celle que M. Appell avait appliquée à un nouveau développement des fonctions elliptiques — que Poincaré a été amené à doter l'Analyse d'un nouveau mode de passage à la limite, voisin de celui qu'elle allait devoir à M. Fredholm, les *déterminants infinis* et la résolution des équations linéaires à une infinité d'inconnues.

Nous ne redirons pas après lui (¹) les circonstances remarquables qu'il a rencontrées dans cette recherche. On sait que le nouvel algorithme ainsi fondé a dû d'importantes applications à M. Helge von Koch. Nous avons déjà rappelé que ce savant a pu ainsi calculer (sous leur forme convergente) les intégrales irrégulières des équations linéaires, question liée d'ailleurs directement à l'intégration des équations à coefficients périodiques.

III. — Les équations aux dérivées partielles et les problèmes de la Physique mathématique.

Même après l'évolution qui a augmenté l'importance des équations différentielles ordinaires pour la Physique mathématique, celle-ci continue — et continuera — à s'appuyer sur les *équations aux dérivées partielles*.

Pour ces dernières également, et plus nettement même que pour les précédentes, la solution telle qu'on la concevait primitivement, — ce qu'on a appelé l'intégration *formelle* — est hors de cause. Non seulement l'*intégrale générale*, — par le moyen des symboles élémentaires connus, est le plus souvent introuvable; mais même une fois obtenue, elle ne rend pas les mêmes services que dans le cas des équations différentielles et ne dispense pas de recherches aussi difficiles ou plus difficiles que celles qui ont conduit à l'écrire, lorsqu'on veut l'appliquer aux véritables problèmes qui se posent le plus généralement.

Les difficultés que ceux-ci présentent peuvent être, suivant les cas, de nature très différente.

Il peut arriver qu'elles ressemblent, avec des différences de degré, à ce qu'elles sont pour les équations différentielles, de sorte que la solution puisse être considérée, au point de vue théorique, comme fournie localement par les méthodes de Cauchy, quitte, dans une seconde partie du travail, à faire la synthèse des différents éléments de solution ainsi obtenus.

C'est ce qui se passe — l'équation étant supposée introduite par l'étude d'un phénomène physique — lorsque celui-ci se déroule librement dans l'espace illimité, et où, par conséquent, pour définir son évolution, il suffit de se donner les *conditions initiales*, c'est-à-dire son état à un instant déterminé.

Mais si le phénomène a pour théâtre une enceinte limitée par des parois, —

(¹) *Analyse*, p. 92-94; *Œuvres*, t. V, p. 3-5.

de sorte que pour achever de le définir, il faut écrire un système de *conditions aux limites*, exprimant le rôle joué par les parois en question, — une difficulté d'un tout autre ordre apparaît.

Il est encore vrai que, au voisinage d'un point quelconque, la solution est le plus souvent représentable par des développements en séries du même type que dans les problèmes précédents. Mais, cette fois, aucun de ces *éléments* de solution, — non pas même le premier ([1]), comme il arrivait pour les équations différentielles ordinaires — ne peut être déterminé isolément : la connaissance de chacun d'eux est inséparable de celle de *tous* les autres.

C'est le renversement du principe même qui, en toutes les autres circonstances, guide la marche du calcul intégral : la division de la difficulté en une difficulté locale et une difficulté de synthèse. Une telle division est ici radicalement impossible.

Aussi l'apparition de ces sortes de problèmes — et surtout du premier de tous, celui qui leur a servi de type, le problème de Dirichlet — a-t-elle changé profondément toute l'allure de la mathématique moderne.

Cet exemple est précisément celui que Poincaré a choisi pour montrer comment la Physique impose aux mathématiques des problèmes auxquels elle n'aurait pas songé à elle seule. On voit qu'il n'en pouvait exister de plus typique.

Un tel problème ne pouvait manquer d'attirer l'attention de Poincaré comme il avait attiré celle de plusieurs de ses prédécesseurs. La nouvelle solution qu'il y apporta, la méthode du *balayage*, s'inspire très directement de la nature même de la question, de cette interdépendance mutuelle de toutes les parties de la solution telle que nous venons de la signaler.

Mais alors que la méthode du balayage elle-même se rattache aux autres travaux antérieurement consacrés à la théorie du problème de Dirichlet ([2]), cette théorie devait peu après entrer dans une phase toute nouvelle et subir une révolution profonde dont l'utilité ressort, elle aussi, des remarques précédentes.

Son principe consiste à remplacer l'équation *aux dérivées partielles*, ainsi que les autres conditions auxquelles doit satisfaire la fonction inconnue, par une

---

([1]) Rien ne conduit d'ailleurs à établir entre les éléments en question un ordre déterminé : à considérer spécialement l'un d'entre eux plutôt qu'un autre comme le premier.

([2]) Elle se distingue des méthodes d'approximations successives proposées jusqu'à lui surtout en ce que celles-ci, dans le choix des expressions destinées à servir de points de départ, se préoccupaient tout d'abord de satisfaire dès l'abord à l'équation aux dérivées partielles, les autres conditions du problème devant être vérifiées par le jeu des retouches successives. Poincaré, le premier, guidé par l'interprétation physique de ses calculs, songea à faire l'inverse.

équation *intégrale*. Au lieu de faire figurer l'inconnue sous des signes de dérivation, on la fait apparaître sous un signe d'intégration.

Les premiers sont évidemment une sorte de microscope par laquelle on représente des relations dans l'infiniment petit. Le second, au contraire, est essentiellement synthèse et non analyse. Point n'est besoin dès lors de longues explications pour comprendre comment son emploi est autrement bien adapté aux circonstances dont nous avons parlé que celui de la différentiation.

Ce changement complet d'orientation dans l'étude du problème de Dirichlet et de tous les problèmes analogues de la Physique mathématique évoque, tout d'abord, le nom de M. Fredholm.

On se tromperait cependant du tout au tout en n'y rattachant pas également, et d'une manière très étroite, celui de Poincaré. Ce serait méconnaître cette vérité aujourd'hui banale que les manifestations les plus importantes, les plus inattendues de l'esprit humain sont le produit non seulement du cerveau de leur auteur, mais de toute l'époque qui les a vu naître.

Or notre époque, au point de vue mathématique, c'est avant tout, Poincaré.

Voyons comment son œuvre a été une condition indispensable, la naissance de la nouvelle méthode.

La première étape qui devait conduire à celle-ci peut être cherchée dans le célèbre travail de M. Schwarz inséré, à l'occasion du jubilé de Weierstrass, dans les *Acta Societatis Fennicae* (1885).

Le point de départ de M. Schwarz est une question de pure analyse empruntée au Calcul des Variations. Mais le résultat obtenu admet une interprétation physique immédiate. L'équation aux dérivées partielles considérée par M. Schwarz est immédiatement liée à celle qui gouverne les vibrations d'une membrane tendue et ce qu'il obtient, c'est le *son fondamental* lequel se présente comme correspondant à la valeur qu'il faut donner à un certain paramètre λ qui figure dans l'équation aux dérivées partielles.

Dans l'étude de tout phénomène vibratoire dans un milieu limité l'expérimentateur constate, on le sait, l'existence d'un tel son fondamental, ou, s'il s'agit d'autre chose que d'acoustique, d'une telle *fréquence fondamentale*. Mais, de plus, cette fréquence fondamentale n'est pas la seule *fréquence propre* : en acoustique, par exemple, le son fondamental s'accompagne d'une série indéfinie d'*harmoniques* dont les propriétés, sous les rapports les plus essentiels, sont analogues à celles du premier.

Expérimentalement, l'existence de toutes ces fréquences propres est manifeste. Mathématiquement, M. Schwarz était le premier à démontrer par sa savante méthode celle de la plus simple d'entre elles, la fréquence fondamentale. Il est clair qu'un tel résultat demandait à être complété par son extension aux sons harmoniques. Dix ans après, en effet, M. Picard parvenait à établir l'existence du premier d'entre eux, c'est-à-dire du second son propre.

C'est à Poincaré qu'est due la solution générale, c'est-à-dire la démonstration de l'existence de tous les harmoniques successifs.

Par l'emploi de profonds lemmes géométriques, il démontre que, multipliant la solution par un polynome en λ à coefficients indéterminés, on peut toujours choisir ces coefficients de manière à ce que le développement du produit suivant les puissances de λ converge dans un rayon plus grand qu'avant la multiplication, et même aussi grand qu'on le veut si le degré du polynome a été pris suffisamment élevé. Ceci équivaut à dire que cette solution est une fonction méromorphe de λ. Son numérateur seul est fonction de la position d'un point dans le domaine que remplit le milieu considéré : son dénominateur et, par conséquent, ses pôles en sont indépendants.

Ce sont eux qui fournissent les fréquences propres cherchées. Les résidus correspondants ou *fonctions fondamentales* qui donnent la forme des vibrations propres, représentent une seconde partie importante de la découverte ainsi réalisée.

Ce résultat capital, véritable fondement de toute cette partie de la Physique mathématique, ne suffisait cependant pas à préparer l'évolution dont nous avons parlé tout à l'heure. En particulier, il n'aurait pas à lui seul rendu possible l'application de la méthode des équations intégrales au problème de Dirichlet. Il a fallu d'abord que Poincaré reprît au même point de vue la plus connue et la plus importante des méthodes indiquées (indépendamment de celle du balayage) pour la résolution de ce problème, la méthode de Neumann.

Ce qui fait peut-être du Mémoire sur la *Méthode de Neumann et le principe de Dirichlet* un des plus beaux triomphes du génie de Poincaré, c'est que rien ne faisait prévoir l'analogie qu'il allait établir entre ce problème et le précédent.

Nous avons rappelé que les constatations expérimentales indiquaient *a priori* l'existence, dans le problème considéré par Schwarz d'une série d'harmoniques, ainsi que de fonctions fondamentales correspondantes.

Rien de pareil ne se présentait à propos de la méthode de Neumann; et même, rien ne conduisait à introduire dans cette nouvelle question le paramètre indéterminé λ qui s'introduit de lui-même dans celle des harmoniques.

L'analogie analytique était à peine plus utilisable que l'analogie physique. Il est vrai que la solution fournie par Poincaré fait apparaître dans les deux cas les mêmes résultats essentiels, mais non pour les mêmes raisons.

En un mot, les fonctions fondamentales, au lieu d'être suggérées par une interprétation physique simple, devaient ici sortir tout armées du cerveau de l'analyste.

Poincaré montra cependant, ici encore, que la vraie signification de la méthode de Neumann n'était autre que le développement de la solution par rapports aux puissances d'un certain paramètre qu'il introduit dans les données du problème, et que toutes les autres circonstances principales rencontrées à propos de l'étude des sons harmoniques se retrouvent ici.

Ces résultats étaient d'ailleurs essentiels pour la méthode de Neumann elle-même : car ils permettaient d'en établir la légitimité sans les restrictions qu'avait apportées son auteur.

Avec eux, — et aussi, ajoutons-le, après la méthode de Robin, d'une part, à côté de laquelle il faut citer, de l'autre, les travaux bien connus de M. Volterra, — tout était prêt pour l'entrée en scène de la méthode de M. Fredholm.

Celle-ci, en effet, suit pas à pas la marche que nous venons de retracer. Elle repose essentiellement sur l'introduction du paramètre λ de Poincaré et sur la manière dont il figure dans l'expression de l'inconnue. Seulement, grâce à sa belle méthode de résolution des équations intégrales, M. Fredholm peut écrire, sous forme de développements en séries immédiatement connus, le numérateur et le dénominateur que Poincaré n'obtenait que par de délicates approximations successives.

Ainsi les solutions de tous ces problèmes fondamentaux de la Physique mathématique, — et en particulier, la détermination des sons propres, où la forme des domaines intervient d'une manière si mystérieuse — sont acquises dès Poincaré.

Seulement, pour reprendre la parole même que nous citions en commençant, ces mêmes problèmes sont « plus » résolus par la méthode de Fredholm.

Les recherches précédentes ne s'appliquent pas uniquement à la Physique mathématique; elles intéressent également la Mécanique céleste par le problème des marées. Poincaré montrait effectivement, dans deux Mémoires *Sur l'équilibre et le mouvement des mers*, comment l'emploi des fonctions fondamentales qu'il venait de découvrir permet, quoique avec des difficultés nouvelles ([1]) de tenir compte de l'élément le plus compliqué du problème, l'influence des continents. Nous nous avancerions encore ici sur un domaine qui n'est pas le nôtre en analysant les conséquences auxquelles il est ici parvenu ; et nous ne saurions, pour la même raison, insister sur celles qu'il a obtenues lorsque, après l'apparition de la méthode de Fredholm, il est revenu sur ce sujet dans sa *Théorie des Marées*, une des premières et des plus importantes applications qui (après celles en vue desquelles elle avait été imaginée) aient été données de la méthode en question.

Mais nous avons à rappeler, quoique sommairement et au strict point de vue des principes analytiques, les recherches qui ont eu pour objet la figure des corps célestes, c'est-à-dire la figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation. Ce problème occupe une place à part, la plus haute en un sens, dans la Philosophie naturelle. Si difficiles que soient les problèmes de Physique mathématique étudiés tout à l'heure, un caractère leur est commum, qui est une notable simplification : ils sont tous linéaires. Si l'on a obtenu la solution du problème de Dirichlet, pour une surface donnée, avec les données à la frontière V_1 d'une part, et avec les données V_2 de l'autre, cette solution sera connue par cela même, si les données ont les valeurs $V_1 + V_2$. Il est aisé de se convaincre que toutes les théories imaginées pour la résolution de ce problème et de tous ceux qui s'y rattachent reposent essentiellement sur ce fait.

Le problème de l'équilibre d'une masse fluide en rotation est, parmi toutes les applications physiques ou mécaniques des équations aux dérivées partielles, la seule pour lequel la simplification précédente ne se produise pas ; et, par cela même, il se montre d'un ordre de difficulté supérieur à tous les autres. C'est aussi le seul ([2]) pour lequel, en même temps que la fonction qui doit vérifier une équation aux dérivées partielles, le domaine même dans lequel cette fonction est définie soit inconnu.

Aussi les théorèmes d'existence les plus simples manquaient-ils eux-mêmes dans cette théorie.

Ces hautes difficultés ne pouvaient tarder à tenter Poincaré. Voyons par quelles méthodes, dès 1885, il travailla, ici même ([3]), à les résoudre.

([1]) Voir *Analyse*, p. 119 ; *Œuvres*, t. IX, p. 4.

([2]) Il faudrait toutefois, aux deux points de vue mentionnés dans le texte, faire exception pour le mouvement des liquides dans le cas le plus général, c'est-à-dire avec une surface libre notablement différente du plan horizontal.

([3]) *Acta Math.*, t. 7, p. 259-380 (1885) ; *Œuvres*, t. VII, p. 40-140.

Nous avons dit que ces méthodes relèvent toutes du Calcul des variations si l'on prend ce mot dans son acceptation la plus large. Les considérations qui font l'objet propre du Calcul des variations classique, celles de maximum et de minimum, y interviennent également et, outre l'usage qui en est fait pour la démonstration des théorèmes d'existence, Poincaré a repris et complété les résultats de M. Liapounof sur la sphère considérée comme donnant le potentiel d'attraction maximum.

Mais l'essence de son analyse est dans l'extension aux problèmes à une infinité d'inconnues, des méthodes de discussion que fournissent, pour le cas d'une inconnue unique, le Calcul différentiel et la Géométrie analytique.

Considérons une équation à une seule inconnue x, mais contenant un paramètre μ, soit

$$f(x, \mu) = 0.$$

Si l'on tient compte des deux variables qui y entrent, on sera conduit à la représenter par une courbe plane où μ sera l'abscisse et x l'ordonnée.

Si en un point (x_0, μ_0) de cette courbe, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'annule, on aura, en général, une tangente parallèle à l'axe des x et, lorsque μ passera par la valeur μ_0, l'équation précédente, considérée comme l'équation en x, perdra deux racines (celles-ci venant se confondre entre elles en x_0 pour devenir ensuite imaginaires) ou, au contraire, en acquerra de nouvelles : μ_0 est ce que l'on peut appeler une valeur *limite* pour μ. Mais si μ traverse la valeur μ_0 sans que l'équation en x cesse d'avoir, tant avant qu'après cette valeur, des racines voisines de x_0, le point (x_0, μ_0) est, en général, point multiple. Les discussions qui apprennent à décider s'il en est bien ainsi sont élémentaires, mais Poincaré leur emprunte un énoncé d'une forme nouvelle. Pour qu'il y ait *bifurcation*, autrement dit point multiple, il suffit (sur un arc de courbe réel où μ est supposé pouvoir prendre des valeurs tant immédiatement supérieures qu'immédiatement inférieures à μ_0) que $\frac{\partial f}{\partial x}$, en s'annulant, change de signe.

Si maintenant on remplace l'équation unique qui précède par un système d'équations à un nombre égal d'inconnues, dépendant également du paramètre μ, on sait que le rôle de la dérivée considérée tout à l'heure est rempli par un déterminant fonctionnel. Grâce au théorème de Kronecker, Poincaré étend à ces nouvelles conditions la conclusion précédente : en d'autres termes, si, au cours d'une variation continue dans laquelle μ est constamment croissant ou constamment décroissant, le déterminant fonctionnel en question change de signe, il y a bifurcation.

Ceci suffirait théoriquement, dans un grand nombre de cas, en ce qui concerne les équations ordinaires. Mais Poincaré se propose d'introduire ces notions dans un domaine nouveau. Un problème tel que celui de l'équilibre de la masse fluide en rotation peut être considéré comme conduisant à un système d'équations, mais en nombre infini et à une infinité d'inconnues.

Rien ne semblait alors devoir subsister de toute la discussion précédente, car la notion qui en formait le pivot, celle du jacobien, faisait défaut. Du moins il en était ainsi au moment où Poincaré poursuivait les recherches dont nous parlons. La méthode de Fredholm seule devait, quelques années plus tard, fournir le moyen de combler directement cette lacune; et c'est d'elle en effet que s'est servi M. Liapounof lorsqu'il a continué les recherches de Poincaré et, là où celles-ci avaient simplement abouti à la démonstration de théorèmes d'existence, formé, pour représenter les solutions, des séries convergentes.

En 1889, Poincaré n'avait pas le déterminant de Fredholm à sa disposition. Mais il y a plus : les quantités qu'il va introduire pour parer à cet inconvénient seront, par le fait même de leur nombre, appelées à rendre des services qu'on ne pourrait obtenir de la considération du seul jacobien. C'est ce que nous a déjà montré l'exemple analogue des solutions périodiques où, cependant, la définition du jacobien ne souffrait aucune difficulté.

Les quantités en question ne sont autres, dans les questions d'équilibre ainsi abordées par Poincaré, que les *coefficients de stabilité* c'est-à-dire ceux par l'examen desquels on reconnaît [conformément au théorème de Lagrange-Dirichlet (1)], le minimum du potentiel. Ce calcul consiste, comme on sait, dans la décomposition en carrés d'une certaine forme quadratique : les coefficients de stabilité seront les coefficients des carrés ainsi obtenus.

Pour un système dont la position dépend d'un nombre fini de paramètres, ces coefficients de stabilité ont un produit précisément égal au jacobien : par conséquent, leur liaison avec les considérations qui précèdent est évidente et entraîne les conséquences suivantes :

Une solution des équations d'équilibre étant supposée connue pour une certaine valeur μ_0 de μ, si tous les coefficients de stabilité correspondants sont

(1) Ce théorème, d'ailleurs, n'est plus seul en jeu dans la discussion proprement dite de la stabilité et, ici encore, Poincaré est conduit, avec Lord Kelvin et Tait à une nouvelle distinction entre plusieurs espèces de stabilité possibles.

différents de zéro, les équations admettront encore une solution pour μ voisin de μ_0 (puisque alors le jacobien sera aussi différent de zéro). En second lieu, dans une série continue de figures d'équilibre telles que μ varie constamment dans le même sens, tout changement de signe de l'un des coefficients de stabilité correspond à une figure de bifurcation.

Toutefois, si l'on ne se servait que du jacobien, il faudrait, si plusieurs coefficients changent de signe à la fois, supposer que leur nombre total est impair. En réalité, cette restriction est inutile, et l'on voit déjà ici un cas où il y a avantage à employer les coefficients de stabilité.

Par leur moyen d'autre part, on va triompher de la difficulté capitale du problème. Une fois mis sous la forme précédente, les énoncés conserveront un sens, même pour un système dépendant d'une infinité de paramètres, dès que les coefficients de stabilité auront pu être définis. Moyennant une hypothèse toujours vérifiée dans les applications qui se sont présentées, Poincaré établit (par des considérations d'extremum) qu'ils restent exacts.

Ainsi les quantités qui, d'après leur définition, n'intéressaient que la stabilité de l'équilibre, se trouvent gouverner l'existence même de cet équilibre.

En même temps, dans ces mêmes formes d'équilibre de bifurcation que Poincaré enseignait à reconnaître, les coefficients dont nous venons de parler obéissent à une loi remarquable, non moins importante au point de vue de l'application concrète qu'au point de vue purement analytique, celle de *l'échange des stabilités*, d'après laquelle le nombre des coefficients positifs s'échange entre deux séries de formes d'équilibre qui se rencontrent suivant une forme de bifurcation. Si donc une des séries était stable jusqu'à la valeur μ_0 du paramètre qui correspond à la bifurcation, c'est l'autre série qui possède cette propriété lorsque μ varie au-delà de μ_0.

A l'aide du premier des principes cités tout à l'heure, Poincaré démontre aisément l'existence des figures annulaires d'équilibre, simplement affirmée par Lord Kelvin et Tait dans leur traité de Philosophie naturelle. Il lui suffit, à cet effet, de partir d'un premier équilibre (obtenu, il est vrai, en assujettissant d'abord le système à une liaison supplémentaire) et de constater que, dans ce premier état, aucun coefficient de stabilité n'est nul.

C'est le second principe qui a permis la découverte des nouvelles figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Jacobi. Le lecteur verra dans *l'Analyse* de Poincaré ([1]) comment, en effet, la série des ellipsoïdes de Jacobi (comme

([1]) Page 113; *Œuvres*, t. VII, p. 10.

celle des ellipsoïdes de Maclaurin, du reste) comprend une infinité de formes de bifurcation, servant de point de départ aux nouvelles formes dont il s'agit.

On verra également, au même endroit, comment un théorème sur l'impossibilité d'un équilibre stable au-delà d'une certaine valeur de la vitesse de rotation a fourni à Poincaré la réponse à la question que pose l'explication des anneaux de Saturne.

*
* *

Nous arrêterons ici cette revue déjà trop longue et cependant si incomplète.

Sans même parler des applications aux sciences de la Nature qui seront étudiées ici même, il resterait tout au moins à traiter le côté philosophique de l'œuvre de Poincaré, qui tient une si grande place dans sa pensée et dans toute la pensée contemporaine. Nous n'avons pas qualité pour le faire, et cependant, sur combien de points cette œuvre philosophique n'est elle pas indissolublement liée aux découvertes scientifiques elles-mêmes. Qu'il s'agisse de géométrie non euclidienne, de théorie des ensembles, de relativité, de calcul des probabilités surtout, — la seule science mathématique qui, des trois états d'Auguste Comte, n'ait pas entièrement dépassé le second — une même impulsion est commune aux deux domaines; et l'on s'explique déjà, dans une certaine mesure la puissante contribution apportée par Poincaré, à la Mécanique statistique, lorsqu'on lit les réflexions sur le hasard qui figurent dans *la Science et l'Hypothèse*, ou dans *Science et Méthode*.

D'autre part, les œuvres aussi grandes et aussi géniales que celles de Poincaré, dont l'étendue se refuse à une analyse détaillée et ne peut être parcourue qu'à grands traits, sont cependant celles qu'on peut le moins abréger sans les trahir. Chez lui comme chez tous les créateurs vraiment grands, il serait essentiel, au contraire, de faire sentir, ainsi que nous l'avons tenté à une ou deux reprises, comment chaque détail est souvent fécond en conséquences, chaque ligne, en quelque sorte suggestive et grosse de travaux ultérieurs.

Ceux que l'inspiration Poincaréenne a déjà engendrés, et dont nous avons pu à peine signaler, chemin faisant, quelques-uns, remplissent, à eux seul, plusieurs des chapitres les plus importants des mathématiques contemporaines.

Cependant, nul géomètre n'en doute, l'Analyse de Poincaré n'est pas près, tant s'en faut, d'avoir donné la mesure. Même, dans un grand nombre des voies qu'il a ouvertes, sa marche audacieuse nous a emportés sans que nous puissions encore songer à la poursuivre. Si grande qu'elle nous apparaisse, la pensée de Poincaré, comme celle d'un Gauss ou d'un Cauchy, ne laissera découvrir toute sa puissance qu'à nos successeurs, à la lumière des découvertes futures.

DIE BEDEUTUNG HENRI POINCARÉ'S FUR DIE PHYSIK

Von W. WIEN

Acta Mathematica, t. 38, p. 289-291 (1921).

Der Tod Henri Poincaré's hat nicht nur für die Mathematik sondern auch für die Physik einen schweren Verlust bedeutet. Gehörte er doch zu den wenigen Mathematikern, die an der alten Tradition festhielten, dass die beiden Wissenschaften enge zusammengehören und ihre Anregungen von einander empfangen müssen. So hatte er nicht nur grosses Interesse und tiefes Verständnis für die Physik, sondern hat sich auch in sehr ausgedehntem Masse selbst an der Weiterbildung der physikalischen Theorien beteiligt. Die folgenden Zeilen sollen einer Würdigung dieser Leistungen gewidmet sein.

Zum ersten Male hat Poincaré in die Physik eingegriffen, als er nachwies, dass H. Hertz in der grundlegenden Arbeit über elektrische Schwingungen einen Rechenfehler begangen hatte, durch den die Schwingungsdauer infolge eines unrichtigen Faktors 2 im Werte der Kapacität im Verhältnis $\frac{\sqrt{2}}{1}$ zu gross berechnet war. Die Geschwindigkeit der Wellen war hienach zu klein gefunden, was auf den Gang der Hertz'schen Versuche von entscheidendem Einflusse gewesen ist. Seine weiteren Untersuchungen über Hertz'sche Wellen betrafen die Methoden, um die Frequenz des elektrischen Oscillators zu berechnen und die Einflüsse zu bestimmen, durch die Schwingungsperiode geändert wird.

Dann hat er sich weiter an der Theorie der Hertz'schen Wellen beteiligt, indem er zuerst die Dämpfung der Primärschwingungen in richtiger Weise auffasste. Er widerlegte damit die Theorie von Sarasin und de la Rive von der multiplen Resonanz. Seine Theorie ist dann später von Bjerknes bestätigt worden. Auch die Ausbreitung der elektrischen Wellen längs geraden Drähten hat Poincaré behandelt und die dabei auftretende räumliche Dämpfung geschätzt und im Anschluss hieran die Reflexion an dem Ende eines Drahtes behandelt. Für die statistische Mechanik ist ein Satz Poincaré's bedeutungsvoll geworden, der ursprünglich für die Frage nach der Stabilität des Planetensystems aufgestellt war, dass nämlich eine bestimmte Configuration von materiellen Punkten nach endlicher Zeit wieder erreicht werden muss, wenn nur conservative Kräfte wirken. Durch diesen Satz ist nachgewiesen, dass die Irreversibilität, die wir in der Natur beobachten, nicht durch rein mechanische Vorgänge erklärt werden kann.

Eine wichtige Anregung ist von Poincaré ausgegangen, indem er nach der Entdeckung der Röntgen-Strahlen auf die Möglichkeit hinwies, dass dieses Phänomen mit der Fluorescenz in Zusammenhang stehen könnte. Wenn diese Auffassung auch nicht richtig war, so hat sie doch die erste Veranlassung zu den Versuchen von Becquerel gegeben, die dann später zur Entdeckung des Radiums geführt haben.

Von sehr grosser Bedeutung für die theoretische Physik ist eine Arbeit, die er im Jahre 1900 in dem Jubiläumsbande für Lorentz veröffentlicht hat. Er hat dort die elektromagnetische Bewegungsgrösse eingeführt, durch welche der Widerspruch gegen das Prinzip von Aktion und Reaktion aufgehoben wird, eine Theorie, die für die weitere Entwickelung der Elektrodynamik sehr wichtig geworden ist.

Ganz besonders bedeutungsvoll sind auch die Untersuchungen Poincaré's über die innere Kraft eines Elektrons geworden, wo er zum ersten Male den Ausdruck ableitete für eine auf das Elektron wirksame Druckkraft, welche das Gleichgewicht der Kräfte aufrecht erhält.

Sein grosses mathematisches Talent ermöglichte es ihm dann, die Schwierigkeiten zu überwinden, welche der theoretischen Behandlung der drahtlosen Telegraphie entgegenstehen. Er hat die Ausdrücke abgeleitet, durch welche die Ausbreitung der elektrischen Wellen auf der Erde dargestellt wird. Er hat diese Ausdrücke zunächst noch etwas korrigiert, aber das Resultat ist im wesentlichen schliesslich ein richtiges gewesen und führte zu Folgerungen, die in ihrem Verhältnis zu den tatsächlichen Beobachtungen noch nicht aufgeklärt sind.

Auch seine Untersuchungen über die Beugung enthalten sehr wichtige

Entwickelungen der mathematischen Physik im Anschluss an die grundlegende Theorie von Sommerfeld.

Für die moderne Relativitätstheorie hat er wichtige Ergebnisse beigetragen, indem er schon die in dieser Theorie auftretenden allgemeinen mathematischen Beziehungen vorausgesehen hat, so die Einführung der Lorentztransformation und des Viererveklors. Ferner hat er der modernen Theorie der Strahlung grosses Interesse entgegengebracht und eine tiefgehende Untersuchung veröffentlicht, in welcher er den Nachweis führt, dass die von der Erfahrung verlangte Strahlungsformel notwendigerweise durch unstetige Vorgänge veranlasst sein muss, wie es von Planck in der Quantenhypothese angenommen ist.

Auch auf kritischem Gebiete hat Poincaré der Physik sehr nützliche Dienste geleistet. So hat er nachgewiesen, dass die Jaumann'sche Theorie der Kathodenstrahlen nicht richtig sein kann, die auf einer Differentialgleichung erster Ordnung beruht. Eingehend hat Poincaré sich mit den Grundlagen der Wärmetheorie und dem Problem der Irreversibilität beschäftigt und nachgewiesen, dass die Theorie der monocyklischen Systeme den Tatsachen nicht ganz gerecht werden kann ebensowenig wie die gewöhnliche Begründung der Gastheorie.

Auch eine Kritik der Theorie des Zeemanphänomens hat Poincaré gegeben und eine Theorie aufgestellt, die von der Lorentz'schen abweicht.

Ueberblickt man diese Leistungen allein auf dem physikalischen Gebiet, so muss man ebenso erstaunt sein über die Fülle der Probleme, die er bearbeitet, wie über die Tiefe seines Verständnisses für physikalische Theorien. Er zeigt dabei einen besonders scharfen Blick für die Berechtigung der Fragestellung, wie er sich z. B. klar darüber ist, dass die Kontroversen über unipolare Induktion oder über die Entscheidung über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichts aus den Beobachtungen an stehenden Lichtwellen der physikalischen Bedeutung entbehren. Allerdings hat er selten den Versuch gemacht, eigene Hypothesen aufzustellen und hat im ganzen mehr zu einer phänomenologischen Darstellung der physikalischen Erscheinungen geneigt, wie er ja die Meinung ausgesprochen hat, dass, sobald eine mechanische Theorie einer Erscheinung vorliege, auch unendlich viele andere möglich sein müssten. Andererseits hat er auch viele Anregungen auf experimentellem Gebiet gegeben. Ausser der bereits erwähnten, die schliesslich zur Entdeckung des Radiums führte, hat er auch die Versuche von Crémieu veranlasst, bei denen untersucht wurde, ob stark convergente Kraftlinien des Gravitationsfeldes eine andere Wirkung hervorrufen, als ein Feld paralleler Kraftlinien.

So haben wir Physiker besondere Veranlassung, das frühe Hinscheiden des grossen Mathematikers schmerzlich zu empfinden. Möge sein Beispiel seine Fachgenossen veranlassen, den Problemen der Physik erhöhtes Interesse zuzuwenden zum Nutzen beider Wissenschaften, da die Physik die mathematischen Hilfsmittel, die Mathematik die aus den physikalischen Problemen geschöpften Anregungen nicht entbehren kann.

DEUX MÉMOIRES DE HENRI POINCARÉ
SUR LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PAR H. A. LORENTZ

Acta Mathematica, t. 38, p. 293-308 (1921).

Les pages suivantes ne peuvent aucunement donner une idée tant soit peu complète de ce que la Physique théorique doit à Poincaré. J'aurais été heureux de rendre hommage à sa mémoire en présentant au lecteur un tel tableau d'ensemble, mais j'ai reculé devant cette tâche qu'on ne pourrait dignement remplir sans de longues et sérieuses études pour lesquelles le temps m'a manqué. Je me suis donc borné à deux Mémoires, celui sur la Dynamique de l'électron, écrit en 1905 et publié l'année suivante dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, et l'étude sur la Théorie des quanta qui parut dans le *Journal de Physique* au commencement de 1912.

Pour bien faire apprécier le premier de ces travaux je devrai entrer en quelques détails sur les idées dont le développement a abouti au Principe de relativité. Amené ainsi à parler un peu de la part que j'ai pu prendre moi-même à ce développement, je doit dire avant tout que j'ai trouvé un encouragement précieux dans l'intérêt bienveillant que Poincaré a constamment pris à mes études. Du reste, on verra bientôt à quel degré il m'a dépassé.

On sait que Fresnel avait fondé une explication de l'aberration astronomique sur l'hypothèse d'un éther immobile que les corps célestes traverseraient sans l'entraîner. On connaît aussi son célèbre théorème, complément nécessaire de cette hypothèse fondamentale, sur l'entraînement partiel des ondes lumineuses par de la matière en mouvement. Un corps transparent animé d'une translation ne communiquera aux rayons qu'une fraction de sa propre vitesse, fraction qui est déterminée par le « coefficient de Fresnel » $1 - \frac{1}{n^2}$, dans lequel n est l'indice de réfraction du milieu.

Lorsque, grâce aux travaux de Clerk Maxwell, nos vues sur la nature de la lumière avaient été profondément changées il était naturel d'essayer une déduction de ce coefficient basée sur les principes de la théorie électromagnétique. Voilà le but que je me suis proposé et qui a pu être atteint sans trop de difficulté dans la théorie des électrons.

La plupart des phénomènes qui se rattachent à l'aberration, et notamment l'absence d'une influence du mouvement de la Terre dans toutes les expériences où le système entier d'appareils est en repos par rapport à notre planète, purent maintenant être expliqués d'une manière satisfaisante. Seulement, il fallait faire la restriction que les effets considérés devaient être du premier ordre de grandeur par rapport à la vitesse de la Terre divisée par celle de la lumière, les termes du second ordre ayant été négligés dans les calculs.

Or, en 1881 M. Michelson réussit à faire interférer deux rayons lumineux partis d'un même point et y revenant après avoir suivi des chemins rectilignes de longueur égale et perpendiculaires entre eux. Il trouva que les phénomènes observés sont de nouveau insensibles au mouvement de la Terre; les franges d'interférence conservaient les mêmes positions quelles que fussent les directions des bras de l'appareil.

Cette fois-ci il s'agissait bien d'un effet du second ordre et il était facile de voir que l'hypothèse de l'éther immobile à elle seule ne suffit pas à l'explication du résultat négatif. J'ai été obligé à faire une nouvelle supposition qui revient à admettre que la translation d'un corps à travers l'éther produit une légère contraction du corps dans le sens du mouvement. Cette hypothèse était bien la seule possible; elle avait aussi été imaginée par Fitzgerald et elle trouva l'approbation de Poincaré, qui cependant ne dissimula pas le peu de satisfaction que lui donnèrent les théories dans lesquelles on multiplie les hypothèses spéciales inventées pour des phénomènes particuliers. Cette critique a été pour moi une raison de plus pour chercher une théorie générale, dans laquelle les principes mêmes conduiraient à l'explication de l'expérience de M. Michelson et de toutes celles qu'on avait tentées après lui pour découvrir des effets du second ordre. Dans la théorie que je me proposais, l'absence de phénomènes dus au mouvement d'ensemble d'un système devrait être démontrée pour une valeur quelconque de la vitesse, inférieure à celle v de la lumière.

La méthode à suivre était toute indiquée. Il fallait évidemment montrer que les phénomènes qui ont lieu dans un système matériel peuvent être représentés par des équations de la même forme, que le système soit en repos ou qu'il soit animé d'un mouvement de translation uniforme, cette égalité de forme étant obtenue à l'aide d'une substitution convenable de nouvelles variables. Il s'agissait de trouver des formules de transformation appropriées tant pour les variables indépendantes, les coordonnées x, y, z et le temps t, que pour les différentes grandeurs physiques, vitesses, forces, etc., et de montrer l'invariance des équations pour ces transformations.

Les formules que j'ai établies alors pour les coordonnées et le temps peuvent être mises sous la forme [1]

$$(1) \qquad x' = kl(x + \varepsilon t), \qquad y' = ly, \qquad z' = lz, \qquad t' = kl(t + \varepsilon x),$$

où ε, k, l sont des constantes qui cependant se réduisent à une seule. On voit immédiatement que pour l'origine des nouvelles coordonnées ($x' = 0$) on a

$$x = -\varepsilon t;$$

ce point se déplace donc dans le système x, y, z, t avec la vitesse $-\varepsilon$ dans la direction de l'axe des x. Le coefficient k est défini par

$$k = (1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et l est une fonction de ε qui a la valeur 1 pour $\varepsilon = 0$. Je l'ai d'abord laissée indéterminée, mais j'ai trouvé dans le cours de mes calculs que pour obtenir l'invariance que j'avais en vue, on doit poser $l = 1$.

Ce furent ces considérations publiées par moi en 1904 qui donnèrent lieu à Poincaré d'écrire son Mémoire sur la Dynamique de l'électron, dans lequel il a attaché mon nom à la transformation dont je viens de parler. Je dois remarquer à ce propos que la même transformation se trouve déjà dans un article de M. Voigt publié en 1887 et que je n'ai pas tiré de cet artifice tout le parti possible. En effet, pour certaines des grandeurs physiques qui entrent dans les formules, je n'ai pas indiqué la transformation qui convient le mieux. Cela a été fait par Poincaré et ensuite par M. Einstein et Minkowski.

Pour trouver les « transformations de relativité », comme je les appellerai maintenant, il suffit dans quelques cas de décrire les phénomènes dans le système x', y', z', t' exactement de la même manière qu'on le fait dans le

(1) Je me conforme ici aux notations de Poincaré et je choisis les unités de longueur et de temps de telle façon que la vitesse de la lumière soit égale à 1.

système x, y, z, t. Considérons, par exemple, le mouvement d'un point. Si, dans le temps dt les coordonnées x, y, z subissent les changements dx, dy, dz, on a pour les composantes de la vitesse

$$\xi = \frac{dx}{dt}, \qquad \eta = \frac{dy}{dt}, \qquad \zeta = \frac{dz}{dt}.$$

Or, en vertu des relations (1) les variations dx, dy, dz, dt entraînent les changements

$$(2) \qquad dx' = kl(dx + \varepsilon\, dt), \qquad dy' = l\, dy, \qquad dz' = l\, dz, \qquad dt' = kl(dt + \varepsilon\, dx)$$

des nouvelles variables. Il est naturel de définir les composantes de la vitesse dans le nouveau système par les formules

$$(3) \qquad \xi' = \frac{dx'}{dt'}, \qquad \eta' = \frac{dy'}{dt'}, \qquad \zeta' = \frac{dz'}{dt'},$$

ce qui nous donne

$$(4) \qquad \xi' = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\xi}, \qquad \eta' = \frac{\eta}{k(1 + \varepsilon\xi)}, \qquad \zeta' = \frac{\zeta}{k(1 + \varepsilon\xi)}.$$

Pour avoir un autre exemple, on peut imaginer un grand nombre de points mobiles dont les vitesses sont des fonctions continues des coordonnées et du temps. Soit $d\tau$ un élément de volume situé au point x, y, z et fixons l'attention sur les points du système qui se trouvent dans cet élément à un instant déterminé t. Soit t'_0 la valeur spéciale de t' qui correspond à x, y, z, t en vertu des équations (1), et envisageons pour les différents points les valeurs de x', y', z' correspondant à cette valeur déterminée $t' = t'_0$; en d'autres termes, considérons les positions des points dans le nouveau système, prises toutes pour une même valeur du « temps » t'. On peut se demander quelle est l'étendue de l'élément $d\tau'$ de l'espace x', y', z', dans lequel se trouvent à cet instant t'_0 les points choisis qui se trouvent en $d\tau$ au moment t. Un simple calcul, que je puis omettre ici, conduit à la relation

$$(5) \qquad d\tau' = \frac{l^3}{k} \frac{1}{1 + \varepsilon\xi}\, d\tau.$$

Supposons enfin que les points dont il s'agit portent des charges électriques égales et admettons que dans les deux systèmes x, y, z, t et x', y', z', t' on attribue les mêmes valeurs numériques à ces charges. Si les points sont suffisamment rapprochés les uns des autres, on obtient une distribution continue d'électricité et il est clair que la charge contenue dans l'élément $d\tau$

à l'instant t est égale à celle qui se trouve en $d\tau'$ à l'instant t'. Par conséquent, si ρ et ρ' sont les densités de ces charges,

$$(6) \qquad \rho\, d\tau = \rho'\, d\tau',$$

et, en vertu de (5)

$$(7) \qquad \rho' = \frac{k}{l^3}(1 + \varepsilon\xi)\rho.$$

De cette formule, combinée avec (4), on déduit encore

$$\rho'\xi' = \frac{k}{l^3}\rho(\xi + \varepsilon), \qquad \rho'\eta' = \frac{1}{l^3}\rho\eta, \qquad \rho'\zeta' = \frac{1}{l^3}\rho\zeta.$$

Ce sont les formules de transformation pour le courant de convection.

Pour d'autres grandeurs physiques telles que les forces électrique et magnétique, il faut suivre une méthode moins directe; on cherchera, peut-être un peu par tâtonnement, les formules de transformation propres à assurer l'invariance des équations électromagnétiques.

Les formules (4) et (7) ne se trouvent pas dans mon Mémoire de 1904. C'est que je n'avais pas songé à la voie directe qui y conduit, et cela tient à ce que j'avais l'idée qu'il y a une différence essentielle entre les systèmes x, y, z, t et x', y', z', t'. Dans l'un on se sert — telle était ma pensée — d'axes des coordonnées qui ont une position fixe dans l'éther et de ce qu'on peut appeler le « vrai » temps; dans l'autre système, au contraire, on aurait affaire à de simples grandeurs auxiliaires dont l'introduction n'est qu'un artifice mathématique. En particulier, la variable t' ne pourrait pas être appelée le « temps » dans le même sens que la variable t.

Dans cet ordre d'idées je n'ai pas pensé à décrire les phénomènes dans le système x', y', z', t', *exactement de la même manière* que dans le système x, y, z, t et je n'ai pas défini par les équations (3) et (7) les grandeurs ξ', η', ζ', ρ' qui correspondront à ξ, η, ζ, ρ. C'est plutôt par tâtonnement que je suis arrivé à mes formules de transformation qui, avec notre notation actuelle, prennent la forme

$$\xi' = k^2(\xi + \varepsilon), \qquad \eta' = k\eta, \qquad \zeta' = k\zeta, \qquad \rho' = \frac{1}{kl^3}\rho$$

et que j'ai voulu choisir de manière à obtenir dans le nouveau système les équations les plus simples. J'ai pu voir plus tard dans le Mémoire de Poincaré qu'en procédant plus systématiquement j'aurais pu atteindre une plus grande simplification encore. Ne l'ayant pas remarqué, je n'ai pas réussi à obtenir l'invariance exacte des équations; mes formules restaient encombrées de certains termes qui auraient dû disparaître. Ces termes étaient trop petits pour avoir une influence sensible sur les phénomènes et je pouvais donc expliquer l'indépendance du mouvement de la Terre que les observations avaient révélée, mais je n'ai pas établi le principe de relativité comme rigoureusement et universellement vrai.

Poincaré, au contraire, a obtenu une invariance parfaite des équations de l'électrodynamique, et il a formulé le « postulat de relativité », termes qu'il a été le premier à employer. En effet, se plaçant au point de vue que j'avais manqué, il a trouvé les formules (4) et (7). Ajoutons qu'en corrigeant ainsi les imperfections de mon travail il ne me les a jamais reprochées.

Je ne puis m'étendre ici sur tous les beaux résultats obtenus par Poincaré. Insistons cependant sur quelques points. D'abord, il ne s'est pas contenté de faire voir que les transformations de relativité laissent intacte la forme des équations électromagnétiques. Il explique le succès des substitutions en remarquant que ces équations peuvent être mises sous la forme du principe de moindre action et que l'équation fondamentale qui exprime ce principe, ainsi que les opérations par lesquelles on en déduit les équations du champ, sont les mêmes dans les systèmes x, y, z, t et x', y', z', t'.

En second lieu, conformément au titre de son Mémoire, Poincaré considère particulièrement la manière dont se produit la déformation d'un électron mobile, comparable à celle des bras de l'appareil de M. Michelson, qui est exigée par le postulat de relativité. On avait proposé à ce sujet deux hypothèses différentes. D'après toutes les deux un électron, supposé sphérique à l'état de repos, se changerait par une translation en un ellipsoïde de révolution aplati, l'axe de symétrie coïncidant avec la direction du mouvement et le rapport de cet axe au diamètre de l'équateur étant donné par $\sqrt{1-v^2}$, si v est la vitesse. Mais les hypothèses différaient entre elles en ce qui concerne la longueur des axes et par conséquent le volume de l'électron. Tandis que j'avais été conduit à admettre que le rayon de l'équateur reste égal à celui de la sphère primitive, M. Bucherer et M. Langevin voulaient plutôt assigner une grandeur constante au volume. La première hypothèse correspond à $l=1$, la deuxième à $kl^3=1$. Ajoutons immédiatement que la première valeur est la seule qui soit compatible avec le postulat de relativité.

Si l'on veut se rendre compte de la persistance et de l'équilibre d'un électron en se servant des notions ordinaires de la Mécanique, il ne suffit évidemment pas de considérer les actions électrodynamiques. La particule — que nous considérons ici comme une sphère portant une charge superficielle — exploserait immédiatement à cause des répulsions mutuelles ou, ce qui revient au même, des tensions de Maxwell exercées à sa surface. Il faut donc introduire autre chose encore, et Poincaré distingue ici des « liaisons » et des « forces supplémentaires ». Il suppose d'abord qu'il y ait seulement la liaison représentée par l'équation

$$r = b\theta^m,$$

r étant le demi-axe de l'électron, $r\theta$ son rayon équatorial, b et m des grandeurs qui restent constantes quand r et θ (ou l'une de ces grandeurs) varient avec la vitesse de translation v. Cela posé, on connaîtra pour une valeur quelconque de v les dimensions de l'électron — parce qu'on sait que $\theta = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ — et on peut calculer par les formules ordinaires du champ électromagnétique l'énergie, la quantité de mouvement et la fonction de Lagrange. Entre ces grandeurs, considérées comme des fonctions de v, il doit y avoir les relations bien connues. Poincaré démontre qu'elles ne se vérifient que pour $m = -\frac{2}{3}$, ce qui nous ramène à la constance du volume, c'est-à-dire à l'hypothèse de M. Bucherer et de M. Langevin. Mais nous savons déjà que ce n'est pas cette hypothèse, mais seulement celle d'un rayon équatorial constant, qui est en accord avec le postulat de relativité. Il faut donc nécessairement avoir recours à des forces supplémentaires.

En supposant qu'elles dépendent d'un potentiel de la forme $Ar^\alpha\theta^\beta$, où A, α et β sont des constantes, Poincaré trouve que la constance du rayon équatorial exige $\alpha = 3$, $\beta = 2$, c'est-à-dire que le potentiel en question doit être proportionnel au volume. Il en résulte que les forces supplémentaires cherchées sont équivalentes à une pression ou une tension normale exercée sur la surface et dont la grandeur par unité de surface reste constante quelle que soit la vitesse de translation. On voit immédiatement qu'une tension dirigée vers l'intérieur convient seule; on en déterminera la grandeur par la condition que pour un électron qui se trouve en repos et qui a par conséquent la forme d'une sphère, elle doit faire équilibre aux répulsions électrostatiques. Si ensuite la particule est mise en mouvement, la tension de Poincaré, jointe aux actions électrodynamiques, produira inévitablement l'aplatissement qui est exigé par le principe de relativité.

Après avoir trouvé sa force supplémentaire, Poincaré fait voir que les transformations de relativité ne changent pas la forme des termes qui la représentent; il démontre ainsi que des mouvements *quelconques* d'un système d'électrons peuvent avoir lieu tout à fait de la même manière dans le système x, y, z, t et dans le système x', y', z', t'.

J'ai déjà parlé de la nécessité de poser $l = 1$ (constance du rayon équatorial de l'électron). Je ne répéterai pas ici la démonstration donnée par Poincaré et je dirai seulement qu'il a signalé l'origine mathématique de cette condition. On peut envisager toutes les transformations qui sont représentées par les formules (1), avec des valeurs différentes de la vitesse $-\varepsilon$, et les valeurs correspondantes de k et de l, ce dernier coefficient devant être considéré comme une fonction de ε; on peut y ajouter d'autres transformations semblables qu'on déduit de (1) en changeant les directions des axes, et enfin des rotations quelconques. Le postulat de relativité exige que toutes ces transformations forment un groupe et cela n'est possible que si l a la valeur constante 1.

Le « groupe de relativité » qu'on obtient ainsi se compose des substitutions linéaires qui n'altèrent pas la forme quadratique

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Le Mémoire se termine par l'application du postulat de relativité aux phénomènes de la gravitation. Il s'agit ici de trouver la règle qui en détermine la propagation et les formules qui expriment les composantes de la force en fonction des coordonnées et de la vitesse tant du corps attiré que du corps attirant. En considérant ces questions, Poincaré commence par chercher les invariants du groupe de relativité; en effet, il est clair qu'il doit être possible de représenter les phénomènes par des équations qui ne contiennent que ces invariants. Cependant, le problème est indéterminé. Il est naturel d'admettre que la vitesse de propagation est égale à celle de la lumière et que les écarts de la loi de Newton doivent être du deuxième ordre de grandeur par rapport aux vitesses. Mais, même avec ces restrictions, on a le choix entre plusieurs hypothèses parmi lesquelles il y en a deux que Poincaré indique spécialement.

Dans cette dernière partie de l'article on trouve quelques notions nouvelles que je dois surtout signaler. Poincaré remarque, par exemple, que si l'on considère x, y, z et $t\sqrt{-1}$ comme les coordonnées d'un point dans un espace à quatre dimensions, les transformations de relativité se réduisent à des rotations dans cet espace. Il a aussi eu l'idée d'ajouter aux trois composantes X, Y, Z d'une force la grandeur

$$T = X\xi + Y\eta + Z\zeta$$

qui n'est autre chose que le travail de la force par unité de temps et qu'on peut considérer en quelque sorte comme une quatrième composante. Quand il est question de la force qu'un corps éprouve par unité de volume, les grandeurs X, Y, Z, $T\sqrt{-1}$ sont affectées par une transformation de relativité de la même manière que les grandeurs x, y, z, $t\sqrt{-1}$.

Je rappelle ces idées de Poincaré parce qu'elles se rapprochent des méthodes dont Minkowski et d'autres savants se sont servis plus tard pour faciliter les opérations mathématiques qui se présentent dans la théorie de relativité.

*
* *

Passons maintenant au Mémoire sur la Théorie des quanta. Vers la fin de 1911 Poincaré avait assisté à la réunion du Conseil de Physique convoqué à Bruxelles par M. Solvay, dans laquelle on s'était surtout occupé des phénomènes du rayonnement calorifique et de l'hypothèse des éléments ou quanta d'énergie imaginée par M. Planck pour les expliquer. Dans les discussions Poincaré avait montré toute la vivacité et la pénétration de son esprit et on avait admiré la facilité avec laquelle il sut entrer dans les questions de Physique les plus ardues, même dans celles qui devaient être nouvelles pour lui. De retour à Paris, il ne cessa de s'occuper du problème dont il sentait vivement l'importance. Si l'hypothèse de M. Planck était vraie, « les phénomènes physiques cesseraient d'obéir à des lois exprimables par des équations différentielles, et ce serait là, sans doute, la plus grande révolution et la plus profonde que la philosophie naturelle ait subie depuis Newton ».

Mais ces conceptions nouvelles sont-elles vraiment inévitables et n'y a-t-il pas moyen d'arriver à la loi du rayonnement sans introduire ces discontinuités qui sont en opposition directe avec les notions de la Mécanique classique? Voilà la question que Poincaré se pose dans son Mémoire et à laquelle il donne une réponse que je me permettrai de résumer brièvement.

Considérons un système composé de n résonateurs de Planck et de p molécules, n et p étant de très grands nombres; supposons que tous les résonateurs soient égaux entre eux et qu'il en soit de même des molécules. Désignons par $\xi_1, \ldots, \xi_p$ les énergies des molécules et par $\eta_1, \ldots, \eta_n$ celles des résonateurs; chacune de ces variables pourra prendre toutes les valeurs positives.

Poincaré démontre d'abord que la probabilité pour que les quantités d'énergie soient comprises entre les limites ξ_1 et $\xi_1 + d\xi_1, \ldots, \xi_p$ et $\xi_p + d\xi_p$, η_1 et $\eta_1 + d\eta_1, \ldots, \eta_n$ et $\eta_n + d\eta_n$ peut être représentée par

$$w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, d\eta_1 \ldots d\eta_n\, d\xi_1 \ldots d\xi_p,$$

où w est une fonction sur laquelle on peut faire différentes hypothèses.

Dès qu'on connaît cette fonction on pourra dire de quelle manière une quantité d'énergie h se répartira sur les molécules et les résonateurs. A cet effet, on peut se représenter dans l'espace à $p + n$ dimensions $\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_n$, la couche infiniment mince S, dans laquelle l'énergie totale

$$\xi_1 + \ldots + \xi_p + \eta_1 + \ldots + \eta_n$$

est comprise entre h et une valeur infiniment voisine $h + dh$. On calculera les trois intégrales

$$\mathrm{I} = \int w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, d\eta_1 \ldots d\eta_n\, d\xi_1 \ldots d\xi_p,$$

$$\mathrm{I}' = \int x w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, d\eta_1 \ldots d\eta_n\, d\xi_1 \ldots d\xi_p,$$

$$\mathrm{I}'' = \int (h - x)\, w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, d\eta_1 \ldots d\eta_n\, d\xi_1 \ldots d\xi_p,$$

$$(x = \eta_1 + \ldots + \eta_n)$$

étendues à la couche S, et on aura $\frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{I}}$ pour l'énergie que prennent les résonateurs et $\frac{\mathrm{I}''}{\mathrm{I}}$ pour celle de l'ensemble des molécules. Par conséquent, si Y est l'énergie moyenne d'un résonateur, et X celle d'une molécule,

$$n\mathrm{YI} = \mathrm{I}', \qquad p\mathrm{XI} = \mathrm{I}''.$$

Pour calculer l'intégrale I, on peut d'abord donner des valeurs fixes aux variables $\eta_1, \ldots, \eta_n$ et, par conséquent, à leur somme x, et étendre l'intégration par rapport aux ξ à toutes les valeurs positives de ces variables, pour lesquelles la somme $\xi_1 + \ldots + \xi_p$ est comprise entre $h - x$ et $h - x + dh$. Cela nous donne

$$\int d\xi_1 \ldots d\xi_p = \frac{1}{(p-1)!}(h - x)^{p-1}\, dh.$$

Ensuite on peut calculer l'intégrale

$$\int w(\eta_1)\ldots w(\eta_n)\,d\eta_1\ldots d\eta_n$$

étendue aux valeurs positives des η telles que $\eta_1+\ldots+\eta_n$ se trouve entre x et $x+dx$. Posons

$$\int w(\eta_1)\ldots w(\eta_n)\,d\eta_1\ldots d\eta_n=\varphi(x)\,dx; \tag{8}$$

φ sera une fonction qui dépend de la fonction w et nous aurons

$$\mathrm{I}=\frac{dh}{(p-1)!}\int_0^h (h-x)^{p-1}\varphi(x)\,dx.$$

I' et I'' se calculent de la même manière; on n'a qu'à introduire sous le signe d'intégration le facteur x ou le facteur $h-x$. En fin de compte, on peut écrire

$$n\mathrm{Y}=\mathrm{C}\int_0^h x(h-x)^{p-1}\varphi(x)\,dx, \tag{9}$$

$$p\mathrm{X}=\mathrm{C}\int_0^h (h-x)^p\varphi(x)\,dx, \tag{10}$$

où le facteur C est le même dans les deux cas. Nous n'avons pas à nous en occuper parce qu'il suffit de déterminer le rapport de X à Y.

On obtient maintenant la formule de M. Planck — qui peut être regardée comme l'expression de la réalité — si on fait sur la fonction w l'hypothèse suivante, qui est conforme à la théorie des quanta.

Soit ε la grandeur du quantum d'énergie qui est propre aux résonateurs considérés et désignons par δ une grandeur infiniment petite (1). La fonction w sera nulle, excepté dans les intervalles

$$k\varepsilon<\eta<k\varepsilon+\delta\qquad (k=0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

et pour chacun de ces intervalles l'intégrale $\int_{k\varepsilon}^{k\varepsilon+\delta} w\,d\eta$ aura la valeur 1.

Ces données suffisent pour la détermination de la fonction φ et du rapport $\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}$ pour lequel on trouve, comme je l'ai déjà dit, la valeur donnée par la théorie

(1) Il s'agit ici de la *première* théorie de M. Planck, dans laquelle on admet que l'énergie d'un résonateur ne peut avoir qu'une des valeurs 0, ε, 2ε, 3ε, etc.

de M. Planck. Je ne m'arrêterai pas à ces calculs et je passe immédiatement à la question principale, celle de savoir si les discontinuités que je viens d'indiquer doivent nécessairement être admises.

Je vais reproduire le raisonnement de Poincaré, mais je dirai d'abord que dans les formules que nous rencontrerons, α désigne une variable complexe dont la partie réelle α_r est toujours positive. Dans la représentation graphique on se bornera à la moitié du plan α caractérisée par $\alpha_r > 0$ et dans les intégrations par rapport à α on suivra une ligne droite L perpendiculaire à l'axe des α réels, et prolongée indéfiniment des deux côtés. Les valeurs des intégrales seront indépendantes de la longueur de la distance α_r de cette ligne à l'origine des α.

Poincaré introduit une fonction auxiliaire qu'il définit par l'équation

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\infty w(\eta)\, e^{-\alpha\eta}\, d\eta \tag{11}$$

et il démontre que la fonction w et la fonction φ qui en dérive peuvent être exprimées à l'aide de Φ.

On a d'abord, par l'inversion de (11)

$$w(\eta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\mathrm{L})} \Phi(\alpha)\, e^{\alpha\eta}\, d\alpha. \tag{12}$$

Pour obtenir une formule analogue pour $\varphi(x)$ nous remarquerons que dans l'équation (11) on peut remplacer η par une quelconque des variables $\eta_1, \ldots, \eta_n$. En multipliant les n équations qu'on obtient ainsi on trouve

$$[\Phi(\alpha)]^n = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, e^{-\alpha x}\, d\eta_1 \ldots d\eta_n,$$

ou bien, en vertu de la formule (8)

$$[\Phi(\alpha)]^n = \int_0^\infty \varphi(x)\, e^{-\alpha x}\, dx,$$

et par inversion

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{L})} [\Phi(\alpha)]^n\, e^{\alpha x}\, d\alpha.$$

Les formules (9) et (10) deviennent maintenant

$$n\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{C}}{2i\pi}\int_0^h \int_{(\mathrm{L})} x(h-x)^{p-1}\, [\Phi(\alpha)]^n\, e^{\alpha x}\, dx\, d\alpha,$$

$$p\mathrm{X} = \frac{\mathrm{C}}{2i\pi}\int_0^h \int_{(\mathrm{L})} (h-x)^{p}\, [\Phi(\alpha)]^n\, e^{\alpha x}\, dx\, d\alpha$$

et Poincaré les transforme encore par les substitutions

$$x = n\omega, \qquad h = n\beta, \qquad p = nk,$$

ce qui lui donne

$$nY = \frac{Cn^{p+1}}{2i\pi}\int_0^\beta \int_{(L)} \frac{\omega}{\beta - \omega}\Theta^n \, d\omega \, d\alpha,$$

$$pX = \frac{Cn^{p+1}}{2i\pi}\int_0^\beta \int_{(L)} \Theta^n \, d\omega \, d\alpha,$$

où il a posé

$$\Theta = \Phi(\alpha)\, e^{\alpha\omega}(\beta - \omega)^k$$

Notons que ω n'est autre chose que l'énergie moyenne d'un seul résonateur pour le cas où l'on aurait

$$\eta_1 + \ldots + \eta_n = x,$$

que β est la valeur que prendrait ω si toute l'énergie disponible h se trouvait dans les résonateurs et que k est le rapport entre le nombre des molécules et celui des résonateurs.

Lorsque, dans les applications du Calcul des probabilités aux théories moléculaires, on cherche l'état d'un système, qui présente le maximum de probabilité, on trouve toujours que, grâce au nombre immense des molécules, ce maximum est tellement prononcé qu'on peut négliger la probabilité de tous les états qui s'écartent sensiblement de l'état le plus probable. Dans le cas qui nous occupe, il y a quelque chose d'analogue.

Admettons avec Poincaré que, pour des valeurs données de h et de β, la fonction Θ a un maximum pour $\alpha = \alpha_0$, $\omega = \omega_0$ et faisons passer par le point α_0, le lieu du maximum, la ligne L dont la distance α_0 à l'origine pouvait être choisie à volonté. Comme l'exposant n est un nombre très élevé, le maximum de Θ^n est extrêmement prononcé et les seuls éléments des intégrales que nous ayons à prendre en considération, sont ceux qui se trouvent dans le voisinage immédiat de α_0 et de ω_0. Cela nous donne immédiatement pour le rapport cherché

$$\frac{nY}{pX} = \frac{\omega_0}{\beta - \omega_0}$$

et, en vertu de l'équation

$$nY + pX = h = n\beta,$$

(13) $$Y = \omega_0,$$

(14) $$X = \frac{\beta - \omega_0}{k}.$$

Pour déterminer les valeurs de α_0 et de ω_0, on peut se servir des équations

$$\frac{\partial \log\Theta}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \log\Theta}{\partial\omega} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Phi'(\alpha_0)}{\Phi(\alpha_0)} + \omega_0 = 0 \tag{15}$$

et

$$\alpha_0 - \frac{k}{\beta - \omega_0} = 0. \tag{16}$$

On voit par ces formules que α_0 et ω_0 dépendent de la grandeur β, c'est-à-dire de la quantité totale d'énergie h qui a été communiquée au système; c'est un résultat auquel on devait s'attendre. L'équation (16) nous apprend en outre que α_0 sera toujours réel. Cette grandeur détermine immédiatement l'énergie moyenne d'une molécule, car il résulte de (14) et de (16) que

$$X = \frac{1}{\alpha_0}.$$

Or, nous savons que l'énergie moyenne d'une molécule est proportionnelle à la température absolue T. On peut donc écrire

$$\alpha_0 = \frac{c}{T},$$

où c est une constante connue, et l'équation

$$Y = -\frac{\Phi'(\alpha_0)}{\Phi(\alpha_0)}, \tag{17}$$

qu'on tire de (13) et de (15), nous donne l'énergie moyenne d'un résonateur en fonction de la température. On voit que ce résultat est indépendant du rapport entre les nombres n et p.

Supposons maintenant que nous connaissions pour toutes les températures l'énergie moyenne d'un résonateur. Par (17) nous connaîtrons alors pour toutes les valeurs positives de α la dérivée $\frac{d \log\Phi(\alpha)}{d\alpha}$; nous en déduirons $\Phi(\alpha)$ à un facteur constant près. Bien entendu, ces conclusions seront d'abord limitées à des valeurs réelles de α, mais la fonction $\Phi(\alpha)$ est supposée être telle qu'elle est déterminée dans toute l'étendue du demi-plan α dont nous avons parlé, quand elle est donnée en tous les points du demi-axe réel et positif.

Enfin, la formule (12) nous fournira la fonction de probabilité w pour une valeur positive quelconque de η. Il est vrai que le facteur indéterminé de la fonction $\Phi(\alpha)$ se retrouvera en w, mais un tel facteur n'a aucune importance.

On peut donc dire que la probabilité w est entièrement déterminée dès qu'on connaît la distribution de l'énergie *pour toutes les températures*. Il n'y a qu'*une* fonction w pour une distribution qui est donnée en fonction de la température. Par conséquent, les hypothèses que nous avons faites sur w et qui conduisent à la loi de Planck sont les seules qu'on puisse admettre.

Voilà le raisonnement par lequel Poincaré a établi la *nécessité* de l'hypothèse des quanta.

On voit que la conclusion dépènd de l'hypothèse que la formule de Planck est une image exacte de la réalité. Cela pourrait être tiré en doute, la formule ne pourrait être qu'approchée. C'est pour cette raison que Poincaré reprend le problème en abandonnant la loi de Planck et en se servant seulement de la relation que ce physicien a trouvée entre l'énergie d'un résonateur et celle du rayonnement noir. Ce nouvel examen conduit à la conclusion que l'énergie totale du rayonnement sera infinie à moins que l'intégrale $\int_0^{\eta_0} w\,d\eta$ ne tende *pas* vers zéro avec η_0. La fonction w doit donc présenter au moins *une* discontinuité (pour $\eta = 0$), analogue à celles que donne la théorie des quanta (¹).

(¹) Ce résultat avait été trouvé par M. P. Ehrenfest; voir *Ann. Physik*, t. 36, 1911, p. 91.

L'ŒUVRE ASTRONOMIQUE DE HENRI POINCARÉ

PAR H. VON ZEIPEL

Acta Mathematica, t. 38, p. 309-385 (1921).

Dans l'histoire de l'Astronomie, Poincaré restera toujours au premier rang des explorateurs les plus éminents qui par la force irrésistible de leur génie ont réussi à étendre les limites de la science de l'Univers. Au premier coup d'œil, cette opinion peut paraître étrange, puisque Poincaré n'était ni observateur ni calculateur. Mais pour justifier notre sentiment, il suffit de rappeler que l'Astronomie — dans ses efforts pour connaître les lois du mouvement et l'état physique des corps célestes et de l'Univers — doit nécessairement rester en coopération intime avec l'Analyse mathématique, la Mécanique et la Physique. C'est l'honneur impérissable de Poincaré d'avoir renforcé les liens qui doivent rattacher l'Astronomie à ces autres branches de la Science. Ainsi, l'Astronomie a pu profiter de la rigueur et de l'élégance des méthodes de l'Analyse moderne et des progrès récents de la Physique mathématique.

La plupart des travaux astronomiques de Poincaré se rapportent au problème des n corps et particulièrement au mouvement des planètes et des satellites dans notre système solaire. Pour bien faire comprendre l'importance de ces travaux, il convient de rappeler en peu de mots l'histoire de ce problème célèbre.

Il est bien connu que la découverte de l'attraction universelle avait été bien facilitée par ce fait que les masses des planètes sont petites par rapport à celle du Soleil. De même, la plupart des méthodes qui ont pour but le calcul du mouvement des corps célestes doivent leur succès à la petitesse des masses. Ainsi les fondateurs de la Mécanique céleste ont développé les coordonnées ou les éléments des planètes suivant les puissances d'un petit paramètre μ de l'ordre des masses. Ces développements perfectionnés plus tard par Hansen, Leverrier

Newcomb, Hill et Gaillot ont permis de déterminer quantitativement pour plusieurs siècles le mouvement des planètes avec une exactitude comparable avec celles des observations.

Toutefois, étant donnés les termes séculaires où le temps sort des signes trigonométriques, ces théories classiques ne peuvent pas suffire pour des espaces de temps très longs. D'ailleurs, et pour la même raison, ces séries ne nous apprennent pas grand'chose au point de vue de la stabilité du système.

Pour démontrer la stabilité et afin d'étudier en général les orbites au point de vue qualitatif, Lagrange développa les perturbations séculaires les plus importantes en séries trigonométriques. Ensuite, Delaunay dans sa théorie de la Lune, démontra qu'il est possible d'éviter complètement les termes séculaires. Mais c'est Newcomb qui énonça le premier en toute généralité que les coordonnées des planètes peuvent se développer en séries purement trigonométriques. Toutefois Newcomb n'est pas entré dans tous les détails de la démonstration. Gyldén s'occupa de la même question dans sa théorie des orbites absolues, mais sa théorie ne semble jamais avoir obtenu sa forme définitive. Ensuite, MM. Lindstedt et Bohlin ont traité certaines équations différentielles de types spéciaux qui se rencontrent dans la théorie de Gyldén, et ont montré que ces équations peuvent être intégrées au moyen de séries purement trigonométriques.

Mais la résolution complète du problème formel dont il s'agit fut réservée à Poincaré. Il y est arrivé en généralisant la méthode de M. Lindstedt. En somme, Poincaré démontre que les éléments canoniques des planètes peuvent se développer formellement en séries trigonométriques suivant les multiples d'un certain nombre d'arguments linéaires par rapport au temps. Les séries sont ordonnées aussi suivant les puissances des masses et de certaines quantités de l'ordre des excentricités et des inclinaisons. Mais Poincaré va beaucoup plus loin. Il montre, d'une part, que les séries en question ne sont pas convergentes, et que, par suite, elles ne donnent pas la solution complète du problème célèbre, la détermination du mouvement des corps célestes pour tous les temps. Mais il démontre, d'autre part, que les séries trigonométriques dont il s'agit sont semi-convergentes et qu'elles suffiront aux besoins de l'Astronomie pendant des espaces de temps extrêmement longs.

Dans ces derniers temps, M. K. Sundman est arrivé à une solution du problème des trois corps par une voie tout à fait différente. Ce savant a appliqué une méthode générale due à Poincaré, laquelle donne la solution complète d'un système d'équations différentielles tout le long de l'axe réel, si la solution reste holomorphe dans une bande quelconque autour de cet axe. M. Sundman a tourné la difficulté causée par la possibilité des chocs et a montré que les coordonnées des trois corps et le temps peuvent se développer suivant les puissances d'une variable auxiliaire. Ces séries sont valables pour toutes les valeurs du temps. Mais il reste à voir si les séries de M. Sundman convergent assez rapidement pour satisfaire aux besoins pratiques de l'Astronomie. En tout cas, les séries en question ne résolvent pas le problème de la stabilité. D'ailleurs la même méthode n'est peut-être pas applicable au problème général des n corps (où $n > 3$), puisque la nature des singularités des solutions de ce problème général reste encore inconnue.

Pour étudier au point de vue qualitatif les solutions du problème des n corps et d'autres problèmes de Dynamique beaucoup plus généraux, Poincaré s'est engagé dans une autre voie. Il cherche avant tout les solutions spéciales les plus simples. Il trouve ainsi les solutions périodiques dans lesquelles le système reprend après un certain temps sa configuration et ses vitesses relatives initiales. Il découvre aussi une classe de solutions plus générales : les solutions asymptotiques qui se rapprochent asymptotiquement d'une solution périodique pour $t = -\infty$ ou pour $t = +\infty$. Parmi ces solutions, il y en a d'ailleurs une infinité qui se rapprochent de la solution périodique non seulement pour $t = -\infty$ mais aussi pour $t = +\infty$. Ce sont les solutions doublement asymptotiques. Pour démontrer leur existence, Poincaré a dû inventer une notion nouvelle et extrêmement féconde : celle des invariants intégraux. Tous ces résultats sont établis avec la rigueur absolue qu'exigent les Mathématiques. La théorie des invariants intégraux lui permet aussi de traiter la question de la stabilité. Il trouve ainsi que dans un certain cas spécial du problème des trois corps, le système revient en général infiniment souvent aussi près que l'on veut de sa situation relative initiale. Les solutions qui ne jouissent pas de cette propriété sont infiniment peu probables.

En poursuivant les recherches dont nous venons de parler, Poincaré n'a pas réussi à pénétrer jusqu'au fond du problème proposé, qui est d'une complication extrême. Toutefois les résultats auxquels il est arrivé forment dans leur ensemble un terrain solide sur lequel les chercheurs de l'avenir pourront s'appuyer avec confiance.

Les solutions périodiques sont surtout utiles quand il s'agit de calculer le mouvement d'un système dont les conditions initiales sont voisines de celles qui correspondent exactement à la solution périodique. On peut alors prendre cette solution comme point de départ et développer ainsi la solution cherchée suivant les puissances d'un certain nombre de quantités petites. Ainsi on réussira parfois à résoudre certains problèmes où les méthodes anciennes ne sont pas applicables.

Pour le calcul des perturbations, le développement de l'inverse de la distance de deux planètes en série trigonométrique, suivant les multiples des anomalies moyennes, est d'une importance capitale. Pour étudier les coefficients de ce développement, qui sont certaines fonctions des éléments, Poincaré applique les théories générales des singularités et des périodes des intégrales doubles. Enfin, pour calculer certains termes éloignés et de périodes très longues dans le développement considéré — termes qui donnent parfois naissance à des perturbations assez importantes — Poincaré fait usage de la méthode ingénieuse de M. Darboux qui donne l'expression asymptotique d'une fonction dépendant d'un grand nombre.

La plupart de ces travaux importants, concernant le mouvement des corps célestes et les propriétés générales des équations de la Dynamique, ont été publiés par Poincaré dans un grand Mémoire couronné (*Acta mathematica*, t. 13) (1), dans les trois volumes de son admirable Ouvrage *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* et dans les deux premiers volumes de ses *Leçons de Mécanique céleste.*

Les chefs-d'œuvre déjà mentionnés auraient suffi à créer la gloire impérissable d'un savant. Mais Poincaré a traité encore avec le même succès toute une foule de problèmes astronomiques des plus importants.

Rappelons dès maintenant qu'il a perfectionné la méthode de Laplace pour la détermination des orbites, de sorte que cette méthode élégante est devenue aussi la plus efficace au point de vue pratique.

Dans la Géodésie, Poincaré a attiré l'attention sur les mesures de la pesanteur en montrant que ces mesures suffisent pour déterminer les irrégularités du géoïde. Il a signalé aussi l'importance des mesures des azimuts dans les triangulations géodésiques.

La théorie des marées est certainement l'une des plus difficiles de la Mécanique céleste. Avant Poincaré, on ne savait traiter que des cas particuliers en admettant par exemple que la mer recouvre toute la Terre et que la profondeur de cette mer ne dépend que de la latitude. Déjà dans ses premiers travaux sur

(1) *Œuvres*, t. VII, p. 262-479.

ce sujet, dans le *Journal de Mathématiques* de 1896, Poincaré a recherché la solution générale du problème. Les méthodes proposées et les résultats auxquels il est arrivé ont eu la plus grande influence sur le développement récent de la Physique mathématique en général. Maintenant, il est vrai, ces résultats s'obtiennent plus facilement par la méthode de M. Fredholm, laquelle constitue pour ainsi dire le point culminant de ce développement. C'est d'ailleurs Poincaré qui a appliqué le premier cette méthode ingénieuse à la résolution théorique du problème général des marées. La plupart des recherches de Poincaré sur la théorie en question se trouvent réunies dans le troisième volume de ses *Leçons de Mécanique céleste*. C'est un travail d'une élégance et d'une clarté tout à fait remarquables.

La théorie des figures d'équilibre relatif des masses fluides est d'une importance capitale pour l'Astrophysique et pour la Cosmogonie. Une telle théorie nous permettrait de suivre le développement des nébuleuses et des astres et nous renseignerait probablement sur les causes de la variabilité des étoiles. Malheureusement les problèmes dont il s'agit ne semblent pas encore être abordables dans toutes leurs généralités. D'une part, nos connaissances sur la constitution de la matière au sein des étoiles, sous les pressions et les températures énormes qui y règnent, sont encore tout à fait insuffisantes même pour la mise en équations des problèmes; d'autre part, même dans le cas idéal où les problèmes peuvent être analytiquement posés, les difficultés analytiques paraissent encore insurmontables, à moins qu'on ne se trouve dans le voisinage d'une solution particulière et simple.

Et néanmoins Poincaré est arrivé à plusieurs résultats d'une grande généralité. Il a montré que la rotation doit être uniforme autour de l'un des axes principaux d'inertie de la masse; il a trouvé une limite supérieure de la vitesse de rotation; il a déduit la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre en tenant compte de la viscosité du fluide.

Même si le fluide est supposé homogène, les difficultés analytiques à survaincre sont considérables. L'une des plus belles découvertes de Poincaré se rapporte à ce cas idéal. Par une méthode extrêmement féconde, il démontre l'existence d'une infinité de nouvelles figures d'équilibre qui se rattachent, pour certaines valeurs du moment de rotation, aux ellipsoïdes déjà connus de Mac Laurin et de Jacobi. On rencontre dans cette théorie la notion nouvelle des coefficients de stabilité, lesquels présentent des analogies intéressantes avec les exposants caractéristiques des solutions périodiques dans les problèmes de la

Dynamique. Poincaré démontre que les ellipsoïdes de Mac Laurin peu aplatis et les ellipsoïdes de Jacobi les moins allongés forment une suite continue de formes d'équilibre stables. Cette suite se prolonge après par des figures piriformes auparavant inconnues, dont la matière semble enfin vouloir se partager en deux parties.

Quoique les corps célestes ne soient pas homogènes, ces découvertes de Poincaré jettent une lumière assez claire sur la genèse des étoiles doubles et sur l'origine de la Lune. A ce point de vue, ces recherches forment pour ainsi dire le complément de celles de G. H. Darwin sur l'évolution des systèmes doubles par l'influence des marées internes.

Poincaré a publié aussi des *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques.* Il y a exposé les hypothèses qui ont une base scientifique solide, en a fait une analyse approfondie et a signalé les objections que soulèvent les idées émises. Personne n'était plus compétent que Poincaré pour se faire juge de toutes ces hypothèses parfois aussi incertaines qu'ingénieuses.

Essayons enfin — ce qui est impossible — de caractériser en peu de mots l'esprit des travaux de Poincaré. Toujours ce sont les problèmes fondamentaux qui attirent son attention. Toujours il fait preuve d'une faculté de généralisation éminente. Son imagination paraît presque sans limites. Ses exposés se distinguent par une élégance et une limpidité extraordinaires. Les cas particuliers et les détails l'intéressent moins, ou peut-être le temps ne lui a pas permis de les approfondir.

Il est évident que, justement à cause de cette grande généralité, l'œuvre astronomique de Poincaré restera pour longtemps comme une véritable mine d'or pour les chercheurs qui veulent y pénétrer.

Dans ce qui suit, nous allons essayer de donner une exposition rapide de cette œuvre gigantesque. Nous mettrons en lumière surtout les résultats, mais parfois aussi l'essentiel des méthodes.

1. Forme des équations du mouvement.

Dans l'étude si compliquée du mouvement des corps célestes, il importe de donner aux équations différentielles une forme aussi simple que possible.

On choisit d'ordinaire comme variables les coordonnées, $X_1, X_2, \ldots, X_{3N}$ des N planètes rapportées au centre du Soleil. Comme variables conjuguées Y_1,

$Y_2, \ldots, Y_{3N}$, on prend les composantes des quantités de mouvement dans ce mouvement relatif. La forme des équations devient alors semi-canonique, et la fonction caractéristique change d'une planète à l'autre. Il y a là un inconvénient considérable, surtout quand il s'agit du calcul des perturbations d'ordre supérieur.

Pour obtenir la forme canonique, il faut choisir les variables d'une autre manière. C'est ainsi que Radau a fait le choix suivant. Il désigne par X_1, X_2, X_3 les coordonnées de la planète P_1 par rapport au Soleil S, par X_4, X_5, X_6 les coordonnées de P_2 par rapport au centre de gravité de S et P_1, par X_7, X_8, X_9 les coordonnées de P_3 par rapport au centre de gravité de S, P_1 et P_2 et ainsi de suite. Comme variables conjuguées, il prend $Y_i = m'_i \frac{dX_i}{dt}$, m'_i étant certaines masses fictives qui ne diffèrent que peu des masses réelles. Avec ces variables, les équations du mouvement prennent la forme canonique, la fonction caractéristique F étant l'énergie totale du système en supposant le centre de gravité comme fixe.

Les équations de Radau n'ont pas été employées dans la pratique, puisque l'expression de F est trop compliquée quand il s'agit de calculer les perturbations d'ordre supérieur. Pour remédier à cet inconvénient, Poincaré [164; 187; 464, n° 26] ([1]), ([2]) choisit les variables X_i comme dans les théories anciennes. Mais comme variables conjuguées Y_i, il prend les composantes des quantités de mouvement dans le mouvement *absolu* en supposant fixe le centre de gravité du système. Les équations ont encore la forme canonique, mais l'expression de l'énergie totale F en fonction des variables X_i, Y_i est beaucoup plus simple qu'avec les variables de Radau.

Les masses des planètes étant petites, il convient d'employer comme variables les éléments du mouvement keplérien. Poincaré regarde les coordonnées relatives X et les composantes de la quantité du mouvement absolue Y qui correspondent à la planète P_k comme les coordonnées et les composantes de la quantité de mouvement d'un point mobile attiré suivant la loi de Newton par un centre fixe. La masse du centre fixe et celle du point mobile sont convenablement choisies. Soit dans l'orbite de ce point mobile a_k, e_k, i_k, l_k, g_k, θ_k le

---

([1]) Les nombres entre crochets se rapportent à la bibliographie qui se trouve dans l'*Analyse des Travaux Scientifiques de Henri Poincaré* faite par lui-même dans les *Acta mathematica*, t. 38.

([2]) [164], *Œuvres*, t. VII, p. 496-499; [187], *Œuvres*, t. VII, p. 500-511; [464, n° 26], *Leçons de Mécanique céleste professées à la Sorbonne*, t. 1, p. 33.

demi-grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, l'anomalie moyenne, la distance du périhélie au nœud et la longitude du nœud. Les X, Y qui correspondent à la planète P_k seront ainsi donnés comme certaines fonctions des éléments $a_k, \ldots, \theta_k$. Cela étant, Poincaré introduit au lieu des variables X, Y les variables [278; n° 11; 464, n° 56] (¹)

$$L_k = \beta_k \sqrt{a_k}, \qquad G_k = L_k \sqrt{1 - e_k^2}, \qquad \Theta_k = G_k \cos i_k,$$
$$l_k, \qquad g_k, \qquad \theta_k,$$

les β_k dépendant de la masse du Soleil et de celle de la planète P_k. Après ce changement de variables, les équations restent canoniques. La fonction caractéristique F peut se mettre sous la forme

$$F = F_0 + \mu F_1,$$

μ étant de l'ordre des masses es planètes. F_0 ne dépend que des L_k. Enfin μF_1, qui s'appelle la fonction perturbatrice, est développable en série trigonométrique suivant les multiples des variables angulaires l, g, θ, les coefficients dépendant des variables conjuguées L, G, Θ. Avec les variables de Poincaré, la fonction perturbatrice est aussi simple que dans les théories anciennes. Mais le grand avantage, c'est qu'on aura une seule fonction perturbatrice pour toutes les planètes.

Les équations dont nous avons parlé rentrent dans le type général [278, n° 13] (²)

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

est développé suivant les puissances d'un petit paramètre μ; F_0 est indépendant des y_i; F_1, F_2, ... sont périodiques par rapport aux y_i avec la période 2π.

L'étude du problème des N + 1 corps est beaucoup compliquée par le fait que les périhélies et les nœuds sont fixes dans le mouvement non troublé. Il en résulte que F_0 ne dépend que des grands axes, c'est-à-dire seulement de quelques-unes des variables x_i. Seulement dans le cas spécial le plus simple du

(¹) [278, n° 11], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 26; [464, n° 56], *Leçons de mécanique céleste*, t. 1, p. 74.

(²) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 32.

problème des trois corps, appelé le problème restreint, et qui comporte deux degrés de liberté, F_0 dépend de tous les x_i.

Si les excentricités et les inclinaisons sont petites, il est avantageux d'employer d'autres variables canoniques. Poincaré fait alors souvent l'usage des variables [278, n° 12; 464, n° 57] (1)

$$\begin{array}{lll} L_k, & \xi'_k = \sqrt{2(L_k - G_k)}\cos(g_k + \theta_k), & \xi''_k = \sqrt{2(G_k - \Theta_k)}\cos\theta_k, \\ \lambda_k, & \eta'_k = -\sqrt{2(L_k - G_k)}\sin(g_k + \theta_k), & \eta''_k = -\sqrt{2(G_k - \Theta_k)}\sin\theta_k. \end{array}$$

où $\lambda_k = l_k + g_k + \theta_k$ est la longitude moyenne de P_k. Les équations rentrent alors dans le type

$$(2)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{dF}{dy_i}, & \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_i}, \\ \dfrac{d\xi_k}{dt} = \dfrac{dF}{d\eta_k}, & \dfrac{d\eta_k}{dt} = -\dfrac{dF}{d\xi_k}, \end{array} \right.$$

où

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots.$$

Ici F_0 ne dépend que des x; F_1, F_2, ... sont périodiques par rapport aux y avec la période 2π et développables suivant les puissances des ξ et des η.

2. Solutions périodiques.

C'est Lagrange qui le premier a démontré l'existence des solutions périodiques dans le problème des trois corps. Dans ces solutions de Lagrange, les rapports des distances mutuelles restent invariables et les trois corps forment ou bien un triangle équilatéral ou bien ils se trouvent en ligne droite. Ces derniers temps, ces solutions de Lagrange ont acquis un intérêt particulier par la découverte des astéroïdes du type Hector ayant le même moyen mouvement que Jupiter. C'est à M. G. W. Hill que la science doit la découverte d'une classe nouvelle de solutions périodiques. En négligeant dans la théorie de la Lune l'excentricité de l'orbite terrestre et la parallaxe du Soleil, M. Hill parvient à démontrer l'existence d'orbites périodiques renfermant comme paramètre le rapport des durées du mois et de l'année. Elles présentent des conjonctions symétriques au commencement et au milieu de la période. Parmi les solutions

(1) [278, n° 12], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 29; [464, n° 57]. *Leçons de mécanique céleste*, t. 1, p. 75.

périodiques de M. Hill, celle qui correspond au temps de révolution actuel de la Lune a servi, dans ces dernières années, comme point de départ pour la théorie de la Lune de M. E. W. Brown.

Déjà dans ses premiers travaux sur les courbes définies par des équations différentielles, Poincaré fut conduit à l'étude des solutions périodiques. Dans ses recherches sur les solutions périodiques du problèmes des trois corps [38; 92; 183; 278] (1) il se place dans les conditions actuelles de notre système solaire en admettant que les masses de deux corps sont petites par rapport à celle du troisième.

Il est ainsi conduit à étudier le système [183; 278, n° 37] (2)

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n; \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

les X_i étant développés suivant les puissances d'un petit paramètre μ. En supposant que pour $\mu = 0$ ces équations admettent une solution périodique connue

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

de période T, il se propose de trouver la solution périodique du système (3) qui pour $\mu = 0$ se réduit à la solution périodique (4).

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$ et $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$. En généralisant [183; 278, n° 27] (3) la méthode de Cauchy appelée Calcul des limites, Poincaré démontre que les ψ_i sont développables suivant les puissances des β_i, de τ et de μ, pourvu que les fonctions X_i soient holomorphes et uniformes au voisinage de la solution périodique (4). Évidemment les ψ_i s'annulent avec les β_i, τ et μ. C'est la condition de la solution périodique et cela s'écrit

$$\psi_i(\beta_1, \ldots, \beta_n, \tau, \mu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Puisque les équations (3) ne contiennent pas le temps explicitement, il est permis de mettre par exemple $\beta_1 = 0$. On peut en général résoudre les équations (5) en mettant pour $\beta_2, \ldots, \beta_n, \tau$ certaines séries convergentes ordonnées suivant les puissances de μ et divisibles par μ.

(1) [38], *Œuvres*, t. VII, p. 253-261; [92], *Œuvres*, t. VII, p. 253-261; [183], *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [278], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*.

(2) [183], *Œuvres*, t. VII, 262-479; [278, n° 37], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 82.

(3) [183], *Œuvres*, t. 7, p. 262-479; [278, n° 27], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 58.

Ayant ainsi démontré l'existence de la solution périodique cherchée, Poincaré montre [278, n° 42] (1) comment on peut développer les x_i en séries de Fourier de l'argument $\frac{2\pi t}{T+\tau}$. Les coefficients de ces séries sont développés suivant les puissances de μ.

Il arrive souvent que les X_i sont périodiques de période 2π par rapport à certaines des variables x_i par exemple par rapport à $x_1, \ldots, x_k$. On peut alors regarder comme périodique une solution dans laquelle $x_1, \ldots, x_k$ augmentent de certains multiples de 2π, tandis que les autres x_i reprennent leurs valeurs. Alors dans l'exposé précédent, $\psi_1, \ldots, \psi_k$ signifient les incréments des $x_1, \ldots, x_k$ diminués par les multiples mentionnés de 2π. Les conditions (5) expriment encore la périodicité de la solution.

Si les équations (3) admettent s intégrales uniformes au voisinage de la solution (4), les conditions (5) ne sont pas indépendantes. Si $n-s$ des fonctions ψ_i s'annulent, les autres s'annulent alors en même temps. A ces $n-s$ conditions on peut alors adjoindre les s conditions qui expriment que les intégrales ont certaines valeurs constantes arbitraires. La solution périodique considérée contient alors ces s constantes comme paramètres.

Il peut arriver que certaines des fonctions ψ_α sont divisibles par μ et que la solution périodique (4) contient autant de paramètres arbitraires. Il faut alors déterminer ces paramètres de sorte que les équations $\frac{\psi_\alpha}{\mu} = 0$ soient satisfaites pour $\beta_i = \tau = \mu = 0$. A chaque solution (4) ainsi déterminée correspond alors pour de petites valeurs de μ une solution périodique qui coïncide avec elle pour $\mu = 0$.

Poincaré applique les principes précédents à l'étude des solutions périodiques du problème des trois corps [92; 183; 278, n°s 39, 40, 47, 48] (2) en supposant, nous l'avons déjà dit, que les masses des planètes sont petites. En égalant à zéro le paramètre μ, qui est de l'ordre des masses, le problème admet des solutions périodiques très simples. On obtient une telle solution en supposant que les deux masses infiniment petites décrivent des cercles quelconques concentriques autour du Soleil et situés dans le même plan. On en obtient d'autres en supposant que pour $\mu = 0$ les orbites se réduisent à des ellipses et que les durées de révolution sont commensurables entre elles. Puisque, pour $\mu = 0$, les périhélies et les

(1) [278, n° 42] *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 109.

(2) [92], *Œuvres*, t. VII, p. 253-261; [183], *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [278, n°s 39, 40, 47, 48], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 95, 97, 139 et 144.

nœuds sont fixes, certaines des fonctions ψ_α sont divisibles par μ. Pour que les coefficients de μ dans les développements de ces fonctions ψ_α disparaissent, il faut choisir les éléments (les grands axes exceptés) de sorte que les dérivées premières de la partie séculaire de la fonction perturbatrice (partie qui devient constante en vertu de la commensurabilité) s'annulent. Poincaré démontre ainsi l'existence de trois sortes de solutions périodiques dans le problème des trois corps. Au bout de la période, le système reprend la configuration qu'il avait au commencement, tout le système ayant seulement tourné d'un certain angle φ. Au commencement et au milieu de la période, les deux planètes se trouvent en conjonction symétrique, les vitesses étant perpendiculaires à la ligne ou au plan de conjonction. Les coordonnées relatives des deux planètes peuvent être développées en séries de Fourier d'un seul argument, les coefficients étant des séries ordonnées suivant les puissances du petit paramètre μ. — Pour les solution *de la première sorte*, les inclinaisons sont nulles, les excentricités sont de l'ordre de μ et l'angle φ est fini. En y mettant $\mu = 0$, ces orbites se réduisent à des cercles concentriques autour du Soleil et situés dans le même plan. En ne considérant pas comme distinctes deux solutions qui diffèrent seulement par la position des axes, par l'origine du temps ou par le choix des unités de longueur et de temps, les solutions périodiques de la première sorte ne renferment qu'un seul paramètre, qui est le rapport $\frac{n}{n'}$ entre les moyens mouvements dans les deux orbites circulaires limites (pour $\mu = 0$). — Pour les solutions périodiques *de la seconde sorte*, les inclinaisons sont nulles, les excentricités finies et l'angle φ de l'ordre de μ. En y mettant $\mu = 0$, ces orbites se réduisent à deux ellipses à foyer commun situées dans un même plan et ayant leurs lignes d'apsides coïncidantes. Le rapport $\frac{n}{n'}$ des moyens mouvements dans ces ellipses est un nombre rationnel. Ces solutions sont caractérisées par le nombre rationnel $\frac{n}{n'}$ et par l'excentricité de l'une des ellipses limites qui y rentre comme paramètre arbitraire. — Pour les solutions périodiques *de la troisième sorte*, l'inclinaison n'est pas nulle, les excentricités sont petites et l'angle φ de l'ordre des masses. Pour $\mu = 0$ les orbites se réduisent à des ellipses peu excentriques ou circulaires ayant le Soleil au foyer et non pas situées dans le même plan. Les lignes d'apsides coïncident avec la ligne des nœuds ou y sont perpendiculaires. Le rapport $\frac{n}{n'}$ des moyens mouvements dans les deux ellipses limites est un nombre rationnel. Ce qui caractérise ces solutions périodiques de la troisième sorte, c'est d'une part le nombre rationnel $\frac{n}{n'}$ et d'autre part l'inclinaison des orbites limites, qui y rentre comme paramètre arbitraire.

Supposons donnée la valeur du petit paramètre μ. Si le rapport des moyens mouvements dans les orbites limites se rapproche d'un nombre rationnel de la forme $\frac{p+1}{p}$, p étant un entier, les orbites périodiques de la première sorte deviennent assez excentriques. Dans le voisinage immédiat de ces commensurabilités, il arrive même que les séries ordonnées suivant les puissances de μ qui donnent les solutions périodiques de la première sorte ne convergent plus pour la valeur considérée de μ. Pour examiner ce qui se passe alors, Poincaré se limite au problème restreint [367] (¹) en supposant que l'une des masses est nulle et que l'autre planète se meut dans un cercle. Si les séries mentionnées ordonnées suivant les puissances de μ, qui donnent les solutions périodiques de la première sorte, cessent d'exister, Poincaré montre qu'on peut les remplacer par des séries procédant suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. L'excentricité e est alors de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, et c'est le rapport $\beta = \lim\limits_{\mu=0} \frac{e}{\sqrt{\mu}}$ qui rentre comme paramètre arbitraire. Pour $\mu = 0$ l'orbite se réduit à un cercle, et le rapport entre les moyens mouvements devient $\frac{p+1}{p}$. Si β croît, il arrive enfin que ces nouvelles séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ ne convergent plus. Poincaré montre qu'on peut les remplacer alors par les séries ordonnées suivant les puissances de μ, les mêmes qui donnent les solutions périodiques de la seconde sorte. Ainsi au voisinage des commensurabilités mentionnées, les solutions périodiques de la première et de la seconde sorte ne sont pas analytiquement distinctes. En variant le paramètre, on passe des unes aux autres.

Évidemment, il est infiniment peu probable que les conditions initiales qui correspondent à une solution périodique se trouvent réalisées dans la nature. Mais il peut bien arriver et il arrive aussi souvent que le mouvement est à peu près périodique. Alors il convient de prendre la solution périodique comme point de départ et de développer les coordonnées ou les éléments suivant de petits paramètres, ainsi que l'on fait déjà Delaunay, Hill et Brown dans le cas de la Lune. Il semble que ce soit surtout les solutions périodiques de la première sorte qui auront ainsi une valeur pratique considérable et cela dans la théorie du mouvement des astéroïdes et des satellites.

(¹) [367], *Œuvres*, t. VIII, p. 417-436.

3. Exposants caractéristiques.

Soit

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

un système d'équations différentielles admettant une solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$ de période T. Pour étudier les solutions voisines de cette solution, Poincaré introduit $x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$ et développe suivant les puissances des ξ. En ne conservant que les termes du premier degré, il arrive aux *équations aux variations* [183; 278, n° 53] (¹)

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{dX_i}{d\xi_j} \xi_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Dans les coefficients des ξ au second membre, il faut introduire pour x_i ses développements en séries de Fourier. Les équations aux variations qui correspondent à une solution périodique sont donc des équations homogènes et linéaires à coefficients périodiques.

On sait quelle est en général la forme des solutions de ces équations; on obtient n solutions particulières de la forme suivante :

$$\xi_1 = e^{\alpha_p t} S_{1,p}, \qquad \ldots, \qquad \xi_n = e^{\alpha_p t} S_{n,p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

les α_p étant des constantes et les $S_{i,p}$ des fonctions périodiques de même période que les $\varphi_i(t)$.

Si deux exposants α ont la même valeur, on aura une solution particulière de la forme

$$\xi_i = e^{\alpha t}(S_i + t S_i') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

les fonctions S_i et S_i' étant périodiques.

Les constantes α_p s'appellent les *exposants caractéristiques* de la solution périodique considérée.

La nature des solutions voisines dépend en premier lieu des valeurs des exposants caractéristiques. Si tous ces exposants qui ne sont pas nuls sont purement imaginaires, Poincaré dit que la solution périodique est *stable*; si au contraire, pour quelques-uns des exposants, les parties réelles ne sont pas nulles,

(¹) [183], *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [278, n° 53], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 162.

la solution périodique est appelée *instable*. Si les valeurs initiales sont voisines de celles qui correspondent à une solution périodique stable, le mouvement restera pour longtemps semblable au mouvement périodique; au contraire, les solutions qui avoisinent à un instant donné une solution périodique instable, s'en éloignent *en général* beaucoup plus tôt.

Rappelons brièvement comment les exposants caractéristiques peuvent se calculer [183; 278, n° 60] (1). Soit T la période de la solution périodique génératrice $x_i = \varphi_i(t)$; soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$ et $x_i = \varphi_i(T) + \beta_i + \psi_i$ la valeur de x_i pour $t = T$. Alors Poincaré montre que les exposants caractéristiques α satisfont à l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} + 1 - e^{\alpha T} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} + 1 - e^{\alpha T} \end{vmatrix} = 0,$$

où dans les éléments du déterminant il faut mettre $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ après les différentiations.

Dans le cas des équations de la Dynamique, certaines symétries apparaissent, de sorte que les exposants caractéristiques sont toujours égaux deux à deux, mais avec des signes contraires. D'ailleurs, si la solution périodique ne correspond pas à une position d'équilibre relative deux exposants caractéristiques sont toujours nuls.

Rappelons, que toutes réductions faites, les équations du problème général des trois corps peuvent se mettre sous la forme canonique avec quatre degrés de liberté; dans le cas du mouvement plan, le degré de liberté s'abaisse à 3; enfin dans le cas restreint, on n'aura que deux degrés de liberté. Si les masses des planètes sont petites, les seconds membres des équations différentielles sont développés suivant des puissances d'un petit paramètre μ. Il en est de même des fonctions $\varphi_i(t)$ et $\psi_i(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ mentionnées tout à l'heure. Cela étant, Poincaré démontre [183; 278, n^{os} 74-78] (1) que dans le problème des trois corps les exposants caractéristiques des solutions périodiques de la deuxième et de la troisième sorte disparaissent pour $\mu = 0$ et sont développables suivant

(1) [183], *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [278], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste;* [n° 60], t. 1, p. 178; [n^{os} 74-78], t. 1, p. 201-218.

les puissances de $\sqrt{\mu}$. Enfin en formant les premiers coefficients de ces développements, il démontre que, dans le problème réduit des trois corps, on n'aura que deux exposants caractéristiques qui sont identiquement nuls.

D'ailleurs, Poincaré résout [183; 278, n° 79] (¹) complètement les équations aux variations du problème des trois corps et montre comment on peut développer en séries trigonométriques convergentes les fonctions S des formules (8) et (9). Les coefficients de ces séries sont développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et convergent pour des valeurs assez petites de ce paramètre.

Il va sans dire que, dans toutes ces discussions, Poincaré ne regarde point seulement les équations spéciales du problème des trois corps, mais les équations canoniques générales du type (1).

Les solutions périodiques étudiées dépendent d'un petit paramètre μ. Les solutions périodiques du problème des trois corps renferment encore une constante arbitraire essentielle C. Les exposants caractéristiques qui ne sont pas identiquement nuls dépendent de μ et de C. En faisant varier par exemple C, les solutions périodiques et leurs exposants caractéristiques varient aussi.

Supposons donc qu'un système quelconque d'équations différentielles possède des solutions périodiques qui dépendent d'un paramètre C. Il peut alors arriver que pour $C = C_0$ une solution périodique cesse d'exister. Poincaré démontre que cela ne peut se faire que si la solution se confond pour $C = C_0$ avec une autre solution périodique. Ainsi les solutions périodiques disparaissent (ou apparaissent) par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques [183; 278, n° 37] (¹).

Admettons qu'il s'agisse des équations de la Dynamique, et que pour $C = C_0$ plusieurs solutions périodiques se confondent. Poincaré démontre que cela arrive et ne peut arriver que si pour l'un des couples d'exposants caractéristiques on aura $\alpha T = \pm 2k\pi\sqrt{-1}$, k étant un entier. Soit pour $C > C_0$ p' le nombre des solutions périodiques considérées, pour lesquelles $\alpha T \mp 2k\pi\sqrt{-1}$ soit purement imaginaire, et p'' le nombre des solutions pour lesquelles cette quantité soit réelle. Soit q' et q'' les nombres correspondants pour $C < C_0$. Il n'y a alors que trois hypothèses possibles :

$$\begin{aligned} p' &= p'', & q' &= q''; \\ p' &= p'' + 1, & q' &= q'' + 1; \\ p' &= p'' - 1, & q' &= q'' - 1. \end{aligned}$$

(¹) [183], *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [278], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste;* [n° 79], t. 1, p. 82; [n° 37], t. 1, p. 82.

Dans tous les cas, on a

$$p' - q' = p'' - q''.$$

Dans le cas simple où il n'y a que deux degrés de liberté, comme dans le cas restreint du problème des trois corps, il n'y a qu'un seul couple d'exposants caractéristiques qui n'est pas identiquement nul. Poincaré trouve alors le théorème [280, n° 378] (1) : *Si, en variant les paramètres, plusieurs solutions périodiques se confondent, alors il disparaît (ou apparaît) toujours autant de solutions stables que de solutions instables.*

Voici encore un autre théorème dans ce cas de deux degrés de liberté : *Si, pour certaines valeurs des paramètres, une solution périodique perd la stabilité ou l'acquiert (et cela de telle façon que l'exposant caractéristique* α *soit un multiple de* $2\pi\sqrt{-1}$*), c'est qu'elle se sera confondue avec une autre solution périodique, avec laquelle elle aura échangé sa stabilité.*

4. Solutions asymptotiques.

En étudiant les solutions voisines d'une solution périodique instable, Poincaré a découvert une nouvelle classe de solutions auparavant tout à fait inconnue [183; 278, chap. VII] (2). Il les a appelées *solutions asymptotiques*. Il y en a deux familles : pour la première, la solution se rapproche asymptotiquement pour $t = -\infty$ de la solution périodique considérée, pour la seconde famille, ce rapprochement asymptotique aura lieu pour $t = +\infty$.

En partant des équations (6) et d'une solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$ Poincaré y pose $x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$. Il vient alors

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Xi_i,$$

les Ξ étant développés suivant les puissances des ξ_i, les coefficients de ces développements étant périodiques de période $T = 2\pi$.

Au lieu des variables ξ_i, Poincaré introduit des variables nouvelles η_i par une transformation linéaire dont les coefficients sont les fonctions périodiques $S_{i,p}$ qui entrent dans les solutions (8) des équations aux variations. Les équa-

(1) [280, n° 378], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 3, p. 344.

(2) [183], *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [278, chap. VII], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 335.

tions différentielles des η_i ont alors la forme

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \mathrm{H}_i = \alpha_i \eta_i + \mathrm{H}_i^{(2)} + \mathrm{H}_i^{(3)} + \ldots, \tag{10}$$

$\mathrm{H}_i^{(p)}$ étant un polynome homogène de degré p en $\eta_1, \ldots, \eta_n$ avec des coefficients périodiques en t de période 2π. Les α_i sont les exposants caractéristiques.

Poincaré montre qu'on peut satisfaire formellement à ces équations en développant les η_i suivant les puissances de quantités $\mathrm{A}_i e^{\alpha_i t}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), les A_i étant des constantes arbitraires. Les coefficients de ces développements sont périodiques en t de période 2π. Il n'y aurait exception que dans le cas où il y aurait entre les α_i une relation de la forme

$$\gamma\sqrt{-1} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k - \alpha_j = 0 \tag{11}$$

pour des valeurs entières non négatives des β_k et entières (positives, négatives ou zéro) de γ.

En appliquant la méthode de Cauchy appelée Calcul des limites, Poincaré démontre que les séries en question convergent, si l'expression (11) ne peut devenir plus petite que toute quantité donnée ε; c'est-à-dire si aucun des deux polygones convexes qui enveloppent, le premier les points dont les affixes sont les α et $+\sqrt{-1}$, le second les points ayant les affixes α et $-\sqrt{-1}$, si aucun de ces polygones ne contient l'origine; c'est-à-dire si les parties réelles de toutes les quantités α sont différentes de zéro et du même signe.

Il peut arriver que ces conditions suffisantes pour la convergence ne soient remplies que pour un certain nombre des coefficients α, par exemple pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Si par exemple $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ont leurs parties réelles > 0, on peut mettre $\mathrm{A}_{m+1} = \mathrm{A}_{m+2} = \ldots = \mathrm{A}_n = 0$ et développer les η_i en séries convergentes suivant les puissances des quantités $\mathrm{A}_1 e^{\alpha_1 t}, \ldots, \mathrm{A}_m e^{\alpha_m t}$. On aura ainsi des solutions asymptotiques de la première famille. De même, aux exposants caractéristiques dont les parties réelles sont < 0, correspondent des solutions asymptotiques de la deuxième famille.

Les principes précédents s'appliquent aussi aux équations canoniques avec n degrés de liberté. Toutefois deux exposants caractéristiques étant identiquement nuls et ainsi égaux entre eux, la dernière des équations qui correspondent aux équations (10) aura la forme

$$\frac{d\eta_{2n}}{dt} = c\,\eta_{2n-1} + \mathrm{H}_{2n}^{(2)} + \mathrm{H}_{2n}^{(3)} + \ldots,$$

c étant une constante. Néanmoins le nouveau système se traite comme les équations (10) et tous les résultats précédents sur l'existence des solutions asymptotiques subsistent.

Si les équations canoniques sont du type (1), comme dans le problème des trois corps, les exposants caractéristiques se développent suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et contiennent cette quantité comme facteur. Certains diviseurs (11) sont donc de l'ordre de $\sqrt{\mu}$. Mais, en revanche, les quantités à intégrer sont toujours aussi au moins du même ordre. Poincaré démontre qu'il existe aussi pour ces équations des solutions asymptotiques au voisinage de chaque solution périodique instable. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les exposants caractéristiques qui ont leur partie réelle positive quand $\sqrt{\mu} > 0$. Pour les solutions asymptotiques de la première famille, les x_i et les y_i sont développables suivant les puissances de $\omega_1 = A_1 e^{\alpha_1 t}, \ldots, \omega_k = A_k e^{\alpha_k t}$, les $A_1, \ldots, A_k$ étant des constantes arbitraires. Les coefficients de tous ces développements sont périodiques en t de même période que la solution périodique. Enfin les coefficients constants sont des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont développés suivant les puissances positives de $\sqrt{\mu}$. Ces développements des x_i et y_i convergent uniformément tant que t est assez voisin de $-\infty$ et $\sqrt{\mu} \geqq 0$ et assez voisin de zéro. On aura aussi des solutions asymptotiques analogues qui se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique pour $t = +\infty$.

Poincaré démontre qu'en développant les coefficients fractionnaires suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, on n'aura que des puissances positives. Ainsi, pour les solutions asymptotiques des équations (1), les x_i et les y_i sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}, \omega_1, \ldots, \omega_k$, les coefficients étant périodiques en t. On peut ordonner ces séries suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et déterminer les coefficients directement en partant des équations différentielles. Malheureusement ces séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ ne sont pas convergentes. Mais Poincaré démontre qu'elles sont semi-convergentes.

5. Non-existence des intégrales uniformes.

On sait que le problème des trois corps admet plusieurs intégrales très simples : celles du mouvement du centre de gravité, celles des aires et celle des forces vives. M. Bruns a démontré qu'il n'existe pas de nouvelle intégrale algébrique en dehors de ces intégrales déjà connues.

Poincaré a complété la démonstration de M. Bruns sur un point délicat et a confirmé les résultats auxquels ce savant était arrivé [166] (1).

Mais Poincaré a examiné la question aussi d'un autre point de vue [278, chap. V) (2). Il admet toujours que deux des masses sont petites (de l'ordre de μ) par rapport à la troisième. En traitant, selon son habitude, la question d'une manière aussi générale que possible, Poincaré ne regarde pas seulement les équations spéciales du problème des trois corps, mais les équations générales du type (1). Il démontre que, sauf certains cas exceptionnels, les équations (1) n'admettent pas d'autre intégrale analytique et uniforme que l'intégrale $F = \text{const.}$ Voici ce qu'il entend par là.

Soit Φ une fonction analytique et uniforme pour toutes les valeurs réelles des y, pour les valeurs suffisamment petites de μ et pour les valeurs des x appartenant à un certain domaine D; le domaine D peut d'ailleurs être quelconque et être aussi petit qu'on veut. Enfin Φ doit être périodique par rapport aux y de période 2π. Dans ces conditions Φ est développable sous la forme

$$\Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots, \tag{12}$$

Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... étant uniformes par rapport aux x et aux y et périodiques par rapport aux y.

Poincaré démontre *que en général une fonction Φ de cette forme ne peut pas être une intégrale des équations* (1).

En supposant qu'il existe une telle intégrale Φ distincte de F, il est permis de supposer que Φ_0 n'est pas une fonction de F_0. En effet, si Φ_0 était une fonction de F_0, Poincaré montre qu'il serait possible de déduire de Φ et F une nouvelle intégrale Φ de la nature considérée et pour laquelle Φ_0 n'est pas une fonction de F_0.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction Φ soit une intégrale s'écrit

$$[F, \Phi] = 0, \tag{13}$$

la quantité au premier membre étant la parenthèse de Poisson. En égalant à zéro les termes de diverses puissances en μ dans le premier membre, on obtient une infinité d'équations que nous nommerons (13^0), (13^1), (13^2), ...

En partant de l'équation (13^0), Poincaré fait voir d'une manière très simple

(1) [166], *Œuvres*, t. VII, p. 512-516.
(2) [278, chap. V], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 233.

que Φ_0 ne peut pas dépendre de celles des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui sont conjuguées aux variables dont dépend F_0.

En mettant ensuite dans l'équation (13^1) les développements trigonométriques de F_1 et de Φ_1, il montre que les coefficients du développement de F_1 doivent satisfaire à certaines conditions spéciales pour qu'il existe un certain nombre d'intégrales de la forme (12). Cela conduirait trop loin d'énumérer ici ces conditions dont l'énoncé est assez compliqué. Poincaré démontre que ces conditions ne sont pas satisfaites dans le problème des trois corps. Pour démontrer rigoureusement le théorème, quelque petit que soit le domaine D, il faut considérer des termes infiniment éloignés dans le développement de F_1. Poincaré fut ainsi conduit à former certaines expressions asymptotiques pour les coefficients de très haut degré dans le développement trigonométrique de la fonction perturbatrice suivant les multiples des anomalies moyennes. Le résultat auquel arrive Poincaré s'énonce ainsi : *Quand deux des masses sont petites de l'ordre de* μ, *le problème des trois corps n'admet pas d'autres intégrales de la forme* (12) *que celles qui sont déjà connues.*

6. Séries de M. Lindstedt.

Pour déterminer le mouvement des planètes, les fondateurs de la Mécanique céleste ont cherché à intégrer les équations différentielles en développant les inconnues suivant les puissances des masses. Les termes d'ordre n de ces développements sont des polynomes en t d'ordre n au plus, dont les coefficients sont des développements trigonométriques d'un certain nombre d'arguments. Depuis, ces méthodes classiques ont été perfectionnées et employées surtout par Hansen, Leverrier, Newcomb, Hill et Gaillot. Il a été ainsi possible de calculer le mouvement des planètes pour plusieurs siècles avec une exactitude comparable avec celle des observations modernes.

Toutefois, étant donné que ces développements renferment le temps en dehors des signes sinus et cosinus, il est évident qu'ils ne peuvent pas suffire quand il s'agit de trouver les changements séculaires des orbites. Pour étudier ces changements, Lagrange développa sous forme trigonométrique les inégalités séculaires les plus importantes, pour lesquelles l'exposant du temps est égal à l'ordre par rapport aux masses. D'ailleurs Lagrange ne conserva que les termes du premier degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Il lui fallut pour cela résoudre un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. La théorie de Lagrange fut perfectionnée par Leverrier et Cellérier qui ont conservé aussi les termes du troisième et du cinquième degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Toutefois, il restait à démontrer la possibilité d'éviter complètement les développements suivant les puissances du temps. C'est à Delaunay que revient l'honneur d'avoir formé le premier des séries générales purement trigonométriques satisfaisant formellement aux équations du mouvement. Mais Delaunay s'est occupé seulement de la théorie de la Lune.

C'est Newcomb [1] qui démontra le premier que les coordonnées des huit planètes peuvent être développées en séries purement trigonométriques renfermant $3 \times 8 - 1 = 23$ arguments variant linéairement avec le temps. La démonstration de Newcomb repose sur la méthode de la variation des constantes un peu généralisée. Il avance par approximations successives, en partant des expressions de Lagrange où les termes séculaires les plus importants ont déjà la forme trigonométrique. Toutefois Newcomb avoue lui-même dans la préface de son Mémoire que sa démonstration ne peut être considérée comme définitive. D'ailleurs, la méthode de Newcomb, comme celle de Delaunay, demande un grand nombre de changements de variables assez compliqués.

Le problème dont il s'agit fut résolu aussi par Gyldén dans sa théorie des orbites absolues. Mais le mode d'exposition de Gyldén est malheureusement très compliqué, et il n'est pas facile de dégager dans sa théorie l'idée fondamentale.

C'est pour simplifier les méthodes de Gyldén que M. Lindstedt commença à s'occuper de la question. M. Lindstedt [2] a traité les équations différentielles de la forme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n^2 x = \Psi_0 + \Psi_1 x + \Psi_2 x^2 + \ldots, \tag{14}$$

où les fonctions Ψ_i, qui sont du premier ordre, ne renferment que des termes périodiques de la forme $\beta \cos(\lambda t + b)$, les λ étant incommensurables avec n. En supposant que l'équation ci-dessus présente certaines symétries, lesquelles d'ailleurs se trouvent réalisées dans la plupart des applications, M. Lindstedt démontre que x peut se développer en série trigonométrique, où un nouvel

(1) *Smithsonian Contr. to Knowledge*, vol. 21, 1874.
(2) *Mém. de l'Acad. Imp. d. Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. 31, nº 4, 1883.

argument s'est introduit par l'intégration. M. Lindstedt (1) appliqua sa méthode au problème des trois corps en admettant que les excentricités, les inclinaisons et le *rapport des rayons vecteurs* des deux planètes sont des quantités petites. Il montre que les distances des trois corps peuvent alors être développées en séries trigonométriques avec quatre arguments.

Voilà à quel point se trouvait la théorie en question quand Poincaré commença à s'y intéresser. Poincaré se propose d'abord de perfectionner la méthode de M. Lindstedt. Il démontre [97] (2) qu'on peut satisfaire formellement aux équations (14) par une série trigonométrique même dans le cas général où les fonctions Ψ_i ne présentent plus les symétries dont nous avons parlé. La démonstration très intéressante repose sur un théorème de Green d'après lequel une certaine intégrale, étendue sur une surface fermée quelconque, est nulle. Poincaré fait preuve ici, comme souvent, d'une pénétration géniale qui lui permet de découvrir les liens internes qui raccordent parfois entre elles des questions en apparence tout à fait indépendantes.

Plus tard, Poincaré trouve [115; 279, n° 127] (3) que l'équation (14) peut se réduire à un système canonique avec deux degrés de liberté, de la forme (1), F_0 dépendant de tous les x_i. Il se pose alors le problème d'intégrer formellement les équations générales de ce type sans introduire de développements suivant les puissances de t. Il suppose d'abord que F_0 dépend de toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$. Il démontre qu'on peut satisfaire alors aux équations (1) en mettant

$$(15)\qquad \begin{cases} x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots, \\ y_i = w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots, \end{cases}$$

où

$$w_i = n_i t + \tilde{\omega}_i.$$

Les constantes d'intégration sont x_i^0 et $\tilde{\omega}_i$. Les constantes n_i dépendent des x_i^0 et sont développées suivant les puissances de μ. Les x_i^k et y_i^k sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport aux w_i et dépendent d'une manière quelconque des x_i^0 mais sont indépendants des $\tilde{\omega}_i$. Il est facile de former directement les coefficients des développements, si la fonction caractéristique F, développée suivant les multiples des y_i, ne renferme que des cosinus. Mais en

(1) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 1, 1881.

(2) [97], *Œuvres*, t. VII, p. 546-550.

(3) [115], *Œuvres*, t. VII, p. 551-554; [279, n° 127], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 2, p. 28.

ne faisant pas cette hypothèse, on rencontre les mêmes difficultés que dans le cas général de l'équation (14). Par l'application de la méthode d'intégration de Jacobi, Poincaré évite ces difficultés [279, n° 125] (1).

Pour appliquer la méthode de M. Lindstedt au problème général des trois corps, il était nécessaire de traiter le cas important d'exception où la fonction F_0 ne dépend pas de toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$. L'emploi de la méthode d'intégration de Jacobi conduit alors à certaines difficultés, puisque certaines quantités de l'ordre des excentricités apparaissent élevées à des puissances négatives [279, chap. XI, XII]. Poincaré évite la difficulté en faisant un changement de variables dans lequel il fait usage des solutions périodiques de la première sorte. Toutefois, il semble que l'emploi de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi ne soit pas bien convenable dans le cas dont il s'agit.

Poincaré revient après quelques années à la même question [208], (2) mais alors il part des équations (2). Il suppose d'abord que les ξ et η n'entrent pas, de sorte que F_0 dépende de toutes les variables de la première catégorie. Pour effectuer l'intégration, il détermine les fonctions x_i^k et y_i^k $(k > 0)$ des développements (15) de sorte que la fonction F après la substitution ne dépende que des x_i^0 et non pas des w_i, et de sorte que l'expression

$$\sum_i x_i\, dy_i - \sum_i x_i^0\, dw_i$$

soit une différentielle exacte. En prenant alors pour variables nouvelles les w_i et les x_i^0, la forme canonique ne change pas, et comme F ne dépend que des x_i^0 ces quantités seront constantes, tandis que les w_i seront des fonctions linéaires du temps. — Poincaré démontre que les x_i^k et y_i^k se déterminent très facilement d'après ces principes.

D'une manière tout à fait analogue, Poincaré effectue l'intégration des équations générales (2). En ne supposant, pour simplifier, que deux planètes, il cherche à exprimer les variables en fonction de six constantes x_1^0, x_2^0, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 et de six arguments fonctions linéaires du temps w_1, w_2, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4.

Les w varient rapidement et les ω très lentement. Il développe suivant les

(1) [279, n° 125], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 2, p. 17.

(2) [208], *Œuvres*, t. VII, p. 517-542.

puissances de μ :

$$(16)\qquad \begin{cases} x_i=\sum_p \mu^p x_i^p, & y_i=\sum_p \mu^p y_i^p \qquad (i=1,\,2), \\ \xi_k=\sum_p \mu^p \xi_k^p, & \eta_k=\sum_p \mu^p \eta_k^p \qquad (k=1,\,2,\,3,\,4). \end{cases}$$

Les fonctions x_i^p, y_i^p, ξ_k^p, $\eta_k^p (p>0)$ seront des fonctions périodiques des w, développées d'autre part suivant les puissances des quantités

$$\rho_k\, e^{\omega_k\sqrt{-1}}, \quad \rho_k\, e^{-\omega_k\sqrt{-1}}.$$

Elles dépendent en outre des x_i^0 d'une manière quelconque. Enfin les $y_i^0 - w_i$, les ξ_k^0 et les η_k^0 seront indépendants des w. Quand on annulera les ρ_k, les fonctions $y_i^0 - w_i$, ξ_k^0 et η_k^0 se réduiront à zéro.

Cela étant, le problème dont il s'agit peut être remplacé par le suivant : déterminer les séries (16) de telle façon que d'une part la fonction F, quand on y a substitué les séries (16), se réduise à une fonction φ ne dépendant que des x_i^0 et ρ_k et de sorte que d'autre part la quantité

$$\sum_i x_i\, dy_i + \sum_k \xi_k\, d\eta_k - \sum_i x_i^0\, dw_i + \sum_k \rho_k^2\, d\omega_k$$

soit une différentielle exacte. Au lieu des variables x_i, y_i, ξ_k, η_k, on peut introduire alors les x_i^0, ρ_k, w_i, ω_k. La forme canonique subsiste. Puisque F ne dépend que des x_i^0 et des ρ_k, ces quantités seront constantes, tandis que les w_i et les ω_k seront des fonctions linéaires du temps, dans lesquelles les coefficients de t sont développables suivant les puissances de μ et des ρ_k^2. — Poincaré démontre que les séries (16) peuvent être déterminées d'après ces principes.

Une dernière fois, Poincaré est revenu sur le problème fondamental d'intégrer sous forme trigonométrique les équations du mouvement des planètes [464, chap. X] (1). Cette fois, il part des séries mixtes que donne l'application de la méthode classique de Lagrange. Il en dérive une transformation canonique, laquelle conduit aux équations complètes des inégalités séculaires, jamais déduites auparavant.

Poincaré part des équations (2). Il y satisfait à l'aide de développements de

(1) [464, chap. X], *Leçons de mécanique céleste*, t. 1, p. 267.

la forme

$$x_i = x_i^0 + \delta x_i, \qquad y_i = w_i + y_i^0 + \delta y_i, \qquad \xi_k = \xi_k^0 + \delta\xi_k, \qquad \eta_k = \eta_k^0 + \delta\eta_k.$$

Les δx_i, δy_i, $\delta\xi_k$, $\delta\eta_k$ sont développables suivant les puissances de μ, de t, des ξ_k^0, des η_k^0 et suivant les cosinus et les sinus de multiples des arguments $w_i = n_i^0 t$, c'est-à-dire que ces quantités peuvent être mises sous la forme

$$(17) \qquad \sum \mu^\alpha \mathrm{A} \mathrm{M}_0 t^m \cos\Big(\sum_i p_i w_i + h\Big).$$

Les p_i sont des entiers; A et n_i^0 ne dépendent que des constantes x_i^0; les h dépendent seulement des y_i^0; M_0 est un monome entier par rapport aux ξ_k^0 et aux η_k^0.

Les δx_i, δy_i, $\delta\xi_k$, $\delta\eta_k$ s'annulent pour $\mu = 0$; elles s'annulent également pour $t = 0$, de sorte que les constantes x_i^0, y_i^0, ξ_k^0, η_k^0 sont les valeurs initiales des inconnus x_i, y_i, ξ_k, η_k pour $t = 0$.

Dans les développements (17), Poincaré regarde les w_i comme des variables indépendantes. Il y pose aussi $t = 0$, de sorte que les termes périodiques sont seuls conservés dans les perturbations δx_i, δy_i, $\delta\xi_k$, $\delta\eta_k$. En appelant Δx_i, Δy_i, $\Delta\xi_k$, $\Delta\eta_k$ ce que deviennent alors ces perturbations périodiques. Poincaré forme les équations

$$(18) \qquad x_i = x_i^0 + \Delta x_i, \qquad y_i = w_i + y_i^0 + \Delta y_i, \qquad \xi_k = \xi_k^0 + \Delta\xi_k, \qquad \eta_k = \eta_k^0 + \Delta\eta_k$$

dans lesquelles les x_i^0, w_i, ξ_k^0, η_k^0 sont des variables nouvelles, tandis que les y_i^0 sont encore regardés comme des paramètres constants.

Évidemment, en introduisant dans F les fonctions (18) F ne dépendra pas des w_i en vertu de l'intégrale des forces vives.

Toutefois, Poincaré ne conserve pas les x_i^0 comme variables. En partant des développements (17), il forme certaines fonctions W_i indépendantes des w_i, développables suivant les puissances de μ, des ξ_k^0 et des η_k^0, dépendant d'une manière quelconque des x_i^0 et se réduisant à x_i^0 pour $\mu = 0$. Il détermine ces fonctions de sorte que, après avoir introduit dans (18) les x_i^0 exprimés comme fonctions des W_i, des ξ_k^0 et des η_k^0, l'expression

$$\sum_i x_i\,dy_i + \sum_k \xi_k\,d\eta_k - \sum_i \mathrm{W}_i\,dw_i - \sum_k \xi_k^0\,d\eta_k^0$$

devienne une différentielle exacte. La transformation est alors canonique. Comme F ne dépend pas des w_i, les W_i sont des constantes, et les équations différentielles deviennent

$$(19)\qquad \left\{ \begin{aligned} & W_i = \text{const.}, \\ & \frac{d\xi_k^0}{dt} = \frac{dF}{d\eta_k^0}, \qquad \frac{d\eta_k^0}{dt} = -\frac{dF}{d\xi_k^0}, \\ & \frac{dw_i}{dt} = -\frac{dF}{dW_i}. \end{aligned} \right.$$

Les équations de la seconde ligne sont les équations complètes des inégalités séculaires. Poincaré montre qu'on peut y satisfaire en développant les ξ_k^0 et η_k^0 suivant les puissances des quantités

$$(20)\qquad \rho_k\, e^{+(\sigma_k t+\varepsilon_k)\sqrt{-1}},$$

les ρ_k et ε_k étant des constantes d'intégration. Les σ_k sont développables suivant les puissance de μ et des ρ_k^2 et sont divisibles par μ. D'ailleurs l'un des σ_k est identiquement nul en vertu des intégrales des aires.

Ayant déterminé ces développements pour ξ_k^0 et η_k^0, on obtient les w_i par les équations de la troisième ligne des formules (19). En désignant par n_i certaines quantités constantes, développées suivant les puissances de μ et des ρ_k^2, les $w_i - n_i t$ seront développés suivant les puissances des quantités (20).

Ainsi se trouvent déterminés les x_i^0, w_i, ξ_k^0 et η_k^0 qui entrent dans les formules définitives (18).

7. Séries de M. Bohlin.

L'application de la méthode de M. Lindstedt aux équations (1), où F_0 dépend de tous les $x_1, \ldots, x_n$, suppose qu'il n'existe pas de relation à coefficients entiers entre les quantités $n_i^0 = -\frac{dF_0}{dx_i^0}$. En effet, dans les intégrations successives auxquelles conduit cette méthode, on voit apparaître des diviseurs de la forme $\sum m_i n_i^0$, les m_i étant des nombres entiers. Même dans le cas où un diviseur est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, les séries de M. Lindstedt deviennent illusoires, puisque pour certaines suites de termes (termes de même *classe*) les dénominateurs sont du même ordre de grandeur que les numérateurs correspondants.

On ne diminue pas la généralité en supposant que le petit diviseur soit n_1^0, de sorte que $m_i = 1$, $m_2 = 0$, $\ldots$, $m_n = 0$.

Pour éviter les difficultés des petits diviseurs, une nouvelle méthode d'intégration fut imaginée par M. Bohlin [1]. Il part de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi,

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \ldots, \frac{dS}{dy_n}; y_1, \ldots, y_n\right) = \text{const.}$$

Il s'agit d'intégrer cette équation en développant la fonction inconnue S suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. D'ailleurs les dérivées de S doivent être périodiques par rapport aux y. M. Bohlin ne traite que le cas ordinaire, où le développement de y_1 renferme un terme proportionnel au temps. Il exclut le cas de la libration où la fonction y_1 contient seulement des termes périodiques.

Immédiatement après, et d'une manière indépendante, la nouvelle méthode d'intégration fut découverte aussi par Poincaré [183; 279; chap. XIX, XX] [2]. Celui-ci a traité aussi le cas si important de la libration.

Dans le cas ordinaire, les fonctions S_k qui apparaissent dans le développement

$$S = S_0 + \sqrt{\mu}\, S_1 + (\sqrt{\mu})^2 S_2 + (\sqrt{\mu})^3 S_3 + \ldots$$

sont finies pour toutes les valeurs réelles de $y_1, \ldots, y_n$. L'application de la méthode d'intégration de Jacobi est alors facile. La forme de la solution devient

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\mu})^k x_i^k, \qquad y_i = \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\mu})^k y_i^k.$$

Pour $k > 0$, les x_i^k et les y_i^k sont des fonctions périodiques de n arguments $w_1, \ldots, w_n$ linéaires par rapport au temps. Les x_i^0 sont des constantes; les $y_i^0 - w_i$ sont des fonctions périodiques de l'argument w_1. Le coefficient de t dans cet argument est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$.

Dans le cas de la libration, les difficultés sont plus graves. Alors, la fonction S_1 devient imaginaire à moins que l'argument y_1 soit compris entre certaines limites. Quand ces limites sont atteintes, les fonctions $S_3, S_4, \ldots$ peuvent devenir infinies. La méthode d'intégration de Jacobi doit donc être abandonnée.

Au moyen d'une fonction S satisfaisant à l'équation de Jacobi à des termes de l'ordre $(\sqrt{\mu})^3$ près, Poincaré forme une transformation canonique par

---

(1) *Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handl.* Bd 14, Afd. I, n° 5, 1888.

(2) [183] : *Œuvres* t. VII, p. 262-479; [279, chap. XIX, XX], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 2, p. 315 et 399.

laquelle les équations différentielles (1) sont ramenées à un autre système canonique d'une forme analogue mais plus spéciale. La solution cherchée de ce nouveau système peut être obtenue par la méthode de M. Lindstedt.

Dans ce cas de la libration, la forme de la solution des équations (1) reste à peu près la même que dans le cas ordinaire. Seulement $y_1^0, y_2^0 - w_2, \ldots, y_n^0 - w_n$ seront des fonctions périodiques de l'argument w_1, dont le coefficient de t est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$.

Poincaré apporte aussi la plus grande attention au cas limite par lequel se fait le passage du cas ordinaire au cas de la libration. Ce cas limite correspond à une certaine relation entre les constantes d'intégration. Les divers termes du développement de la fonction S, qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles de Jacobi, sont alors finis pour toutes les valeurs des $y_1, \ldots, y_n$. Ils sont périodiques de période 4π par rapport à y_1 et de période 2π par rapport aux $y_2, \ldots, y_n$.

L'application de la méthode d'intégration de Jacobi au cas limite montre que les variables x_1, x_k, y_1, $y_k - w_k$ sont alors développables en séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et des cosinus et sinus des multiples de $w_2, w_3, \ldots, w_n$ et dont les coefficients sont des fonctions uniformes de w_1; ces fonctions uniformes sont développables suivant les puissances de $e^{\alpha w_1}$, si w_1 est négatif et suffisamment grand, et suivant celles de $e^{-\alpha w_1}$, si w_1 est suffisamment grand (α étant une constante). On voit ainsi apparaître les puissances d'une exponentielle comme dans les solutions asymptotiques. Et en effet, pour $n = 2$, les séries dont il s'agit coïncident avec les développements semi-convergents des solutions asymptotiques suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. En ordonnant suivant les puissances de l'exponentielle seule (en réunissant en un seul tous les termes qui contiennent une même puissance de l'exponentielle mais des puissances différentes de $\sqrt{\mu}$), elles deviennent convergentes.

Pour $n > 2$, les solutions formelles dont il s'agit doivent être considérées comme une généralisation des solutions asymptotiques. Elles se rapprochent pour $t = +\infty$ ou pour $t = -\infty$ de certaines solutions renfermant $n - 1$ arguments qui forment une généralisation des solutions périodiques instables.

Poincaré a essayé d'étendre la méthode de M. Bohlin au cas d'exception où F_0 ne dépend pas de toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$ [279, chap. XXI] (1). Le pro-

(1) [279, chap. XXI], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 2, p. 422.

blème général du mouvement des planètes rentre dans ce cas. Poincaré forme alors aussi la fonction S de Jacobi, en la développant suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et suivant les multiples des variables $y_1, \ldots, y_n$. Toutefois, dans ce cas, les équations auxquelles conduit la méthode d'intégration de Jacobi ne peuvent plus se résoudre par le procédé employé auparavant, c'est-à-dire par le théorème de Cauchy sur le développement des fonctions implicites. Les relations entre les variables x_i, y_i et les arguments w_i sont beaucoup plus compliquées que dans le cas où F dépend de tous les x_i. Les résultats obtenus par Poincaré dans le cas important d'exception dont il s'agit sont considérés par lui-même comme bien incomplets, de sorte que de nouvelles études deviendront nécessaires.

Après quelques années, Poincaré est revenu sur la méthode de M. Bohlin en supposant encore que F_0 dépend de toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$ [280, chap. XXV] (1).

Il reprend d'abord le cas déjà traité où il n'y a qu'une seule relation linéaire à coefficients entiers entre les $n_i^0 = -\frac{dF_0}{dx_i^0}$. Rappelons que les x_i et les $y_i - w_i$ sont alors développables en séries trigonométriques de $n-1$ arguments $w_2, \ldots, w_n$. Quant aux coefficients de ces séries, Poincaré les avait développées auparavant en séries trigonométriques d'un argument réel w_1. Maintenant, il montre que, pour les solutions voisines du cas limite, ces coefficients peuvent se développer suivant les puissances de deux quantités $A e^{\alpha t}$ et $A' e^{-\alpha t}$, où α est réel et développable suivant les puissances du produit (AA'). De cette manière, c'est la période imaginaire des coefficients qui vient en apparence et non plus la période réelle comme auparavant.

Ensuite, Poincaré généralise la méthode de M. Bohlin en supposant qu'il y a k relations à coefficients entiers entre les n_i^0. Il montre que les x_i et y_i sont alors développables suivant les multiples de $n-k$ arguments rapidement variables $w_{k+1}, \ldots, w_n$ et suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et de $2k$ quantités

$$A_1 e^{\alpha_1 t}, \quad A'_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad \ldots, \quad A_k e^{\alpha_k t}, \quad A'_k e^{-\alpha_k t}$$

conjuguées deux à deux. Les A et A' sont des constantes arbitraires d'intégration; les exposants α qui sont de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, peuvent se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et des $(A_1 A'_1), \ldots, (A_k A'_k)$. Dans le cas particulier où $k = n-1$, on retrouve les solutions asymptotiques en annulant tous les A ou tous les A'.

(1) [280, chap. XXV], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. **3**, p. 88.

On voit ainsi que les solutions générales qui existent au voisinage d'une solution périodique (véritable ou généralisée avec plusieurs arguments) ne sont autre chose que des séries de M. Bohlin.

8. Divergence des séries de MM. Lindstedt et Bohlin.

On pourrait être tenté de croire que les développements trigonométriques généraux dont nous avons parlé donnent la solution rigoureuse et complète des équations de la Dynamique qui peuvent se mettre sous la forme (1). Poincaré a brisé ces espérances et montré que les séries en question ne peuvent pas être uniformément convergentes par rapport aux quantités arbitraires qu'elles renferment [183; 279, chap. XIII, XIX] (1).

L'étude de la convergence des séries (15) se subdivise. Il faut d'abord examiner la convergence des développements pour x_i^k et y_i^k et ensuite la convergence des séries totales pour x_i et y_i.

Les quantités x_i^k et y_i^k ont la forme de séries trigonométriques des arguments $w_1, \ldots, w_n$. Certains coefficients de ces séries sont agrandis en vertu des diviseurs $\sum m_i n_i^0$.

Dans l'étude de la convergence de ces séries, Poincaré s'appuie sur un théorème démontré auparavant par lui et d'après lequel la somme d'une série trigonométrique ne peut constamment rester inférieure à la moitié d'un quelconque de ses coefficients [31; 93] (2).

Ensuite, étant données certaines valeurs de $n_1^0, \ldots, n_n^0$, il montre d'une part qu'on peut toujours trouver, dans tout voisinage de ces valeurs, d'autres valeurs $n_2^0, \ldots, n_n^0$ telles que les valeurs absolues des coefficients dans les développements de x_i^k et y_i^k ne soient pas limitées. Alors, ces développements ne sont pas uniformément convergents pour toutes les valeurs réelles du temps. Mais Poincaré démontre aussi d'autre part que, dans tout voisinage de ces mêmes valeurs $n_1^0, \ldots, n_n^0$, il existe d'autres valeurs $n_1^0, \ldots, n_n^0$ pour lesquelles les séries convergent uniformément par rapport au temps.

Cela étant, les séries donnant x_i^k et y_i^k ne peuvent pas converger uniformé-

(1) [183] *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [279, chap. XIII], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 2, p. 95; chap. XIX, t. 2, p. 315.

(2) [31] : *Œuvres*, t. IV, p. 585-587; [93] : *Œuvres*, t. IV, p. 591-598.

ment pour toutes les valeurs du temps et pour toutes les valeurs des x_i^0 dans un domaine aussi petit que l'on veut.

Pour éviter cette difficulté, Poincaré fait la remarque qu'on peut grouper les termes du développement de la fonction caractéristique F des équations (1) suivant les puissances de μ, de sorte que les développements pour x_i^k et y_i^k ne renferment qu'un nombre limité de termes. Il suffit alors d'examiner la convergence des développements totaux (15) pour x_i et y_i.

Poincaré démontre d'abord que ces séries ne peuvent pas converger uniformément pour toutes les valeurs réelles des ϖ_i, pour les valeurs suffisamment petites de μ et pour les valeurs des x_i^0 comprises dans certains intervalles aussi petits que l'on veut. En effet, s'il y avait convergence, on pourrait résoudre les équations (15) par rapport aux x_i^0 et ϖ_i. On trouverait ainsi n intégrales uniformes, périodiques par rapport aux y_i. Mais il y a plus. On pourrait choisir μ et les x_i^0 de sorte que la condition (15) soit périodique. En dérivant par rapport aux x_i^0 et par rapport aux paramètres additifs qui se trouvent dans les ϖ_i, on obtiendrait un système complet de solutions des équations aux variations. Ces solutions seraient ou bien périodiques ou bien linéaires par rapport à t avec des coefficients périodiques. Ainsi tous les exposants caractéristiques de la solution périodique (15) seraient nuls. En général, il n'en est pas ainsi. Donc les séries (15) ne convergent pas uniformément par rapport aux quantités μ, ϖ_i et x_i^0.

Enfin, Poincaré se demande si les séries (15) peuvent converger uniformément pour toutes les valeurs réelles des ϖ_i et pour les valeurs suffisamment petites de μ, les x_i^0 étant choisis convenablement. Les raisonnements qu'il fait ne lui permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Toutefois, pour certaines raisons, Poincaré regarde cette convergence comme fort invraisemblable.

D'une manière analogue, Poincaré démontre que les séries de M. Bohlin sont divergentes au même titre que celles de M. Lindstedt. En effet, si les séries étaient convergentes, on obtiendrait, en résolvant les formules de Jacobi, n intégrales uniformes par rapport aux x et y et périodiques par rapport aux y, ce qui est impossible.

Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi les séries dont il s'agit sont divergentes. Pour les séries de M. Lindstedt, la divergence dépend des petits diviseurs s'introduisant par les intégrations ; pour les séries de M. Bohlin au contraire, elle résulte des grands multiplicateurs qui apparaissent en vertu des différentiations successives.

Toutefois, la divergence n'empêche pas que ces séries ne puissent rendre des services considérables d'une part dans l'étude qualitative des orbites et d'autre part quand il s'agit du calcul pratique des perturbations. En général, les astronomes ne se sont pas occupés de la question de la convergence; ils ont formé des séries satisfaisant formellement aux équations du mouvement; ils ont constaté que les premiers termes de ces séries diminuent plus au moins rapidement et que la théorie est en général d'accord avec les observations.

C'est Poincaré qui le premier a expliqué d'une manière satisfaisante cet accord. Il a montré [279, chap. VIII] (1) que les séries qui satisfont formellement à un système d'équations différentielles sont semi-convergentes et qu'elles représentent asymptotiquement la solution cherchée pour un certain temps limité. Pendant ce temps, les séries de la Mécanique céleste jouissent donc des mêmes propriétés que la série de Stirling. Appelons par exemple X_i^p et Y_i^p les sommes qu'on obtient en négligeant dans les développements (15) et dans leurs arguments w_i tous les termes en μ^{p+1}, μ^{p+2}, ... On aura

$$\lim_{\mu=0}\left|\frac{x_i - X_i^p}{\mu^p}\right| = 0, \qquad \lim_{\mu=0}\left|\frac{y_i - Y_i^p}{\mu^p}\right| = 0.$$

Puisque μ est donné, l'approximation est limitée. D'ailleurs, l'approximation diminue quand l'intervalle du temps augmente. Toutefois, étant données les petites valeurs des masses des planètes, les développements nouveaux de la Mécanique céleste représenteront probablement le mouvement des corps célestes avec une très grande approximation pendant des intervalles de temps extrêmement longs.

9. Invariants intégraux.

Pour arriver à certains résultats délicats, dans ses recherches sur les équations de la Dynamique. Poincaré s'est appuyé souvent sur une notion nouvelle créée par lui, celle des invariants intégraux [183; 280, chap. XXII, XXIII] (2).

(1) [279, chap. VIII], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 2, p. 1.

(2) [183], *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [280, chap. XXII, XXIII], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 3, p. 1 et t. 3, p. 40.

Rappelons par quelques mots leur définition. Soit

$$(21) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

un système d'équations différentielles. Soit $x_1^0, \ldots, x_n^0$ un point quelconque d'un domaine $D(0)$ à k dimensions. Les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$ pour $t = 0$ définissent une certaine solution des équations (21). Soit dans cette solution $x_1, \ldots, x_n$ les valeurs des variables pour la valeur t de la variable indépendante. Quand le point $x_1^0, \ldots, x_n^0$ parcourt le domaine $D(0)$, le point $x_1, \ldots, x_n$ parcourt un domaine $D(t)$ appelé le conséquent de $D(0)$. Considérons une intégrale

$$I = \int F(x_1, \ldots, x_n; dx_1, \ldots, dx_n),$$

F étant une fonction homogène de degré k par rapport aux différentielles. Si la valeur de I étendue sur le domaine $D(t)$ est indépendante de t, Poincaré dit que I est un invariant intégral d'ordre k du système (21).

Comme exemple, citons le volume constant d'une partie déterminée d'un fluide incompressible dont le mouvement est permanent.

Soit d'une manière plus générale M *le dernier multiplicateur* du système (21). Poincaré démontre que

$$I = \int M\, dx_1 \ldots dx_n,$$

est un invariant intégral.

Dans le cas des équations de la Dynamique, on peut former un certain nombre d'invariants intégraux très importants. Soit x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ les variables conjuguées. En partant des propriétés des équations aux variations, Poincaré démontre que

$$(22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \displaystyle\int \sum_i dx_i\, dy_i, \\ I_2 = \displaystyle\int \sum_{i,k} dx_i\, dy_i\, dx_k\, dy_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ I_n = \displaystyle\int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2 \ldots dx_n\, dy_n \end{array} \right.$$

sont des invariants intégraux. Le dernier peut être obtenu aussi par le dernier multiplicateur qui est ici égal à l'unité. Dans ses recherches sur les solutions périodiques du deuxième genre, sur les solutions doublement asymptotiques et sur la stabilité du mouvement, Poincaré a tiré un grand parti des invariants I_1 et I_n.

Soit x_i et y_i les projections des rayons vecteurs et des quantités de mouvement d'un système de points matériels. En supposant que la fonction des forces est homogène de degré p par rapport aux x, Poincaré démontre que l'expression

$$I = \int \sum_i (2x_i\, dy_i - p y_i\, dx_i)$$

est une fonction linéaire du temps.

En partant de ce théorème, Poincaré déduit certaines formules de vérification [149; 280, chap. XXIV] (¹) auxquelles doivent satisfaire les séries générales qui satisfont formellement aux équations différentielles de la Mécanique céleste, séries dont nous avons parlé dans les trois numéros précédents. Ces procédés de contrôle ont une grande importance pratique, vu les calculs longs et difficiles qui sont nécessaires pour déduire les séries en question.

10. Solutions périodiques du deuxième genre.

Les solutions périodiques dépendent en général d'un certain nombre de paramètres. Dans plusieurs problèmes de la Mécanique céleste, la quantité μ, qui est de l'ordre des forces perturbantes, est un de ces paramètres. Rappelons que dans le problème des trois corps les solutions périodiques de la première, de la seconde et de la troisième sorte renferment encore un paramètre essentiel.

Cela étant, Poincaré considère un système d'équations différentielles ayant une solution périodique P qui dépend d'un paramètre λ et dont la période est T. Désignons par P_0 et T_0 la solution périodique et sa période pour $\lambda = 0$. Poincaré se demande si les équations admettent d'autres solutions périodiques dont la période, pour de petites valeurs de λ, est à peu près un multiple pT_0 de T_0, et lesquelles se confondent avec la solution périodique P_0 pour $\lambda = 0$. Ces solutions, si elles existent, s'appelleront *solutions périodiques du deuxième genre* [183; 280, chap. XXVIII] (²).

(¹) [149], *Œuvres*, t. VII, p. 555-557; [280, chap. XXIV], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 3, p. 40.

(²) [183], *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [280, chap. XXVIII], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 3, p. 201.

Pour qu'une solution au voisinage de P_0 ait la période $p(T_0+\tau)$, il faut et il suffit que τ et les valeurs initiales des variables satisfassent à certaines équations de condition. En formant ces équations et en partant aussi de l'équation qui donne les exposants caractéristiques de P_0 considérée comme une solution périodique avec la période pT_0, Poincaré arrive au résultat suivant : pour qu'il existe des solutions périodiques du deuxième genre, il faut que pour $\lambda = 0$ l'un des exposants caractéristiques de P_0, qui n'est pas identiquement nul, soit un multiple de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{pT_0}$ $\left(\text{soit } \alpha_1 = \frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT_0},\ k \text{ et } p \text{ étant des entiers}\right)$.

Cette condition n'est pas suffisante en général, puisque les nouvelles solutions peuvent ne pas être réelles. Mais Poincaré démontre que la condition énoncée est aussi suffisante pour l'existence de solutions périodiques du deuxième genre, quand il s'agit des équations de la Dynamique.

Pour la démonstration, Poincaré part de l'invariant intégral I_1 des formules (22). En désignant par ξ_i et η_i les valeurs de x_i et y_i pour $t=0$ et par X_i et Y_i les valeurs de x_i et y_i pour $t = pT$ on aura

$$\iint \sum_i (dX_i\, dY_i - d\xi_i\, d\eta_i) = 0,$$

l'intégrale double étant étendue à une aire quelconque A. En remplaçant l'intégrale double par une intégrale simple étendue au contour de l'aire A, Poincaré trouve que l'expression

$$dS_p = \sum_i [(X_i - \xi_i)\, d(Y_i + \eta_i) - (Y_i - \eta_i)\, d(X_i + \xi_i)]$$

est une différentielle exacte.

S_p est une fonction holomorphe des ξ_i, des η_i et de T au voisinage des valeurs ξ_i^0, η_i^0, T_0, en désignant par ξ_i^0, η_i^0, les valeurs initiales qui correspondent à la solution périodique P_0. Poincaré démontre que S_p est aussi holomorphe par rapport aux variables $X_i + \xi_i$, $Y_i + \eta_i$ et T.

On peut regarder T comme le paramètre qui caractérise la solution périodique. Les conditions de périodicité qui s'écrivent

$$X_i - \xi_i = 0, \qquad Y_i - \eta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

prennent la forme

$$\frac{dS_p}{d(X_i + \xi_i)} = 0, \qquad \frac{dS_p}{d(Y_i + \eta_i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ou bien

$$\frac{dS_p}{d\xi_i} = 0, \qquad \frac{dS_p}{d\eta_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

Ces équations sont satisfaites par les valeurs $\xi_i = \bar{\xi}_i$, $\eta_i = \bar{\eta}_i$ (fonctions de T) qui correspondent à la solution périodique P de période T. Poincaré pose $\xi_i = \bar{\xi}_i + \xi'_i$, $\eta_i = \bar{\eta}_i + \eta'_i$. S_p devient une fonction des ξ'_i et des η'_i qui est stationnaire quand les ξ'_i et les η'_i s'annulent, T étant quelconque. Les termes du second ordre par rapport aux ξ'_i et η'_i peuvent se mettre sous la forme d'une somme de carrés de fonctions linéaires et homogènes par rapport aux ξ'_i et η'_i. En développant les formules, Poincaré démontre que les coefficients de deux de ces carrés, ayant le même signe, renferment le facteur $\sin \frac{\alpha_1 p T}{\sqrt{-1}}$, lequel s'annule en changeant son signe quand T passe par T_0. Les coefficients des autres carrés ne s'annulent pas alors.

En partant de cette propriété de la fonction S_p, Poincaré démontre que les équations (24) resp. (23) possèdent encore des solutions *réelles* différentes de $\xi_i = \bar{\xi}_i$, $\eta_i = \bar{\eta}_i$ et qui coïncident avec cette solution pour $T = T_0$. Ces nouvelles solutions donnent les valeurs initiales des solutions périodiques du deuxième genre.

Les résultats subsistent aussi dans le cas où la fonction caractéristique F des équations différentielles est périodique par rapport aux y_i de période 2π et si, dans la solution périodique, les y_i augmentent de $2 m_i \pi$ au bout de la période T (m_i étant entier). On n'aura qu'à remplacer Y_i par $Y_i - 2 m_i p \pi$ dans les raisonnements.

Poincaré a fait une étude plus détaillée des solutions périodiques du deuxième genre dans le cas relativement simple où il n'y a que deux degrés de liberté (renfermant comme cas spécial le problème restreint des trois corps). Il montre alors comment on peut former effectivement ces solutions [280, chap. XXX] (1). Les développements, auxquels il arrive, procèdent suivant les puissances de $\sqrt{\lambda}$. Quand $p > 4$, on aura deux solutions périodiques du deuxième genre essentiellement différentes, qui se confondent pour $\lambda = 0$ avec la solution périodique du premier genre, et qui sont réelles toutes les deux ou bien pour $\lambda > 0$ ou bien pour $\lambda < 0$. L'une de ces solutions périodiques du deuxième genre est stable, l'autre instable. Quand $p = 2$, 3 ou 4, les choses se compliquent et plusieurs hypothèses sont possibles.

(1) [280, chap. XXX], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 3, p. 294.

Dans le cas des équations (1), on aura des solutions périodiques du premier genre dans lesquelles les variables y_i augmentent de multiples de 2π au bout de la période. Les exposants caractéristiques sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et sont divisibles par $\sqrt{\mu}$. Pour les solutions périodiques du deuxième genre qui y correspondent, le nombre p est donc nécessairement considérable et la période très longue.

Supposons deux degrés de liberté. Admettons que pour $\mu = \mu_0$ l'un des exposants caractéristiques de la solution périodique du premier genre soit un multiple de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p T_0}$. En admettant que μ_0 ne soit pas trop grand, Poincaré démontre que c'est pour $\mu > \mu_0$ qu'existent alors les deux solutions périodiques du deuxième genre.

Le problème restreint des trois corps rentre dans ce cas, et alors ce sont les solutions périodiques de la deuxième sorte qu'il faut regarder comme du premier genre.

Mais le problème restreint possède aussi des solutions périodiques de la première sorte. Si la masse μ est petite, les deux exposants caractéristiques qui ne sont pas identiquement nuls sont voisins de $\pm \frac{\pi\sqrt{-1}}{T}$, T étant la période. On peut regarder μ comme constante, tandis que la constante C de l'intégrale de Jacobi joue le rôle du paramètre λ. En admettant que la masse de la planète perturbante (Jupiter) soit $\frac{1}{10}$, la masse du Soleil étant choisie comme unité, G. H. Darwin [1] a calculé par quadratures mécaniques les solutions périodiques de la première sorte pour diverses valeurs de C. Pour une certaine valeur C_0 (correspondant à un moyen mouvement de l'astéroïde un peu plus grand que trois fois celui de Jupiter), Darwin trouve que l'exposant caractéristique passe par la valeur $\frac{\pi\sqrt{-1}}{T_0}$ (T_0 étant la période qui correspond à C_0). Pour les valeurs de C un peu plus grandes que C_0 ($T < T_0$), l'exposant caractéristique est purement imaginaire, et l'orbite périodique stable; au contraire, quand C est un peu plus petit que C_0, l'exposant caractéristique est complexe, et l'orbite périodique est instable,

Poincaré a repris la question [**280**, n^{os} **381-384**] [2] par la voie analytique en négligeant, pour abréger, tous les termes de courte période dans le développe-

---

(1) *Acta Math.*, t. 21, 1897.

(2) [280, n^{os} 381-384], *Les méthodes de la mécanique céleste*, t. 3, p. 352-361.

ment de la fonction perturbatrice. Les équations du mouvement peuvent alors être complétement intégrées. Poincaré arrive aux conclusions suivantes : pour deux valeurs C_0 et C_1 ($C_0 > C_1$), correspondant à des moyens mouvements un peu plus grands et un peu plus petits que le triple du moyen mouvement de Jupiter, la solution périodique de la première sorte change sa stabilité. Si C est un peu plus grand que C_0, la solution périodique de la première sorte (considérée comme du premier genre) est stable. Quand C passe par C_0, cette solution devient instable. En même temps, deux solutions périodiques stables et du deuxième genre apparaissent qui n'existaient pas pour $C > C_0$. Elles coïncident pour $C = C_0$ avec la solution périodique de la première sorte. La période de ces deux solutions (qui ne sont pas essentiellement différentes l'une de l'autre) est d'abord deux fois celle de la solution périodique du premier genre. Entre C_0 et C_1, la solution périodique de la première sorte reste instable. Quand C passe par C_1, cette solution redevient stable. En même temps apparaissent deux solutions périodiques (pas essentiellement distinctes) instables et du deuxième genre, coïncidant pour $C = C_1$ avec la solution périodique de la première sorte et n'existant que pour $C < C_1$. Leur période est d'abord deux fois celle de la solution périodique de la première sorte. Poincaré fait la remarque que les solutions périodiques du deuxième genre qui apparaissent ainsi quand C passe par C_0 et C_1 ne sont autre chose que les solutions appelées auparavant solutions périodiques de la seconde sorte.

Poincaré n'a pas étudié d'une manière générale la stabilité des solutions périodiques de la première sorte dans le problème des trois corps. Il me semble qu'une telle étude pourrait nous donner des renseignements importants sur les limites entre lesquelles peuvent exister des orbites générales à peu près circulaires. Peut-être serait-il possible d'expliquer ainsi les lacunes fameuses dans l'anneau des astéroïdes.

11. Nouvelles généralités sur les solutions périodiques.

Quand il s'agit de démontrer l'existence de certaines solutions dans un problème dynamique, il est souvent utile d'appliquer les principes du calcul des variations. En effet, à chaque système dynamique correspond une intégrale, nommée *l'action maupertuisienne*, dont la variation est nulle quand l'intégration s'effectue le long d'une orbite du système. Pour que l'action soit effectivement minima en suivant une orbite S entre deux points M_0 et M_1, il faut et il suffit qu'il n'y ait aucun *foyer* de M_0 entre M_0 et M_1. Rappelons que le foyer de M_0 est un point M'_0 sur l'orbite S tel qu'il y ait des orbites qui se rapprochent de M_0 et de M'_0 à des distances infiniment petites du second ordre.

Poincaré applique la théorie des foyers aux solutions périodiques des équations de la Dynamique ayant deux degrés de liberté [280, chap. XXIX] (1). Il montre que chaque point d'une orbite périodique stable possède un foyer. Au contraire, les orbites périodiques instables peuvent se répartir en deux *catégories*. Sur une orbite périodique de la première catégorie aucun point n'a de foyer. Une orbite périodique de la seconde catégorie se partage en un nombre pair d'arcs. Chacun des points de l'un des arcs aura son premier foyer sur l'arc suivant.

Cela étant, Poincaré démontre la proposition : *Pour qu'une courbe fermée corresponde à une action moindre que toutes les courbes fermées infiniment voisines, il faut et il suffit que cette courbe fermée corresponde à une solution périodique instable de la première catégorie.*

En partant du principe de moindre action, Poincaré démontre encore une fois l'existence des solutions périodiques du deuxième genre, en supposant qu'il y a deux degrés de liberté et qu'il s'agit du mouvement *absolu* [280, nos 371-376] (1). Soit P une orbite périodique stable renfermant un paramètre λ. Soit T la période et admettons que pour $\lambda = 0$ l'exposant caractéristique α ait la valeur $\alpha = \frac{2k\pi\sqrt{-1}}{p\mathrm{T}}$, k et p étant des entiers ($p > 4$). Poincaré démontre d'abord que, sur l'orbite périodique qui correspond à $\lambda = 0$, chaque point coïncide avec son $2k^{\text{ième}}$ foyer et qu'on arrive à ce foyer après avoir fait p fois le tour de l'orbite P. Puis il démontre que, λ étant à peu près zéro et situé d'un certain côté de zéro, il est possible de dresser par chaque point M de l'orbite périodique deux autres orbites qui se recoupent en ce même point après avoir fait p fois le tour de l'orbite P et en la coupant $2k$ fois. A chaque point de P correspondent ainsi deux *boucles*. En faisant la même construction pour tous les points M de P, on obtiendra deux séries de boucles. L'action calculée le long d'une de ces boucles variera avec la position du point M; pour chaque série elle aura au moins un maximum et un minimum. Poincaré démontre que, si l'action est ainsi maxima ou minima, les deux tangentes de la boucle au

(1) [280], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, chap. XXIX, t. 3, p. 249; nos 371-376, t. 3, p. 331-343.

point M coïncident de sorte que la boucle est une solution périodique. On obtiendra ainsi $4k$ solutions périodiques mais dont seulement deux sont essentiellement différentes. L'une correspond au maximum, l'autre au minimum de l'action. Les solutions ainsi trouvées sont évidemment les solutions périodiques du deuxième genre.

La démonstration ne s'étend au cas du mouvement *relatif* que si l'action reste positive tout le long de P, ce qui n'arrive pas toujours.

Poincaré a consacré [361] (¹) ses derniers efforts à la démonstration d'un théorème de Géométrie qui lui permettrait d'étendre considérablement nos connaissances sur les solutions périodiques des problèmes de la Dynamique ayant deux degrés de liberté. Le théorème dont il s'agit fut démontré quelques mois après la mort de Poincaré par M. G. D. Birkhoff (²). En voici l'énoncé :

Regardons une couronne limitée par deux circonférences concentriques. Supposons qu'une transformation ponctuelle biunivoque transforme la couronne en elle-même, de sorte que les deux circonférences tournent en sens contraires. Admettons de plus que la transformation conserve les aires ou, plus généralement, qu'elle admet un invariant intégral positif, c'est-à-dire qu'il existe une fonction positive $f(x, y)$ telle qu'on ait

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint f(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y},$$

les deux intégrales étant étendues à une aire quelconque et à sa transformée. Alors, il existera toujours à l'intérieur de la couronne deux points qui ne seront pas altérés par la transformation.

Poincaré applique [361] (¹) ce théorème, de l'exactitude duquel il était convaincu, aux problèmes de Dynamique ayant deux degrés de liberté et en particulier au problème restreint des trois corps. Rappelons brièvement en quoi consiste ce problème : Un corps A, dont la masse est infiniment petite, est attirée par deux corps S (Soleil) et J (Jupiter), qui se meuvent en cercles concentriques. Le mouvement de A a lieu dans le plan de ces cercles. Le problème restreint admet une intégrale première, appelée l'intégrale de Jacobi. Il est bien connu par les travaux de MM. Hill et Bohlin que, pour des valeurs grandes de la constante de l'intégrale de Jacobi, le mouvement de A est limité par une certaine courbe fermée, sur laquelle la vitesse relative de A est nulle.

(¹) [361], *Œuvres*, t. VI, p. 499-538.
(²) *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 14, nº 1, 1912.

Si la constante de Jacobi est assez grande, il y a trois courbes limites fermées, la première entourant le corps S, la seconde le corps J et la troisième l'infini.

Poincaré admet que la force vive dans le mouvement relatif ait une valeur déterminée et si grande que la courbe limite entourant S existe; il admet aussi que le corps A se trouve à l'origine du temps à l'intérieur de cette courbe. Cela étant, *en admettant qu'il existe une solution périodique stable*, Poincaré montre *qu'il y a nécessairement une infinité de solutions périodiques* (ce qui n'était démontré auparavant que pour de petites valeurs du rapport des masses de J et de S). Rappelons en peu de mots les principes de la démonstration.

Étant donné l'intégrale de Jacobi, qui donne en chaque point la grandeur de la vitesse relative, le mouvement dépend seulement de trois *éléments* : les deux coordonnées relatives du point mobile A et la direction de sa vitesse relative. Poincaré montre qu'on peut faire correspondre d'une manière univoque à chaque élément un point de l'espace. A chaque solution correspond ainsi une courbe dans cet espace; et par chacun des points de cet espace passe toujours une courbe et une seule. A chaque solution périodique correspond une courbe fermée et inversement. Soit C_0 la courbe fermée qui correspond à la solution périodique stable donnée. Imaginons maintenant une aire D limitée par cette courbe. Poincaré suppose que cette aire D est simplement connexe et ne se recoupe pas elle-même, et de plus qu'elle est *sans contact*, c'est-à-dire qu'en aucun point de cette aire une courbe C (correspondant à une solution générale) ne vient toucher la surface courbe dont cette aire fait partie.

Soit alors P un point quelconque de D, et P' *le conséquent* de P c'est-à-dire le point où la courbe C, qui passe par P, recoupe la prochaine fois l'aire D. Poincaré démontre que la transformation T qui fait passer d'un point à son conséquent est une transformation ponctuelle continue de l'aire D en elle-même. D'ailleurs, il résulte de la théorie des invariants intégraux [280, chap. XXVII] (1) que la transformation T admet un invariant intégral positif.

Soit maintenant $\pm \alpha\sqrt{-1}$ les exposants caractéristiques de la solution périodique stable considérée. Poincaré démontre qu'on peut assimiler l'aire D à l'aire d'un cercle, au point de vue de l'*Analysis Situs*, de cette manière que par la transformation T ce cercle se transforme en lui-même, la périphérie ayant tourné de l'angle $\frac{2\pi}{\alpha+m}$, m étant un certain entier.

(1) [280, chap. XXVII], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 3, p. 175.

Un théorème de Kronecker enseigne alors qu'il y a, à l'intérieur de D, un nombre *impair* de points inaltérés par la transformation; à chacun de ces points correspond une solution périodique; une au moins de ces solutions est stable. Soit P_0 le point correspondant; nous pouvons choisir nos coordonnées de sorte que ce point corresponde au centre du cercle.

Soit $\pm\beta\sqrt{-1}$ les exposants caractéristiques de la solution périodique stable qui correspond à la courbe fermée C'_0 qui passe par P_0. Poincaré démontre que, par la transformation **T**, la région près du centre du cercle tourne de l'angle $2\pi(\beta+n)$ autour du centre, n étant un certain entier.

L'aire du cercle peut être considérée comme une couronne dont le rayon intérieur est nul. Cela posé, effectuons d'abord la transformation T^p, puissance $p^{\text{ième}}$ de T, et ensuite une seconde transformation qui tourne tout le plan du cercle de l'angle $2q\pi$, q étant un entier quelconque. En combinant ces transformations, les deux circonférences de la couronne tourneront des angles

$$2\pi\left(\frac{p}{\alpha+m}+q\right) \quad \text{et} \quad 2\pi[p(\beta+n)+q]. \tag{25}$$

A moins que $(\beta+n)(\alpha+m)=1$, on pourra trouver une infinité de couples de nombres entiers p et q tels que les deux angles (25) soient de signes contraires. Le théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff est donc applicable.

Comme p et q peuvent prendre une infinité de valeurs, cela nous fait une infinité de solutions périodiques.

En variant les données du problème, les solutions périodiques et les exposants caractéristiques changent. Les solutions périodiques qui correspondent au couple p, q ne peuvent disparaître qu'en se confondant avec l'une ou l'autre des deux solutions périodiques qui correspondent aux courbes fermées C_0 et C'_0, c'est-à-dire si

$$-\frac{q}{p}=\frac{1}{\alpha+m} \quad \text{ou} \quad \beta+n.$$

On retrouve ainsi les solutions périodiques du deuxième genre.

Il reste à dire que, pour de petites valeurs de la masse μ du corps J, on peut s'arranger de sorte que C_0 et C'_0 correspondent aux deux solutions périodiques de la première sorte.

Évidemment, ces dernières recherches de l'illustre savant ouvrent des perspectives très étendues sur la théorie générale des solutions périodiques. Poincaré dit lui-même qu'il entrevoit, mais d'une manière beaucoup plus vague, qu'on pourrait se servir de cette méthode pour montrer que les solutions périodiques sont *überalldicht*.

12. Solutions doublement asymptotiques.

Les solutions asymptotiques qui existent au voisinage d'une solution périodique instable se partagent en deux familles. La première famille renferme les solutions qui pour $t = -\infty$ se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique; dans la seconde famille au contraire, ce rapprochement asymptotique a lieu pour $t = +\infty$. Il est facile d'étudier les solutions asymptotiques de la première famille pour des valeurs très grandes et négatives de t; mais il est encore impossible de poursuivre cette étude pour des valeurs très grandes et positives de t. Inversement, l'étude des solutions asymptotiques de la seconde famille doit être très compliquée pour des valeurs très grandes et négatives de t.

L'une des plus belles découvertes de Poincaré se rattache à la théorie des solutions asymptotiques. La théorie des invariants intégraux, créée dans ce but, lui permet en effet de démontrer l'existence de solutions doublement asymptotiques qui se rapprochent asymptotiquement d'une solution périodique d'une part, pour $t = -\infty$ et, d'autre part, pour $t = +\infty$ [183; 280, chap. XXVII, XXVIII] (1).

Dans l'étude de ces solutions, Poincaré se borne à un cas très particulier, celui du problème restreint des trois corps. Il admet que le rapport μ des deux masses attirantes est très petit. Il admet aussi que la constante de Jacobi a une valeur si grande que la courbe limite entourant S existe, et que le corps A se trouve à l'origine du temps à l'intérieur de cette courbe. Alors le corps A n'en sortira jamais (*cf.* p. 302-303).

Les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme (1) avec deux degrés de liberté. Poincaré démontre d'abord que l'on peut définir les variables canoniques x_1, x_2, y_1, y_2 de sorte que la variable angulaire y_2 soit toujours croissante. Il y parvient en choisissant les variables de manière que les solutions périodiques de la première sorte et à mouvement rétrograde prennent une forme particulièrement simple.

(1) [183], *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [280], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, chap. XXVII, t. 3, p. 175; chap. XXVIII, t. 3, p. 201.

Enfin, pour faciliter l'exposition, Poincaré fait usage d'un mode de représentation géométrique. Par les conditions

$$0 \leqq y_1 < 2\pi, \qquad 0 \leqq y_2 < 2\pi, \qquad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C$$

se définit une multiplicité à trois dimensions. Entre cette multiplicité et les points X, Y, Z de l'espace tout entier, Poincaré établit une correspondance ponctuelle biunivoque au moyen des relations

$$X = \frac{\sqrt{z}\cos y_2}{\sqrt{4+z-2\cos y_1}}, \qquad Y = \frac{\sqrt{z}\sin y_2}{\sqrt{4+z-2\cos y_1}}, \qquad Z = \frac{2\sin y_1}{\sqrt{4+z-2\cos y_1}},$$

où $z = \frac{x_2}{x_1}$. A la surface $z = \text{const.}$ correspond ainsi un tore autour de l'axe des Z. Ce tore se réduit à l'axe des Z pour $z = 0$ et au cercle $Z = 0$, $X^2 + Y^2 = 1$ pour $z = \infty$.

Pour une orbite quelconque, le point représentatif X, Y, Z tourne toujours autour de l'axe des Z dans le sens direct. A chaque solution périodique correspond une courbe fermée faisant un certain nombre de tours autour de l'axe des Z.

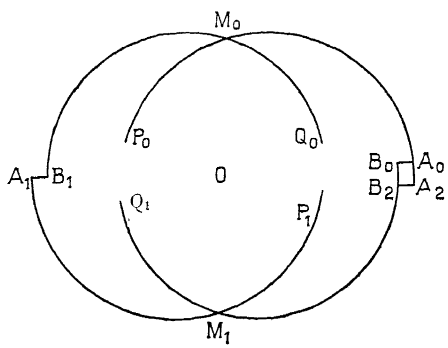


Fig. D.

Regardons une solution périodique instable de la deuxième sorte et l'ensemble des solutions asymptotiques qui y correspondent. Ces solutions engendrent dans l'espace X, Y, Z deux surfaces asymptotiques se coupant suivant la courbe fermée qui correspond à la solution périodique. Pour $\mu = 0$ les solutions asymptotiques deviennent toutes périodiques, les deux surfaces asymptotiques coïncident et se réduisent à l'un des tores mentionnés, qui coupe le demi-plan XZ (où $X > 0$, $Y = 0$) suivant un certain cercle C. Supposons maintenant $\mu > 0$ et très petit. Admettons, pour fixer les idées, que l'orbite périodique rencontre le demi-plan XZ en deux points M_0 et M_1. Ces points se trouvent à peu près aux deux bouts d'un diamètre du cercle C. Soit $P_0M_0A_0$ et $P_1M_1A_1$ deux parties de l'intersection de la première surface asymptotique avec le demi-plan XZ et $Q_0M_0B_1$, $Q_1M_1B_0$ deux parties de l'intersection de la seconde surface asymptotique avec ce même demi-plan. Si μ est assez petit, les deux courbes M_0A_0 et M_1B_0 suivent étroitement le cercle C aussi loin que l'on peut admettre que A_0 et B_0 se trouvent sur le même rayon du cercle C. Poincaré montre sur un exemple particulier que les deux branches M_0A_0 et M_1B_0 ne coïncident pas en général. Cela étant, soit A_1 et B_1 les premiers conséquents de A_0 et B_0, A_2 et B_2 les premiers conséquents de A_1 et B_1. Poincaré montre que les distances A_0A_2 et B_0B_2 sont de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, tandis que les distances A_0B_0 et A_2B_2 sont de l'ordre infini par rapport à μ.

Poincaré démontre que les deux arcs A_0A_2 et B_0B_2 se coupent nécessairement. S'il en est ainsi, l'existence d'une solution doublement asymptotique est évidente.

C'est dans cette démonstration qu'intervient la théorie des invariants intégraux. En partant de l'invariant intégral

$$\int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2$$

et en introduisant comme variables d'intégration C, y_2, $\sqrt{X^2+Y^2}$ et Z, Poincaré arrive à un invariant intégral positif, où la fonction à intégrer est périodique par rapport à y_2. En y mettant successivement $y_2=0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ et en laissant de côté dC et dy_2, il trouve enfin une intégrale

$$I=\iint \Phi(X, Z)\, dX\, dZ$$

jouissant de la propriété suivante. Soit σ une courbe fermée quelconque dans le demi-plan XZ. Les orbites qui passent par σ forment une surface tubulaire dont les intersections successives avec le demi-plan XZ sont $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ (appelées les conséquents de σ). Alors, l'intégrale I, étendue successivement sur les aires limitées par $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$, aura toujours la même valeur. Enfin, en vertu des suppositions faites, la fonction Φ est finie et positive dans tout le demi-plan.

Comme courbe σ, Poincaré choisit la courbe fermée $M_0A_0B_0M_1A_1B_1M_0$. Sa conséquente σ_1 sera $M_1A_1B_1M_0A_2B_2M_1$. Puisque l'intégrale I aura la même valeur pour l'aire limitée par σ que pour l'aire limitée par σ_1, les arcs A_0A_2 et B_0B_2 ne peuvent pas être situés comme le montre la figure. Car alors l'intégrale I étendue sur l'aire $A_0A_2B_2B_0$ serait nulle, ce qui n'a pas lieu. Ainsi les arcs A_0A_2 et B_0B_2 se coupent nécessairement. Par leur point de rencontre passe évidemment une solution doublement asymptotique.

Poincaré va beaucoup plus loin en démontrant qu'il existe une infinité de solutions doublement asymptotiques. Pour le faire voir, il choisit A_0 sur la solution doublement asymptotique déjà trouvée. Alors A_0 et B_0 coïncident d'une part et A_2 et B_2 d'autre part. Cela étant, de l'existence de l'intégrale I il n'est pas difficile de tirer la conséquence qu'il passe en effet une infinité de solutions doublement asymptotiques entre A_0 et A_2.

Citons enfin quelques mots de Poincaré en ce qui concerne ces solutions :

« Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

« On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes. »

Évidemment, en vertu de leur caractère tout à fait spécial, il est infiniment peu probable qu'une solution asymptotique ou doublement asymptotique se trouve jamais réalisée dans la nature. Néanmoins l'importance de ces solutions au point de vue des recherches qualitatives ne peut être estimée trop haut. Prises ensemble avec les solutions périodiques, ces nouvelles solutions découvertes par Poincaré forment pour ainsi dire le canevas du tissu si enchevêtré formé par la totalité des orbites générales.

13. **Stabilité du mouvement.**

La question sur la stabilité du système solaire n'a pas cessé d'intéresser les astronomes et les géomètres. Rappelons à cet égard les théorèmes célèbres de Lagrange et de Poisson sur l'invariabilité des grands axes et aussi les travaux classiques de Lagrange, de Leverrier et de Cellérier sur le développement trigonométrique des perturbations séculaires des autres éléments. Étant donné l'état plutôt formel de la science en ce temps-là il n'est pas étonnant que les géomètres fussent alors convaincus de la stabilité du mouvement.

Aujourd'hui nous sommes plus sceptiques. Il arrive souvent avec le développement de la science que les difficultés paraissent s'augmenter à la lumière des découvertes nouvelles. Par ses travaux admirables sur la convergence des séries trigonométriques [93] (1), sur les solutions périodiques, asymptotiques et doublement asymptotiques, Poincaré a dirigé ainsi l'attention sur de nouvelles difficultés qui embrouillent la question de la stabilité du mouvement. Voilà déjà qui est important, car avant de pouvoir vaincre les difficultés il faut les connaître.

Mais Poincaré a étudié aussi directement le problème de la stabilité du mouvement et est arrivé à des découvertes très importantes. C'est encore la théorie des invariants intégraux qui lui a servi comme point de départ dans ces recherches [183; 280, chap. XXVI] (2).

Rappelons d'abord la définition précise de la stabilité donnée par Poincaré. Pour qu'il y ait stabilité complète dans le problème des trois corps, il faut trois conditions :

1° Qu'aucun des trois corps ne puisse s'éloigner indéfiniment;

2° Que deux des corps ne puissent se choquer et que la distance de ces deux corps ne puisse descendre au-dessous d'une certaine limite;

3° Que le système vienne repasser une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa situation initiale.

Si la troisième condition est seule remplie, sans qu'on sache si les deux premières le sont, Poincaré dit qu'il y a seulement *stabilité à la Poisson.*

Cela étant, Poincaré démontre qu'il y a stabilité à la Poisson, si le mouvement est limité à un certain domaine et si, de plus, il existe un invariant intégral positif et fini dans ce domaine.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de considérer le mouvement permanent d'un fluide incompressible enfermé dans un vase. Dans ce cas, le volume d'une

---

(1) [93], *Œuvres*, t. IV, p. 591-98.

(2) [183], *Œuvres*, t. VII, p. 262-479; [280, chap. XXVI], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 3, p. 140.

partie quelconque du fluide est invariable pendant le mouvement, c'est-à-dire l'intégrale triple qui mesure ce volume est un invariant intégral.

Soit U_0 un volume quelconque intérieur du vase, les molécules liquides qui remplissent ce volume à l'instant zéro rempliront à l'instant τ un certain volume U_1, à l'instant 2τ un certain volume U_2, ..., et à l'instant $n\tau$ un certain volume U_n.

Le volume V du vase étant fini, les volumes U_0, U_1, ..., U_n ne peuvent pas tous être extérieurs les uns aux autres, si n est assez grand. Si U_i et U_k ont une partie commune, il en sera de même de U_0 et U_{k-i}, puisque le mouvement est permanent. On peut donc choisir le nombre α de telle sorte que U_0 et U_α aient une partie commune. Après des considérations de cette nature, Poincaré arrive à la conclusion, qu'il y a des molécules qui traversent le volume U_0 une infinité de fois tant avant qu'après l'époque zéro, et cela quelque petit que soit ce volume.

D'autre part, en général, il y a d'autres molécules qui ne traversent U_0 qu'un nombre fini de fois. Poincaré montre que ces dernières doivent être regardées comme exceptionnelles ou, pour préciser davantage, que la *probabilité* qu'une molécule ne traversera U_0 qu'un nombre fini de fois est infiniment petite, *si l'on admet* que cette molécule est à l'intérieur de U_0 à l'origine du temps.

Enfin, ces résultats sont indépendants de la définition du mot probabilité.

Les principes mentionnés s'appliquent presque sans modification au problème restreint des trois corps. Soit S et J les deux masses attirantes se mouvant en cercles concentriques. Soient A la masse infiniment petite se mouvant dans le plan de ces cercles sous l'attraction de S et J. Pour des valeurs assez grandes de la constante de l'intégrale de Jacobi, le mouvement relatif de A par rapport à la ligne tournante SJ est limité par l'une ou par l'autre de trois courbes fermées C_1, C_2 et C_3 entourant respectivement les points S, J et ∞. Poincaré admet que la valeur de la constante de Jacobi est si grande que les deux courbes C_1 et C_2 existent et que le corps A se trouve, à l'origine du temps, à l'intérieur de C_1 (ou de C_2). Alors, le corps A n'en sortira jamais, et la première condition de stabilité est remplie.

Les équations pouvant se mettre sous la forme canonique, il existe certainement un invariant intégral positif. En désignant par ξ, η les coordonnées relatives de A et par ξ', η' les composantes de la vitesse relative, l'invariant intégral devient

$$I = \int d\xi \, d\eta \, d\xi' \, d\eta'.$$

Poincaré montre que cette intégrale est finie si l'intégration est effectuée sur le domaine limité par la courbe C_1 (ou C_2) et par deux valeurs de la constante de Jacobi voisines l'une de l'autre. Dans l'étude du mouvement dont il s'agit, l'intégrale I peut donc jouer le même rôle que le volume invariable d'une partie du liquide dans le cas du mouvement permanent d'un fluide incompressible. Il en résulte que la troisième condition de stabilité est aussi remplie. La masse A repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale, si l'on n'est pas placé dans certaines conditions initiales exceptionnelles dont la probabilité est infiniment petite. La théorie des solutions asymptotiques montre que de telles orbites exceptionnelles existent vraiment.

En voulant appliquer ces considérations au problème général des trois corps on rencontre certaines difficultés. Les limites que l'intégrale des forces vives impose au mouvement ne suffisent pas pour rendre l'invariant intégral fini. Mais par l'introduction d'une nouvelle variable indépendante t' au lieu du temps t, Poincaré déduit néanmoins un invariant intégral positif qui est fini. Toutefois il peut arriver que t devient infini pour des valeurs finies de t'. En prolongeant la solution au-delà d'une telle valeur de t', on rencontrera une autre trajectoire qui doit être considérée comme un prolongement analytique de l'autre. Ainsi, on arrive à la conclusion que l'orbite considérée et ses prolongements analytiques mentionnés repasseront en général une infinité de fois aussi près que l'on veut de la situation initiale.

« Il semble d'abord que cette conséquence ne puisse intéresser que l'analyste et n'ait aucune signification physique. Mais cette manière de voir ne serait pas tout à fait justifiée. On peut conclure en effet que si le système ne repasse pas une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa position primitive, le temps pendant lequel le périmètre du triangle des trois corps reste inférieur à une quantité donnée est toujours fini. »

14. Théorie de la Lune.

Dans la théorie de la Lune de Delaunay, les éléments elliptiques sont développés en séries trigonométriques suivant les multiples de quatre arguments $w_i = n_i t + \tilde{\omega}_i (i = 1, 2, 3, 4)$, fonctions linéaires du temps; n_1 et n_2 sont les moyens mouvements de la Lune et du Soleil, n_3 et n_4 sont ceux du périgée et du nœud. Delaunay pose $\frac{n_2}{n_1} = m$. Les coefficients des séries trigonométriques ainsi que les quantités n_3 et n_4 sont développés suivant les puissances de m et de certaines petites quantités α, e', e, γ qui signifient respectivement le rapport entre les distances moyennes de la Lune et du Soleil, l'excentricité de l'orbite terrestre, les modules de l'excentricité et le module de l'inclinaison de l'orbite de la Lune. Les formules de Delaunay ne contiennent que des puissances positives de m, α, e', e et γ.

Poincaré démontre [372] (¹) que, si l'on poussait assez loin les développements de Delaunay, on arriverait à des termes où m figurerait à une puissance négative. Dans l'expression de la longitude, les termes correspondants renferment au moins en facteur $e'^4 e\gamma^2$ et dans l'expression de la latitude au moins $e'^4 e^2 \gamma$.

La démonstration de Poincaré est intéressante aussi au point de vue de la méthode. Il part d'équations différentielles de la forme (2). Au moyen de transformations canoniques successives, il arrive à d'autres équations de la même forme mais où le développement de F, jusqu'à un degré quelconque, est indépendant des variables y et ne dépend des ξ et η que dans la combinaison $\xi^2 + \eta^2$. En négligeant les autres termes de F, l'intégration des équations est immédiate. C'est peut-être la manière la plus rapide de *démontrer* les théorèmes fondamentaux relatifs à la *forme* des développements qui satisfont aux équations (2), bien que cette méthode ne puisse être recommandée pour le calcul direct de ces développements.

En somme, l'apparition des puissances négatives de m est due à l'introduction de petits diviseurs d'intégration de l'ordre de m^3. D'ailleurs, l'existence de ces petits diviseurs de l'ordre de m^3 dépend de ce fait que, dans les expressions des moyens mouvements du nœud et du périgée, les termes en m^2 sont égaux et de signes contraires, c'est-à-dire en rapport rationnel.

En mettant $e' = e = \gamma = 0$, les développements de Delaunay ne renferment qu'un seul argument $\tau = w_1 - w_2$. La solution est alors périodique.

En négligeant les paramètres α et e', les équations du mouvement de la Lune deviennent particulièrement simples. Ces équations simplifiées ont été l'objet de recherches magistrales de M. Hill (²).

(¹) [372], *Œuvres*, t. VIII, p. 332-366.

(²) *Amer. J. Math.*, vol. 1, 1878; *Coll. Works*, vol. 1, p. 284.

Ce savant a calculé directement la solution périodique mentionnée tout à l'heure (pour $\alpha = 0$). Il a développé les coordonnées relatives de la Lune en séries de Fourier de l'argument τ. Les coefficients qui dépendent de m apparaissent sous la forme de séries à termes rationnels qui convergent très rapidement.

M. Hill ne s'est pas occupé de la question de convergence. Les travaux généraux de Poincaré sur les solutions périodiques montrent que la convergence a certainement lieu.

Pour étudier les solutions voisines de la solution périodique, M. Hill [1] a formé les équations aux variations. Elles peuvent se mettre sous la forme particulièrement simple

$$(26) \qquad \frac{d^2 z}{d\tau^2} + \{\Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2\tau + 2\Theta_2 \cos 4\tau + \ldots\} z = 0.$$

Le coefficient Θ_k contient en facteur m^{2k} de sorte que les coefficients Θ décroissent très rapidement. On aura deux équations de la forme (26). L'une donne les inégalités du premier degré par rapport au module γ; l'autre les inégalités du premier degré par rapport au module e. Les parties principales des moyens mouvements du nœud et du périgée (parties indépendantes de α, e', e, γ) sont déterminées par les exposants caractéristiques des équations (26).

Une équation de cette forme admet deux solutions

$$z = \sum_k b_k e^{+(2k+g)\tau\sqrt{-1}}.$$

Il s'agit de déterminer l'exposant caractéristique g et les rapports des coefficients b_k. M. Hill a ramené le problème à la résolution d'une infinité d'équations du premier degré à une infinité d'inconnues. M. Hill admet sans démonstration que les déterminants d'ordre infini qu'on rencontre ainsi sont convergents.

Poincaré démontre la convergence et en même temps la légitimité de la méthode de M. Hill [91; 279, n^{os} 185-189; 215] [2]. Par ces travaux de Hill et Poincaré, les déterminants d'ordre infini ont été introduits dans l'analyse. Il est inutile de rappeler ici l'importance capitale de cette notion nouvelle.

(1) *Acta Math.*, t. 8, 1886 [1877].

(2) [91], *Œuvres*, t. V, p. 95-107; [279, n^{os} 185-189], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 2, p. 260-280; [215], *Œuvres*, t. V, p. 108-116.

Poincaré donne aussi une autre méthode pour calculer l'exposant caractéristique g et les coefficients b_k [214; 464, n°s 332-335] (1). Il développe en effet les inconnues $\cos g\pi$ et $\frac{b_k}{b_0}$ suivant les puissances des quantités $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots$. En vertu d'un théorème général démontré par Poincaré [69] (2), les séries en question représentent des fonctions entières et sont ainsi toujours convergentes.

Il est bien connu que M. E. W. Brown (3) a élaboré dans ces derniers temps une théorie complète pour la Lune en partant des travaux mentionnés de M. Hill. Pour déterminer les inégalités d'un degré quelconque par rapport aux quantités α, e', e, γ M. Brown est conduit chaque fois à un système d'équations linéaires à seconds membres. Le système se partage en deux, l'un du quatrième et l'autre du second ordre. L'essentiel de la méthode de M. Brown, c'est que la valeur numérique de m est introduite dès le commencement, de sorte que les développements suivant les puissances de m ou de $\frac{m}{1-m}$ sont évités.

Poincaré propose une autre méthode pour le calcul des termes de degré supérieur [216; 464, chap. XXIX] (4). Cette méthode tout à fait analytique est très originale mais moins directe que celle de M. Brown. Les développements procèdent suivant les puissances de $\frac{m}{1-m}$, α, e', e, γ. Dans la méthode de Poincaré, les systèmes d'équations linéaires à seconds membres qu'il faut résoudre sont seulement du deuxième ordre.

15. Théorie des petites planètes.

A côté de la théorie de la Lune, la théorie du mouvement d'une petite planète troublée par Jupiter doit être considérée comme un cas particulier assez simple du problème des trois corps.

En négligeant l'excentricité de l'orbite de Jupiter, les équations se mettent sous la forme (2) avec trois degrés de liberté. On aura un couple x, y et deux

(1) [214], *Œuvres*, t. VIII, p. 367-382; [464, n°s 332-335], *Leçons de mécanique céleste*, t. 2, 2e partie, p. 44-49.

(2) [69], *Œuvres*, t. II, p. 300-401.

(3) *Mem. Roy. Astron. Soc.*, t. 53, 54 et 57.

(4) [216], *Œuvres*, t. VIII, p. 297-331; [464, chap. XXIX], *Leçons de mécanique céleste*, t. 2, 2e partie, p. 95.

couples ξ, η; y sera la différence des deux longitudes moyennes, les autres variables x, ξ', η', ξ'', η'' seront définies comme à la page 270.

Si l'excentricité de l'orbite de Jupiter n'est pas négligée, la fonction F dépend aussi de l'anomalie moyenne de Jupiter, c'est-à-dire du temps. Pour éliminer le temps, on peut introduire un couple $x'y'$ (y' étant cette anomalie moyenne et x' une variable auxiliaire). Le problème est alors ramené à la forme canonique (2) avec quatre degrés de liberté (deux couples x, y et deux couples ξ, η).

En voulant intégrer ces équations par des séries, il faut distinguer les planètes ordinaires et les planètes caractéristiques. La période de révolution de ces dernières est à peu près commensurable avec celle de Jupiter.

En voulant appliquer les séries de M. Lindstedt aux planètes ordinaires et les séries de M. Bohlin (généralisées) aux planètes caractéristiques, on rencontre cette difficulté que les termes en μ dans les expressions des moyens mouvements du nœud et du périhélie sont égaux et de signes contraires. Pour éviter la difficulté en question, on pourrait appliquer un procédé analogue à celui employé par Poincaré dans la théorie de la Lune (p. 312). On démontrerait ainsi que les séries de M. Lindstedt (pour les astéroïdes ordinaires) ne renferment que des puissances positives de la masse perturbante μ. Au contraire, pour les planètes caractéristiques, en admettant que le petit diviseur $\triangle$, dû à la commensurabilité approchée, est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, on rencontrerait (comme dans la théorie de la Lune) dans les séries de M. Bohlin généralisées des termes d'ordre négatif, $\triangle$ et $\sqrt{\mu}$ étant du premier ordre. Toutefois dans les développements des coordonnées de l'astéroïde, les termes correspondants sont au moins du septième degré par rapport aux excentricités et à l'inclinaison. Évidemment, l'introduction des termes d'ordre négatif par rapport à $\triangle$ et $\sqrt{\mu}$ n'empêche pas que les séries de M. Bohlin ainsi généralisées ne renferment que des termes d'ordre positif, en admettant que chacune des quantités e', e et γ est aussi de l'ordre de $\sqrt{\mu}$. On pourrait ainsi pousser l'approximation jusqu'à un ordre quelconque.

En mettant dans tous ces développements $e' = e = \gamma = 0$, on rencontrerait la solution périodique de la première sorte qui correspond au rapport admis entre les moyens mouvements. Évidemment, on pourrait aussi faire la théorie de l'astéroïde en partant de cette solution périodique (analogue à celle de M. Hill dans le cas de la Lune) et en appliquant ensuite la méthode de M. Brown ou de Poincaré pour le calcul des termes renfermant les puissances de e', e et γ.

Quand il s'agit d'une théorie approchée permettant de retrouver l'astéroïde pendant quelques centaines d'années, on pourrait se contenter des premiers termes des séries mentionnées. Plusieurs astronomes se sont occupés en détail de cette question de donner des expressions générales permettant de calculer rapidement les perturbations les plus importantes.

Poincaré a ébauché une méthode de ce genre applicable aux planètes caractéristiques [368; 464, n^{os} 206-210] (1). Les équations sont de la forme (2) avec trois degrés de liberté (un couple x, y et deux couples ξ, η). Les ξ et η sont de l'ordre de l'excentricité et de l'inclinaison. En première approximation, Poincaré néglige dans F tous les termes qui dépendent de la variable angulaire y, qui signifie la différence des deux longitudes moyennes. Les variables sont choisies de sorte que l'intégration des équations ainsi abrégées nous donne les perturbations qui varient lentement à cause de la petitesse de μ ou en vertu de la commensurabilité approchée entre les moyens mouvements. Les inégalités obtenues ainsi en première approximation sont les plus importantes, puisqu'elles ont été agrandies par les petits diviseurs. Enfin, dans une seconde approximation, Poincaré tient compte aussi des termes de F qui dépendent de la variable y. Les perturbations qui en résultent sont moins considérables.

16. Développement de la fonction perturbatrice.

Dans notre système solaire, les masses des huit planètes principales sont très petites par rapport à celle du Soleil. Les masses des astéroïdes et des comètes sont même tout à fait insensibles. Le mouvement de l'un quelconque de tous ces corps, qui ne se rapproche pas trop d'une planète principale, aura donc lieu à peu près suivant les lois de Képler au moins pendant un certain temps limité. Les forces qui empêchent le mouvement de rester képlérien dérivent d'une fonction de force qui s'appelle la fonction perturbatrice.

En choisissant dans la théorie des planètes les variables proposées par Poincaré (*voir* p. 269), la fonction perturbatrice ne sera autre chose que la fonction μF_1 de la page 269. Elle sera la même pour toutes les planètes et aura la

(1) [368], *Œuvres*, t. VIII, p. 437-456; [464, n° 206-210], *Leçons de mécanique céleste*, t. 1, p. 357-365.

forme [164; 87; 464, n° 43] (1)

$$\mu F_1 = \sum m_i m_j \left\{ \frac{1}{\Delta_{i,j}} - V_i V_j \cos W_{i,j} \right\},$$

m_i et m_j étant les masses des planètes P_i et P_j, $\Delta_{i,j}$ leur distance mutuelle, V_i et V_j les vitesses *absolues* des planètes P_i et P_j (le centre de gravité de tout le système étant supposé fixe) et enfin $W_{i,j}$ l'angle compris entre les directions de ces vitesses.

En introduisant pour les coordonnées relatives et les vitesses absolues les expressions des coordonnées et des vitesses dans le mouvement képlérien autour d'un centre fixe d'attraction, la fonction perturbatrice et ses dérivées par rapports aux variables employées deviennent des fonctions périodiques de toutes les anomalies moyennes, développables en séries trigonométriques suivant les multiples de ces anomalies, les coefficients des développements étant des fonctions des autres éléments elliptiques ou canoniques. Avant de pouvoir calculer les perturbations, il faut savoir calculer les coefficients de ces développements.

Le développement de la seconde partie de la fonction perturbatrice, celle qui dépend des vitesses, n'offre pas de difficultés sérieuses [187; 464, n° 239] (2). Il s'agit donc avant tout de développer l'inverse de la distance Δ de deux planètes en série trigonométrique suivant les multiples des deux anomalies moyennes.

Le développement analytique de la fonction perturbatrice a fait l'objet de travaux d'un grand nombre d'astronomes et de géomètres. Le développement analytique le plus simple est celui de Newcomb.

En supposant nulles les excentricités, le développement de la fonction Δ^{-1} suivant les multiples des deux longitudes, comptées à partir du nœud, est assez simple. Les coefficients de ce développement dépendent des grands axes et de l'inclinaison mutuelle des orbites et sont connus sous le nom des coefficients de Jacobi.

Newcomb a déduit les coefficients du développement général de la fonction Δ^{-1} suivant les multiples des deux longitudes moyennes et des deux anomalies moyennes et suivant les puissances des excentricités, en effectuant

(1) [164], *Œuvres*, t. VII, p. 496-499; [87], *Œuvres*, t. IV, p. 17-24; [464, n° 43], *Leçons de mécanique céleste*, t. I, p. 58.

(2) [187], *Œuvres*, t. VII, p. 500-511; [464, n° 239], *Leçons de mécanique céleste*, t. 2, 1re partie, p. 36.

sur les coefficients de Jacobi certaines opérations différentielles. *Les opérateurs de Newcomb* sont certains polynomes à coefficients rationnels du symbole différentiel $D = \alpha \frac{d}{d\alpha}$, α étant le rapport des deux grands axes. Pour calculer successivement les coefficients de ces opérateurs, Newcomb a donné des formules de récurrence assez compliquées.

Poincaré a simplifié beaucoup [464, chap. XIX] (¹) la théorie des opérateurs de Newcomb, en montrant que ces opérateurs rentrent comme coefficients dans le développement de la fonction

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathrm{D}} \mathrm{E}^{\sqrt{-1}\,s v}$$

suivant les multiples de l'anomalie moyenne et suivant les puissances de l'excentricité (r, a, v désignent le rayon vecteur, le demi-grand axe et l'anomalie vraie, tandis que s est un nombre entier). Le développement trigonométrique de la fonction considérée avait été étudié déjà par Hansen.

Étant donnée cette découverte de Poincaré, il était facile de déduire pour les opérateurs de Newcomb certaines formules de récurrence beaucoup plus simples que celles qu'avait employées Newcomb lui-même. Ainsi, le calcul des termes de degré très élevé dans le développement de la fonction perturbatrice a été considérablement simplifié.

Soit maintenant l et l' les anomalies moyennes, u et u' les anomalies excentriques des deux planètes. On aura les développements

$$\Delta^{-1} = \sum_{m,m'} \mathrm{A}_{m,m'} \mathrm{E}^{\sqrt{-1}(ml+m'l')} = \sum_{m,m'} \mathrm{B}_{m,m'} \mathrm{E}^{\sqrt{-1}(mu+m'u')},$$

(E étant la base des logarithmes naturels).

Pour étudier les coefficients $\mathrm{A}_{m,m'}$ et $\mathrm{B}_{m,m'}$ de ces développements, Poincaré les exprime au moyen d'intégrales doubles. En mettant

$$x = \mathrm{E}^{\sqrt{-1}u}, \qquad y = \mathrm{E}^{\sqrt{-1}u'}$$

il obtient la formule [209; 464, n° 242] (²)

$$\mathrm{A}_{m,m'} = -\frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{\mathrm{V}\mathrm{E}^{\Omega}\, dx\, dy}{\Delta x^{m+1} y^{m'+1}},$$

(¹) [464, chap. XIX], *Leçons de mécanique céleste*, t. 2, 1re partie, p. 86.

(²) [209], *Œuvres*, t. VIII, p. 31-32 et 33-47; [464, n° 242], *Leçons de mécanique céleste*, t. 2, 1re partie, p. 41.

V, Ω et Δ^2 (le carré de la distance) étant certains polynomes en x, $\frac{1}{x}$, y et $\frac{1}{y}$. Pour obtenir l'expression de $B_{m,m'}$, il faut mettre $V \equiv \Omega \equiv 1$ dans l'expression de $A_{m,m'}$. Les intégrations doivent s'effectuer suivant les cercles $|x| = 1$, $|y| = 1$ dans les plans des variables complexes x et y. La fonction $x^2y^2\Delta^2$ est un polynome du sixième degré en x et y dont les coefficients dépendent des éléments des orbites.

Les coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$ peuvent se développer suivant les puissances des excentricités et de l'inclinaison. Par les travaux de Leverrier, de Newcomb et de Boquet, on connaît les premiers termes de ces développements (jusqu'au huitième degré inclus). Poincaré montre comment il est possible de trouver les rayons de convergence de ces développements [209, 464, chap. XX] (1). Il s'agit d'indiquer les singularités qui déterminent les domaines de convergence.

Pour cela, Poincaré se pose le problème général de trouver les singularités d'une fonction définie par une intégrale complexe prise suivant une courbe ou une surface fermée. En connaissant les relations qui donnent les singularités de la fonction sous le signe d'intégration, considérée comme fonction des variables d'intégration, il est possible d'écrire les relations qui donnent les singularités de l'intégrale, considérée comme fonction des paramètres. Il faut exprimer que deux singularités de la fonction sous le signe d'intégration coïncident, et que ces deux singularités se sont trouvées auparavant sur des côtés opposés du chemin d'intégration, de sorte qu'il n'est pas possible de les éviter en déformant ce chemin. Il n'est pas difficile d'écrire les conditions pour que deux singularités coïncident. La difficulté est de trouver parmi toutes les singularités possibles celles qui appartiennent à la branche considérée de la fonction multiforme qui est définie par l'intégrale donnée.

Poincaré résout la question complètement quand les excentricités sont nulles ou quand l'inclinaison est nulle. Pour le cas général, la discussion devient trop compliquée. Mais Poincaré arrive presque immédiatement à la conclusion : Pour tous les coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$, les développements possèdent le même domaine de convergence.

Ensuite Poincaré poursuit l'étude des coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$ dans une autre direction. Évidemment, le calcul de ces coefficients serait facilité par l'emploi de formules de récurrence. Poincaré a ébauché la question en démon-

(1) [209], *Œuvres*, t. VIII, p. 31-32 et 33-47; [464, chap. XX], *Leçons de mécanique céleste*, t. 2, 1re partie, p. 100.

trant l'existence de relations linéaires entre les coefficients A et B et leurs dérivées par rapport aux éléments qu'ils renferment [168; 196; 206; 207; 351; 464, chap. XXI] (1).

Dans ces recherches, Poincaré considère les intégrales

$$\Pi = \iint \frac{\mathrm{HE}^{\Omega}\,dx\,dy}{xy\mathrm{F}^s},$$

étendues suivant une surface fermée dans le domaine des variables complexes x et y. Ω et F sont des polynomes donnés en x, x^{-1}, y et y^{-1}, H un polynome arbitraire; $2s$ est un nombre entier et impair. Poincaré démontre que les intégrales Π, considérées comme fonctions des paramètres qui entrent dans Ω et F, peuvent se réduire à un certain nombre d'entre elles qui sont linéairement indépendantes. Si f et ω sont les degrés des polynomes F et Ω, le nombre des intégrales Π qui sont linéairement indépendantes est $\leqq 8(f+\omega)^2$. Si les polynomes F, Ω et H sont symétriques, de sorte que leurs signes ne changent pas si x et y changent leurs signes simultanément, alors le nombre des intégrales linéairement indépendantes est $\leqq 4(f+\omega)^2$. Ces nombres ne dépendent pas de s.

Les coefficients $\mathrm{A}_{m,m'}$ et $\mathrm{B}_{m,m'}$ ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre quelconque par rapport aux éléments sont des expressions de la forme Π.

Pour les coefficients $\mathrm{B}_{m,m'}$, on a $f=2$, $\omega=0$, $4(f+\omega)^2=16$. Si l'on envisage le développement de la fonction Δ^{-1} suivant les anomalies excentriques, il y aura ainsi, entre les coefficients, des relations linéaires de récurrence dont les coefficients seront des fonctions rationnelles des éléments. Ces relations permettent d'exprimer tous ces coefficients en fonction de seize entre eux. De plus, chacun des coefficients $\mathrm{B}_{m,m'}$, considéré comme fonction de l'un quelconque des éléments, satisfait à une équation différentielle linéaire du seizième ordre au plus, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des éléments.

Pour les coefficients $\mathrm{A}_{m,m'}$, on a $f=2$, $\omega=1$, $4(f+\omega)^2=36$. Le polynome Ω, qui dépend de m et m', n'est pas le même pour deux coefficients $\mathrm{A}_{m,m'}$ différents. Par suite, on ne peut trouver ainsi des formules de récurrence à coefficients rationnels entre les $\mathrm{A}_{m,m'}$. Mais chacun de ces coefficients, considéré comme fonction de l'un quelconque des éléments, satisfait à une équation différentielle linéaire du trente-sixième ordre au plus.

(1) [168], *Œuvres*, t. VIII, p. 48-49; [196], *Œuvres*, t. VIII, p. 50-109; [206], *Œuvres*, t. VIII, p. 110-111, [207], *Œuvres*, t. VIII, p. 10-26; [351], *Œuvres*, t. III, p. 493-539; [464, chap. XXI], *Leçons de mécanique céleste*, t. 2, 1re partie, p. 119.

L'intégrale Π est une période de l'intégrale double indéfinie.

$$I = \iint \frac{\mathrm{H}\mathrm{E}^{\Omega}\, dx\, dy}{xy\mathrm{F}^s}.$$

Soit k le nombre des périodes fondamentales. Ce nombre k ne dépend pas des polynomes H et Ω mais seulement du polynome F. Considérons $k+1$ intégrales Π qui peuvent différer par rapport à H et Ω, le domaine d'intégration et le polynome F étant le même dans toutes. Chacune de ces $k+1$ intégrales Π s'exprime au moyen des périodes fondamentales correspondantes par la même fonction linéaire à coefficients entiers. Si les paramètres qui entrent dans Π décrivent dans leurs plans des contours fermés, les périodes subiront une transformation linéaire qui sera la même pour tous les Π. Il en résulte qu'il existe entre $k+1$ quelconques des intégrales Π une relation linéaire à coefficients uniformes par rapport aux paramètres qui entrent dans F.

Pour les coefficients $\mathrm{B}_{m,m'}$, on a $k \leqq 16$. Alors, il en est ainsi de même pour l'ensemble des coefficients A et B et de toutes leurs dérivées.

Ainsi, entre tous les coefficients $\mathrm{A}_{m,m'}$ et leurs dérivées, il existe des relations linéaires à coefficients uniformes par rapport aux éléments, de sorte que toutes ces quantités peuvent s'exprimer par seize d'entre elles.

Poincaré semble espérer qu'une étude plus détaillée des périodes de l'intégrale double qui correspond à $\mathrm{B}_{m,m'}$ montrera que le nombre k est < 16, quand il s'agit du développement de la fonction perturbatrice.

Si les excentricités sont nulles, la fonction F se simplifie de sorte que $k = 4$. Les relations linéaires correspondantes étaient connues déjà par Jacobi.

Jacobi a démontré aussi, par des considérations tout à fait élémentaires, que les B peuvent s'exprimer linéairement par quinze d'entre eux. On aurait donc $k \leqq 15$ dans le cas général.

Arrivons maintenant aux recherches de Poincaré sur les expressions asymptotiques des termes de degré très élevé dans le développement de la fonction Δ^{-1} [120; 173; 278, chap. VI; 464, chap. XXIII].

Supposons que les moyens mouvements n et n' de deux planètes soient à peu près commensurables de sorte que $mn + m'n'$ soit une quantité très petite. Alors les perturbations des longitudes qui après deux intégrations proviennent

(1) [120], *Œuvres*, t. VIII, p. 5-9; [173], *Œuvres*, t. VIII, p. 27-30; [278, chap. VI], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. 1, p. 269; [464, chap. XXIII]; *Leçons de mécanique céleste*, t. 2, 1re partie, p. 157.

du terme dont l'argument est $ml + m'l'$ peuvent devenir sensibles quoique le coefficient $A_{m,m'}$ soit lui-même très petit. Il serait alors important d'avoir une expression analytique qui se rapproche de $A_{m,m'}$ quand m et m' sont très grands. Pour trouver une telle expression, Poincaré pose

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_{a\nu+b,c\nu+d}\, z^{\nu},$$

a, b, c, d étant de petits entiers donnés. Cette fonction peut se mettre sous la forme d'une intégrale simple

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \Delta^{-1} z^{-(\alpha b+\gamma d)} t^{bc-ad-1}\, dt,$$

prise le long de la circonférence $|t| = 1$. Dans Δ (la distance des deux planètes) il faut introduire

$$E^{\sqrt{-1}l} = z^{\alpha} t^{-c}, \qquad E^{\sqrt{-1}l'} = z^{\gamma} t^{a}$$

α et γ étant deux entiers tels que $a\alpha + c\gamma = 1$.

Pour trouver l'expression asymptotique des coefficients $A_{a\nu+b,c\nu+d}$ pour ν très grand, Poincaré applique la méthode importante de M. Darboux, qui donne précisément l'expression asymptotique des coefficients éloignés d'une série de puissance, quand on connaît la nature des singularités de la fonction sur le cercle de convergence.

La détermination des points singuliers de la fonction $\Phi(z)$ ne présente pas de difficultés, puisque c'est une fonction donnée par une intégrale simple prise le long d'un contour fermé. Pas de difficultés non plus en ce qui concerne la nature de ces points singuliers, qui sont bien tels que suppose la méthode de M. Darboux. La difficulté provient de ce fait que tous les points singuliers qu'on trouve n'appartiennent pas à la branche considérée de la fonction $\Phi(z)$. La discussion pour reconnaître l'admissibilité des points singuliers est assez délicate et a été jusqu'ici le principal obstacle à l'emploi général de cette méthode.

Poincaré n'en a fait l'application que dans le cas spécial où l'inclinaison est nulle, l'une des excentricités nulle et l'autre très petite.

Ce serait certainement un travail utile de poursuivre ces recherches, au moins dans le cas où les excentricités et l'inclinaison sont petites.

17. Détermination des orbites.

Le mouvement d'une planète ou comète qui ne se rapproche pas trop d'une planète principale reste sensiblement képlérien pendant un certain temps. Pendant ce temps, les éléments osculateurs de l'orbite ne varient que très peu et peuvent être regardés comme invariables au moins dans une première approximation. Après la découverte d'un tel astre, il importe de déterminer les éléments de son orbite en partant d'observations séparées l'une de l'autre par quelques semaines. Pour le calcul des six éléments, trois observations complètes, donnant la longitude et la latitude géocentrique (λ et β), sont en général nécessaires.

Le problème de la détermination des orbites au moyen d'observations voisines fut résolu par Laplace en 1870. Rappelons brièvement les principes de sa solution. En partant des observations, au moins trois en nombre, et en employant la méthode d'interpolation, Laplace calcule pour une certaine époque t_0 la longitude λ et la latitude β de l'astre ainsi que les deux premières dérivées de ces angles. Les coordonnées rectangulaires héliocentriques de l'astre à l'époque t_0 sont alors des fonctions linéaires, à coefficients connus, de la distance géocentrique inconnue ρ. En introduisant ces coordonnées et leurs dérivées secondes dans les équations du mouvement képlérien, Laplace obtient trois équations linéaires par rapport à ρ et ses dérivées ρ' et ρ'', équations dont les coefficients dépendent de la distance héliocentrique r de l'astre à l'époque t_0. En éliminant ρ' et ρ'', il trouve une relation entre ρ et r. La résolution du triangle formé par le Soleil, la Terre et l'astre donne encore une relation entre ces mêmes quantités. En éliminant r entre ces deux relations, il obtient une équation du septième degré qui détermine ρ. Cette quantité connue, les équations du mouvement donnent l'inconnue ρ' comme fonction linéaire de ρ. En connaissant ainsi ρ et ρ', il est possible de calculer pour $t = t_0$ les valeurs initiales des coordonnées héliocentriques et de leurs dérivées du premier ordre. Enfin, en partant de ces valeurs initiales, Laplace arrive facilement aux valeurs cherchées des éléments.

Laplace n'avait pas élaboré son procédé dans tous ses détails. Les méthodes les plus usitées dans la pratique ont été celle de Gauss et celles qui en sont dérivées. Gauss part de trois équations linéaires entre les trois distances géocentriques inconnues ρ_1, ρ_2 et ρ_3, équations qui expriment que le mouvement est plan. Les coefficients de ces équations dépendent des deux rapports entre les surfaces des trois triangles plans formés par le Soleil et par deux quelconques des trois positions de l'astre. Ces rapports sont développables suivant les puissances des intervalles de temps $t_2 - t_1$ et $t_3 - t_2$. Dans les développements de Gauss et d'Encke, les coefficients ne dépendent que de la distance héliocentrique r_2; les développements plus approchés d'Oppolzer renferment r_1 et r_3, tandis que dans les développements encore plus exacts de Gibbs les coefficients renferment toutes les distances r_1, r_2 et r_3. En éliminant ρ_1 et ρ_3, Gauss et Encke obtiennent une équation pour ρ_2, donnant ρ_2 avec une erreur du premier ordre par rapport aux intervalles $t_2 - t_1$ et $t_3 - t_2$. L'équation de Gauss pour ρ_2 est analogue à l'équation pour ρ de Laplace. Dans la méthode d'Oppolzer, on aura à résoudre deux équations algébriques entre ρ_1 et ρ_3. L'erreur des inconnues qui s'obtiennent par des approximations successives est du second ordre. Enfin dans la méthode de Gibbs on aura trois équations entre ρ_1, ρ_2 et ρ_3, et l'erreur des inconnues est du troisième ordre. En connaissant les coordonnées héliocentriques qui correspondent aux observations extrêmes ainsi que l'intervalle de temps $t_3 - t_1$, il est facile de calculer les éléments. Dans les méthodes de Gauss, d'Encke, d'Oppolzer et de Gibbs, le degré de l'exactitude augmente d'une unité si les observations sont équidistantes de sorte que $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$.

Poincaré a perfectionné considérablement [371] (1) la méthode de Laplace en choisissant pour l'époque t_0 la valeur moyenne des trois époques d'observation t_1, t_2 et t_3. Alors, les erreurs des valeurs interpolées de la longitude et de la latitude géocentrique sont du troisième ordre, tandis que les valeurs des deux premières dérivées de ces angles sont en erreur du second ordre par rapport aux intervalles de temps. Il en résulte que les valeurs calculées de ρ, ρ', etc. et de tous les éléments sont en erreur du second ordre. Ainsi, la méthode de Laplace donne en général une plus grande approximation que celle de Gauss, quoique la rapidité des calculs soit la même dans les deux méthodes. Si les observations sont équidistantes, ces deux méthodes sont équivalentes. La méthode d'Oppolzer l'emporte sur celle de Laplace seulement si les observations sont équidistantes, mais les calculs qu'elle exige sont plus compliqués. Enfin la méthode de Gibbs donne toujours la plus grande exactitude mais seulement au prix d'un travail considérable de calcul. D'ailleurs, il ne faut pas

(1) [371], *Œuvres*, t. VIII, p. 393-416.

pousser l'approximation des calculs trop loin, puisque les observations sont elles-mêmes erronées.

Les erreurs du second ordre dans la méthode de Laplace dépendent des dérivées du troisième et du quatrième ordre de la longitude λ et de la latitude β pour $t = t_0$. Poincaré montre comment ces dérivées λ^{III}, λ^{IV}, β^{III}, β^{IV} et enfin les corrections du second ordre des éléments peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles par rapport aux ρ, $\cos\lambda$, $\sin\lambda$, λ', λ'', $\cos\beta$, $\sin\beta$, β', β'' (ρ étant lui-même racine de l'équation déjà mentionnée du septième degré).

Poincaré démontre aussi qu'il est possible d'exprimer de la même manière les corrections dues à l'aberration.

Poincaré indique enfin comment on peut appliquer, par la méthode d'interpolation et au début du calcul, la correction de la parallaxe aux coordonnées de la Terre et éviter ainsi toute espèce de tâtonnement.

La méthode de Laplace, bien que présentant certains avantages dont le principal est la facilité de se servir de plus de trois observations, était tombée dans un injuste discrédit. Grâce à Poincaré, cette méthode élégante et pratique a été enfin réhabilitée.

Les méthodes déjà mentionnées et ayant pour but la détermination des éléments elliptiques supposent que les intervalles entre les époques des trois observations sont petits, sans toutefois être trop petits. La résolution du problème plus général de calculer les éléments moyennant trois observations quelconques est beaucoup plus difficile. On aura évidemment six équations pour déterminer les six éléments inconnus, mais ces équations sont transcendantes comme l'équation de Képler. Le problème est donc théoriquement possible, mais les ressources actuelles de l'Analyse ne permettent pas de le résoudre en toute rigueur et dans toute sa généralité.

Toutefois Poincaré fait la remarque que, si l'orbite est parabolique, il est possible de déterminer les éléments moyennant trois observations complètes et quelconques [281] (1). En effet, dans ce cas, les équations de condition deviennent algébriques et le nombre des équations dépasse par l'unité le nombre des inconnues. Les équations devant être compatibles, on aura une certaine relation entre les données d'observation et exprimant que le mouvement est parabolique. Toutes réductions faites, on aura enfin les éléments de l'orbite

(1) *Leçons de M. Tisserand sur la détermination des orbites*, préface de M. Poincaré, Paris, Gauthier-Villars, 1899.

parabolique sous la forme de fonctions rationnelles des époques des trois observations ainsi que des cosinus et sinus des trois longitudes et latitudes observées. Évidemment, il serait intéressant de former ces expressions rationnelles. Il pourrait arriver que l'application de cette méthode directe soit plus simple que l'emploi des méthodes actuellement en usage.

18. **Figure de la Terre.**

Dans son travail célèbre *Figure de la Terre tirée des lois de l'Hydrostatique* (1740), Clairaut a étudié l'état d'équilibre d'une masse fluide hétérogène qui se trouve en rotation lente autour d'un axe et dont les particules sont soumises à la loi de l'attraction universelle. Si la rotation est nulle, on suppose que les surfaces d'égale densité sont sphériques et concentriques et que la densité diminue constamment quand on s'éloigne du centre. Soit $D(r)$ la densité moyenne à l'intérieur de la sphère de rayon r. En vertu de la rotation lente, les surfaces de niveau primitivement sphériques deviennent sensiblement des ellipsoïdes de révolution autour de l'axe de rotation. L'aplatissement e de la surface de niveau de rayon moyen r satisfait à l'équation de Clairaut :

$$D(r\eta' + \eta^2 + 5\eta) + 2rD'(1 + \eta) = 0,$$

où $\eta = \frac{re'}{e}$ (η', D', e' signifient les dérivées de η, D et e par rapport à r).

Pour η il faut prendre la solution particulière qui satisfait à la condition $\eta = 0$ pour $r = 0$.

Rappelons aussi que si η_1 est la valeur de η à la surface l'aplatissement e_1 de la surface libre est donné dans la théorie de Clairaut par la formule

$$e_1(\eta_1 + 2) = \frac{5}{2}\varphi,$$

φ étant le rapport entre la force centrifuge à l'équateur et la pesanteur à la surface libre. Cela étant, la fonction e est complètement déterminée à l'intérieur du corps.

Ajoutons enfin que Clairaut avait déjà démontré que $0 < \eta_1 < 3$ de sorte que

$$\frac{\varphi}{2} < e_1 < \frac{5}{4}\varphi.$$

Poincaré en traitant le problème de Clairaut, montre que la solution particulière définie par la condition $\eta = 0$ pour $r = 0$ existe toujours et qu'elle est unique [112; 203; 462, chap. IV] (¹). Poincaré montre de plus qu'on a toujours

$$(27) \qquad 0 \leqq \eta \leqq 3.$$

Ces inégalités lui permettent de compléter un résultat obtenu par Radau. En partant de la théorie de Clairaut, ce savant avait déduit la formule curieuse

$$\frac{\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5\varphi}{2e_1}-1}}{1-\frac{e_1-\varphi}{I}} = \frac{1+\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{10}}{\sqrt{1+\xi}} = K(\xi),$$

où I désigne le rapport $\frac{C-A}{C}$, (A et C étant les deux moments d'inertie principaux de la Terre), tandis que ξ est une certaine valeur inconnue de η à l'intérieur du corps.

Les valeurs de I et φ sont connues : la première est mesurée par la précession des équinoxes, la seconde par la physique. On a trouvé $I = \frac{1}{305{,}31}$, $\varphi = \frac{1}{288{,}38}$.

Radau avait admis que $\eta' > 0$, de sorte que $0 < \xi < \eta_1 = 0{,}541$. On a alors $K < 1{,}00075$. Cela étant, la valeur $e_1 = \frac{1}{293{,}5}$ (Clarke, 1880) ne peut pas satisfaire à la formule de Radau. Ainsi, les valeurs admises de I et de e_1 ne sont pas d'accord avec la théorie de Clairaut.

Étant donnée l'inégalité (27) de Poincaré, il arrive qu'on a toujours $K < 1{,}00075$, puisque $0 < \xi < 3$. Le résultat de Radau subsiste donc aussi dans les cas où η' peut devenir négatif à l'intérieur du corps.

Ajoutons que les valeurs suivantes de l'aplatissement : $e_1 = \frac{1}{299{,}2}$ (Bessel, 1841); $e_1 = \frac{1}{298{,}3}$ (Helmert, 1907); $e_1 = \frac{1}{297{,}0}$ (Hayford, 1909) ne sont pas en contradiction avec la théorie de Clairaut.

Poincaré a aussi écrit deux Mémoires qui se rapportent étroitement aux méthodes actuellement en usage dans la Géodésie. Il est bien connu que les surfaces de niveau de la Terre, qui sont orthogonales aux directions de la pesanteur, ne sont pas tout à fait des ellipsoïdes de révolution. Le géoïde

(¹) [112], *Œuvres*, t. VIII, p. 120-124; [203], *Œuvres*, t. VIII, p. 125-131 et 132-142; [462, chap. IV]. *Figures d'équilibres d'une masse fluide*, leçons professées à la Sorbonne en 1900, Paris, 1902, 211 p. (Gauthier-Villars, édit.).

(constituant la surface libre moyenne de la mer prolongée analytiquement, ou par des nivellements pensés au-dessous des continents) présente en vérité des soulèvements et des abaissements de quelques centaines de mètres par rapport au sphéroïde de référence. Rappelons aussi que les opérations géodésiques ordinaires, qui embrassent des mesures de distances, d'angles horizontaux et verticaux ainsi que des déterminations d'azimuts et de latitudes — que toutes ces opérations ont pour but d'étudier en détail les irrégularités du géoïde.

Les mesures de l'intensité de la pesanteur sont aussi d'une importance capitale dans les recherches géodésiques. Au moyen de ces mesures M. Helmert a déterminé l'aplatissement de la Terre. Il semble toutefois qu'on n'ait pas encore tiré tout le parti possible de cette espèce d'observations.

Dans le premier des deux Mémoires mentionnés [217] ([1]) Poincaré montre que les mesures de l'intensité de la pesanteur, si elles sont assez multipliées et suffisamment exactes, peuvent remplacer les opérations géodésiques ordinaires et qu'elles suffisent pour déterminer complètement la forme du géoïde.

Mais avant de pouvoir utiliser ainsi les valeurs mesurées de la gravité, il faut y appliquer deux corrections : d'abord la correction de Faye dépendant de l'altitude et donnant la réduction au niveau de la mer et ensuite une seconde correction qui s'obtient par *le procédé de condensation* de M. Helmert. Après l'application de ces deux corrections, on trouve, à des quantités près du second ordre par rapport à l'aplatissement, la valeur g' de la gravité qu'on aurait observée sur le géoïde, si toutes les masses situées à l'extérieur d'une sphère S tangente intérieure au géoïde avaient été condensées sur cette sphère. Les changements du géoïde en vertu de la condensation sont du second ordre et peuvent être négligés. Après la condensation, on peut développer le potentiel V dû à l'attraction suivant les puissances négatives de r, les coefficients du développement étant des fonctions sphériques, et ce développement sera convergent sur toute la surface de la Terre.

Soit ζ le soulèvement du géoïde au-dessus de la sphère S. Il est clair qu'il y aura des relations simples (en négligeant les quantités du second ordre par rapport à l'aplatissement) entre les coefficients correspondants dans les développements de V, de g' et de ζ suivant les fonctions sphériques.

Soit maintenant

$$g' - g'_0 = \sum_{n \geqq 2} g'_n \mathrm{X}_n$$

([1]) [217] *Œuvres*, t. VIII, p. 143-174.

le développement suivant les fonctions sphériques X_n qui donne les valeurs observées et corrigées g'. Poincaré démontre que le soulèvement ζ du géoïde au-dessus de la sphère S est donné, aux termes du second ordre près, par le développement

$$g'_0\,\zeta = \sum_{n \geqq 2} \frac{g'_n X_n}{n-1} + \Phi,$$

Φ étant une fonction linéaire connue du carré du cosinus de la latitude.

Il n'est pas nécessaire de calculer les coefficients g'_n, qui convergent nécessairement très lentement. En effet la fonction $2\pi(g'_0\,\zeta - \Phi)$ aura la forme d'une intégrale, qui donne le potentiel d'une couche sphérique attirante, dont la densité est donnée par la fonction connue $g' - g'_0$, la loi de l'attraction étant représentée par une certaine fonction de la distance, et coïncidant à peu près avec la loi universelle.

En introduisant dans cette intégrale, au lieu de $g' - g'_0$, seulement la perturbation locale pour un certain lieu, l'intégrale en question donnera le soulèvement du géoïde qui correspond à cette perturbation.

Poincaré a développé cette idée aussi d'une autre manière en négligeant, non plus le carré de l'aplatissement, mais le carré du relèvement du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde, c'est-à-dire une quantité beaucoup plus petite. Alors, au lieu de la sphère S, on aura affaire à un ellipsoïde, et les fonctions de Lamé s'introduiront au lieu des fonctions sphériques.

Dans un autre Mémoire, Poincaré traite la question des déviations de la verticale en Géodésie [365]. Il s'agit d'un géoïde très peu différent d'un ellipsoïde de révolution. Soit M un point quelconque du géoïde, N sa projection sur l'ellipsoïde de telle façon que MN soit normale à l'ellipsoïde. On définit la position de M en donnant la longitude l et la latitude λ de N ainsi que la longueur ζ de la ligne MN. Soit MP la verticale vraie au point M. On définit la déviation de cette verticale en donnant les composantes ξ et η de l'angle très petit de MN avec MP vers le Nord et vers l'Est.

Le long d'une courbe quelconque sur le géoïde, l, ζ, ξ, η ainsi que l'azimut φ de la tangente seront certaines fonctions de λ. Soit l' et l'' les deux dérivées premières de l par rapport à λ. En négligeant toujours les termes du second ordre, Poincaré démontre que sur une courbe quelconque, $\operatorname{tg}\varphi$ est une fonction linéaire et homogène de l' et η dont les coefficients dépendent de λ. Il

(1) [365], *Œuvres*, t. VIII, p. 175-192.

donne ensuite l'équation d'une ligne géodésique quelconque sur le géoïde. Ce sera une relation linéaire et homogène entre l', l'', ξ et η dont les coefficients dépendent de λ et φ.

Cela étant, Poincaré admet qu'on décrit par des moyens géodésiques une ligne géodésique sur le géoïde en partant d'un point A. Admettons, pour simplifier l'exposition, que l'azimut φ s'annule en A. En suivant cette ligne géodésique, la longitude ne sera pas constante. L'équation de la ligne géodésique sera en effet

$$-l''\cos\lambda + 2l'\sin\lambda - \eta = 0.$$

Ensuite l'azimut ne restera pas constamment nul. On aura

$$\varphi = l'\cos\lambda + \eta\,\mathrm{tg}\lambda.$$

Il s'agit de calculer η en connaissant φ par observation. En différentiant l'expression de φ par rapport à λ, on aura trois relations linéaires en l' et l''. Après avoir éliminé l' et l'', on obtient pour η une équation différentielle linéaire et du premier ordre. L'intégration donne

$$\eta - \eta_0 = \varphi\cot\lambda + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \varphi\,\mathrm{cotg}^2\lambda\,d\lambda,$$

η_0 et λ_0 étant les valeurs de η et λ au point A.

En général, on a négligé le second terme dans l'expression de $\eta - \eta_0$. Poincaré veut dire que cela n'est pas permis dans les régions équatoriales si $\lambda - \lambda_0$ est du même ordre que la latitude λ.

Dans le cas général où l'azimut en A n'est pas nul, on rencontre une correction analogue qu'il ne faut pas négliger dans le voisinage de l'équateur.

Ainsi, si l'on veut déterminer la déviation η en mesurant des azimuts, il ne suffit pas toujours de faire ces mesures au commencement et à la fin de l'arc. Parfois, il est nécessaire de les faire aussi en des stations intermédiaires.

Poincaré est d'avis qu'on peut expliquer ainsi pourquoi M. Oudemans dans sa triangulation de Java avait trouvé que les déviations de la verticale déduites des mesures d'azimut étaient en général et systématiquement trois fois plus grandes que les déviations déduites des mesures de longitude.

19. Théorie des marées.

Dans la théorie des marées, il s'agit d'étudier les oscillations de la mer sous l'influence de l'attraction de la Lune et du Soleil. Le potentiel de cette attraction se compose d'un grand nombre de termes de la forme $Ce^{\lambda t}$, C étant une fonction sphérique du second degré des coordonnées du lieu, λ une constante purement imaginaire et t le temps.

Étant donnée la petitesse de tous ces termes, qui sont divisés par la troisième puissance de la distance de l'astre, il est permis d'étudier séparément les oscillations harmoniques causées par chacun d'eux et d'appliquer ensuite le principe de la superposition des petits mouvements.

D'après leurs périodes, les oscillations harmoniques se partagent en plusieurs groupes. On aura ainsi un groupe de marées à courtes périodes (semi-diurnes et diurnes), qui dépendent de la rotation de la Terre. On aura aussi des marées lunaires à longues périodes (semi-mensuelles et mensuelles) ainsi que des marées solaires à longues périodes (semi-annuelles et annuelles).

Pour déterminer les marées à longues périodes, Laplace et ses successeurs avaient négligé l'accélération et la vitesse du liquide. Le problème des marées est alors relativement simple et peut se résoudre par les méthodes de la Statique. Il suffit d'exprimer que le potentiel des forces agissantes est constant sur la surface de la mer. Cette condition s'écrit

$$g\zeta + \Pi + \Phi = k. \tag{28}$$

Ici ζ désigne le déplacement vertical et cherché de l'eau. Le premier terme $g\zeta$ est le potentiel de la gravité. Le second terme Π est le potentiel du bourrelet liquide qui se trouve entre la surface soulevée ou déprimée et la surface d'équilibre de la mer, c'est-à-dire le potentiel au point considéré d'une couche sphérique dont la densité est donnée par la fonction inconnue ζ. Le troisième terme Φ représente la partie considérée du potentiel de l'astre. Enfin la constante k du second membre doit être choisie de sorte que la masse totale du bourrelet soit nulle.

Le problème en question fut résolu déjà par Bernouilli dans le cas où il n'y a pas de continents, et par Lord Kelvin en supposant que Π soit négligeable. ζ est alors une fonction linéaire de Φ, et la marée statique aura pour effet de modifier périodiquement l'aplatissement de l'ellipsoïde de révolution formé par la surface de la mer. En calculant ainsi des marées à longues périodes et en comparant les résultats des calculs avec celui des observations, Darwin a trouvé des écarts qui ne peuvent s'expliquer que si l'on admet que la Terre n'est pas tout à fait rigide mais qu'elle se déforme en même temps que la mer sous l'attraction des astres. D'après ce savant, la Terre serait à peu près aussi rigide que l'acier.

Toutefois, il n'est pas certain que l'effet du bourrelet soit négligeable. Poincaré a donc résolu le problème dans toute sa généralité [146, 195] (1). En introduisant pour ζ sa valeur exprimée en Π et en $\frac{d\Pi}{dr}$ à la surface, les équations qui définissent le potentiel Π deviennent

$$\Delta\Pi = 0$$

à l'intérieur de la Terre et

$$2\frac{d\Pi}{dr} + \Pi = \xi\varepsilon\Pi + \frac{4\pi}{g}\varepsilon(\Phi - k)$$

à la surface. On a posé $\zeta = \frac{4\pi}{g}$. D'ailleurs ε est $= 0$ sur les continents et $= 1$ sur la mer.

En mettant $\xi = 0$, on se trouve dans les conditions de Lord Kelvin. Poincaré développe Π suivant les puissances de ξ. Il démontre d'une manière très ingénieuse que Π et ζ sont des fonctions méromorphes de ξ n'ayant que des pôles simples, réels et positifs.

Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ces pôles. Le résidu U_i de Π par rapport au pôle ξ_i satisfait aux relations homogènes qu'on obtient en supprimant $\Phi - k$ dans la seconde des équations ci-dessus et en y écrivant U_i au lieu de Π, ξ_i au lieu de ξ. On aura donc, en supposant le développement convergent,

$$\Pi = \sum \frac{U_i}{\xi - \xi_i} = \sum \frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i}.$$

Les constantes A_i dépendent de la fonction Φ et les u_i sont certaines *fonctions fondamentales* qui dépendent seulement de la forme des continents et qui se réduisent aux fonctions sphériques ordinaires quand il n'y a pas de continents. Ces fonctions satisfont aux relations

$$\int \varepsilon u_i u_k d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k, \end{cases}$$

$d\sigma$ étant l'élément de la sphère. Il est donc facile de calculer les coefficients du développement d'une fonction quelconque en série de fonctions fondamentales. Évidemment, A_i sera le coefficient de u_i dans le développement de

(1) [146], *Œuvres*, t. VIII, p. 198-236; [195], *Œuvres*, t. VIII, p. 198-236 et 237-274.

la fonction $-\frac{4\pi}{g}(\Phi - k)$. Les A_i sont linéaires en k. Enfin, la constante k se détermine par la condition que la masse du bourrelet soit nulle.

Ainsi, le problème des marées statiques se ramène à la formation des fonctions fondamentales u_i. Le calcul de ces fonctions dans le cas de la nature serait sans doute extrêmement compliqué à cause de la forme capricieuse des continents. Mais il serait évidemment possible d'appliquer la méthode en admettant que les côtes sont définies par certaines fonctions simples et de comparer ensuite le résultat avec celui qu'on obtient en négligeant avec Lord Kelvin l'attraction du bourrelet.

Évidemment, le problème peut se résoudre aussi par la méthode de M. Fredholm, puisque la relation (28) est une équation intégrale. Il est intéressant de reconnaître que Poincaré avait démontré déjà en 1894 que la solution du problème spécial dont il s'agit est une fonction méromorphe de ξ.

Pour étudier les marées qui correspondent à une valeur quelconque de λ, il faut avoir recours aux méthodes de l'Hydrodynamique. En négligeant les termes du second ordre par rapport aux accélérations et aux vitesses du liquide, les équations du mouvement deviennent linéaires. Enfin, puisque la profondeur de la mer est relativement petite, on n'aura que deux variables indépendantes : la colatitude θ et la longitude ψ. Les équations de la théorie des marées, déduites déjà par Laplace deviennent ainsi

$$(29)\qquad \frac{d}{d\theta}\left(h_1 \sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta}\right) + \frac{d}{d\psi}\left(\frac{h_1}{\sin\theta}\frac{d\varphi}{d\psi}\right) + \frac{\partial(h_2, \varphi)}{\partial(\theta, \psi)} = \zeta \sin\theta = \frac{\sin\theta}{g}\{\lambda^2\varphi - \Pi - C e^{\lambda t}\}.$$

ζ est l'élévation inconnue de l'eau; Π est le potentiel du bourrelet, dont l'épaisseur est ζ; φ est une fonction inconnue auxiliaire; on a de plus

$$h_1 = \frac{\lambda^2 h}{\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\theta}, \qquad h_2 = \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda} h_1,$$

h étant la profondeur de la mer; ensuite ω est la vitesse de rotation de la Terre; enfin le coefficient C dans le terme considéré du potentiel de l'astre est une fonction sphérique du second ordre de la forme $f(\theta)\, e^{s\psi\sqrt{-1}}$ ($s = 0, \pm 1$ ou ± 2).

Si la profondeur h s'annule aux côtes, la solution du problème sera déterminée par la condition que φ reste fini. Au contraire, si h ne s'annule pas, la condition aux limites s'écrira

$$\frac{d\varphi}{dn} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

les dérivées étant prises suivant la normale et la tangente de la côte.

En supprimant les forces extérieures ($C = 0$), il est possible de satisfaire aux équations (29) en choisissant pour λ certaines valeurs spéciales. Les solutions dont il s'agit donnent les oscillations *propres* de la mer avec les périodes $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda}$. Si, au contraire, C et λ sont donnés, la solution des équations (29) qui s'annule avec C définira une oscillation *contrainte* ayant la période $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda}$.

Dans le cas relativement simple où il n'y a pas de continents et où la profondeur h ne dépend que de θ, la fonction φ (et aussi ζ) aura la forme $e^{s\psi\sqrt{-1}+\lambda t}F(\theta)$. On n'aura donc qu'une seule variable indépendante θ. Il est alors possible d'intégrer les équations (29) en développant les fonctions inconnues φ et ζ en séries suivant les *fonctions adjointes de rang s*, lesquelles entrent comme coefficients de $e^{s\psi\sqrt{-1}}$ dans les expressions des fonctions sphériques. M. Hough a effectué les calculs nécessaires en choisissant pour h quatre valeurs constantes ($h = 2$, 4, 8, 17 km).

M. Hough a fait ainsi la découverte intéressante qu'en faisant tendre λ vers zéro, on n'obtient pas la marée statique de Laplace. On obtient au contraire un état particulier d'équilibre, qui est caractérisé par l'existence de courants continus régnant sous la surface libre sans en altérer la forme. Ce sont les *marées statiques de la seconde sorte*, tandis que les marées calculées par la théorie de l'équilibre s'appellent les *marées statiques de la première sorte.*

S'il n'y avait pas de frottement, toutes les marées à longues périodes se rapprocheraient des marées statiques de la seconde sorte. Au contraire, si le frottement était considérable, les marées à longues périodes seraient à peu près égales aux marées statiques de la première sorte. M. Hough a montré qu'il faut une dizaine d'années pour que le frottement se puisse sentir. Par conséquent les marées annuelles et de périodes plus courtes seront bien de la deuxième sorte; au contraire, la marée ayant pour période 18 ans serait une marée de première sorte, qu'on devrait calculer par la théorie de l'équilibre.

Vu l'importance des marées statiques de la seconde sorte, Poincaré en a donné la théorie complète [464, t. 3, chap. 8] (¹). Il s'agit de calculer le terme principal Φ de $\lambda^2\varphi$, qui reste finie pour $\lambda = 0$. Ce terme Φ ne dépend que de la variable $\eta = \frac{h}{\cos\theta}$. La fonction $\Phi(\eta)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre, dont le second membre dépend aussi du bourrelet Π. On obtient Φ par approximations successives en négligeant d'abord Π.

(¹) [464, t. 3, chap. 8], *Leçons de mécanique céleste*, t. 3, p. 182.

Malheureusement l'application de cette méthode au calcul des marées statiques de la seconde sorte se heurte à des difficultés pratiques insurmontables, vu la complication de la fonction h qui définit la profondeur de la mer. Néanmoins il reste un résultat bien simple : les courants internes se propagent toujours suivant les lignes $\eta =$ const., lignes qu'on peut facilement tracer sur la carte. Toutefois ces courants sont bien faibles (leur vitesse est de quelques mètres par heure seulement) de sorte qu'il est très difficile de les déceler par l'observation.

Avant la découverte de la méthode de M. Fredholm, Poincaré [195] (¹) avait essayé d'intégrer d'une manière générale les équations de la théorie des marées en développant les fonctions inconnues suivant les puissances de λ et en négligeant l'influence du bourrelet. Pour déterminer les coefficients des développements, on est ramené à des équations différentielles linéaires du second ordre et avec une seule variable indépendante. Les fonctions φ et ζ considérées comme fonctions de λ n'auront d'autres singularités que les valeurs particulières $\lambda_\alpha (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ qui correspondent aux diverses oscillations propres. En connaissant les valeurs λ_α les plus voisines de l'origine, il serait possible d'augmenter le domaine de convergence des développements.

Pour trouver les λ_α, Poincaré étudie d'abord les oscillations propres d'un système mécanique ayant n degrés de liberté autour d'une position d'équilibre stable. Rappelons que les λ_α satisfont alors à une équation algébrique de degré $2n$. Poincaré démontre [195, 464, chap. I] (¹) (²) que la quantité $-\lambda_\alpha^2$ est le minimum absolu d'un certain rapport R_α entre deux formes quadratiques qui se forment facilement, quand on connaît les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système. Cette propriété des quantités λ_α peut se généraliser à un système qui dépend d'un nombre infini de paramètres. Il arrive alors que la quantité $-\lambda_\alpha^2$ est le minimum absolu d'un certain rapport R_α entre deux intégrales qui renferment un certain nombre de fonctions arbitraires. Pour trouver λ_α, il s'agit de déterminer ces fonctions de sorte que le rapport en question soit aussi petit que possible. Mais, évidemment, Poincaré a trouvé ici plutôt une propriété générale des quantités λ_α qu'une méthode pratique pour en calculer les valeurs.

Il est bien connu que la théorie des équations intégrales de M. Fredholm

---

(¹) [195], *Œuvres*, t. VIII, p. 198-236 et p. 237-274.
(²) [464, chap. I], *Leçons de mécanique céleste*, t. 3, p. 3.

permet de résoudre un grand nombre de problèmes de la Physique mathématique qui étaient auparavant inabordables. Poincaré a appliqué cette méthode [464, chap. 10] (1) pour intégrer complètement les équations de la théorie des marées, quelles que soient la forme des continents et la loi des profondeurs de la mer.

En faisant de la surface de la sphère terrestre une représentation conforme sur une carte géographique et en désignant par x, y les coordonnées rectangulaires sur cette carte du point θ, ψ, les équations de la théorie des marées prennent la forme

$$\frac{d}{dx}\left(h_1\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(h_1\frac{d\varphi}{dy}\right)+\frac{\partial(h_2,\varphi)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{k^2g}(\lambda^2\varphi-\Pi-Ce^{\lambda t})=\frac{\zeta}{k^2},$$

k étant le rapport de similitude (la signification des autres quantités se trouvant à la page 333). De plus, il faut tenir compte des conditions aux limites déjà mentionnées (p. 333).

Poincaré fait d'abord abstraction de l'attraction du bourrelet de sorte que $\Pi=0$. Alors, il s'agit d'intégrer une équation de la forme

$$(30)\qquad \Delta\varphi=a\frac{d\varphi}{dx}+b\frac{d\varphi}{dy}+c\varphi+f\equiv F,$$

a, b, c, f étant des fonctions données de x et y. Ces fonctions sont finies à moins que

$$h=0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2+4\omega^2\cos^2\theta=0.$$

Les valeurs de θ qui satisfont à la dernière condition appartiennent aux *parallèles critiques*.

Poincaré admet d'abord que la mer est limitée par des falaises verticales et qu'elle n'est pas traversée par un parallèle critique. Alors les coefficients a, b, c, f sont finis.

La condition sur le contour sera

$$\frac{d\varphi}{dn}+C\frac{d\varphi}{ds}=0,$$

C étant une fonction donnée de s $\left(C=-\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\right)$.

En désignant par $G(x, y; \xi, \eta)$ la fonction de Green généralisée relative à

(1) [464, chap. 10], *Leçons de mécanique céleste*, t. 3, p. 233.

l'aire considérée qui est définie par la condition aux limites

$$\frac{dG}{dn} + C\frac{dG}{ds} = 0,$$

la fonction φ satisfaisant à l'équation (30) sera encore définie par l'équation

$$-2\pi\varphi = \int F' G \, d\sigma',$$

F' étant ce que devient F en y substituant pour x, y les coordonnées ξ, η de l'élément $d\sigma'$. En intégrant par parties, pour faire disparaître les dérivées de φ qui se trouvent dans l'expression de F', Poincaré arrive à une équation intégrale renfermant une intégrale simple et une intégrale double. Le noyau de l'intégrale simple devient infini comme un logarithme, celui de l'intégrale double est infini du premier ordre quand la distance des points x, y et ξ, η s'annule. Ainsi, la méthode des noyaux réitérés est applicable, et la méthode de M. Fredholm peut donner l'expression de la fonction inconnue φ.

Ensuite, Poincaré passe au cas plus général, en admettant que la profondeur h s'annule aux côtes et que la mer est traversée par des parallèles critiques. Il considère d'abord l'équation

$$\Delta u - cu = f,$$

laquelle peut se résoudre par la méthode précédente. La solution aura la forme

$$u = \int f' \overline{G}(x, y; \xi, \eta) \, d\sigma',$$

$\overline{G}$ étant une fonction de Green généralisée et f' ce que devient f en y mettant ξ, η au lieu de x, y.

Cela étant, la fonction cherchée φ satisfait à la relation

$$\varphi = \int \left\{ a' \frac{d\varphi'}{d\xi} + b' \frac{d\varphi'}{d\eta} + f' \right\} \overline{G} \, d\sigma'.$$

Après l'intégration par parties, on sera conduit à une équation intégrale. Poincaré démontre qu'on peut déformer l'aire d'intégration afin d'éviter la frontière et les parallèles critiques où les coefficients sont infinis. La méthode de M. Fredholm reste ainsi applicable.

Poincaré démontre enfin que, en voulant tenir compte du bourrelet, on aura à résoudre deux équations intégrales à deux fonctions inconnues φ et ζ; la méthode de M. Fredholm conduit encore au but.

Évidemment, l'application *pratique* de la méthode de M. Fredholm au problème *général* des marées conduirait à des calculs trop compliqués. Toutefois, il est probable que la méthode se montrera utile quand il s'agira de certains cas particuliers plus simples.

Poincaré se demande aussi [464, chap. 10] (¹) s'il ne serait pas possible de se servir, dans la théorie des marées, d'une méthode toute nouvelle de M. Ritz. Cette méthode s'applique au cas où l'on a à déterminer une fonction par le Calcul des variations. L'expression dans l'intégrale dont il faut chercher le minimum est un polynome du second degré, non homogène, par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées premières. M. Ritz développe la fonction inconnue en série $\sum \alpha_n \psi_n$ suivant certaines fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots$ dont le choix dépend des conditions aux limites. Les inconnues du problème sont alors les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Elles se déterminent par une infinité d'équations linéaires.

Poincaré démontre que le problème des marées peut en effet se réduire à la recherche du minimum d'une certaine intégrale. Mais il n'entre pas dans tous les détails nécessaires, de sorte que l'application de la méthode de M. Ritz à la théorie des marées reste encore une question ouverte.

Poincaré a traité aussi [464, chap. 19] (¹) la question de savoir si l'attraction de la Lune et du Soleil sur le bourrelet de l'eau soulevée ne pourrait augmenter séculairement la durée de la rotation terrestre. L'importance du problème est évidente, puisqu'il s'agit de l'invariabilité de l'unité de temps qui nous sert à évaluer la durée des mouvements des corps célestes.

Poincaré démontre que le moment de la résultante de l'action de la Lune et du Soleil sur le bourrelet des eaux soulevées a toujours sa valeur moyenne nulle, de sorte que, s'il n'y avait pas de frottement, il ne pourrait y avoir aucun changement séculaire dans la durée de la rotation de la Terre.

En partant des recherches de M. Hough sur l'effet du frottement des marées, Poincaré montre que l'action de la Lune par l'intermédiaire des marées est plus de 100 000 fois trop faible pour expliquer l'avance séculaire résiduelle de $4''$ que présente la longitude moyenne de la Lune.

Ajoutons enfin que Darwin, en faisant intervenir les marées du noyau terrestre, a pu attribuer à celui-ci la viscosité nécessaire pour obtenir l'augmentation voulue de la durée du jour sidéral.

(¹) [464], *Leçons de mécanique céleste*, chap. 10, t. 3, p. 233; chap. 19, t. 3, p. 540.

20. Figures d'équilibre de masses fluides.

Une théorie générale de l'équilibre relatif d'une masse fluide hétérogène, soumise seulement aux forces intérieures dues à l'attraction newtonienne, serait évidemment de la plus haute importance pour l'Astrophysique. Elle nous permettrait de suivre le développement des nébuleuses et des étoiles. Elle nous donnerait peut-être aussi la solution de l'énigme des étoiles variables et des étoiles « nouvelles ». Poincaré a fait faire à cette théorie les plus importants progrès.

Ainsi il a démontré d'abord [462, chap. 2] (1) qu'une masse fluide quelconque en équilibre relatif se trouve nécessairement en rotation uniforme autour d'un axe fixe, qui coïncide avec l'un des axes principaux d'inertie de la masse.

Cela étant, considérons une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe. L'Hydrostatique montre que, dans le cas de l'équilibre relatif, les surfaces de niveau sont les surfaces d'égale pression et aussi d'égale densité. A la surface libre, la pression est nulle. La surface libre est donc une surface de niveau, et la résultante de l'attraction et de la force centrifuge est perpendiculaire à la surface libre. Voilà des conditions nécessaires pour l'équilibre relatif.

Poincaré fait la remarque qu'il faut aussi que cette résultante soit dirigée vers l'intérieur de la masse, autrement une partie se détacherait. Pour qu'il en soit ainsi, Poincaré démontre [94; 462, chap. 1] (1), (2) qu'il faut que

$$\omega^2 < 2\pi\rho_m,$$

ω étant la vitesse de rotation et ρ_m la densité moyenne de la masse fluide.

Rappelons maintenant la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre. D'après le principe des vitesses virtuelles, il faut et il suffit que le travail résultant d'un déplacement virtuel soit nul. Ce travail comprend le travail de l'attraction, plus le travail dû à la force centrifuge. Soit — W l'énergie potentielle, I le moment d'inertie par rapport à l'axe. La condition d'équilibre est donc que

$$\delta W + \frac{\omega^2}{2}\delta I = 0 \qquad (31)$$

pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

(1) [462], *Figures d'équilibre d'une masse fluide.*

(2) [94], *Œuvres*, t. VII, p. 17-25.

Soit ρ la densité, V le potentiel et U la fonction de force totale de sorte que

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

En désignant par $d\tau$ l'élément de volume on aura

$$W = \int \frac{\rho V}{2} d\tau,$$

$$I = \int \rho(x^2 + y^2)\, d\tau,$$

les intégrales étant étendues à tout l'espace. La condition (31) peut donc s'écrire

(32) $$\int U\, \delta\rho\, d\tau = 0$$

pour toutes les variations $\delta\rho$ qui sont compatibles avec les liaisons.

Jusqu'ici nous n'avons pas parlé de la stabilité de l'équilibre.

Quand il s'agit de l'équilibre absolu, la question est facile. La condition nécessaire et suffisante de la stabilité est alors que l'énergie potentielle $-W$ soit minima.

Au contraire, dans le cas de l'équilibre relatif, le problème est beaucoup plus difficile. Lord Kelvin a distingué alors entre deux sortes de stabilités : la stabilité ordinaire ayant lieu quand il n'y a pas de frottement, et la stabilité séculaire qui se trouve réalisée même avec frottement. L'étude de la stabilité séculaire est beaucoup plus simple que celle de la stabilité ordinaire. Lord Kelvin a énoncé que la condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire, c'est que $W + \frac{\omega^2}{2} I$ soit maximum.

Poincaré fait remarquer [72] (1) que ce résultat n'est pas applicable quand il s'agit de l'équilibre d'un fluide. En effet, la démonstration de Lord Kelvin suppose que tout mouvement détermine un frottement, mais cela n'a pas toujours lieu pour la masse fluide, qui peut se déplacer d'un bloc comme un corps solide.

Pour traiter la question rigoureusement, Poincaré introduit une nouvelle notion : celle du *solide équivalent* à la masse fluide [462, chap. 2] (2). C'est un solide où, à l'instant considéré, les molécules ont la même position que dans le

(1) [72], *Œuvres*, t. VII, p. 40-140.
(2) [462], *Figures d'équilibre d'une masse fluide.*

système fluide. La vitesse de son centre de gravité est la même que pour le fluide. Les trois moments de rotation autour des axes principaux d'inertie sont les mêmes que pour la masse fluide. Son mouvement est donc bien défini à l'instant considéré, mais le solide équivalent à l'instant t n'est pas le solide équivalent à l'instant t'.

Poincaré démontre que la force vive du fluide est égale à la force vive T' du solide équivalent, augmentée de la force vive T'' du fluide dans le mouvement relatif par rapport à des axes invariablement liés au solide équivalent.

Cela étant, la condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire de l'équilibre relatif d'un fluide, c'est que l'énergie totale

$$\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I} - W \tag{33}$$

du solide équivalent soit minima, en considérant le moment de rotation μ comme donné.

Grâce à la notion nouvelle du solide équivalent, la démonstration de ce théorème important et presque immédiate [462, chap. 2] (¹). Elle repose sur le principe que l'énergie totale $T' + T'' - W$ ne peut jamais croître (principe de dégradation de l'énergie).

Poincaré démontre aussi [462, chap. 2] (¹) que, pour la stabilité séculaire, il est nécessaire que l'axe de rotation soit le plus petit axe de l'ellipsoïde d'inertie relatif à la masse fluide,

Retournons maintenant à la condition (31) ou (32).

Admettons dès maintenant que le fluide est homogène et que $\rho = 1$. On aura alors $\delta\rho = 0$, sauf dans le voisinage de la surface libre, où $\delta\rho = \pm 1$. Alors, la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre, c'est que la surface libre soit une surface de niveau.

Étant donné ce principe, on a trouvé, il y a longtemps, que chaque ellipsoïde de révolution aplati qui est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe peut se trouver en équilibre relatif, si seulement la vitesse de rotation est convenablement choisie. Soit s le rapport des axes. Le moment de rotation μ croît constamment de zéro vers l'infini, quand s augmente de l'unité vers l'infini. Ce sont les ellipsoïdes de Mac Laurin.

Rappelons aussi qu'il y a une suite d'ellipsoïdes à trois axes (ellipsoïdes de

(¹) [462], *Figures d'équilibres d'une masse fluide.*

Jacobi) qui sont des figures d'équilibre, si seulement la rotation a lieu autour de l'axe le plus petit et avec une vitesse convenable. Soient s et t les longueurs des autres axes par rapport au plus petit axe. t sera une certaine fonction de s. On a toujours $1 < s < \infty$, $\infty > t > 1$ et $\frac{dt}{ds} < 0$. Le moment de rotation μ est minimum $(= \mu_0)$ quand $s = t = s_0$ et croît sans cesse vers l'infini quand s ou t augmente de s_0 vers l'infini.

Une solution d'un problème d'équilibre quelconque qui dépend d'un paramètre arbitraire μ est appelée par Poincaré une *série linéaire de formes d'équilibre* [72] (¹).

Il peut arriver qu'une même forme d'équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires. Poincaré dit alors que c'est une *forme de bifurcation.*

Il peut arriver également que deux séries linéaires de formes d'équilibre réelles, viennent, quand on fait varier le paramètre μ, à se confondre, puis à disparaître, parce que les racines des équations d'équilibre deviennent imaginaires. La forme d'équilibre correspondante s'appellera alors *forme limite.*

D'après cette terminologie, les ellipsoïdes de Mac Laurin et de Jacobi sont deux séries linéaires de formes d'équilibre. Pour $\mu = \mu_0 (s = t = s_0)$, les deux séries se coupent dans une forme de bifurcation. Cette forme est en même temps une forme limite pour la série de Jacobi, qui n'existe que pour $\mu > \mu_0$.

Poincaré a fait l'une de ses plus belles découvertes en démontrant [72; 462 chap. 7] (¹), (²) que chacune des deux séries linéaires considérées de formes d'équilibre (celle de Mac Laurin et celle de Jacobi) renferme une infinité de formes de bifurcation, où apparaissent de nouvelles séries linéaires de formes d'équilibre.

L'étude des formes limites et des formes de bifurcation est intimement liée à l'étude de la stabilité de l'équilibre.

Pour trouver ces formes particulières, Poincaré admet d'abord que le système dépend d'un nombre fini de variables $x_1, \ldots, x_n$. Il s'agit alors de résoudre des équations de la forme

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \cdots = \frac{dF}{dx_n} = 0, \tag{34}$$

(¹) [72], *Œuvres*, t. VII, p. 40-140.

(²) [462], *Figures d'équilibre d'une masse fluide.*

F étant une fonction des variables $x_1, \ldots, x_n$ et d'un paramètre μ. Soit $x_\nu = \varphi_\nu(\mu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ une série linéaire de formes d'équilibre.

Pour que la forme qui correspond à $\mu = \mu_0$ soit une forme limite ou une forme de bifurcation, il faut évidemment que $\mu = \mu_0$ soit une racine du Hessien de F par rapport aux $x_1, \ldots, x_n$, où l'on a posé $x_\nu = \varphi_\nu(\mu)$.

Poincaré démontre [72] (¹) qu'on aura certainement une forme de bifurcation si le Hessien change son signe quand on traverse μ_0.

Supposons que les équations (34) soient satisfaites pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. En développant F suivant les puissances des x_ν, on peut toujours écrire les termes du second degré sous la forme d'une somme de carrés $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i^2$, les Y_i étant homogènes et linéaires par rapport aux x_ν. D'après Poincaré, les α_ν s'appellent *coefficients de stabilité* [72] (¹).

Admettons que F soit l'énergie du système. Pour qu'il y ait équilibre stable, il faut et il suffit que tous les coefficients de stabilité soient positifs.

Supposons maintenant que α_1 change son signe, tandis que les autres α_i ne s'annulent pas quand on traverse μ_0. Après avoir éliminé $x_2, \ldots, x_n$ des équations (34), on obtient une relation

$$\Phi(x_1, \mu) = 0 \tag{35}$$

à laquelle correspond un certain nombre de courbes (au moins deux) passant par le point $x_1 = 0$, $\mu = \mu_0$ du plan des x_1, μ. A chacune de ces courbes correspond une série linéaire de formes d'équilibre.

En admettant que les $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont > 0 pour $\mu = \mu_0$, Poincaré démontre qu'il y a *échange de stabilité* pour $\mu = \mu_0$ [72] (¹). Voici ce qu'il entend par là : les formes qui se prolongent de part et d'autre de μ_0 deviennent instables pour $\mu > \mu_0$ si elles étaient stables pour $\mu < \mu_0$ et *vice versa;* enfin les branches de la courbe (35) qui partent vers le même côté de la ligne $\mu = \mu_0$ correspondent alternativement à des formes stables et à des formes instables.

Tous ces résultats subsistent si la fonction F dépend d'un paramètre μ et d'une infinité de variables $x_1, x_2, \ldots, x_p \ldots$, en supposant toutefois que, dans le développement de F suivant les puissances des x, les termes du second degré

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_p x_p^2 + \ldots \tag{36}$$

(¹) [72], *Œuvres*, t. VII, p. 40-140.

soient tous quadratiques et que les coefficients de stabilité α_i soient positifs à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

Poincaré démontre [72] (1) ainsi le théorème suivant : *Si, en traversant* μ_0, *l'un des coefficients* α_i *change son signe tandis que tous les autres ne s'annulent pas, la forme d'équilibre* $x_i = 0$ *sera une forme de bifurcation pour* $\mu = \mu_0$; *si, de plus, tous les autres* α_i *sont positifs pour* $\mu = \mu_0$, *il y aura échange de stabilité pour* $\mu = \mu_0$.

Poincaré a appliqué ces principes à l'étude des figures d'équilibre qui diffèrent peu des ellipsoïdes de Mac Laurin et de Jacobi. Soit E un quelconque de ces ellipsoïdes. La fonction (33) jouera le rôle de F. Une figure quelconque voisine de E est définie par l'élévation ζ de sa surface au-dessus de la surface de E.

La théorie des fonctions de Lamé fournit [72; 462, chap. 6] (1) (2) une suite de fonctions orthogonales y_i, jouant par rapport à la surface E le même rôle que les fonctions sphériques par rapport à la sphère. L'élévation ζ peut se développer en série suivant les fonctions y_i, de sorte que

$$\zeta = \sum x_i y_i,$$

les x_i étant des constantes arbitraires. Ainsi la fonction (33) se trouve développée suivant les puissances des x_i. Les termes du premier degré disparaissent, puisque E est une figure d'équilibre. Les termes du second degré sont de la forme (36), puisque les fonctions y_i sont des fonctions orthogonales.

Les coefficients de stabilité α_i dépendent seulement du paramètre s (ou du moment de rotation μ) qui définit complètement la forme de E. En variant s (ou μ), certains de ces coefficients ne s'annulent jamais, les autres s'annulent une seule fois et en changeant le signe.

Pour les ellipsoïdes de Mac Laurin, tous les α_i sont > 0, tant que $\mu < \mu_0$. L'équilibre est alors stable. Pour $\mu = \mu_0$, un premier coefficient α change son signe. On retrouve ainsi la forme de bifurcation où apparaissent les ellipsoïdes de Jacobi. Pour $\mu > \mu_0$, les ellipsoïdes de Mac Laurin sont instables. En faisant croître μ à partir de μ_0, on rencontre, parmi les ellipsoïdes de Mac Laurin, une infinité de formes de bifurcation, où apparaissent de nouvelles séries linéaires de formes d'équilibre. Elles sont toutes instables.

---

(1) [72], *Œuvres*, t. VII, p. 40-140.
(2) [462], *Figures d'équilibre d'une masse fluide.*

Pour les ellipsoïdes de Jacobi, on aura une nouvelle suite de coefficients de stabilité α_i. En vertu du principe de l'échange des stabilités, ils sont tous positifs, quand μ est un peu plus grand que μ_0. Soit μ_1 la première valeur de μ pour laquelle un coefficient α disparaît. Tant que $\mu_0 < \mu < \mu_1$, les ellipsoïdes de Jacobi sont stables. Pour $\mu > \mu_1$, ces ellipsoïdes sont instables. En faisant croître μ à partir de μ_1, on rencontre une infinité de formes de bifurcation où de nouvelles séries linéaires de formes d'équilibre rencontrent la série de Jacobi. Ces nouvelles figures d'équilibres sont toutes instables.

Retournons à la forme de bifurcation pour $\mu = \mu_1$. C'est une forme limite pour la nouvelle série linéaire de formes d'équilibre qui y apparaissent. D'après les calculs de Darwin, cette nouvelle série est réelle quand μ est un peu plus grand que μ_1. Étant donné le principe de l'échange des stabilités, les nouvelles figures d'équilibre « *les apioïdes de Poincaré* » sont donc stables. (D'après M. Liapounoff, c'est le contraire qui aurait lieu.)

Dans ce qui précède, nous avons regardé le moment de rotation comme paramètre variable et la densité du fluide comme invariable. Imaginons maintenant que la masse fluide homogène se contracte lentement en se refroidissant. En vertu de la viscosité, le fluide tendra toujours à prendre une forme d'équilibre relatif stable. S'il n'y a pas de forces extérieures, le moment de rotation restera constant. Si la masse est d'abord à peu près sphérique, elle parcourra dans son développement les formes d'équilibre stables déjà mentionnées. Elle aura d'abord la forme d'un ellipsoïde de Mac Laurin dont l'aplatissement augmente constamment. Dès que la première forme de bifurcation sera atteinte, la masse prendra la forme d'un ellipsoïde de Jacobi. Le rapport du grand axe au petit axe croîtra constamment; celui du moyen axe au petit axe diminuera.

On arrivera ensuite à la seconde forme de bifurcation. Désormais, la masse aura la forme d'un apioïde de Poincaré. La plus grande partie du corps tendra à se rapprocher de la forme sphérique, tandis que la plus petite partie semblera vouloir se détacher de la masse principale. Il paraît difficile de suivre plus loin le développement. Peut-être le corps finira-t-il par se partager en deux corps isolés. Peut-être aussi le développement sera-t-il soudainement interrompu par une forme limite.

Alors, l'équilibre finira par être bouleversé, et la masse prendra après une période d'oscillations considérables une forme d'équilibre tout à fait différente.

Ajoutons que Poincaré [94; 95; 72; 462, chap. 8] (1), en partant de la condition (31), a démontré aussi l'existence d'une série linéaire de formes d'équilibre où la masse fluide homogène prend la forme d'un anneau très mince et peu différent d'un tore. La vitesse de rotation ω est très petite, En faisant ω infiniment petite, l'anneau prend la forme d'un cercle de rayon infiniment grand. Ces figures annulaires sont probablement instables.

Rappelons enfin quelques résultats généraux sur les formes d'équilibre de masses fluides homogènes obtenus par Poincaré.

Si la rotation est nulle, la sphère est évidemment une figure d'équilibre. M. Liapounoff a démontré que la valeur absolue W de l'énergie potentielle atteint son maximum absolu, si la masse a la forme d'une sphère. Poincaré donne une nouvelle démonstration de ce théorème [108; 212; 462, chap. 2] (2). Il démontre d'abord que, pour chaque figure d'équilibre sans rotation, on a

$$W = \frac{6T^2}{5C},$$

T étant le volume et C la capacité électrostatique du corps. Il montre ensuite que la capacité électrostatique, qui dépend de la forme du conducteur, a un minimum absolu et que ce minimum est atteint seulement pour la sphère. Il en résulte le théorème de M. Liapounoff.

Poincaré est arrivé aussi [462, chap. 2] (2) au résultat que voici : Pour un fluide homogène en équilibre relatif, la quantité $W - \omega^2 I$ a toujours le même signe que $2\pi - \omega^2$.

Il prouve, d'autre part [462, chap. 2] (2), qu'on aura pour toutes les figures d'équilibre la relation

$$W + \frac{\omega^2}{2} I = \frac{3}{5} U_0 T,$$

U_0 étant la valeur constante de la fonction de force U à la surface libre. En regardant ω comme paramètre variable et le volume T comme constant, les quantités W, I et U_0 varient avec ω. En partant de la relation indiquée tout à l'heure, Poincaré démontre que U_0 croît toujours avec ω. Si alors ω peut croître indéfiniment sans que la figure d'équilibre cesse d'exister, il en sera de même avec U_0. Quand U_0 sera trop grand, la surface du corps ne pourra plus rencontrer l'axe, et la masse prendra enfin la forme annulaire.

(1) [94], *Œuvres*, t. VII, p. 17-25; [95], *Œuvres*, t. VII, p. 26-35; [72], *Œuvres*, t. VII, p. 40-140; [462], *Figures d'équilibre d'une masse fluide.*

(2) [108], *Œuvres*, t. VII, p. 143-146; [212], *Œuvres*, t. VII. p. 151-156; [462], *Figures d'équilibre d'une masse flluide.*

HENRI POINCARÉ UND DIE QUANTENTHEORIE

VON MAX PLANCK

Acta Mathematica, t. 38, p. 387-397 (1921).

1. Nur in seinem letzten Lebensjahre hat sich H. Poincaré mit der Quantentheorie beschäftigt, aber dies in einer Weise, die auf die Denk-und Arbeitsrichtung dieses Meisters seiner Wissenschaft ein ungemein bezeichnendes Licht wirft. Denn wie das whare Temperament eines Menschen sich dann am deutlichsten offenbart, wenn er sich einmal unversehens einem seltsamen Ereignis gegenübersieht, so verrät sich auch die Eigenart eines Forschers am untrüglichsten in seiner Stellungnahme gegenüber einer in seiner Wissenschaft plötzlich neu auftauchenden Hypothese, welche zu gewissen im Laufe der Zeit festgewurzelten Anschauungen in mehr oder minder ausgesprochenen Gegensatz tritt. Der Gealterte wird geneigt sein, die Hypothese zu ignorieren, der Enthusiastische wird sie unbesehen willkommen heissen, der Skeptiker wird nach Gründen suchen sie abzulehnen, der Produktive wird sie prüfen und gegebenenfalls befruchten. H. Poincaré hat sich in dem tiefgründigen Aufsatz (1), den er der Quantentheorie widmete, als jugendlich, kritisch und produktiv erwiesen. Die Anregung zu dieser Untersuchung empfing er ohne Zweifel in den Verhandlungen des denkwürdigen *Solvay*-Kongresses vom Jahre 1911 (2), und der Gedanke, mit dem er an sie herantrat, wird am besten durch seine am Schluss jener Versammlung gesprochenen Worte (3) bezeichnet. Er wirft

(1) *Sur la Théorie des Quanta* (*J. Phys.*, t. 2, 1912, p. 5); *Œuvres*, t. IX, p. 626-653.
(2) *La Théorie du Rayonnement et les Quanta*, Rapports et Discussions, publiés par MM. P. LANGEVIN et M. DE BROGLIE, Paris, 1912.
(3) *Loc. cit.*, p. 451.

darin die grundsätzliche Frage auf, ob denn das Wesen der Quantentheorie es überhaupt gestattet, die Naturgesetze durch irgendwelche Differentialgleichungen auszudrücken — ganz abgesehen von der speziellen Form der Gleichungen der klassischen Mechanik — und diese Frage eben ist es, deren Prüfung und Beantwortung den Inhalt seines oben erwähnten Aufsatzes bildet.

Als Ausgangspunkt dient ihm darin die physikalische Tatsache, dass in einem abgeschlossenen System von zahlreichen, mit bestimmten Eigenperioden schwingenden geradlinigen Resonatoren sich im Laufe der Zeit vermöge ihrer wechselseitigen Stösse ein durch die gesamte Energie des Systems vollkommen bestimmter Zustand statistischen Gleichgewichts herstellt. Gefragt wird nach dem stationären Mittelwert der Energie eines Resonators von bestimmter Periode, unter der alleinigen Voraussetzung, dass die Stossgesetze durch Differentialgleichungen von der Art der Hamilton'schen, aber noch viel allgemeiner als diese, geregelt sind. Um die Betrachtung möglichst zu vereinfachen, ohne ihre allgemeine Bedeutung zu beeinträchtigen, werden nur zwei Arten von Resonatoren angenommen, nämlich P Resonatoren von „langer" Periode, und N Resonatoren von „kurzer" Periode, die ihre Energien gegenseitig durch Stösse austauschen. Diese Auswahl bringt zugleich den Vorteil mit sich, dass dadurch die Einführung des Begriffs der Temperatur ganz entbehrlich wird. Denn die mittlere Energie der Resonatoren von langer Periode ist tatsächlich nichts anderes als dass Mass für die Temperatur, weil für diese Resonatoren, auch vom Standpunkt der Quantentheorie aus, die Gesetze der klassischen Mechanik gelten, und weil nach der klassischen Mechanik die mittlere Energie ganz allgemein der Temperatur proportional ist.

Das Resultat, zu welchem Poincaré nach einer ausführlichen, weitausgreifenden Untersuchung schliesslich gelangt, lässt sich inder folgenden einfachen Form aussprechen, in welcher auch die Bezeichnungen seines Aufsatzes möglichst beibehalten sind. Wird die mittlere Energie der langperiodischen Resonatoren mit $\frac{1}{\alpha}$ bezeichnet, so ist die mittlere Energie der N kurzperiodischen Resonatoren :

$$(1)\qquad \eta = -\frac{d}{d\alpha}\log\Phi(\alpha),$$

wobei gesetzt ist :

$$(2)\qquad \Phi(\alpha) = \int_0^\infty w(\eta)\, e^{-\alpha\eta}\, d\eta.$$

Unbestimmt und willkürlich wählbar bleibt hierin noch die Grösse $w(\eta)$, welche dadurch definiert ist, dass $w(\eta)\,d\eta$ die ,, Wahrscheinlichkeit '' dafür bedeutet, dass die Energie eines kurzperiodischen Resonators zwischen η und $\eta + d\eta$ liegt.

Der Thermodynamiker erkennt in diesen Gleichungen die Formeln wieder, welche die mittlere Energie einer grossen Anzahl gleichartiger Systeme von einem einzigen Freiheitsgrad mit dem sogenannten ,, Zustandsintegral '' Φ verknüpft. Die Konstante α ist der reziproke Wert von kT (T absolute Temperatur) und das Produkt $w(\eta)\,d\eta$ ist die ,, Wahrscheinlichkeit *a priori* '' oder die Grösse des durch $(\eta, d\eta)$ charakterisierten Elementargebiets im Gibbs'schen Phasenraum eines kurzperiodischen Resonators.

Nach der klassischen Theorie ist $w(\eta)$ konstant, und daher nach (2) :

$$\Phi(\alpha) = \frac{\text{const.}}{\alpha}, \tag{3}$$

woraus nach (1) der Äquipartitionssatz der Energie :

$$\eta = \frac{1}{\alpha} \tag{4}$$

folgt, welcher bekanntlich den Erfahrungen widerspricht.

Fragt man aber nach demjenigen Ausdruck, den man für $w(\eta)$ annehmen muss, um zur Quantentheorie zu gelangen, so braucht man nur den umgekehrten Weg zu gehen, und zu dem von der Quantentheorie geforderten Wert von η den passenden Wert von $w(\eta)$ zu suchen. Nun ist, in der ursprünglichen Form dieser Theorie, die mittlere Energie eines kurzperiodischen Resonators :

$$\eta = \frac{\varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon} - 1}, \tag{5}$$

wo ε die Grösse des Energiequantums bedeutet. Für unendlich kleine ε geht daraus wieder der Äquipartitionswert (4) hervor.

Im allgemeinen folgt aber aus (5) und (1) :

$$\Phi(\alpha) = \frac{\text{const.}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}} = \text{const.} \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\alpha\varepsilon}, \tag{6}$$

und ein Vergleich mit (2) zeigt, dass nur dann Uebereinstimmung zu erzielen ist, wenn für alle Werte von η, die kein ganzzahliges Vielfaches von ε sind, $w(\eta) = 0$, während für $\eta = n\varepsilon$, $w(\eta) = \infty$, in der Art, dass für $\lim \xi = 0$:

$$\int_{n\varepsilon-\xi}^{n\varepsilon+\xi} w(\eta)\,d\eta = \text{const.} \tag{7}$$

Dieses Resultat ist natürlich gleichbedeutend mit einer *Verneinung* der zu Anfang aufgeworfenen Frage, ob die Stossgesetze durch Differentialgleichungen darstellbar sind; denn derartige Gleichungen würden doch jedenfalls einen stetigen Charakter der Funktion $w(\eta)$ erfordern. Insofern darf man also das ganze Problem als erledigt betrachten.

2. Indessen hat die Methode Poincaré's doch eine mehr als blos negative Bedeutung. Denn dadurch, dass sie ein Limesverfahren kennen lehrt, durch welches man, mittelst einer nachträglichen Korrektur der ursprünglichen unzulänglichen Voraussetzungen, schliesslich doch zum gewünschten Ziele gelangen kann, weist sie sozusagen über sich selber hinaus, und zeigt die Richtung, die man einschlagen muss, um der drohenden Unstimmigkeit von vornherein zu entgehen. Wenn ein Resonator kurzer Periode wirklich nur solche Werte der Energie besitzen kann, welche ein ganzes Vielfaches von ε darstellen, so heisst dies, dass er seine Energie nur plötzlich, sprungweise, ändern kann, oder mit anderen Worten : dass die Stossgesetze nicht durch Differential gleichungen, sondern durch Differenzengleichungen dargestellt werden. Und es liegt die weitere Frage nahe, ob es nicht möglich ist, eine Form des Stossgesetzes anzugeben, welche auf direktem Wege zu dem von der Quantentheorie geforderten Resultat führt. Diese Frage möchte ich hier ein kleines Stück weiter verfolgen.

Wir wenden uns zu diesem Zwecke wieder zur Betrachtung der Stosswirkungen zwischen den P Resonatoren von langer Periode und den N Resonatoren von kurzer Periode, und nehmen an, dass das Energiequantum der letzteren ein ganzes Vielfaches des Energiequantums der ersteren ist; denn sonst wäre ein unmittelbarer Energieaustausch zwischen ihnen garnicht möglich. Bezeichnen wir die Zahl derjenigen langperiodischen Resonatoren, deren Energie zwischen u und $u+du$ liegt, mit $\mathrm{P}_u\,du$, und die Zahl derjenigen kurzperiodischen Resonatoren, deren Energie $n\varepsilon$ beträgt, mit N_n, wobei :

$$(8)\qquad \int_0^\infty \mathrm{P}_u\,du=\mathrm{P}, \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{N}_n=\mathrm{N},$$

und betrachten wir die wechselseitigen Zusammenstösse dieser beiden Arten von Resonatoren während eines Zeitintervalls t. Ihre Anzahl wird ausser der Länge des Zeitraums t den Grössen $\mathrm{P}_u\,du$ und N_n proportional sein. Daher wird die Anzahl derjenigen unter diesen Zusammenstössen, bei denen i Energiequanten von einem Resonator der ersten Art auf einen Resonator der zweiten Art übertragen werden, dargestellt werden durch einen Ausdruck von der Form :

$$tP_u\,du\,N_n\,W(u,\ n,\ i), \tag{9}$$

wobei die von u, n und i abhängige Funktion W auch als die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet werden kann, dass zwei Resonatoren von den Energien u und $n\varepsilon$ so miteinander zusammenstossen, dass die Energie $i\varepsilon$ von dem ersten auf den zweiten Resonator übergeht. Die ganze Zahl i, die auch Null oder negativ sein kann, ist durch die Bedingung eingeschränkt :

$$\frac{u}{\varepsilon} \geqq i \geqq -n, \tag{10}$$

welche ausspricht, dass keiner der beiden einander stossenden Resonatoren mehr als seine ganze Energie abgeben kann. Nach Beendigung des Stosses besitzen die beiden Resonatoren bezw die Energien :

$$u' = u - i\varepsilon \geqq 0 \qquad \text{und} \qquad n'\varepsilon = (n+i)\varepsilon \geqq 0. \tag{11}$$

Die Bedingung des statistischen Gleichgewichts erfordert dann, das der Anzahl der betrachteten Art von Stössen eine gleich grosse Anzahl in entgegengesetzter Richtung erfolgender Stösse gegenübersteht, d. h. dass, wenn $i' = -i$ gesetzt wird,

$$tP_u\,du\,N_n\,W(u,\ n,\ i) = tP_{u'}\,du'\,N_{n'}\,W(u',\ n',\ i'), \tag{12}$$

und aus dieser Gleichung gehen, wenn W als Funktion von u, n, i bekannt ist, die statistischen Mittelwerte der Energien beider Arten von Resonatoren hervor. Dieselben hängen natürlich in hohem Masse von der Form des Ausdrucks für W ab.

Wir wollen nun die einfache Hypothese einführen :

$$W(u,\ n,\ i)\,du = W(u',\ n',\ i')\,du', \tag{13}$$

und nach der Art der ihr entsprechenden stationären Energieverteilung fragen. Es folgt dann aus (12) und (11) :

$$P_u N_n = P_{u-i\varepsilon} N_{n+i}, \tag{14}$$

und, für $i = 1$ und $u = \varepsilon$:

$$N_{n+1} = N_n \frac{P_\varepsilon}{P_0} = N_n p, \tag{15}$$

andererseits, für $i = -1$ und $n = 1$:

$$P_{u+\varepsilon} = P_u \frac{N_1}{N_0} = P_u p. \tag{16}$$

Aus (15) ergibt sich, wenn man darin für n nach der Reihe die Werte 0, 1, 2, ... $(n-1)$ setzt und die daraus entstehenden Gleichungen miteinander multipliziert :

$$\text{(17)} \qquad N_n = N_0 p^n,$$

und aus (16), wenn man darin für u die Werte $\rho, \rho+\varepsilon, \rho+2\varepsilon, \ldots, \rho+(n-1)\varepsilon$ $(\rho < \varepsilon)$ setzt, auf demselben Wege :

$$\text{(18)} \qquad P_{\rho+n\varepsilon} = P_\rho p^n,$$

Die Ausdrücke (17) und (18) befriedigen die Funktionalgleichung (14) identisch, sie stellen also die allgemeine Lösung derselben dar. Aus ihnen ergeben sich nun auch die stationären Mittelwerte für die Energien der beiden Arten von Resonatoren, die wir, wie oben, mit $\frac{1}{\alpha}$ und η bezeichnen wollen :

$$\text{(19)} \qquad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{P}\int_0^\infty u P_u \, du \qquad \text{und} \qquad \eta = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{n=\infty} n\varepsilon N_n,$$

wo die Werte von P und N den Gleichungen (8) zu entnehmen sind. Bei der Integration von P_u ist zu beachten, dass das Integral, bei Benutzung von (18), in eine Summe von Einzelintegralen zerfällt, deren jedes von $\rho = 0$ bis $\rho = \varepsilon$ zu erstrecken ist; also

$$\int_0^\infty u P_u \, du = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_0^\varepsilon (\rho + n\varepsilon) P_\rho p^n \, d\rho = \frac{1}{1-p}\int_0^\varepsilon \rho P_\rho \, d\rho + \frac{\varepsilon p}{(1-p)^2}\int_0^\varepsilon P_\rho \, d\rho.$$

Auf diesem Wege ergibt sich :

$$\text{(20)} \qquad \bar{\alpha} = \bar{\rho} + \frac{\varepsilon p}{1-p} \qquad \text{und} \qquad \bar{\eta} = \frac{\varepsilon p}{1-p},$$

wenn $\bar{\rho}$ die mittlere Energie derjenigen langperiodischen Resonatoren bedeutet, deren Energie zwischen 0 und ε liegt :

$$\text{(21)} \qquad \bar{\rho}\int_0^\varepsilon P_\rho \, d\rho = \int_0^\varepsilon \rho P_\rho \, d\rho.$$

Man sieht, dass nach unserer Hypothese $\bar{\eta}$ durch α noch nicht vollkommen bestimmt ist. Vielmehr hat man aus (20) .

$$\text{(22)} \qquad \bar{\eta} = \frac{1}{\alpha} - \bar{\rho}.$$

Hiernach erscheint die mittlere Energie $\bar{\eta}$ der kurzperiodischen Resonatoren zurückgeführt auf das Gesetz, nach welchem die Energie unter den langperiodischen Resonatoren verteilt ist. Nimmt man für diese die klassische Theorie als zutreffend an, setzt also in Uebereinstimmung mit (8) :

(23) $$P_\rho = \alpha P\, e^{-\alpha\rho},$$

so folgt aus (21)

(24) $$\bar{\rho} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon} - 1},$$

und damit nach (22) der quantentheoretische Wert (5) von $\bar{\eta}$.

Die Quantenbeziehung (5) ergibt sich also nach dem von uns angeführten Stossgesetz mit Notwendigkeit aus der klassischen Energieverteilung für langperiodische Resonatoren, und darin liegt die Bedeutung dieses Gesetzes.

3. Die hier angestellte Betrachtung kann uns aber noch einen Schritt weiter führen, und eben dieser Punkt ist es gerade, der mir die vorliegende Untersuchung nahegelegt hat. H. Poincaré hat nämlich seine Analyse ausser auf die ursprüngliche Formulierung der Quantentheorie auch auf die spätere Formulierung erstreckt, welche er die „zweite" Quantentheorie nennt [1]. Diese Theorie scheint mir deshalb einstweilen den Vorzug zu verdienen, weil die Grundvoraussetzung der ersten Theorie : die quantenhafte Absorption strahlender Energie seitens eines Resonators, ihrem Wesen nach unverträglich ist mit der sonst überall vorzüglich bewährten elektromagnetischen Wellentheorie der Lichtfortpflanzung im leeren Raum, und weil beim Aufbau der Quantentheorie doch jedenfalls dafür Sorge getragen werden muss, dass die Abweichungen von der klassischen Theorie nicht schroffer ausfallen als unumgänglich notwendig erscheint. Nach der zweiten Quantentheorie können auch die kurzperiodischen Resonatoren von vornherein jeden beliebigen Wert der Energie besitzen, und zwar ist im Zustand des statistischen Gleichgewichts die mittlere Energie aller derjenigen Resonatoren, deren Energie im Elementargebiet n, d. h. zwischen $n\varepsilon$ und $(n+1)\varepsilon$ liegt, gleich $\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon$.

Dementsprechend tritt für die mittlere Energie sämtlicher kurzperiodischer Resonatoren anstelle von (5) der Wert .

(25) $$\bar{\eta} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon} - 1} = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{e^{\alpha\varepsilon} + 1}{e^{\alpha\varepsilon} - 1}.$$

Es fragt sich nun, welcher Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsfunktion $w(\eta)$

(1) *Loc. cit.*, p. 30.

in die Gleichung (2) einzusetzen ist, damit aus (1) der letztgenannte Wert für $\bar{\eta}$ hervorgeht. Um dies zu entscheiden, berechnet Poincaré aus (25) und (1) :

$$\Phi(\alpha) = \frac{e^{-\frac{\alpha\varepsilon}{2}}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}} = e^{-\frac{\alpha\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{3\alpha\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{5\alpha\varepsilon}{2}} + \ldots \tag{26}$$

und findet, dass diese Funktion nur dann mit (2) übereinstimmt wenn $w(\eta)$ für alle Werte von η verschwindet, ausser für die ungeraden Vielfachen von $\frac{\varepsilon}{2}$, für die $w(\eta)$ unendlich wird. Das steht aber offenbar im Widerspruch mit dem Grundsatz der zweiten Theorie, dass ein Resonator jeden beliebigen Wert der Energie besitzen kann.

Dieser Befund scheint, wenn man ihn mit dem in paragraph 1 festgestellten zusammenhält, ein Argument von schwerwiegender Bedeutung zu Ungunsten der zweiten Theorie und zu Gunsten der ersten Theorie zu liefern. Indessen muss zunächst daran festgehalten werden, dass ja, wie bereits oben hervorgehoben ist, auch schon die erste Theorie sich als unverträglich mit der Voraussetzung einer endlichen und stetigen Funktion $w(\eta)$ erwiesen hat, dass also tatsächlich keine der beiden Theorien in den durch die Gleichung (1) und (2) festgelegten Rahmen hineinpasst. Wie steht es nun aber mit der oben für den Zusammenstoss zweier Resonatoren eingeführten Hypothese, die sich bei der ersten Theorie gut bewährt hat, gegenüber der zweiten Theorie ?

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir also jetzt an, die Energie eines der N kurzperiodischen Resonatoren könne jeden beliebigen Wert η besitzen, und zwar sei die Zahl derjenigen dieser Resonatoren, deren Energie zwischen η und $\eta + d\eta$ liegt, gleich $N_\eta\, d\eta$, sodass :

$$\int_0^\infty N_\eta\, d_\eta = N. \tag{27}$$

Ferner finde der Energieaustausch beim Zusammenstoss wiederum nur nach ganzen Vielfachen i des Elementarquantums ε statt, so dass anstatt (10) :

$$\frac{u}{\varepsilon} \geqq i \geqq -\frac{\eta}{\varepsilon}. \tag{28}$$

Dann lassen sich genau die nämlichen Betrachtungen anstellen, wie im vorigen Paragraphen, und man erhält für den Zustand des statistischen Gleichgewichts anstelle von (14) die Funktionalgleichung :

$$P_u N_\eta = P_{u-i\varepsilon} N_{\eta+i\varepsilon}, \tag{29}$$

deren allgemeine Lösung durch (18) und durch

$$N_{\rho+n\varepsilon} = N_\rho p^n \tag{30}$$

gegeben wird, wo

$$p = \frac{P_\varepsilon}{P_0} = \frac{N_\varepsilon}{N_0}. \tag{31}$$

Daraus ergeben sich dann wieder die Mittelwerte für die Energie der beiden Arten von Resonatoren :

$$\frac{1}{\alpha} = \rho + \frac{\varepsilon p}{1-p} \quad \text{und} \quad \eta = \rho' + \frac{\varepsilon p}{1-p}, \tag{32}$$

wenn wir mit ρ' die mittlere Energie derjenigen kurzperiodischen Resonatoren bezeichnen, deren Energie zwischen o und ε liegt :

$$\rho' \int_0^\varepsilon N_\rho \, d\rho = \int_0^\varepsilon \rho N_\rho \, d\rho. \tag{33}$$

Für den Zusammenhang zwischen $\overline{\eta}$ und α erhalten wir also :

$$\overline{\eta} = \overline{\rho}' - \overline{\rho} + \frac{1}{\alpha}, \tag{34}$$

und hieraus, wenn wir für $\overline{\rho}$ wieder den Ausdruck (24), für $\overline{\eta}$ aber den Ausdruck (25) einsetzen :

$$\overline{\rho}' = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{35}$$

und dieser Wert stimmt in der Tat vollkommen überein mit der oben eingeführten Grundannahme der zweiten Theorie, dass die mittlere Energie der im Elementargebiet n befindlichen Resonatoren gleich ist $\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon$.

Somit können wir als Resultat dieser ganzen Untersuchung den folgenden Satz aussprechen : Wenn für die stationäre Energieverteilung der langperiodischen Resonatoren das Gesetz der klassischen Theorie als gültig angenommen wird, so führt die Hypothese, dass beim Zusammenstöss zweier Resonatoren der Energieaustausch nur nach ganzen Vielfachen eines Energiequantums ε stattfindet, und dass zwei Zusammenstösse mit entgegengesetztem Resultat gleich wahrscheinlich sind, für die mittlere Energie eines kurzperiodischen Resonators mit Notwendigkeit zur Formel der Quantentheorie, und zwar zur ,, ersten '' Quantentheorie, wenn ein solcher Resonator keine zwischen o und ε liegende Energie besitzen kann, zur ,, zweiten '' Quantentheorie aber, wenn die mittlere Energie derjenigen Resonatoren, deren Energie zwischen o und ε liegt, gleich $\frac{\varepsilon}{2}$ ist.

4. Schliesslich liegt noch die Frage nahe, ob und in welcher Weise sich die Poincaré'schen Ansätze (1) und (2) so verallgemeinern lassen, dass man zu den Formeln der beiden Quantentheorien gelangt, ohne auf die Schwierigkeiten zu stossen, die auf jeden Fall mit der Einführung einer nicht stetigen und nicht endlichen Funktion $w(\eta)$ verbunden sind.

In formaler Beziehung erledigt sich diese Frage einfach und in positivem Sinne, und zwar durch die Einführung einer passenden Modifikation des Ausdrucks für das Zustandsintegral (2). In der Quantentheorie bleibt die Gleichung (1) bestehen, dagegen tritt an die Stelle des Zustandsintegrals (2) die Zustandssumme :

$$\Phi = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\alpha\overline{\eta}_n}, \tag{36}$$

wo $\overline{\eta}_n$ die mittlere Energie der im Elementargebiet n befindlichen Resonatoren bezeichnet. Je nachdem für $\overline{\eta}_n$ der Wert $n\varepsilon$ oder der Wert $\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon$ angenommen wird, erhält man aus (1) und (36) für die mittlere Energie $\overline{\eta}$ eines kurzperiodischen Resonators den Ausdruck (5) des ersten Quantentheorie oder den Ausdruck (25) der zweiten Quantentheorie.

Ein anderes, weit schwierigeres Problem aber ist es, diejenigen physikalischen Hypothesen zu ersinnen und mathematisch zu formulieren, welche mit Notwendigkeit zu dem Ausdruck (36) des Zustandsintegrals führen. Denn mit seiner Lösung wäre auch der geheimnisvolle Schleier gelüftet, welcher noch bis zum heutigen Tage die Quantentheorie von allen Seiten umgibt. Es liegt eine eigenartige Schicksalstragik darin, dass der geniale Mathematiker und theoretische Physiker, dessen Andenken dieser Aufsatz gewidmet ist, gerade im Verlauf desjenigen Jahres, in welchem er sich für die Quantentheorie zu interessieren begann, von seiner Arbeit abberufen wurde. Niemand kann ermessen, welch unersetzliche Werte dadurch der wissenschaftlichen Forschung verloren gegangen sind. Indessen wir müssen uns zufrieden geben und dankbar sein dafür, dass es ihm überhaupt noch vergönnt war, einmal selber Hand ans Werk zu legen und seiner Mitwelt damit die Schwierigkeit, aber auch die fundamentale Wichtigkeit der hier noch zu bewältigenden Aufgabe deutlich zu machen.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XI.

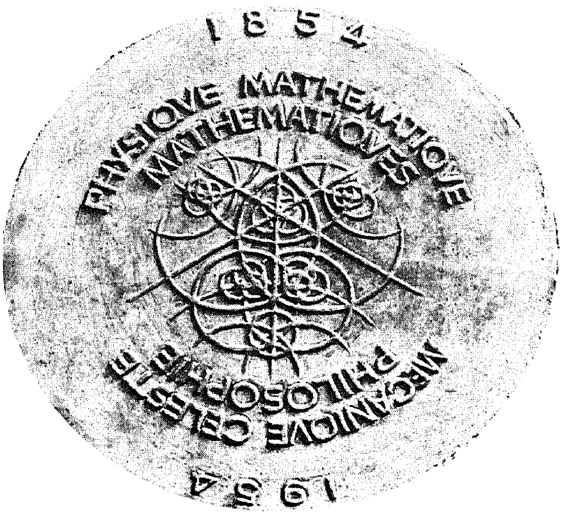
PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55.
149625-56

Dépôt légal Imprimeur, 1956, n° 1451
Dépôt légal Éditeur, 1956, n° 695

ACHEVÉ D'IMPRIMER, LE 20 OCTOBRE 1956.

LE LIVRE
DU CENTENAIRE
DE LA NAISSANCE DE
HENRI POINCARÉ
1854-1954

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
147833 Quai des Grands-Augustins, 55



LA MÉDAILLE DU CENTENAIRE
(due à Madame GUZMAN-NAGEOTTE).

(*Au revers :* Figure géométrique inspirée de la théorie des groupes fuchsiens).

LE LIVRE DU CENTENAIRE

DE LA NAISSANCE DE

HENRI POINCARÉ

1854-1954

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55, quai des Grands Augustins, 55

—

1955

TABLE DES MATIÈRES

TROISIÈME PARTIE.

MANIFESTATIONS PARISIENNES EN MAI 1954.

QUATRIÈME PARTIE.

MANIFESTATIONS EN PROVINCE EN MAI 1954.

CINQUIÈME PARTIE.

Hommage de l'Étranger et autres manifestations en France.

SIXIÈME PARTIE.

Documents et Photographies.

CENTENAIRE DE LA NAISSANCE

DE

HENRI POINCARÉ

COMITÉ DE PATRONAGE.

M. le Président de la République.

M. le Ministre des Affaires Etrangères.

M. le Ministre de la Défense Nationale.

M. le Ministre de l'Éducation Nationale.

M. le Ministre de l'Industrie et du Commerce.

M. le Préfet de la Seine.

M. le Président du Conseil Municipal de Paris.

M. le Recteur de l'Université de Paris.

M. le Directeur de l'Enseignement Supérieur.

M. Albert Buisson, Chancelier de l'Institut.

M. Georges Lecomte, Secrétaire perpétuel de l'Académie Française.

M. Louis de Broglie, de l'Académie Française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

M. Gaston Dupouy, de l'Académie des Sciences, Directeur du Centre National de la Recherche Scientifique.

L'Association des anciens Élèves de l'École Polytechnique.

L'Association des anciens Élèves de l'École des Mines.

L'Association des anciens Élèves du Lycée de Nancy.

COMITÉ D'HONNEUR.

L'Académie Française.
L'Académie des Sciences.
Le Bureau des Longitudes.
Le Comité national de Mathématiques.
Le Comité national de Mécanique.
Le Comité national d'Astronomie.
Le Comité national de Physique.
Le Comité national de Géophysique.
Le Comité national de Radioélectricité.
La Faculté des Sciences de Paris.
L'Institut Henri Poincaré.
L'Observatoire de Paris.
L'École Polytechnique.
L'École Nationale supérieure des Mines de Paris.
L'École Nationale supérieure des Télécommunications.
L'Université de Nancy.
L'Académie Stanislas de Nancy.
L'Université de Caen.
L'Académie des Belles-Lettres, Arts et Sciences de Caen.
L'Union internationale de Mathématiques.
L'Union internationale de Mécanique.
L'Union internationale d'Astronomie.
L'Union internationale de Géodésie et Géophysique.
L'Union internationale de Radioélectricité.
L'Union internationale de Physique.

Allemagne.

Université de Berlin.
Société Physico-Médicale d'Erlangen.
Académie des Sciences de Göttingen.
Académie des Sciences de Munich.

Autriche.

Académie des Sciences de Vienne.

Belgique.

Académie Royale des Sciences de Belgique.
Université libre de Bruxelles.
Institut Solvay.

Danemark.

Société Royale des Sciences de Copenhague.

États-Unis.

Académie nationale des Sciences de Washington.
American Philosophical Society,

Finlande.

Académie finnoise des Sciences et des Lettres.

Grande-Bretagne.

The Royal Society.
The Royal Astronomical Society.
The Royal Society of Edinburgh.
Université d'Oxford.
Université de Cambridge.
Cambridge philosophical Society.
The London mathematical Society.
The Manchester literary and philosophical Society.

Hongrie.

Académie des Sciences de Hongrie.

Irlande.

Royal Irish Academy (Dublin).

Italie.

Académie nationale des Lincei.
Académie nationale des Quarante.
Académie des Sciences de Bologne.
Académie des Sciences de Naples.
Académie des Sciences de Turin.
Institut vénitien des Sciences, Lettres et Arts.
Circolo matematico di Palermo.

Norvège.

Université d'Oslo.

Pays-Bas.

Société des Sciences de Haarlem.
Académie royale des Sciences.

Suède.

Académie royale des Sciences de Stockholm.
Société royale des Sciences d'Uppsala.
Université de Stockholm.

U. R. S. S.

Académie des Sciences de l'U. R. S. S.
Société Mathématique de Kharkov.
Société Physico-Mathématique de Kasan.

COMITÉ D'ORGANISATION.

Président :

Gaston JULIA, Membre de l'Institut.

Vice-Présidents :

Joseph PÉRÈS, Membre de l'Institut.

Pierre RICARD, Président de la Chambre syndicale de la Sidérurgie.

Membres :

Albert CHÂTELET, Doyen honoraire de la Faculté des Sciences.

Daniel DUGUÉ, Maître de Conférence à la Sorbonne.

André GRANDPIERRE, Président de la Compagnie de Pont-à-Mousson.

Robert RECHNIEWSKI, Président des Établissements Bamarec.

Secrétaires :

Paul DUBREIL, Professeur à la Sorbonne.

Général GOETSCHY, Secrétaire du Comité Poincaré des Amis de l'École Polytechnique.

Jules-Henri POINCARÉ

NÉ A NANCY LE 29 AVRIL 1854

GRADES, FONCTIONS, TITRES HONORIFIQUES, PRIX, DÉCORATIONS.

Élève au Lycée de Nancy, octobre 1862-août 1873.

Élève à l'École Polytechnique, *admis le premier* le 14 octobre 1873.

Élève Ingénieur à l'École nationale supérieure des Mines, *nommé* le 19 octobre 1875.

Bachelier ès Lettres, *reçu* le 5 août 1871.

Bachelier ès Sciences, *reçu* le 7 novembre 1871.

Licencié ès Sciences, *reçu* le 2 août 1876.

Docteur ès Sciences mathématiques de l'Université de Paris, *reçu* le 1er août 1879.

Ingénieur ordinaire des Mines, *nommé* le 26 mars 1879, pour prendre rang à dater du 1er avril 1879.

Chargé du Service du sous-arrondissement minéralogique de Vesoul, et *attaché* en outre, au Service du Contrôle de l'exploitation des chemins de fer de l'Est, du 3 avril 1879 au 1er décembre 1879.

Attaché au Service du contrôle de l'exploitation des chemins de fer du Nord, du 24 mars 1882 au 17 novembre 1884.

Ingénieur en chef des Mines, *nommé* le 22 juillet 1893, pour prendre rang à dater du 1er juillet 1893.

Inspecteur général des Mines, *nommé* le 16 juin 1910.

Mis par le Ministre des Travaux publics à la disposition du Ministre de l'Instruction publique pour être Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Caen, le 1er décembre 1879.

Chargé du Cours d'Analyse à la Faculté des Sciences de Caen, *nommé* le 1er décembre 1879.

Autorisé par le Ministre des Travaux publics à accepter une chaire de Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, le 21 octobre 1881.

Maître de Conférences d'Analyse à la faculté des Sciences de l'Université de Paris, *nommé* le 29 octobre 1881.

Chargé du Cours de Mécanique physique et expérimentale à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, *nommé* le 16 mars 1885.

Professeur de Physique mathématique et de Calcul des Probabilités à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, *nommé* le 22 août 1886.

Professeur d'Astronomie mathématique et de Mécanique céleste à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, *nommé* le 5 novembre 1896.

Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, *nommé* le 6 novembre 1883. Démissionnaire le 1er mars 1897.

Professeur d'Astronomie générale à l'École Polytechnique, *nommé* le 1er octobre 1904.

Professeur honoraire à l'École Polytechnique, *nommé* le 3 avril 1908.

Professeur d'Électricité théorique à l'École professionnelle supérieure des Postes et des Télégraphes, à Paris, *nommé* le 4 juillet 1902.

Sur la demande des Curateurs de la Fondation Wolfskehl, *a consenti* à faire six Conférences sur diverses questions de Mathématiques, du 22 au 28 avril 1909.

Membre du Comité d'admission à l'Exposition universelle internationale de 1900, à Paris, pour la classe 3 (Enseignement supérieur), *nommé* par le Ministre du Commerce et de l'Industrie le 7 octobre 1897.

Membre de la Commission de patronage de l'École pratique des Hautes-Études, à Paris, *nommé* le 9 décembre 1897,

Membre du Conseil de l'Observatoire national de Paris, *depuis* le 8 novembre 1900; Vice-Président de ce Conseil, *depuis* le 27 mars 1908.

Membre du Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique, *depuis* le 14 octobre 1901.

Membre du Conseil de l'Observatoire national d'Astronomie physique de Meudon, *nommé* le 2 mars 1907.

Membre du Conseil de perfectionnement de l'École professionnelle supérieure des Postes et des Télégraphes, à Paris, *nommé* le 5 mai 1902.

Membre du Comité de l'Exploitation technique des Chemins de fer, *nommé* le 27 mai 1911.

Membre de la Commission supérieure d'Enseignement technique et professionnel des Postes et Télégraphes, *nommé* le 11 juillet 1911.

Membre de l'Académie des Sciences (Institut National de France), à Paris, *élu*, dans la Section de Géométrie, le 31 juillet 1887.

Président de l'Académie des Sciences en 1906; Vice-Président en 1905.

Membre de l'Académie Française (Institut National de France), à Paris, *élu* le 5 mars 1908, *reçu* le 28 janvier 1909.

Directeur de l'Académie Française, du 1er janvier au 1er avril 1912.

Membre du Bureau des Longitudes, à Paris, *nommé* le 4 janvier 1893.

Président du Bureau des Longitudes en 1899, 1909 et 1910.

Membre étranger de la Société Royale des Sciences de Göttingue, *élu* le 26 novembre 1892; *élu* Membre correspondant le 3 mai 1884.

Membre étranger ordinaire de la Société Royale des Sciences d'Upsal, *élu* le 27 mai 1885.

Membre étranger de l'Académie Royale des Lincei, à Rome, *élu* le 7 septembre 1888.

Membre correspondant de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de Bologne, *élu* le 21 décembre 1890.

Membre étranger de la Société Royale de Londres, *élu* le 26 avril 1894.

Membre honoraire étranger de la Société Royale d'Edimbourg, *élu* le 6 mai 1895.

Membre correspondant de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, *élu* le 29 décembre 1895 (v. s.).

Membre correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Prusse, à Berlin, *élu* le 30 janvier 1896.

Membre correspondant de l'Académie Royale des Sciences d'Amsterdam, *élu* le 11 mai 1897.

Membre étranger de l'Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples, *élu* le 20 novembre 1897.

Membre correspondant de l'Institut Royal Vénitien des Sciences, Lettres et Arts, à Venise, *élu* le 27 février 1898.

Membre associé étranger de l'Académie Nationale des Sciences de Washington, *élu* le 22 avril 1898.

Membre étranger de la Société Royale des Sciences de Danemark, à Copenhague, *élu* le 21 avril 1899.

Membre étranger de l'Académie Royale des Sciences de Suède, à Stockholm, *élu* le 6 juin 1900.

Membre correspondant de l'Académie Royale des Sciences de Bavière, à Munich, *élu* le 18 juillet 1900.

Membre associé de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles, *élu* le 15 décembre 1902.

Membre étranger de l'Académie Royale des Sciences de Turin, *élu* le 14 juin 1903.

Membre honoraire de l'Académie Royale des Sciences de Vienne, *élu* le 7 août 1908, *élu* Membre correspondant le 3 août 1903.

Membre étranger de l'Académie Royale des Sciences de Hongrie, à Budapest, *élu* le 23 mars 1906.

Membre honoraire de l'Académie Royale d'Irlande, à Dublin, *élu* le 16 mars 1907.

Membre d'honneur étranger de l'Académie Nationale de Roumanie, à Bucarest, *élu* le 11 juin 1909.

Membre correspondant de l'Académie des Sciences, des Arts et des Belles-Lettres de Caen, *élu* le 24 juin 1881.

Membre associé lorrain de l'Académie de Stanislas, à Nancy, *élu* le 17 février 1893.

Président du Congrès des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900.

Vice-Président du Bureau et Secrétaire général du Congrès de Physique tenu à Paris du 6 au 12 août 1900.

Président de la 36e Assemblée générale de la Société amicale de secours des anciens Élèves de l'École Polytechnique, le 25 janvier 1903.

Président de la Commission des finances de l'Association Géodésique internationale, *élu* à la Conférence générale tenue à Budapest du 26 au 28 septembre 1906; *élu* Membre de cette Commission à la Conférence générale tenue à Copenhague du 4 au 13 août 1903.

Président de la Société mathématique de France, en 1886 et en 1900.

Président de la Société astronomique de France, en 1901-1902 et en 1902-1903.

Président de la Société Française de Physique, en 1902.

Docteur honoraire de l'Université de Cambridge. *élu* le 12 juin 1900.

Docteur *honoris causa* en Mathématiques de l'Université Royale Frédéricienne de Christiania, *élu* le 6 septembre 1902.

Docteur honoraire en Philosophie de l'Université de Kolozsvár (Hongrie), *élu* le 8 janvier 1903.

Docteur honoraire en Sciences de l'Université d'Oxford, *élu* le 24 juin 1903.

Docteur honoraire en Loi de l'Université de Glascow, *élu* le 23 avril 1907.

Docteur *honoris causa* de l'Université libre de Bruxelles, *nommé* le 19 novembre 1909.

Docteur *honoris causa* en Philosophie de l'Université de Stockholm, *nommé* le 7 décembre 1909.

Docteur *honoris causa* en Médecine et en Chirurgie de l'Université de Berlin, *nommé* le 12 octobre 1910.

Membre honoraire de la Société philosophique de Cambridge, *élu* le 24 novembre 1890.

Membre du Conseil directeur du Cercle mathématique de Palerme, *élu* le 18 janvier 1891.

Membre honoraire de la Société mathématique de Londres, *élu* le 14 avril 1892.

Membre honoraire de la Société de Littérature et de Philosophie de Manchester, *élu* le 26 avril 1892.

Membre étranger de la Société Hollandaise des Sciences de Harlem, *élu* le 21 mai 1892.

Membre associé de la Société Royale astronomique de Londres, *élu* le 9 novembre 1894.

Membre de la Société philosophique Américaine, à Philadelphie, *élu* le 19 mai 1899.

Membre étranger de la Société Italienne des Sciences (*dite* des Quarante), à Rome, *élu* le 2 janvier 1900.

Membre honoraire de la Société des Sciences de Finlande (*Societatis Scientiarum Fennicæ*), à Helsingfors, *élu* le 15 avril 1903.

Membre honoraire de la Société mathématique de Kharkow, *élu* le 12 octobre 1903 (v. s.).

Membre honoraire de la Société physicomathématique de Kasan, *élu* le 14 février 1904 (v. s.).

Membre honoraire de la Société des Sciences physiques et médicales d'Erlangen, *élu* le 27 juin 1908.

Membre du Comité d'organisation du Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques (Exposition universelle internationale de 1889), *nommé* par le Ministre du Commerce et de l'Industrie le 9 novembre 1888.

Président du Bureau du Comité d'organisation du Congrès international de Bibliographie, *élu* le 16 novembre 1888.

Président du Congrès international de Bibliographie, *élu* le 16 juillet 1889.

Président du Bureau de la Commission permanente internationale du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, *élu* le 19 juillet 1889.

Président du Comité de rédaction du *Bulletin Astronomique* publié par l'Observatoire de Paris, *nommé* le 4 janvier 1897.

Pour la publication de l'*International Catalogue of Scientific Literature :* Membre du Conseil international, *élu* le 12 juin 1900 ; Membre du Comité exécutif, *élu* le 12 décembre 1900.

Rapporteur de la Commission du III^e Concours du Prix Lobatschewsky *décerné* le 14 février 1904 (v. s.).

Membre de la Commission de la Médaille Guccia, *décernée* en 1908.

Membre du Comité d'honneur de la Ligue pour la Culture française, fondée par M. Jean Richepin le 3 juin 1911.

Prix d'honneur au Concours général en Mathématiques élémentaires (Lycée de Nancy), le 12 août 1872.

Prix d'honneur au Concours général en Mathématiques spéciales (Lycée de Nancy), le 4 août 1873.

Mention très honorable de l'Académie des Sciences, dans le Concours pour le Grand Prix des Sciences mathématiques, le 14 mars 1881.

Prix Poncelet de l'Académie des Sciences de Paris, pour l'ensemble de ses Travaux mathématiques, *décerné* le 21 décembre 1885.

Prix Jean Reynaud de l'Académie des Sciences de Paris, *décerné* le 21 décembre 1896.

Médaille d'Or de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, *votée* le 1er avril 1909, *décernée* le 2 août 1909.

Prix fondé par S. M. le Roi de Suède et de Norvège Oscar II, à l'occasion de son 60^e anniversaire, *décerné* le 21 janvier 1889.

Médaille d'Or de la Société Royale astronomique de Londres, *décernée* le 9 février 1900.

Médaille Sylvester de la Société Royale de Londres, *décernée* le 30 novembre 1901.

Prix Bolyai de l'Académie Hongroise des Sciences, à Budapest, *voté* le 13 octobre 1901, *décerné* le 18 avril 1905.

Médaille d'Or Lobatschewsky de la Société physicomathématique de Kasan, *décernée* le 14 février 1904 (v. s.).

Officier d'Académie, *nommé* le 23 avril 1881.

Officier de l'Instruction publique, *nommé* le 13 juillet 1889.

Chevalier de la Légion d'honneur, *nommé* le 4 mars 1889.
Officier de la Légion d'honneur, *promu* le 16 mai 1894.
Commandeur de la Légion d'honneur, *promu* le 14 janvier 1903.

Chevalier de l'Étoile Polaire de Suède, *nommé* le 14 novembre 1883.
Commandeur de première classe de l'Étoile Polaire de Suède, *promu* le 15 juin 1905.

PREMIÈRE PARTIE

PÉRIODE PRÉLIMINAIRE ET PREMIÈRES MANIFESTATIONS.

A. — LA PRÉPARATION DU CENTENAIRE ET L'ÉDITION DES ŒUVRES DE HENRI POINCARÉ.

La commémoration du centenaire de la naissance de Henri Poincaré a donné lieu, au cours de l'année 1954, à un certain nombre de manifestations, en particulier pendant la décade du 13 au 22 mai, et ce *Livre du centenaire* vise à en conserver le souvenir.

Ce n'est pas en quelques jours que des manifestations de cette importance peuvent s'organiser, et la plupart de celles-ci ont été préparées par un Comité National présidé et animé par le Professeur Gaston Julia, qui en 1948 avait déjà été chargé, par ses collègues de l'Académie des Sciences, de reprendre et d'achever l'édition des *Œuvres de Henri Poincaré*, dont le principe avait été retenu par l'Académie dès 1913. En raison des difficultés créées par deux guerres et des dévaluations successives, trois volumes seulement étaient sortis en 1948; il en restait sept à publier, avec tout le travail scientifique de vérification, d'annotation, et de correction correspondant.

En acceptant cette charge le Professeur Gaston Julia s'est donné comme terme d'aboutissement de sa mission le 29 avril 1954, 100e anniversaire de la naissance de Henri Poincaré, et dès ce moment il a voulu que ce centenaire soit fêté avec éclat. Pour aboutir il lui a fallu susciter de généreux concours, et il a pensé que c'était parmi les anciens polytechniciens qu'il pourrait surtout les trouver. Aussi est-ce à l'École Polytechnique que, le 16 novembre 1948, il a inauguré sa croisade en prononçant à l'amphithéâtre Gay-Lussac, devant un grand nombre d'anciens élèves et de personnalités du monde scientifique et industriel, l'allocution suivante qui est un véritable programme d'action.

ALLOCUTION DE M. GASTON JULIA.

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE LE 16 NOVEMBRE 1948.

MONSIEUR LE GRAND CHANCELIER,
MONSIEUR LE SECRÉTAIRE PERPÉTUEL,
MONSIEUR LE RECTEUR,
MON GÉNÉRAL,
MESDAMES, MESSIEURS, MES CHERS CAMARADES,

La réunion d'aujourd'hui est destinée à vous présenter un projet, auquel nous souhaitons que vous vous intéressiez, afin que nous puissions le réaliser rapidement. Disons tout de suite qu'il s'agit de poursuivre l'édition des œuvres (¹) d'Henri POINCARÉ, l'illustre savant qui, avec LAGRANGE et CAUCHY, partage la gloire du premier rang dans les mathématiques françaises.

Un Comité vient d'être constitué, au sein de la *Société des Amis de l'École Polytechnique*, afin de réunir les moyens nécessaires à la réalisation de ce projet. Nous pensons que cette réalisation est une œuvre *d'intérêt national*, mais dont la portée dépasse nos frontières; elle intéresse non seulement tout le monde savant, mais encore tous ceux auxquels les Mathématiques apportent un instrument de travail essentiel, c'est-à-dire tous les techniciens. C'est à ce titre que nous nous adressons à vous et que nous voyons en vous les agents actifs de cette réalisation.

Ne nous dites pas que l'heure est bien mal choisie pour une telle entreprise et que nous ne réussirons pas. On nous l'a déjà dit. Nous pourrions répondre par la devise du Taciturne — mais ce n'est pas la nôtre — Nous entreprenons, nous, parce que nous espérons; nous croyons que nous réussirons; et nous le croyons parce que nous sommes persuadés que vous nous aiderez tous. Notre

---

(¹) Il s'agit, bien entendu, de rassembler (en 10 volumes) les Mémoires ou Notes publiées par Henri POINCARÉ dans un grand nombre de revues françaises ou étrangères. Certaines de ces revues sont difficilement accessibles, et certains numéros introuvables. Elles sont dispersées dans les bibliothèques. Le rassemblement projeté mettra, sous une forme commode, l'ensemble de ces Mémoires à la disposition de tous les chercheurs.

entreprise est une œuvre de foi, que soutient notre confiance profonde dans le génie français.

A l'heure ou, pressé de toutes parts, Foch doit céder quelque terrain d'un côté et de l'autre, il attaque encore et son offensive réussit. Illustre exemple de foi et de confiance, sur un plan autrement élevé que le nôtre, exemple qui doit nourrir notre espoir.

A l'heure ou notre pays souffrant doit accepter l'aide matérielle de ses amis, il est juste, il est beau qu'il offre au monde savant une contrepartie spirituelle que ce monde attend, puisque aussi bien c'est l'insistance de nombreux savants français et étrangers qui conduisit votre serviteur à présenter à l'Académie des Sciences un vœu de ces savants tendant à la reprise rapide de l'édition des œuvres de Poincaré.

L'Académie des Sciences a publié depuis 1916, trois volumes de ces œuvres, en avançant les fonds nécessaires à l'impression. Il reste à publier sept volumes, et, en valeur actuelle, la somme nécessaire à l'impression est de l'ordre de 20 millions. L'Académie n'a plus les moyens de le faire : il faut que nous les lui fournissions, afin qu'elle ne soit pas gênée dans son travail et ses responsabilités scientifiques par des soucis d'ordre matériel, afin que ne soit pas indéfiniment retardée cette publication indispensable qui n'a déjà été que trop retardée par deux longues guerres et tous les troubles économiques qu'elles entraînent.

Il faut aussi que nous trouvions l'argent nécessaire pour aboutir dans un délai raisonnable, qui ne devrait pas dépasser cinq ans. Pourquoi cinq ans ? Tout simplement parce que, le 29 avril 1854, naissait à Nancy Henri Poincaré et parce que nous croyons qu'il serait élégant, au 29 avril 1954, lorsque nous fêterons le premier centenaire de cette naissance, d'apporter au public scientifique, qui l'attend, la *conclusion* de l'édition des œuvres complètes. Nous voudrions aussi éditer deux volumes avant le printemps 1950 (et il nous faudra pour cela, réunir environ 5 millions dans le courant de 1949), afin de présenter ces deux volumes au Congrès international de Mathématiques de 1950; nous ferions ensuite un appel étendu à des souscriptions internationales, ce que nous ne voudrions pas faire avant d'avoir largement remis en train l'œuvre entière.

Voilà, en quelques lignes, exposé le projet que nous formons, et pour lequel nous demandons votre actif concours. Que chacun, dans le service où il travaille, dans le service ou la société qu'il dirige, ou parmi ses relations, s'ingénie à nous trouver le plus grand nombre de souscriptions. Qu'il songe que les frais d'édition d'une telle œuvre sont matériellement peu de chose auprès de ce que coûtent les laboratoires, les services d'études ou les essais, et que cette œuvre est pourtant une pièce indispensable de tous les services de recherches qui utilisent des mathématiques quelque peu savantes. Nous aimerions aussi que vous puissiez intéresser à notre entreprise tous ceux, même non scientifiques, à qui importe le rayonnement de la pensée française. Soyez persuasifs, et vous le serez d'autant plus que vous savez bien, tous, que notre entreprise est belle et qu'elle mérite quelques efforts. Songez enfin que nos voisins Suisses ont réuni par souscriptions *deux millions de leurs francs* pour éditer les œuvres d'EULER.

Les souscriptions que nous demandons sont à *fonds perdus;* car nous comptons utiliser le produit de la vente des œuvres ainsi éditées en éditant d'autres œuvres de nos grands mathématiciens (Camille JORDAN, etc.). Il est, en effet, incontestable que nous avons été jusqu'ici assez lents à publier les œuvres complètes de nos grands mathématiciens. L'édition de CAUCHY (mort en 1858) n'est elle-même pas terminée. Dans d'autres pays, au contraire, il n'est pas rare que les œuvres complètes de leurs grands mathématiciens soient publiées de leur vivant. Nous pensons, et vous penserez, j'en suis sûr, avec nous, qu'il faudrait rendre plus facilement accessible notre patrimoine scientifique, et c'est la forme la plus générale de notre ambition.

* * *

Le professeur Gaston JULIA a tenu à ce que, non seulement les anciens élèves de l'École Polytechnique, mais aussi les nouvelles promotions participent à cette œuvre, et il a fait appel également aux élèves présents à l'École à cette époque.

Répondant au vœu de M. Gaston JULIA, le Patronat français, dans son Assemblée générale du 1er juillet 1949, accueillait avec chaleur la suggestion qui lui était faite par M. Pierre RICARD, Vice-Président de son Conseil National, et autorisait ce dernier à associer le Patronat français à la souscription nationale ouverte sous les auspices de l'Académie des Sciences, pour permettre d'achever la publication des œuvres de Henri POINCARÉ. Aussi, en mars 1950, M. Pierre RICARD lançait-il un appel à ses adhérents pour préciser les raisons et les modalités de cette souscription, dont nous reproduisons ici les principaux passages.

CIRCULAIRE DU PATRONAT FRANÇAIS A PROPOS DE LA SOUSCRIPTION NATIONALE POUR LA PUBLICATION DES ŒUVRES D'HENRI POINCARÉ.

Il ne m'appartient certes pas de rappeler tout au long les titres d'Henri POINCARÉ à figurer parmi les plus illustres savants de tous les temps; en bref on peut dire que son nom porte témoignage, avec une douzaine d'autres, que dans l'histoire de la pensée humaine, la France aura brillé au premier rang : les temps que nous vivons et qui sont durs pour notre amour-propre national, donnent toute sa valeur de réconfort à une réflexion de ce genre.

Henri POINCARÉ a été un génie encyclopédique, et probablement, à une ère où la spécialisation devait finir par tout envahir, le dernier génie encyclopédique.

« Henri POINCARÉ, écrivait Paul PAINLEVÉ en 1913, était vraiment le cerveau vivant des Sciences rationnelles. Mathémathiques, Astronomie, Physique, Cosmogonie, Géodésie, il a tout embrassé, tout pénétré, tout approfondi. Inventeur incomparable, il ne s'est pas borné à suivre ses inspirations, à ouvrir des voies inattendues, à découvrir dans l'univers abstrait des mathématiques mainte terre inconnue. Partout où la raison d'un homme a su se glisser, si subtils, si hérissés qu'aient été ses chemins, qu'il s'agît de télégraphie sans fil, de phénomènes radiologiques ou de la naissance de la Terre, Henri POINCARÉ s'est glissé près de lui pour aider et prolonger ses recherches, pour suivre le précieux filon.

« Avec le grand mathématicien français disparaît donc le seul homme dont la pensée fût capable de faire tenir en elle toutes les autres pensées, de comprendre jusqu'au fond, et par une sorte de découverte renouvelée, tout ce que la pensée humaine peut aujourd'hui comprendre. Et c'est pourquoi cette disparition prématurée, en pleine force intellectuelle, est un désastre. Des découvertes seront retardées, des tâtonnements se prolongeront parce que le cerveau puissant et lumineux ne sera plus là pour rapprocher des recherches qui s'ignorent, ou pour jeter, dans un monde de faits obscurs brusquement révélés par l'expérience, le coup de sonde hardi d'une théorie nouvelle.

A cet éloge déjà ancien on peut ajouter aujourd'hui que dans maint domaine de la théorie physique, POINCARÉ aura été un étonnant précurseur : qu'il s'agisse de la mécanique de la Relativité, ou de la théorie des Quanta, il avait pressenti et annoncé le caractère nécessaire de la révolution profonde que les théories modernes devaient apporter après sa mort dans le majestueux édifice de la Physique mathématique classique.

Enfin si nous devons nous en rapporter aux seuls initiés pour admirer sur parole les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* ou les inoubliables Mémoires *Sur les fonctions fuchsiennes*, tout esprit cultivé trouve dans ces Ouvrages de Philosophie scientifique dont *La Science et l'Hypothèse* est la plus parfaite réussite, une vigueur de pensée et une maîtrise du style qui font songer à PASCAL.

Cette œuvre considérable et d'une richessse déconcertante est appelée, pour peu qu'elle soit judicieusement diffusée, à jouer longtemps encore, nous disent les voix les plus autorisées de l'Académie des Sciences, un rôle fécond dans les recherches les plus diverses, non seulement de Mathématiques pures, mais de Mathématiques appliquées à la Physique et à l'art de l'Ingénieur.

Le monument que la gratitude nationale se doit d'élever à cet illustre Français consiste à rassembler les quelque 500 Mémoires ou Notes qu'il a publiés dans un grand nombre de revues françaises ou étrangères dont beaucoup ont aujourd'hui cessé d'exister et dont les collections dispersées dans les bibliothèques scientifiques sont difficilement accessibles : il convient de les réunir, les ordonner, les annoter, pour mettre l'ensemble de l'œuvre à la disposition de tous les chercheurs. Le tout doit faire dix gros volumes *in-quarto*, chacun d'environ 600 pages.

Le projet n'est pas nouveau, ... la publication a été décidée par le Ministère de l'Instruction Publique dès 1913, au lendemain même de la mort de Henri POINCARÉ, et le soin de la surveiller et diriger confié au Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, l'illustre géomètre Gaston DARBOUX; il préfaçait ainsi, en 1916, le premier volume :

« Je ne verrai pas l'achèvement de la publication; mais ce sera l'honneur de ma carrière d'en avoir provoqué et commencé l'exécution. »

Jamais sans doute, DARBOUX n'aurait imaginé, en cette année 1916 où malgré les angoisses de la guerre, la France se sentait une grande nation, que 33 ans plus tard l'œuvre resterait encore aux deux tiers inachevée; deux volumes seulement se sont ajoutés au premier, l'un en 1928, l'autre en 1934 et il en reste sept à paraître .... Ruinée entre temps par les dévaluations successives, l'Académie des Sciences n'a plus les moyens matériels d'achever la publication ....

L'Académie des Sciences a besoin de près de 15 millions de francs en quatre ans, dont environ 5 millions tout de suite et le solde étalé par tranches égales sur les années 1951, 1952, 1953.

M. Robert LACOSTE, quand il était encore Ministre de l'Industrie et du Commerce, avait bien voulu, à ma demande, d'une part promettre la participation active des grandes Sociétés nationalisées (contactées directement par M. BOUTTEVILLE), d'autre part autoriser les Centres techniques industriels à souscrire. (M. LE THOMAS, Directeur du Centre technique de la Fonderie s'est chargé de les solliciter.)

Il reste alors à trouver 10 millions répartis en quatre annuités. J'ai pensé que, devant ce devoir à assumer et cet exemple à donner, le Patronat français ne se déroberait pas à l'appel de l'Académie des Sciences. Le Président Georges VILLIERS m'a confirmé dans cet espoir. Après l'accueil fait en juillet dernier par notre Assemblée générale à ma proposition de principe, je ne doute plus de la réussite.

* * *

Grâce à l'action personnelle de M. Gaston JULIA, grâce au dévouement des collaborateurs dont il a su s'entourer, grâce à la façon dont tout le monde a répondu à son appel, le dixième et dernier volume des œuvres de Henri POINCARÉ était prêt pour la date fixée, et c'est uniquement pour des raisons matérielles d'organisation que les grandes cérémonies commémoratives ont été reportées du 29 avril au milieu de mai 1954.

On trouvera ci-après, journée par journée, le texte des discours ou conférences qui ont marqué les cérémonies du mois de mai. Afin de les replacer dans leur cadre, il a paru nécessaire de les accompagner d'un récit des manifestations au cours desquelles ces discours ou conférences ont été prononcés. L'ensemble de ces récits donnera un aperçu de la façon dont a été célébré le centenaire de la naissance de Henri POINCARÉ.

La composition du Comité de Patronage, qui est reproduite en tête de ce livre du Centenaire, montre le prix que les plus hautes autorités de l'État ont bien voulu attacher à la célébration de ce Centenaire; celle du Comité d'Honneur l'intérêt que le monde scientifique lui a accordé, presque toutes les institutions étrangères auxquelles Henri POINCARÉ avait appartenu à un titre quelconque ont tenu à y figurer; enfin la liste des Membres du Comité d'Organisation donne les noms de ceux auxquels doit aller une particulière reconnaissance.

B. — HOMMAGE DE LA MARINE MARCHANDE ET DE L'ADMINISTRATION DES POSTES.

Mais avant de passer à mai 1954, il faut remonter un peu en arrière et rappeler que, à l'initiative du Professeur Gaston JULIA, l'armement français a tenu à rendre hommage à la mémoire de celui dont on allait bientôt fêter le centenaire. La Compagnie Maritime des Chargeurs Réunis a en effet donné le nom de *Henri Poincaré* à un de ses paquebots mixtes les plus récents. Construit par les Ateliers et Chantiers de Penhoët, celui-ci a été lancé à Saint-Nazaire le 31 octobre 1952, et inauguré à Marseille le 8 décembre 1953. Grâce à cette nouvelle unité de notre Marine Marchande, qui assure depuis le 16 décembre 1953 le service de la ligne d'Indochine, le nom de Henri POINCARÉ continue à servir, outre-mer, le prestige de la France.

Une courte notice sur Henri POINCARÉ, que nous reproduisons ici, avait été insérée dans la plaquette éditée par les Chargeurs Réunis pour l'inauguration du paquebot; une médaille à l'effigie de Henri POINCARÉ a été frappée d'autre part pour rappeler cette inauguration.

NOTICE DES CHARGEURS RÉUNIS SUR HENRI POINCARÉ.

Lorrain par son père et par sa mère, Henri POINCARÉ est né à Nancy le 29 avril 1854, et c'est là qu'il connut l'invasion en 1870 et l'occupation en 1873. Son âme avait été fortement marquée par ses années de jeunesse, et il n'est pour s'en convaincre que de lire les pages si vibrantes dans lesquelles il parle des souffrances ou de la mission de la France et de l'amour pour la Patrie. Toute sa vie il a eu en vue la grandeur et le service du Pays.

Entré premier à l'Ecole Polytechnique, il en est sorti dans le Corps des Mines. Devenu docteur ès sciences en 1879, il a été détaché à la Faculté des Sciences de Caen, puis à la Sorbonne à Paris, et il a pu se consacrer tout entier à la Science et à l'enseignement supérieur. Il y a donné immédiatement toute sa mesure, et c'est par un véritable feu d'artifice de Notes à l'Académie des Sciences — on n'en compte pas moins de dix-huit dans la seule année 1881 — et par sa découverte des fonctions fuchsiennes qu'il s'est fait connaître dans le monde savant. Aussi dès le début de 1887, alors qu'il n'avait pas encore 33 ans, Henri POINCARÉ était élu à l'Académie des Sciences.

Au début de 1889, son nom atteint le grand public, quand, l'emportant sur des savants étrangers chevronnés, Henri POINCARÉ reçoit le prix fondé par le Roi OSCAR II de Suède. Il n'est pas possible d'énumérer son œuvre scientifique qui est considérable; en dehors des Ouvrages ou des cours publiés en volumes, l'édition complète des Notes, Mémoires ou Articles originaux qu'il a donnés à diverses occasions comportera dix tomes.

Mais Henri POINCARÉ n'était pas seulement un savant, c'était aussi un philosophe, et les quatre livres de la bibliothèque de Philosophie scientifique qu'il a laissés, *La Science et l'Hypothèse*, *La Valeur de la Science*, *Science et Méthode*, *Dernières pensées* ont fait participer un public d'intellectuels à ses réflexions sur les fondements de la Science ou l'origine des connaissances humaines. On y trouve « la profession de foi d'un esprit passionné de vérité, et qui sait que la recherche de celle-ci n'est possible qu'avec le scalpel du doute. C'est, si l'on peut dire, le principe de la relativité de la vérité scientifique », mais on y trouve aussi des enseignements d'une haute valeur morale.

Henri POINCARÉ n'a pas cherché les honneurs, et sa gloire n'a rien changé à sa vie tranquille et régulière ni à sa simplicité. Mais après l'Académie des Sciences, l'Académie Française, et toutes les Académies scientifiques du monde ont voulu le compter dans leurs rangs. Après la médaille d'or du Roi OSCAR, pour ne parler que des étrangers, la médaille d'or de la Société Astronomique de Londres, la médaille Sylvester de la Société Royale de Londres, la médaille d'or Lobatschewsky de la Société physicomathématique de Kasan, le prix Bolyai de l'Académie hongroise des Sciences de Budapest lui ont été décernés. S'il en a ressenti quelque fierté, ce n'est pas pour en tirer vanité pour lui-même, mais parce qu'il était heureux d'être l'artisan d'un plus grand rayonnement de la France dans le monde.

Ceux des savants français ou étrangers qui ont eu a apprécier son œuvre, soit de son vivant soit après sa mort survenue le 17 juillet 1912 alors qu'il n'avait encore que 58 ans, se sont plu à reconnaître en lui une puissance d'analyse prodigieuse, et une intuition remarquable qui le faisait entrer de plain-pied dans toute recherche scientifique si spéciale et éloignée de ses travaux personnels qu'elle fût.

*
* *

De son côté, l'Administration des Postes a édité, quelques mois avant le Centenaire, un timbre Henri POINCARÉ dû au graveur J. PHEULPIN qui a donné lieu à un tirage limité.

C. — LE JEUDI 13 MAI 1954 AU MUSÉE PÉDAGOGIQUE.

La première en date des cérémonies du Centenaire a été organisée le jeudi 13 mai 1954 au Musée Pédagogique par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, et par le Centre de Documentation Pédagogique. Placée sous la présidence de M. Albert CHÂTELET, Doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Paris, cette cérémonie comportait l'inauguration d'une exposition de souvenirs et de documents d'archives de, et sur Henri POINCARÉ, et une conférence de M. René GARNIER, Membre de l'Académie des Sciences et professeur à la Sorbonne, sur la géométrie de Henri POINCARÉ.

L'exposition, que M. MONJALLON, Président de l'Association, a présentée en quelques mots, évoquait successivement la vie de Henri POINCARÉ, vie d'étudiant, vie de professeur ou vie privée (sous la forme de devoirs d'écoliers, de cahiers de notes prises à l'École des Mines, de lettres et de souvenirs ou photographies); son œuvre, mathématique et philosophique (sous la forme de lettres, de manuscrits ou d'Ouvrages imprimés) et le rayonnement de son œuvre en France ou à l'étranger (sous la forme d'articles de presse récents ou anciens et de traductions en diverses langues de certains de ses Ouvrages).

Cette exposition ne faisait pas double emploi avec celle que le Comité

National avait organisée à l'École Polytechnique, qui ne devait s'ouvrir que le 16 mai, dont il sera parlé par suite à cette date.

On trouvera ci-après le texte de la conférence de M. Garnier, qui a été suivie d'une allocution improvisée de M. le Doyen Châtelet. Celui-ci après avoir remercié M. Garnier de son exposé magistral a évoqué le désintéressement de H. Poincaré qui a donné le nom de Fuchs aux fonctions qu'il a découvertes, alors que les travaux de Fuchs n'avaient fait que le mettre sur la voie et qu'il avait tous les droits de réclamer la paternité complète de ces fonctions. M. le Doyen Châtelet a rappelé cette phrase de Henri Poincaré lui-même, qui montre l'idée qu'il se faisait des savants. Ceux-ci, dit-il, « devraient être indifférents à la gloire; quand on a le bonheur de faire une découverte, que peut être la satisfaction de lui donner son nom, auprès de la joie d'avoir contemplé, un instant, la vérité face à face ».

CONFÉRENCE DE M. RENÉ GARNIER

AU MUSÉE PÉDAGOGIQUE, LE 13 MAI 1954.

Les fonctions automorphes de Poincaré et la Géométrie.

Mon cher Doyen,
Mesdames, Messieurs,

C'est avec émotion que j'aperçois au premier rang de cette assistance, des représentants de la famille du grand géomètre dont nous célébrons aujourd'hui la mémoire; je voudrais leur exprimer mes sentiments de profonde déférence.

Laissez-moi aussi remercier M. Monjallon et l'Association des Professeurs de Mathématiques pour m'avoir demandé cet exposé. Je n'oublie pas que la préparation à l'agrégation a été l'une de mes fonctions pendant de nombreuses années de ma carrière; j'ai participé aussi, pendant longtemps, aux jurys de ce concours. Et aujourd'hui, je suis heureux de renouveler le contact, une fois de plus, entre nos ordres d'enseignement. Mais, surtout, je voudrais dire à l'association toute ma gratitude pour m'avoir invité à parler de H. Poincaré.

L'œuvre de Poincaré est immense, en profondeur comme en étendue; et chaque fois qu'il a abordé un problème, il y a laissé, suivant l'expression de

Castelnuovo : « la marque indélébile de son génie universel » (1). L'examen d'un seul de ses Mémoires suffirait à remplir de nombreux exposés. Aujourd'hui, je ne pourrai donc vous donner qu'un aperçu bien sommaire des découvertes de Poincaré dans un domaine, où, dès l'âge de 26 ans, il a affirmé sa maîtrise; il s'agit de ses recherches sur ce que l'on a appelé, depuis, la théorie des fonctions automorphes. Ces travaux ont eu les plus profondes répercussions sur les domaines les plus divers des Mathématiques : l'Arithmétique, l'Algèbre, la Théorie des groupes, l'Analyse, la Théorie des équations différentielles. Dans cet exposé, nous nous limiterons en principe à certains aspects géométriques de la question.

Présentons d'abord quelques considérations préliminaires sur la Géométrie dite cayleyenne. Vous connaissez tous la découverte de Laguerre : en 1853, — à l'âge de 19 ans — il rattachait la notion d'angle à celle de birapport. Six ans plus tard, Cayley reprend l'idée de Laguerre en remplaçant l'ombilicale par une quadrique. Plaçons-nous dans un espace projectif réel S_3 (que l'on pourra d'ailleurs prolonger par un espace complexe), et supposons acquises les notions de point, de droite, de plan, de quadrique. Dans S_3 considérons une quadrique Ω, sans point double, définie par une équation réelle. Elle peut être imaginaire, ou convexe, ou à génératrices réelles. La première hypothèse est celle de la Géométrie elliptique, la dernière ne conduit à aucun résultat utilisable; limitons-nous à la seconde; elle nous donnera une Géométrie identique à celle de Lobatchewsky : la Géométrie hyperbolique.

Les points situés à l'intérieur de la quadrique convexe, ou « absolu », Ω sont dits *accessibles;* les droites et les plans qui contiennent des points accessibles sont dits *accessibles*. L'angle V de deux plans accessibles Π_1, Π_2 sera défini par la formule du type de Laguerre,

$$V = \frac{1}{2i} \log(\Pi_1,\, \Pi_2,\, \Pi',\, \Pi''),$$

Π', Π'' étant les deux plans tangents à Ω qui appartiennent au faisceau (Π_1, Π_2) : cette expression satisfait à la loi de Chasles. Il en est de même de l'expression

$$d = \frac{1}{2} \log(M_1,\, M_2,\, M',\, M''),$$

(1) Ces paroles ont été prononcées en 1928 au Congrès international de Bologne à propos d'un travail de Poincaré qui reste encore, à l'heure actuelle, la seule voie d'accès à un théorème fondamental de Géométrie algébrique (voir *Œuvres de Henri Poincaré*, t. VI, Paris, Gauthier-Villars, 1953, p. 178).

où M_1, M_2 sont deux points accessibles, et M', M'' les intersections de la droite M_1M_2 avec Ω. On peut donc définir d comme l'*abscisse* de M_2 sur une certaine demi-droite issue de M_1 ; M' et M'' sont les points à *l'infini* de la droite.

On appellera *déplacements* les homographies H de l'espace qui conservent Ω, ou, plutôt, qui conservent chaque système de génératrices de Ω : les déplacements conserveront donc les angles et les distances. Une *symétrie plane* S, c'est-à-dire une homologie harmonique conservant un plan, échangera les deux systèmes de génératrices de Ω, et il en sera de même des produits HS ou *antidéplacements*. On montre que le déplacement réel $\mathcal{D}$ le plus général résulte de la composition de deux déplacements (ou *rotations*) qui conservent respectivement et point par point deux droites D_1 et D_2, conjuguées l'une de l'autre par rapport à Ω. En général D_1 et D_2 ne sont pas tangentes à Ω : l'une, soit D_1, est accessible, et le déplacement qui conserve chaque point de D_1 est une *rotation elliptique* R_e (autour de D_1). Le déplacement qui conserve les points (*inaccessibles*) de D_2 est une *rotation hyperbolique* R_h autour de D_2.

Soit $x^2+y^2+z^2-t^2=0$ l'équation de Ω; les génératrices des deux systèmes ont des équations de la forme

$$\frac{x+iy}{t+z}=\lambda=\frac{t-z}{x-iy} \qquad \text{et} \qquad \frac{x-iy}{t+z}=\mu=\frac{t-z}{x-iy}\cdot$$

le déplacement $\mathcal{D}$ induit sur les génératrices du premier système (par exemple) des substitutions de la forme

$$\lambda'=\frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$$

ou, sous forme canonique

$$\frac{\lambda'-\beta}{\lambda'-\alpha}=e^{-\psi+i\varphi}\frac{\lambda-\beta}{\lambda-\alpha}. \tag{1}$$

On montre que l'angle formé par un plan issu de D_1 et par son transformé par R_e est égal à φ; et la distance d'un point de D_1 à son transformé par R_h est égale à ψ. Enfin, à côté des rotations précédentes on doit signaler les *rotations paraboliques* R_p; une telle rotation conserve point par point une certaine tangente à Ω; elle se traduit par une substitution telle que

$$\lambda'=\lambda+h \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\lambda'-\alpha}=\frac{1}{\lambda-\alpha}+h. \tag{2}$$

On dit encore que pour $\psi=0$ la substitution (1) est *elliptique;* pour

$\sin\varphi = 0$, elle est *hyperbolique;* dans le cas général elle est *loxodromique*. La substitution (2) est *parabolique*.

Nous avons ainsi réalisé, suivant CAYLEY, un modèle de Géométrie lobatchewskyenne. Mais ce n'est pas celui qu'utilisera POINCARÉ. Pour obtenir l'outil de POINCARÉ, le plus simple sera d'employer la transformation de DARBOUX sous la forme analytique.

$$\frac{x}{2X} = \frac{y}{2Y} = \frac{z}{1 - X^2 - Y^2 - Z^2} = \frac{t}{1 + X^2 + Y^2 + Z^2} = + \frac{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2}}{2Z}$$

ou

$$(3) \qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2}} = \frac{1}{t + z} = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{t - z}.$$

Les points accessibles (x, y, z, t) de S_3 rendent $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ positif et l'on prend généralement $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$ et $t > 0$. Aux points accessibles de S_3 correspondent les points (X, Y, Z) du *demi-espace* $Z > 0$ *de* POINCARÉ; aux plans et aux droites de S_3 correspondent des demi-sphères Σ ou des demi-circonférences Γ orthogonales au plan Π, ou $Z = 0$. L'angle cayleyen de deux droites ou de deux plans de S_3 est égal à l'angle euclidien des deux Γ ou des deux Σ correspondantes; la distance cayleyenne $m_1 m_2$ est égale à $\log(M_1 M_2 M' M'')$, où M_1 et M_2 sont les images de m_1 et m_2 et où M', M'' sont les intersections de Π avec la demi-circonférence Γ passant par M_1 et M_2. La longueur cayleyenne d'un arc de courbe ab, soit

$$\int_{ab} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2} \qquad (t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1),$$

est égale à l'intégrale $\int_{AB} \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}{Z}$ étendue à l'arc-image. (C'est la « L » de POINCARÉ.)

Les points de Ω ont pour images les points de Π; chaque génératrice de Ω contient un point réel m et un seul; l'image M de m a précisément pour affixe $X + iY = \lambda$. Tout déplacement cayleyen se traduit ainsi par une substitution homographique sur λ, de l'un des types déjà mentionnés. Et de même qu'une rotation cayleyenne est le produit de deux symétries par rapport à deux plans, de même une substitution sur λ est le produit de deux symétries par rapport à deux droites ou de deux inversions par rapport à deux circonférences; et, selon que ces circonférences (par exemple) seront sécantes, tangentes ou sans point commun, la rotation cayleyenne sera elliptique, parabolique ou hyperbolique.

Ces propriétés si simples jouent un rôle essentiel dans les recherches de

Poincaré. Les résultats suivants ne sont pas moins importants. Supposons qu'un groupe de déplacements cayleyens conserve un plan accessible P, et choisissons le tétraèdre de référence de façon que P ait pour équation $y = 0$. Soit A le pôle de P par rapport à Ω; soient encore $m(x0zt)$ un point de P (n'appartenant pas à Ω), m' un point de Ω situé sur mA; on a (avec $t^2 - x^2 - z^2 = 1$)

$$\frac{x'}{x} = \frac{z'}{z} = \frac{t'}{t} = \frac{\sqrt{t'^2 - x'^2 - z'^2}}{\sqrt{t^2 - x^2 - z^2}} = \frac{y'}{1},$$

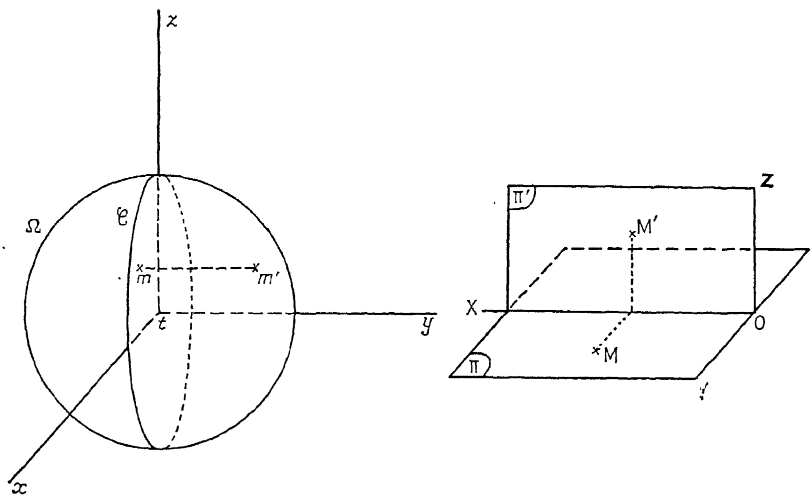


Fig. 1.

d'où, en vertu de (3), et $M[X, Y(=0), Z]$ correspondant à m; $M'[X'Y'Z'(=0)]$ à m':

$$X + iZ = \frac{x + i}{t + z} = \frac{x' + iy'}{t' + z'} = \lambda = X' + iY'.$$

Quand m tend vers $\mathcal{C}$, intersection de Ω par P, m' tend vers $\mathcal{C}$, et λ (qu'on définira au moyen de x', y', z', t') tend vers une valeur réelle. Tout déplacement qui conserve P se traduit donc par une substitution (1) qui change λ réel en λ' réel; les rapports mutuels de a, b, c, d, sont donc réels et a, b, c, d, peuvent être supposés réels. Les déplacements des points de P pourront être interprétés à volonté d'une manière identique, soit dans le demi-plan $\Pi(Z = 0, Y \geqq 0)$ soit dans le demi-plan $\Pi'(Y = 0, Z \geqq 0)$, orthogonal à Π le long de l'axe OX) [1].

---

[1] Sur la figure 1, le point M, de Π, est l'image de m'; le point M', de Π', est l'image de m.

Si le plan P avait une équation de forme générale, l'axe réel serait remplacé par une circonférence du plan Π et le demi-plan Π' par une demi-sphère issue de la circonférence précédente.

Tel est l'outil géométrique qui servira à POINCARÉ dès ses premières recherches. Il nous faut parler maintenant de l'origine de ces recherches.

D'une manière un peu simpliste, on pourrait la situer dans un problème de pavage introduit par la théorie des fonctions analytiques. Les écoliers apprennent que l'on peut réaliser un pavage plan par des polygones égaux; triangles équilatéraux ou rectangles, carrés, rectangles, hexagones réguliers, etc. Vous savez que la théorie des fonctions elliptiques conduit à paver le plan euclidien par un réseau de parallélogrammes. Or, depuis les travaux d'HERMITE on pouvait réaliser un pavage du plan hyperbolique. Considérons les périodes de l'intégrale elliptique de première espèce

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-x)}};$$

envisagées comme fonctions de x, ces périodes satisfont à l'équation différentielle

$$x(1-x)y'' + (1-2x)y' - \frac{1}{4}y = 0; \tag{4}$$

or on peut définir deux périodes 2ω, $2\omega'$, dites *primitives*, telles que l'expression $\frac{4}{27}\frac{(1-x+x^2)^3}{x^2(1-x)^2}$, fonction du rapport $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ reste invariante si l'on effectue sur τ une substitution

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{5}$$

à coefficients entiers et de déterminant égal à 1. Si l'on pose $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ (τ_1 et τ_2 réels) et que l'on trace la demi-circonférence $\Gamma(\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1,\ \tau_2 > 0)$ et les demi-droites $\tau_1 = \pm\frac{1}{2}, \left(\tau_2 > \sqrt{3}\right)$; on aura défini dans le demi-plan analytique supérieur $\tau_2 > 0$ un triangle T, ou, plus exactement, un quadrilatère, possédant en $\tau = i$ un angle plat, et que l'on peut engendrer à partir de la moitié de gauche $T'(\tau < 0)$ en la complétant par une symétrie relative à $\tau_1 = 0$.

Si l'on continue à prendre les symétriques de T' par rapport à ses côtés rectilignes, son inverse relativement au côté curviligne, et ainsi de suite, indéfiniment pour chacun des nouveaux domaines ainsi obtenus, on aura constitué un réseau de triangles qui, après un nombre suffisant d'opérations finit par

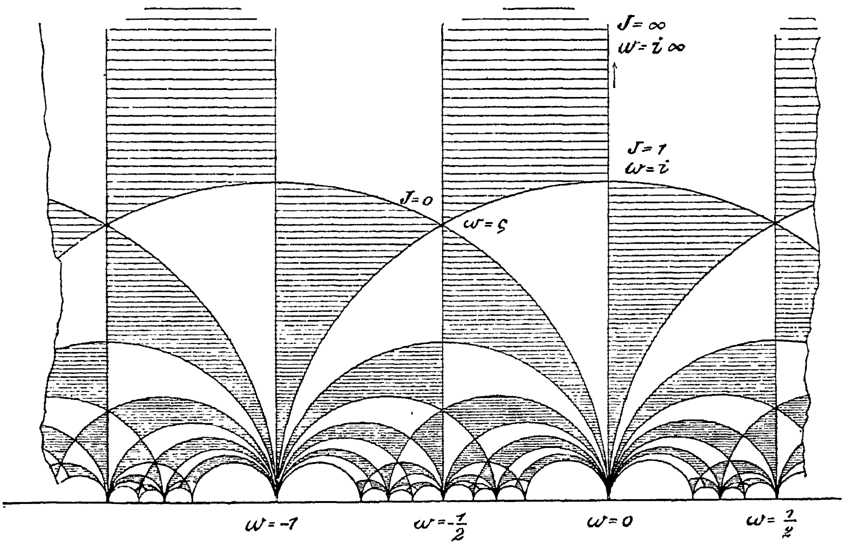

$J = \infty$
$\omega = i\infty$
$J = 1$
$\omega = i$
$J = 0$
$\omega = \rho$
$\omega = -1$
$\omega = -\frac{1}{2}$
$\omega = 0$
$\omega = \frac{1}{2}$

Fig. 2.

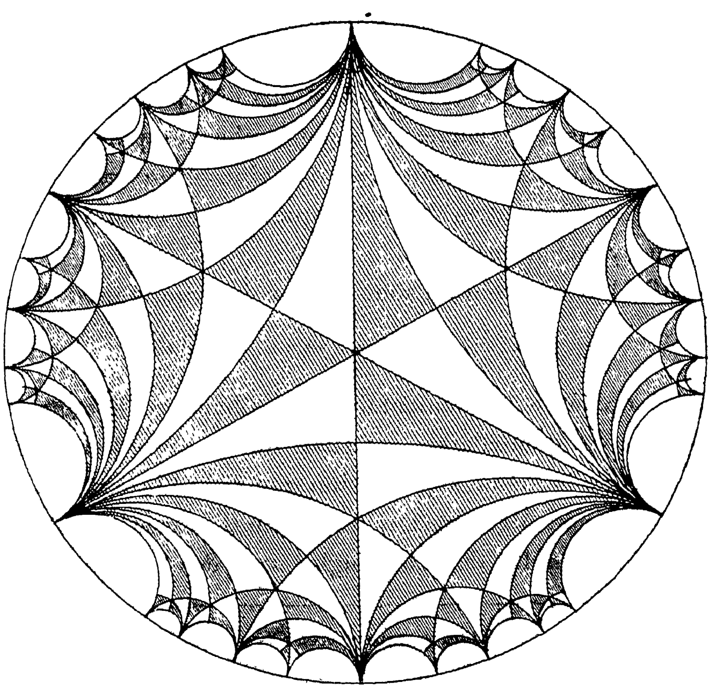


Fig. 3.

recouvrir toute région bornée située au-dessus de la droite $\tau_2 = \varepsilon$ (où ε est arbitrairement petit); on a réalisé ainsi la *division modulaire* du demi-plan supérieur (*fig.* 2) [1]; la figure 3 se déduit par inversion de la figure précédente; la figure 4 les traduit toutes deux dans l'espace cayleyen $(xyzt)$. Tout point τ' du demi-plan supérieur se déduit d'un point τ convenablement choisi dans T moyennant une substitution (5); on dit que τ' est *équivalent* à τ; par contre, deux points quelconques intérieurs à T ne sont équivalents par aucune substitution (5). En tous les points équivalents à τ, $x(\tau)$ reprend la même valeur. Par définition, T est un *domaine fondamental* du

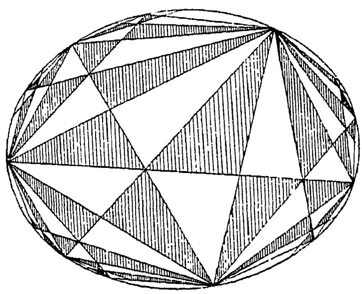


Fig. 4.

groupe modulaire (5). Or, les substitutions (5) peuvent être considérées comme définissant des déplacements du plan hyberbolique; tous les domaines équivalents à T sont des images dans Π de domaines égaux ou *congruents* entre eux, au sens de la Géométrie hyperbolique. On a ainsi réalisé un pavage régulier du plan hyperbolique.

Signalons enfin l'existence d'un sous-groupe du groupe modulaire

$$a \equiv 1 \equiv d, \qquad b \equiv 0 \equiv c \qquad (\mathrm{mod}\, 2)$$

possédant pour domaine fondamental un quadrilatère symétrique d'angles nuls (*fig.* 5 et 6). Ce quadrilatère est aussi un domaine fondamental pour la fonction $x(\tau)$, où x a la même signification que dans l'intégrale I.

SCHWARZ avait cherché à généraliser les résultats précédents en effectuant des pavages à l'aide de triangles dont les angles sont des sous-multiples de π [2];

(1) La figure 2 et les suivantes sont extraites des Ouvrages de KLEIN et FRICKE cités à la bibliographie. Sur la figure 2, ω a la signification de la variable τ du texte.

(2) La figure 7 se rapporte au cas où les angles du triangle sont égaux à $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{7}$.

les fonctions invariantes correspondant à ces pavages se rattachaient encore à des équations (4) du type hypergéométrique. Mais le problème général restait intact : comment déterminer tous les pavages du demi-plan analytique ou même

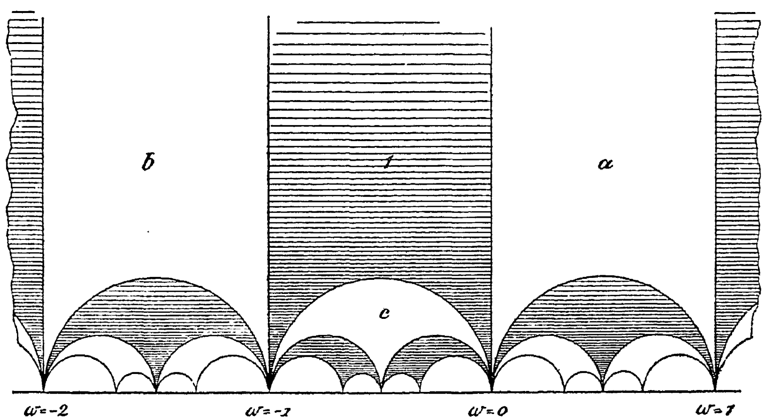


Fig. 5.

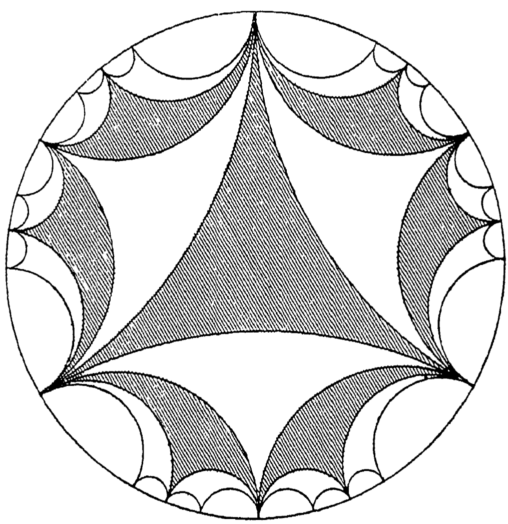


Fig. 6.

du plan tout entier à partir d'un polygone (convenablement choisi); et un tel pavage ayant été réalisé, comment construire toutes les fonctions analytiques méromorphes qui reprennent la même valeur en des points équivalents du pavage ? Ces problèmes, qui se posaient si naturellement, avaient résisté à tous les efforts, lorsque Poincaré, à l'aube même de sa carrière scientifique, s'y attaqua, pour les résoudre, suivant le mot de Darboux, avec une simplicité inespérée. Il ne saurait être question ici de retracer, même en ses grandes

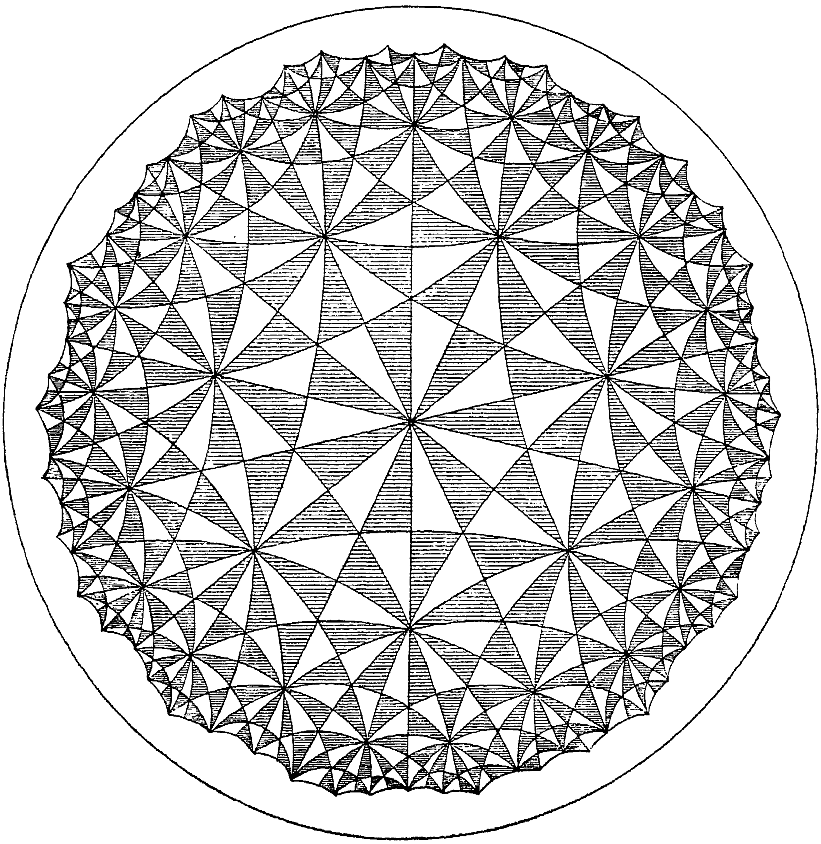


Fig. 7.

lignes, la méthode de Poincaré; pourtant, je voudrais mettre en relief quelques faits essentiels.

*
* *

Considérons un groupe G de substitutions de la forme (5), mais à coefficients α, β, γ, δ quelconques. Nous dirons que G est *proprement discontinu* dans une région fermée, R, de Π, s'il existe un entier N tel que R ne contienne jamais plus de N points équivalents entre eux par G; par exemple, le groupe modulaire est proprement discontinu au-dessus de l'axe réel; il ne l'est plus dans une région qui contient cet axe. Dans les applications à l'Analyse, la propriété précédente revêt une importance essentielle : si $f(\tau)$ est une fonction analytique uniforme dans R et invariable par les substitutions de G, le groupe G doit être proprement discontinu dans R.

Poincaré cherche d'abord à déterminer tous les groupes conservant l'axe réel et proprement discontinus, comme le groupe modulaire, au-dessus de l'axe réel; interprétés dans l'espace cayleyen, ce sont les groupes qui conservent un plan hyperbolique P (et que l'on appelle aussi groupes de rotation, ou groupes à cercle fondamental). Il montre comment on peut construire un polygone Q (à côtés rectilignes dans P, donc circulaires ou rectilignes dans Π et Π') tel que les transformés de Q par les substitutions de G remplissent P sans trous, ni duplicature, ce qui entraîne la discontinuité propre. Par exemple, si Q n'a pas de côtés sur l'axe réel, ses côtés devront se grouper par couples de même longueur respective; ses sommets devront se grouper en *cycles* tels que la somme des angles d'un même cycle soit un diviseur de 2π. Poincaré montre que ces conditions sont suffisantes; à cet effet, il observe que deux points de Π non situés sur l'axe réel peuvent être reliés par une courbe C de longueur cayleyenne finie, et il en déduit que C ne peut traverser qu'un nombre fini de polygones équivalents à Q. Cette démonstration très simple comblait une lacune importante d'un Mémoire de Schwarz, et elle donnait le droit de cité à une famille de groupes infiniment plus étendue que celle des groupes de Schwarz : ce sont les groupes que Poincaré a désignés sous le nom de *groupes fuchsiens* (1).

*
* *

En principe, cet exposé se limite aux aspects géométriques des premiers travaux de Poincaré; pourtant, il m'est impossible en ce moment de ne pas dire un mot de ces *fonctions fuchsiennes* que Poincaré a associées aux groupes qu'il venait de découvrir; suivant le mot de Guido Fubini, c'est là une des conceptions les plus géniales du grand mathématicien. Soient donc

$$S_j\tau = \frac{\alpha_j\tau + \beta_j}{\gamma_j\tau + \delta_j} = f_j(\tau)$$

(1) Poincaré a donné lui-même, dans *Science et Méthode* (p. 50), des indications sur la genèse de sa découverte.

les substitutions du groupe fuchsien G, et $H(\tau)$ une fonction rationnelle quelconque; POINCARÉ forme la série

$$\Theta(\tau) = \sum_j H[f_j(\tau)] \left[\frac{df_j(\tau)}{d\tau}\right]^m \qquad (m > 2) \tag{6}$$

étendue à toutes les substitutions du groupe; après avoir établi, grâce à la Géométrie cayleyenne, la convergence uniforme de

$$\sum \left[\frac{df_j(\tau)}{d\tau}\right]^m$$

dans tout domaine intérieur à Π, il montre que (6) est absolument et uniformément convergente dans le même domaine et que l'on a

$$\Theta[f_k(\tau)] = \Theta(\tau)\left[\frac{df_k(\tau)}{d\tau}\right]^{-m}.$$

Dès lors, le quotient de deux de ces séries *thêtafuchsiennes* sera invariant par toute substitution de G : ce sera une fonction fuchsienne.

POINCARÉ montre encore qu'on peut former une équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,R(x).$$

où $R(x)$ est rationnelle ou algébrique, suivant la définition de Q, et qui est telle que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales de l'équation : c'est la généralisation la plus complète de la propriété signalée antérieurement pour l'équation hypergéométrique (4).

*
* *

Revenons à la théorie des groupes. Les premiers Mémoires de POINCARÉ se rapportaient aux groupes de rotations et non aux groupes de déplacements les plus généraux; or, des exemples très simples, dus à SCHOTTKY et à KLEIN, montraient que la subdivision du plan analytique tout entier en polygones équivalents pose des problèmes encore plus ardus que les premiers cas élucidés; une étude directe du problème général par les procédés précédemment employés semblait impraticable. C'est alors que POINCARÉ songea à transporter dans l'espace à trois dimensions les méthodes qu'il avait introduites dans le demi-plan Π'. A ses yeux ce serait là un simple artifice; mais les mathématiciens en ont toujours jugé autrement; en introduisant l'espace à trois dimensions à propos d'un problème du plan, POINCARÉ a décelé les raisons profondes des propriétés de la solution, et, suivant le mot de FATOU, il s'agit vraiment là d'une découverte capitale. Ainsi donc, POINCARÉ définit un polyèdre générateur $\mathfrak{L}$ et lui impose des conditions nécessaires C pour que $\mathfrak{L}$ introduise un groupe proprement discontinu. On peut faire à ce sujet deux hypothèses : ou bien la subdivision de l'espace cayleyen en polyèdres congruents, à partir de Q admet Ω pour frontière; on a alors un groupe *polyédrique*, intéressant au point de vue géométrique, mais sans application en théorie des fonctions; ou bien la subdivision de l'espace déborde au-delà de Ω, et son empreinte sur Ω (ou l'image de cette empreinte dans Π) définira des régions de discontinuité propre d'un groupe *kleinéen*. POINCARÉ associe à ces groupes des fonctions invariantes; ce sont les fonctions *kleinéennes;* toutefois, les démonstrations d'existence ou de convergence ne peuvent procéder comme pour les fonctions fuchsiennes, car, par exemple, les notions de longueur ou d'aire ne sont plus définies sur Ω.

*
* *

Donnons quelques exemples. Considérons un tétraèdre $\mathfrak{T}$, dont quatre arêtes, formant quadrilatère gauche, sont circonscrites à Ω et adjoignons-lui son symétrique cayleyen par rapport à une face. On constitue ainsi un hexaèdre et l'on montre qu'il vérifie les conditions C. Or, les traces des faces de $\mathfrak{T}$ sur Ω ont pour images quatre circonférences ou droites K_1, K_2, K_3, K_4 auxquelles des inversions appropriées peuvent donner l'une ou l'autre des dispositions ci-contre (*fig.* 8 et 9); les substitutions de G seront des produits d'un nombre pair d'inversions ou symétries par rapport aux côtés. Si l'on n'envisage que les produits d'un nombre pair d'inversions par rapport à trois cercles choisis une fois pour toutes, on obtient un sous-groupe de G qui admet un cercle fondamental, le cercle orthogonal aux trois cercles choisis; il existe quatre sous-groupes G_i et quatre cercles orthogonaux H_i du type précédent. Les cercles K_i limitent deux quadrilatères P et Q.

La partie de P située au-dessus de H_2 et ses homologues par les transformations de G_2 recouvriront la région située au-dessus de H_2 (*fig.* 8). G sera proprement discontinu sur le segment ouvert fq de H_2; il cesse de l'être en c, point parabolique, en q, point de PONCELET du faisceau (K_1, K_3) donc point hyperbolique, et en un ensemble infini E de points doubles équivalents aux précédents, ainsi qu'en l'ensemble E' dérivé de E. En faisant appel aux substitutions de G_3, G_1, G_4 on recouvrira la région située au-dessous de H_3, ainsi que

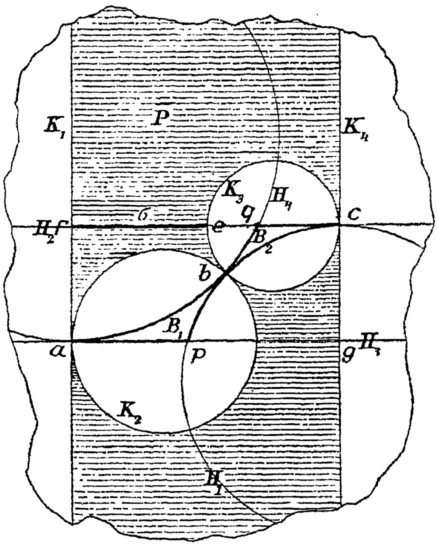


Fig. 8.

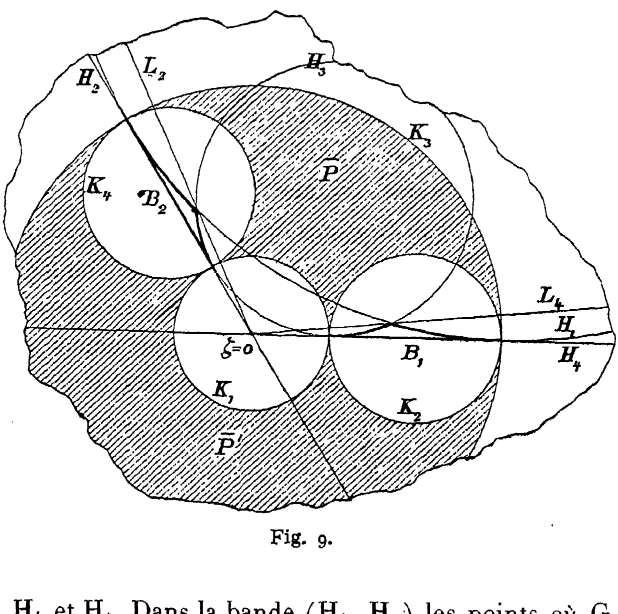


Fig. 9.

l'intérieur de H_1 et H_4. Dans la bande (H_1, H_4) les points où G cesse d'être proprement discontinu sont situés en première approximation à l'intérieur des triangles *apb*, *bqc*. La combinaison des substitutions de G_1, G_2, G_3, G_4, permet de recouvrir d'autres régions sans cesse plus étendues appartenant aux deux triangles précédents, de sorte que les points où G n'est pas proprement discontinu forment un ensemble situé à l'intérieur d'une chaîne de triangles arbitrairement petits. On conçoit ainsi que G est proprement discontinu en

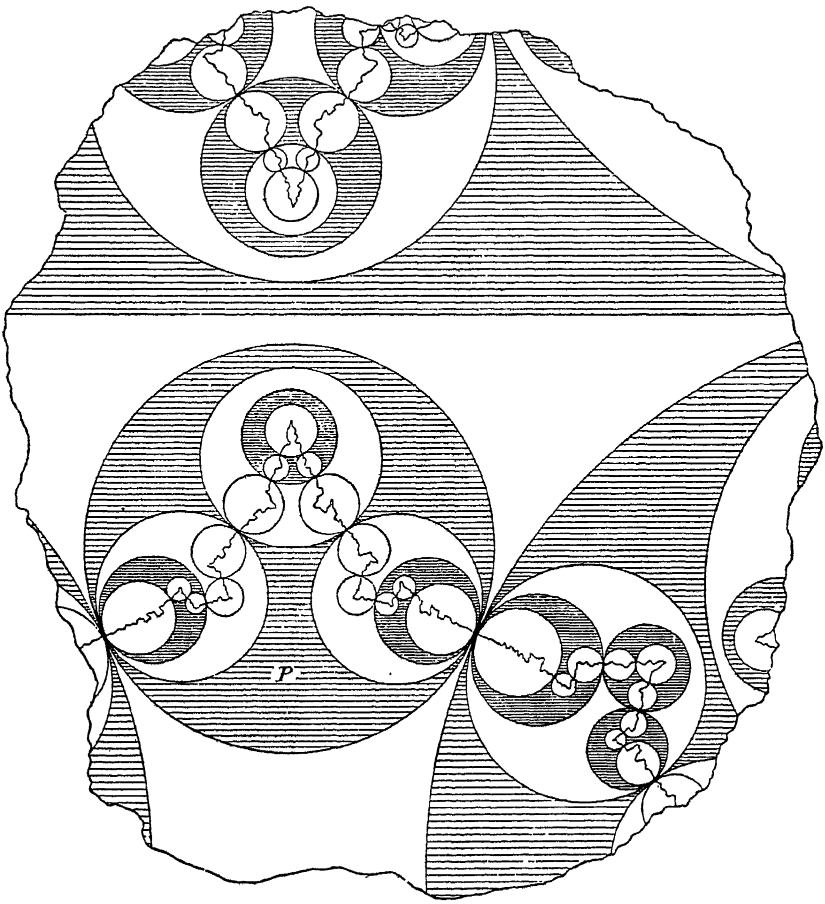


Fig. 10.

deux régions séparées l'une de l'autre par une courbe de Jordan $\mathfrak{C}$. Cette courbe n'est pas analytique : aux points paraboliques tels que *b* elle a manifestement une tangente, mais son paratingent n'y est pas linéaire et elle n'y possède pas un cercle de courbure, car il y a des points de $\mathfrak{C}$ arbitrairement voisins de *b* sur H_4, comme sur H_1. Des considérations analogues montrent qu'elle n'a pas de tangente en un point hyperbolique, tel que q; et aux points loxodromiques deux arcs de la courbe s'enroulent en spirale sans se rencontrer (*fig.* 10).

Examinons rapidement d'autres exemples. Faisons varier par continuité la figure formée par K_1, K_2, K_3, K_4 de manière que K_3 devienne tangent à K_4. Le quadrilatère P se subdivise en deux triangles $\overline{P'}$, $\overline{P''}$; les symétriques ou inverses de $\overline{P'}$ vont engendrer un réseau de triangles remplissant l'intérieur

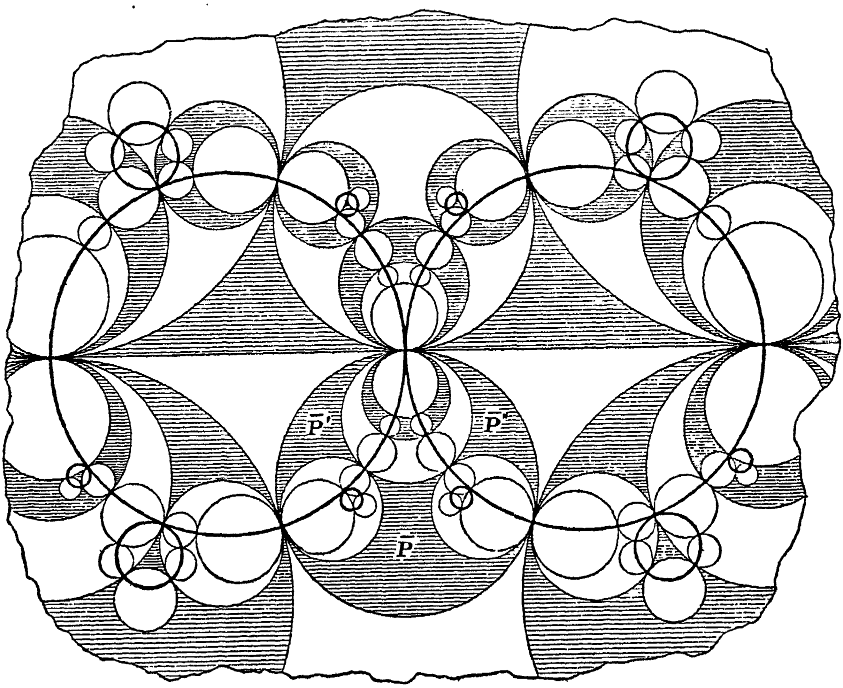


Fig. 11.

d'un cercle comme la division modulaire; et il y aura une infinité de réseaux analogues (*fig.* 11). La courbe $\mathfrak{C}$ se transforme à la limite en un ensemble infini de cercles tangents et en sa fermeture.

Si maintenant les cercles K_1, K_2, K_3, K_4 sont tangents deux à deux, chacun des quadrilatères P et Q est subdivisé en deux triangles. La subdivision de l'espace hyperbolique se rattache à la construction d'un tétraèdre dont les six arêtes sont tangentes à Ω (et dont les faces coupent Ω suivant les quatre cercles précédents). Supposons le tétraèdre régulier et introduisons les symé-

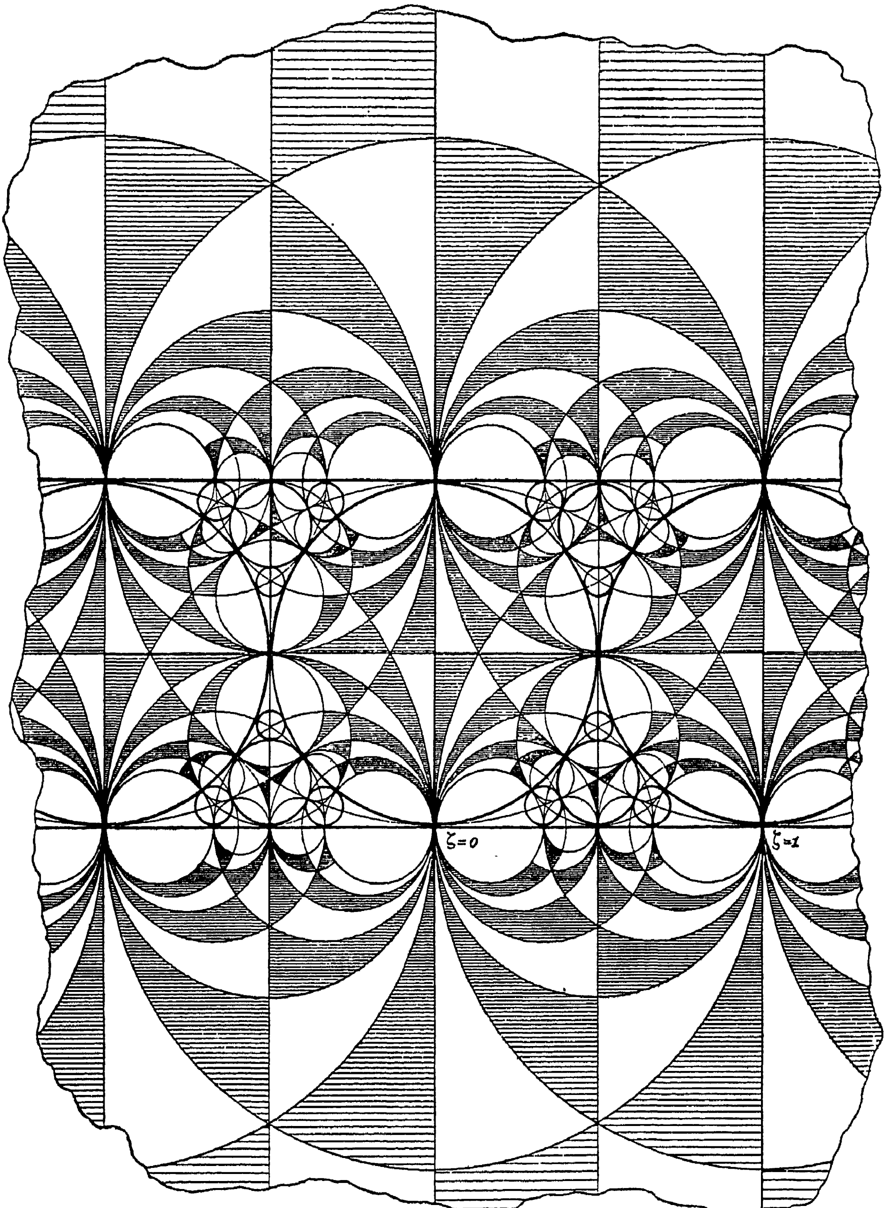


Fig. 12.

tries par rapport aux plans bissecteurs; on retrouve une infinité de fois le réseau modulaire (*fig.* 12).

Citons encore le cas d'un domaine fondamental construit à partir de quatre circonférences sans points communs; l'ensemble des points où G cesse d'être proprement discontinu ne peut plus être enchaîné: il ne forme plus de continu (*fig.* 13). Nous mentionnerons un réseau construit à partir de cinq

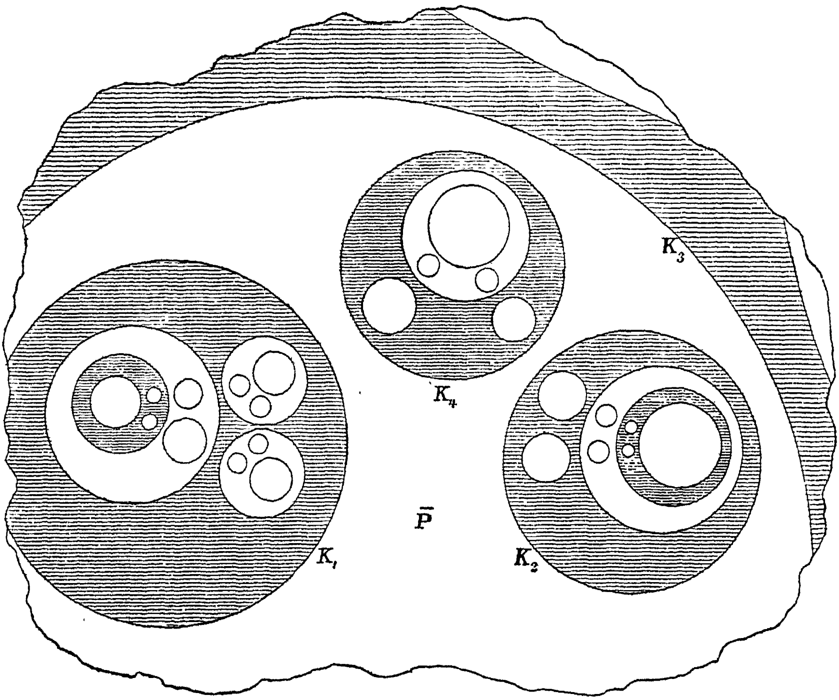


Fig. 13.

circonférences tangentes limitant un pentagone, un quadrilatère et un triangle. La courbe frontière des régions de discontinuité propre comprend une courbe non analytique et des cercles orthogonaux aux triangles d'une infinité de réseaux (*fig.* 14).

L'examen que nous venons de faire a été nécessairement très rapide. Peut-être vous aura-t-il fait pressentir la richesse des perspectives et des voies nouvelles ouvertes par Poincaré, et qui, actuellement encore, sont loin d'être complètement explorées. La notion de pavage du plan euclidien conduisait à des figures très simples, connues depuis longtemps. La même notion introduite dans le plan hyperbolique donne naissance aux configurations les plus complexes et fait appel aux concepts de la Géométrie directe et de la théorie des ensembles. Poincaré nous aura montré, ainsi, entre beaucoup d'autres résultats, une différence aussi essentielle qu'inattendue entre les deux Géométries.

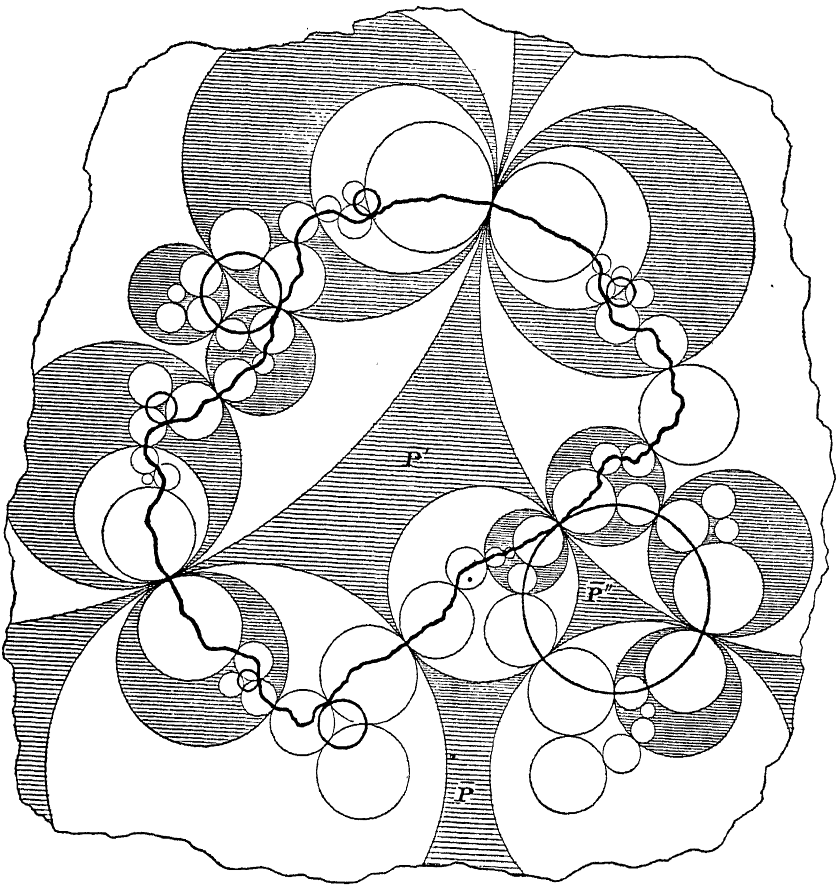


Fig. 14.

BIBLIOGRAPHIE.

Géométrie cayleyenne hyperbolique.

R. Garnier, *Cours de Cinématique*, t. III, Gauthier-Villars, 1951, p. 100-141.

Groupes et fonctions modulaires.

P. Appell et E. Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*, 2e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1922, chap. XIII.

L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellitiche*, Pisa, Spoerri, 1901, chap. XI et XVI.

A. Hurwitz, *Ueber die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* (*Math. Ann.*, t. 58, 1904, p. 343-360).

A. Hurwitz et R. Courant, *Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, 3e éd., Berlin, Springer, 1929, p. 219-228.

F. Klein, (et R. Fricke), *Vorlesungen über die Theorie der elliptische Modulfunktionen*, t. I et II, Leipzig, Teubner, 1890 et 1892.

E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, éd. Paris, Gauthier-Villars, 1928, chap. XIII (se rapporte aussi aux fonctions de Schwarz).

Groupes et fonctions automorphes.

P. Appell et E. Goursat, *Théorie des fonctions algébriques d'une variable et des transandantes qui s'y rattachent*, 2e éd., t. II (*Fonctions automorphes*), Paris, Gauthier-Villars, 1930.

Ce tome a été rédigé par P. Fatou (mort avant d'avoir pu en corriger les épreuves); sa lecture s'impose à tous ceux qui veulent s'initier à la théorie.

R. Fricke et F. Klein, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, t. I et II, Leipzig, Teubner, 1897 et 1911.

G. Fubini, *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe*, Pisa, Spoerri, 1908.

G. Giraud, *Leçons sur les fonctions automorphes*, Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Th. Got, *Mémorial des sciences mathématiques*, fasc. 60 et 68, Paris, Gauthier-Villars, 1933 et 1934.

H. Poincaré, *Œuvres*, t. II, Paris, Gauthier-Villars, 1916.

DEUXIÈME PARTIE

CÉLÉBRATION SOLENNELLE DU CENTENAIRE A LA SORBONNE LE 15 MAI 1954.

A. — LE SAMEDI 15 MAI 1954 A LA SORBONNE.

Le samedi 15 mai, dans le grand amphithéâtre de la Sorbonne s'est déroulée la séance solennelle de commémoration du Centenaire en présence de M. René Coty , Président de la République. A la table d'honneur, avaient pris place, à côté du Président André Marie, Ministre de l'Éducation Nationale, M. Georges Lecomte, Secrétaire perpétuel de l'Académie Française, le Duc Maurice de Broglie, Président de l'Académie des Sciences et Membre de l'Académie française, M. François-Albert Buisson, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences morales et politiques, Chancelier de l'Institut, le Prince Louis de Broglie, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Membre de l'Académie Française, M. Georges Davy, Membre de l'Académie des Sciences morales et politiques, Doyen de la Faculté des Lettres, représentant le Recteur de l'Académie de Paris qu'un voyage en Hongrie retenait éloigné de la capitale, M. Jacques Hadamard, Membre de l'Académie des Sciences, M. Émile Borel, Membre de l'Académie des Sciences, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, M. Henri Villat, Membre de l'Académie des Sciences, M. Gaston Julia, Membre de l'Académie des Sciences, Président du Comité d'Organisation des fêtes du Centenaire, M. Joseph Pérès, Membre de l'Académie des Sciences, Doyen de la Faculté des Sciences de Paris et M. Paul Dubreil, Professeur à la Sorbonne qui assistait M. Gaston Julia.

De nombreux savants étrangers sont venus d'Allemagne, d'Autriche, de Belgique, du Danemark, des États-Unis, de Finlande, d'Italie, de Norvège, des Pays-Bas, d'U.R.S.S. ou de Yougoslavie, pour participer aux cérémonies du Centenaire. Parmi ceux-ci, les délégués officiels des Académies, Universités ou Sociétés savantes auxquelles Henri Poincaré a appartenu, avaient leur place sur l'estrade, avec les Académiciens dont beaucoup, pour la circonstance, avaient revêtu l'habit vert.

Au cours de cette séance quatre discours ont retracé l'œuvre de Henri Poincaré dans les diverses branches de son activité. M. Hadamard a rappelé ce que fut le mathématicien, M. Villat a parlé du mécanicien, le Prince Louis de Broglie et le Duc Maurice de Broglie ont présenté respectivement le physicien et le philosophe.

Puis M. Gaston Julia, dans une allocution, a rendu compte de l'achèvement de la mission que l'Académie lui avait confiée, et il a remis solennellement au Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences le dixième et dernier volume de l'édition des œuvres de Henri Poincaré, qui comme il s'y était engagé, était sorti des presses de la maison Gauthier-Villars, quelques jours avant la célébration du centenaire.

Après que M. Émile Borel eut rappelé en quelques mots, la fondation de l'Institut Henri Poincaré, le Président André Marie a clôturé cette grande séance par un discours très remarqué ou il a brossé un tableau de l'homme, du savant et du philosophe.

Entre les discours, afin de reposer un peu l'attention des auditeurs, l'orchestre à vent de la Garde républicaine, sous la direction du Commandant François-Julien Brun, Chef de la musique de la Garde, a fait entendre successivement l'ouverture de *Guillaume Tell* de Rossini, la *Rapsodie norvégienne* d'Édouard Lalo, l'ouverture du *Carnaval romain* d'Hector Berlioz, un *Larghetto* pour clarinette de Mozart, et la *Marche lorraine* de Louis Ganne, sans oublier la *Marseillaise* jouée pour accueillir le Président de la République.

Une réception dans les salons de la Sorbonne a suivi la cérémonie officielle qui constituait l'hommage du pays et de l'Université à la mémoire de Henri Poincaré.

DISCOURS DE M. JACQUES HADAMARD

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

Henri Poincaré et les mathématiques.

La France célèbre aujourd'hui une de ses gloires nationales. Le nom de Henri Poincaré doit être connu de tous, et éveiller un juste orgueil dans l'âme de tout français, comme il l'aurait fait de son vivant même, s'il s'était agi d'un autre champ d'activité de l'esprit humain. L'œuvre du mathématicien n'est pas apparente, elle est la base, la base cachée, d'édifices que chacun peut admirer mais qui n'ont pu s'élever que grâce à la solidité des fondations.

Quand on entreprend, comme l'honneur m'en échoit aujourd'hui, la tâche peu aisée de caractériser en quelques instants une grande œuvre, une de celles qui marquent une époque de l'esprit humain, on veut à juste titre y trouver une unité, en dégager une personnalité individuelle d'autant plus marquée qu'il s'agit d'un génie lui-même plus original et plus puissant.

Il ne faut pas, cependant, nous placer aujourd'hui à ce point de vue : je croirais, en l'adoptant, diminuer en même temps que dénaturer l'œuvre de Henri Poincaré.

« Nous sommes plutôt serviteurs que maîtres en Mathématiques » m'a dit un jour Hermite. Tout au plus, le savant suit-il en général son tempérament dans le choix des problèmes qu'il se pose. Ainsi peut procéder la moyenne des chercheurs.

La moyenne des chercheurs, mais non pas Poincaré. Il emprunta ses sujets non aux ressources de son esprit, mais aux besoins de la Science. C'est d'eux que partait sa pensée. Elle naissait en quelque sorte en dehors de lui et une « force supérieure » autre parole chère à Hermite, faisait apparaître en lui une lumière visible pour lui seul et qu'il faisait briller pour tous.

Qu'il me soit permis de rappeler sommairement quel était au moment de sa venue l'état de la Science mathématique.

Le XVIII^e siècle avait légué au XIX^e deux grands problèmes : l'intégration des équations différentielles et celle des équations aux dérivées partielles. La Science du XIX^e siècle ouvrit à cet égard une voie nouvelle. Elle apprit à éclairer d'une lumière inattendue les propriétés qui s'offraient à son étude en donnant systématiquement aux variables qu'elles introduisaient non plus seulement des valeurs réelles, mais aussi des valeurs imaginaires.

Cette « théorie des fonctions » ou plutôt « des fonctions analytiques » fut surtout en France l'œuvre de Cauchy, en Allemagne celle de Weierstrass. Ils fondèrent chacun de son côté la théorie des fonctions analytiques et posèrent un premier fondement de la théorie des équations différentielles.

Cauchy mourut en 1857; Weierstrass lui survécut 40 ans, et fut dans la Science allemande l'objet d'un enthousiasme sans bornes. Mais un de ses plus illustres disciples, Mittag-Leffler, nous a rapporté qu'à la fin de sa carrière il voyait, non sans quelque mélancolie, la primauté qu'il avait assurée à la Science allemande passer à notre pays.

C'est qu'en effet un grand événement scientifique venait de se produire. Les fonctions fuchsiennes venaient « d'éclater », suivant un mot prononcé à l'époque, dans une série de Mémoires de Henri POINCARÉ.

L'un des plus beaux triomphes de la théorie des fonctions analytiques avait été la théorie des fonctions elliptiques. Or avec la grandiose généralisation apportée par Henri POINCARÉ, un ensemble de propriétés aussi belles que celles qui appartenaient aux fonctions elliptiques était étendu à une infinité d'êtres relevant d'uue même théorie générale, si profondément différents qu'ils fussent les uns des autres.

Les fonctions fuchsiennes apportaient, a-t-on pu dire, « les clefs du monde algébrique » et résolvaient dans un cas important, celui des équations linéaires à coefficients algébriques, l'autre grand problème dont nous avons parlé en commençant, l'intégration des équations différentielles.

*
* *

Avant même le Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, POINCARÉ avait publié quelques courtes Notes sur des questions d'Arithmétique. Je dirai un mot de l'une d'elles qui me paraît éclairer un aspect de sa personnalité. Elle est consacrée à la méthode de la réduction continuelle, célèbre invention d'HERMITE qui excite notre admiration, mais sans que nous puissions comprendre comment son auteur a été conduit à l'imaginer.

Or ce que nous ne devinons pas chez HERMITE apparaît en pleine lumière avec POINCARÉ; et ce caractère non seulement lumineux, mais parfaitement direct de POINCARÉ ne se démentira pas à travers toute son œuvre.

Serait-ce donc que, contrairement au grand prédécesseur qu'il explique en cette occasion, POINCARÉ n'était pas guidé par une secrète intuition ? Il est impossible de l'admettre, ne serait-ce qu'en présence du récit bien connu de ces illuminations soudaines qui ont marqué le début de sa carrière et ont abouti à la fondation de la théorie des fonctions fuchsiennes. En outre un exemple bien typique de l'intervention de l'inconscient se trouve dans le tome III des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, où POINCARÉ est conduit à parler du Calcul des variations. A ce moment, le Calcul des variations venait d'être doté par WEIERSTRASS d'une méthode rigoureuse qui donnait à la question une réponse parfaite et définitive. Seulement WEIERSTRASS, vers la fin de sa carrière dédaignait de publier ses résultats lesquels, en conséquence, sont pendant longtemps restés exclusivement connus de ses auditeurs.

Poincaré avait-il soit connu, soit retrouvé cette méthode de Weierstrass? La lecture de son célèbre Ouvrage est troublante : dans une même page figurent une phrase qui ne peut avoir été écrite que par quelqu'un qui ignorait la méthode de Weierstrass et une autre laquelle ne peut avoir été écrite que par quelqu'un qui la connaissait. Ce véritable dédoublement de la personnalité — car c'en est un — manifeste l'intervention d'un et même de deux inconscients dont chacun suit sa propre voie sans que nous soyons renseignés sur les étapes de son cheminement.

Mais ce cas est tout exceptionnel. Si profondément puisées à l'inconscient que puissent être les idées de Poincaré, leur marche est parfaitement explicitée et donne à chacun l'illusion qu'il aurait sans doute pu en trouver autant.

*
* *

Après la théorie des fonctions fuchsiennes, l'admiration des mathématiciens ne devait pas s'interrompre. Elle ne cessa d'être entretenue par la rapidité incroyable avec laquelle se succédèrent les découvertes dont un seul volume, le tome XI du *Bulletin de la Société Mathématique de France* contient trois Mémoires apportant tous de profondes rénovations aux théories qui en étaient l'objet.

Dans les années qui suivirent, les Mémoires décisifs se succédèrent encore avec une merveilleuse rapidité.

Dans quelles directions se sont effectuées ces recherches si fécondes?

Dans toutes. Il n'est peut-être pas une grande question qui ait arrêté les géomètres et où le génie du jeune savant ne nous ait montré la voie à suivre.

La théorie des fonctions analytiques d'abord, dont deux grands chapitres jusque-là inexplorés et qui se sont révélés particulièrement difficiles furent ainsi tirés du néant. Découvertes de premier ordre qui, venant de tout autre auteur, attireraient toute notre attention, mais dont il nous est impossible de parler, obligés que nous sommes d'en venir au grand sujet des équations différentielles.

Nous ne pouvons même pas parler des progrès que Poincaré a fait faire à cette dernière étude sous les points de vue où l'on s'était placé jusqu'à lui. Mais en même temps qu'il poursuivait ces voies, il en ouvrait une profondément nouvelle dont il montra la fécondité et qui, délaissant le domaine complexe, s'attachait aux formes possibles des courbes réelles satisfaisant à l'équation.

Ici se retrouve une circonstance déjà apparue dans d'autres chapitres de l'histoire des Mathématiques. Lorsqu'il s'est agi de la résolution d'une équation algébrique, les premiers algébristes, et cela jusqu'au dernier quart du XVIII^e siècle, purent raisonner isolément sur une racine de l'équation, mais ils furent définitivement arrêtés dans cette voie. Les recherches véritablement fécondes entreprises sur ce problème ont procédé tout autrement en raisonnant sur l'ensemble des racines et sur les relations que l'on peut établir entre elles. POINCARÉ nous apprend à nous conformer à ce même principe dans l'étude des équations différentielles.

Que peut-on dire des diverses courbes qui satisfont à une même équation différentielle, supposée du premier ordre pour commencer ? Simplement ceci, que deux d'entre elles ne peuvent jamais se couper, sauf aux points singuliers. Cette base fragile au premier abord a suffi comme point de départ à Poincaré.

Il y a cependant ajouté une considération essentielle et qui avait échappé à tous ses prédécesseurs. C'est à RIEMANN que se rattache une remarque enfantine au premier abord dont la puérilité apparente rend plus remarquable encore le rôle essentiel qu'elle a joué dans la Science. Si CAUCHY, dans le premier Mémoire qu'il ait publié (1813), ne l'avait par méconnue, il n'aurait pas, 40 ans plus tard, laissé à RIEMANN la gloire de compléter la théorie des fonctions algébriques. Lorsque à son tour RIEMANN reconnut ce principe et s'en servit pour compléter cette théorie, il ne comprit pas que son application n'était pas limitée au problème dont il venait de s'occuper. Il était donné à POINCARÉ de le montrer indispensable dans l'étude des équations différentielles et de discuter, grâce à lui, les formes possibles des courbes que ces équations définissent.

Ce que pouvaient être ces formes, on pouvait être tenté de se l'imaginer d'après les exemples que fournissent les cas simples des équations élémentairement intégrables. Il y avait là une erreur à laquelle doit réfléchir quiconque s'intéresse à la méthode scientifique. Voici un problème que nous savons traiter dans certains cas particuliers. D'après les caractères que présentent les solutions connues dans ces cas-là, nous préjugeons de ce qui doit se passer dans d'autres problèmes qui nous semblent analogues. Nous ne pouvons guère faire autrement, mais il ne faut pas oublier qu'entre les uns et les autres doivent nécessairement exister des différences profondes quoique cachées à nos yeux et dont doit nous avertir le fait même que nous sommes capables de traiter les uns et non de traiter les autres.

C'est ce qui se produit effectivement pour l'équation différentielle du premier ordre. Si celle-ci pouvait, comme dans les cas élémentaires, se traiter à l'aide d'une intégrale, c'est-à-dire en égalant à une constante une certaine fonction des coordonnées, elle ne pourrait pas donner lieu à des figures telles que celles que Poincaré met en évidence.

*
* *

Mais l'étude de l'équation différentielle du premier ordre ne représente qu'une première étape. L'étude des équations du second ordre rapproche Poincaré de l'objet principal sur lequel, avec toute l'Analyse moderne, il ne cesse d'avoir les yeux fixés : à savoir les équations différentielles de la Mécanique céleste, celles qui régissent les mouvements des planètes sous l'action non seulement de l'attraction du Soleil mais aussi de leurs attractions mutuelles.

Il ne peut pas être question d'intégrer un pareil système d'équations au sens élémentaire du mot. Il faudrait pour cela disposer d'intégrales en nombre suffisant. On est loin de compte et Poincaré montre qu'il faut renoncer à en ajouter aucune aux dix intégrales classiques.

Par contre, un premier fait a d'autre part gouverné ses recherches : l'existence de solutions périodiques. Si une planète (par exemple la Terre) était seule en présence du Soleil et soumise à sa seule attraction, elle se comporterait comme l'imaginait Ptolémée et même Képler, c'est-à-dire qu'au bout d'un an elle se retrouverait exactement dans la même position qu'au départ et animée du même mouvement, prête à une seconde révolution exactement identique à la première. Le mouvement serait périodique. Il n'en est pas ainsi en réalité, parce que la Terre est également soumise à l'attraction des autres planètes lesquelles d'ailleurs réagissent aussi les unes sur les autres et troublent leurs mouvements. Peut-il, même dans ces nouvelles conditions, exister pour le système — réduit à trois corps pour commencer par le cas le plus simple — des mouvements périodiques? C'est la question que n'a cessé de se poser Poincaré, et cela dès ses premières années de travail dont nous avons dit l'extraordinaire fécondité, et aussi jusqu'au moment où la mort le guettait, jusqu'à ce dernier Mémoire dont la tragique introduction évoque les craintes malheureusement trop fondées que lui inspirait sa santé.

Ces solutions périodiques qu'il apprit ainsi à déceler se sont montrées entre ses mains la seule voie par laquelle on a pu pénétrer dans une place jugée jusque-là inabordable.

A ce point de vue, le cas relativement simple de l'équation différentielle du second ordre, définissant une courbe dans l'espace ordinaire, est déjà typique. Si une pareille courbe est fermée, les courbes-solutions voisines le seront approximativement et l'une quelconque d'entre elles issue d'un point de départ déterminé reviendra périodiquement passer au voisinage du même point. Mais les dispositions qu'affectent ces arcs successifs — dispositions que dans certains cas les méthodes instituées par Poincaré permettent de discuter d'une manière entièrement rigoureuse — montrent d'une part quelles dispositions étranges et à peine intelligibles peuvent affecter ces mouvements lorsqu'on les suit à la fois dans l'avenir et dans le passé; de l'autre, combien les difficultés rencontrées dans les méthodes classiques de la Mécanique céleste tiennent à la nature des choses.

Pendant qu'il arrivait à ces conclusions de caractère en un sens négatif et qui montraient comme relativement précaires les progrès sur lesquels on comptait, Poincaré ouvrait d'autre part une voie permettant d'avancer sur un terrain solide. La notion dont il montrait la puissance s'apparente à ces mêmes intégrales qu'il est, nous le savons, vain de rechercher davantage. La notion d'invariant intégral montre à nouveau combien il est utile de considérer non pas une solution isolément, mais les, ou au moins des solutions. C'est une intégrale, c'est-à-dire une quantité qui reste constante en vertu des équations différentielles, mais c'est une intégrale collective portant sur un *ensemble* de solutions. C'est cette notion qui, entre les mains de Poincaré, donna en particulier les résultats les plus essentiels que nous possédions sur la question si fondamentale de la stabilité du système solaire.

C'est à ces nouvelles et puissantes méthodes qu'est consacré le célèbre Ouvrage qui s'appelle *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. Chaque jour met davantage en évidence le rôle qu'elles sont appelées à jouer non seulement dans toute la science astronomique, mais dans bien d'autres problèmes de Mécanique.

Nous n'avons parlé que bien incomplètement des grandes conquêtes que nous devons à Poincaré dans le vaste domaine des équations différentielles. Mais d'autres problèmes posés par les applications physiques avaient tenté la science à partir du moment où elle s'était occupée des équations aux dérivées partielles. Problèmes que l'on a pu croire un instant analogues, avec quelques complications nouvelles, aux premiers, qui en étaient en réalité profondément différents, et dont le type est offert par le célèbre problème de Dirichlet.

Que d'efforts consacrés à cet attachant problème ! Aux nombreuses méthodes proposées pour le traiter, POINCARÉ en ajoute une nouvelle, la méthode du balayage. Une telle addition était-elle importante ? La réponse, une réponse éclatante a été fournie par la marche ultérieure de la théorie. A partir de l'apparition de la méthode du balayage, tous les travaux sur ce sujet ont dépendu d'elle ; elle gouverne depuis ce temps toutes nos idées sur ce chapitre.

Que de grandes découvertes il me faudrait rappeler dont il m'a été impossible de parler, quoiqu'elles constituent, elles aussi, les fondements nécessaires de progrès futurs. Et que d'autres conquêtes, que de points de vue fondamentaux la Science n'était-elle pas encore en droit d'attendre de POINCARÉ lorsque la mort est venue nous l'enlever.

Ceux qu'il nous a laissés et dont je n'ai donné que de brefs et insuffisants aperçus, ce sont ceux qui, depuis plus d'un demi-siècle, sont à la base des progrès de notre Science et, sur beaucoup de points, des progrès essentiels de l'esprit humain.

DISCOURS DE M. HENRI VILLAT

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Henri Poincaré et la Mécanique.

Ce n'est pas une tâche facile que de tenter de résumer l'œuvre colossale d'Henri POINCARÉ. Si la grandeur d'un poème est dans ses résonances, que dira-t-on de l'effarante grandeur de la pensée de POINCARÉ, alors que les prolongements de cette pensée s'étendent indéfiniment sur tout l'avenir de la Science.

Les savants développements qui viennent d'être exposés, par une voix plus autorisée que la mienne, ont déjà mis l'accent sur l'importance et la profondeur de l'œuvre de POINCARÉ dans l'ordre des Mathématiques pures et de la Géométrie. Je dois maintenant dire en quelques mots ce que la Mécanique et l'Astronomie doivent à son merveilleux génie.

Les disciplines que je viens de citer firent nécessairement l'objet des préoccupations de POINCARÉ, pour des raisons très précises : en 1885, il fut chargé, à la Sorbonne, d'assurer l'enseignement de la Mécanique physique et expérimentale ; puis, en 1886, il devint titulaire de la chaire de Physique mathématique et de Calcul des probabilités. Ces circonstances contribuèrent évidemment à orienter les idées de POINCARÉ vers les sujets dont nous allons parler.

Nous savons cependant que, quelle qu'eût pu être l'impulsion initiale, l'amenant à examiner tel ou tel domaine de nos connaissances, il aurait avec la même maîtrise réalisé d'aussi prodigieux progrès.

En ce qui concerne l'Astronomie, la force irrésistible de son génie l'a amené à étendre d'une façon surprenante les limites de la Science.

La plupart des travaux astronomiques de Poincaré se rattachent au problème des n corps, et particulièrement au mouvement des planètes et des satellites de notre système solaire. Pour bien faire comprendre l'importance de ces travaux, il convient de rappeler brièvement l'histoire de ce problème célèbre.

Il est bien connu que la découverte de l'attraction universelle avait été grandement facilitée par ce fait, que les masses des planètes sont petites par rapport à celle du Soleil. De même, la plupart des méthodes qui ont pour but le calcul du mouvement des corps célestes, doivent leur succès à cette petitesse des masses. Ainsi les fondateurs de la Mécanique céleste ont développé les coordonnées ou les éléments des planètes, suivant les puissances d'un petit paramètre, de l'ordre des masses. Ces développements ont permis de déterminer quantitativement, pour quelque temps, les mouvements des planètes, avec une exactitude comparable avec celle des observations.

Toutefois, ces théories classiques ne peuvent pas suffire pour des intervalles de temps extrêmement longs. Cela à cause de ce qu'on appelle les termes séculaires, qui font intervenir le temps en dehors des signes trigonométriques. Et d'ailleurs, pour cette même raison, les séries classiques ne nous apprennent rien sur la *stabilité* du système solaire.

Pour démontrer cette stabilité, et afin d'étudier en général les orbites du point de vue qualitatif, Lagrange avait développé les perturbations séculaires les plus importantes en séries trigonométriques, après lui Delaunay, Gylden et bien d'autres ont creusé plus avant ce sujet ardu.

Mais la résolution complète du problème dont il s'agit était réservée à Poincaré. En bref, Poincaré démontre que les éléments canoniques des planètes peuvent se développer formellement en séries de Fourier, suivant les multiples d'un certain nombre d'arguments linéaires par rapport au temps. Ces séries sont ordonnées aussi suivant les puissances des masses, et de certaines quantités, de l'ordre des excentricités et des inclinaisons. Mais Poincaré va beaucoup plus loin : il montre, d'une part, que les séries en question ne sont pas convergentes, mais cependant il prouve qu'elles sont semi-convergentes, et qu'elles suffiront aux besoins des astronomes pendant des temps extrêmement longs.

Pour étudier les solutions du problème des n corps, et d'autres problèmes de Dynamique beaucoup plus généraux, POINCARÉ s'est engagé dans une autre voie : il commence par chercher les solutions spéciales les plus simples : il est ainsi amené aux solutions périodiques, dans lesquelles le système reprend, après un temps fini, sa configuration et ses vitesses relatives initiales. Il découvre aussi une classe de solutions plus générales : celle des solutions asymptotiques, qui se rapprochent indéfiniment d'une solution périodique au bout d'un temps très long. Pour démontrer leur existence, POINCARÉ invente une notion nouvelle et extrêmement féconde, celle des invariants intégraux. La théorie de ces invariants intégraux lui permet aussi de traiter la question de la stabilité.

Dans cette recherche, d'une complexité extrême, POINCARÉ fait progresser la question à pas de géant; les résultats qu'il obtient forment le terrain solide sur lequel les chercheurs de l'avenir pourront s'appuyer avec confiance.

Les solutions périodiques sont surtout utiles quand il s'agit de calculer le mouvement d'un système dont les conditions initiales sont voisines de celles qui correspondent exactement à une solution périodique. On prend alors cette solution périodique comme point de départ, et l'on développe la solution cherchée suivant les puissances d'un certain nombre de quantités petites. On réussit ainsi à résoudre des problèmes auxquels les méthodes anciennes ne sont pas applicables.

Dans le Calcul des probabilités, le développement de l'inverse de la distance de deux planètes suivant les multiples des anomalies moyennes, est d'une importance capitale. En vue d'étudier les coefficients de ce développement, POINCARÉ applique ses méthodes sur les singularités, et sur les périodes des intégrales doubles, il fait également un usage opportun des méthodes ingénieuses de DARBOUX quant à l'expression asymptotique des fonctions de très grands nombres.

Tous les résultats dont nous venons de parler auraient suffi à assurer la gloire impérissable d'un savant. Mais POINCARÉ a traité encore avec le même succès une foule de questions non moins importantes.

En Astronomie, il a perfectionné la méthode de LAPLACE pour la détermination des orbites, et son élégante méthode est devenue la plus efficace dans la pratique actuelle des Observatoires.

En Géodésie, POINCARÉ a attiré l'attention sur les mesures de la pesanteur, en montrant que ces mesures suffisent pour déterminer les irrégularités du géoïde. Il a signalé aussi l'importance des mesures des azimuts dans les triangulations géodésiques.

La théorie des Marées est certainement l'une des plus difficiles de la Mécanique. Avant Poincaré, on ne savait traiter que des cas très particuliers, sous des hypothèses dénuées de sens pratique. Dès 1896, POINCARÉ a recherché la solution générale du problème. Les méthodes qu'il a proposées et les résultats obtenus dès cette époque, ont eu la plus grande influence sur le développement récent de la Physique mathématique. En 1902, lorsque FREDHOLM eut fait connaître sa belle théorie des équations intégrales (qui prolongeait d'ailleurs les idées de POINCARÉ lui-même), POINCARÉ à son tour appliqua ce nouveau concept à la théorie des Marées. Ce travail, qui illustre le troisième volume des *Leçons de Mécanique* de notre auteur, est d'une élégance et d'une clarté saisissantes.

La théorie des figures d'équilibre relatif des masses fluides est d'une importance capitale pour l'Astrophysique et la Cosmogonie. Une telle théorie nous permettrait de suivre le développement des nébuleuses et des astres, et nous renseignerait probablement sur les causes de la variabilité des étoiles. Malheureusement ces problèmes ne sont pas encore abordables dans toute leur généralité : d'une part nos connaissances sur la constitution de la matière au sein des étoiles, sous les pressions et les températures énormes qui y règnent, sont encore insuffisantes pour une mise en équations correcte des problèmes; d'autre part, même dans le cas idéal où les problèmes pourraient être analytiquement bien posés, les difficultés d'intégration paraissent encore insurmontables dans leur ensemble, à moins que l'on ne se trouve dans le voisinage d'une solution particulière simple.

Malgré ces circonstances, POINCARÉ est parvenu à des résultats d'une grande généralité. Il a montré que la rotation d'une masse fluide doit être uniforme autour d'un des axes principaux d'inertie ; il a trouvé une limite supérieure de la vitesse de rotation, et il a établi la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre relatif, en tenant compte de la viscosité du fluide.

Même si le fluide est supposé homogène, les difficultés analytiques à vaincre sont considérables. L'une des plus belles découvertes de POINCARÉ se rapporte à ce cas idéal. Par une méthode extrêmement féconde, il démontre l'existence d'une infinité de nouvelles figures d'équilibre, se rattachant, pour certaines valeurs des données initiales, aux ellipsoïdes, déjà connus, de MAC LAURIN et de JACOBI. Il introduit dans cette théorie la notion nouvelle des coefficients de stabilité, lesquels présentent d'intéressantes analogies avec les exposants caractéristiques des solutions périodiques dans les problèmes de Dynamique. POINCARÉ démontre que les ellipsoïdes de MAC LAURIN peu aplatis, et les ellipsoïdes de

JACOBI les moins allongés forment une suite continue de figures d'équilibres stables. Cette suite se prolonge par des figures piriformes auparavant inconnues, dont la matière semble vouloir se partager en deux parties.

Quoique les corps célestes ne soient sans doute pas homogènes, ces découvertes de POINCARÉ jettent un jour singulier sur la genèse des étoiles doubles, et sur l'origine de la Lune. Ces considérations ont servi de base aux beaux Ouvrages de JEANS sur la Cosmogonie, parus en 1919 et en 1929. Des recherches toutes récentes de LYTTLETON, en Angleterre, nous apprendront sans doute prochainement des conséquences essentielles de ces théories quant à l'explication du monde.

POINCARÉ lui-même, dans son grand Ouvrage sur les hypothèses cosmogoniques, a exposé toutes les idées émises sur cette matière, et en a fait une critique approfondie. Avec ses formules rigides, son texte précis, avec la loyale incertitude qui lui sert de conclusion, ce livre est l'un des plus émouvants qu'on puisse lire.

Il est certainement impossible de caractériser en peu de mots l'esprit des travaux de POINCARÉ. Toujours, ce sont les problèmes fondamentaux qui attirent son attention ; il fait preuve d'une faculté de généralisation saisissante, et son imagination est sans limites. Ses exposés se distinguent par une élégance et une limpidité extraordinaires.

Il est évident que, justement à cause de sa grande généralité, l'œuvre de POINCARÉ restera longtemps une mine inépuisable pour les chercheurs qui voudront y pénétrer. Ces chercheurs y trouveront d'ailleurs autre chose encore, dans l'exemple du savant qui sut allier au génie le plus éblouissant les plus hautes qualités humaines. Comment oublierions-nous ce qu'il a écrit un jour : « la pensée est un éclair entre deux longues nuits, mais c'est cet éclair qui est tout ». L'amour infini que lui inspirait la Science lui a fourni

« la clef de diamant qui ferme l'Univers ».

C'est pourquoi je crois, et j'espère qu'il aurait approuvé les lignes suivantes, par lesquelles je veux terminer, et qui traduisent peut-être une part de son message :

Homme, entends battre au fond de toi le cœur du monde !
Ce n'est qu'en exerçant ton sens de l'éternel,
Que tu sauras survivre à l'ultime seconde,
En transposant ta vie à l'ordre universel.

Donne-toi sans répit, donne-toi sans réserve :
Seul qui se donne sent l'allégresse du jour.
Tout geste de repli rend l'âme triste et serve :
Vis et meurs dans le rythme unique de l'amour !

DISCOURS DU PRINCE LOUIS DE BROGLIE
DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE,
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Henri Poincaré et les théories de la Physique.

L'œuvre de Henri Poincaré est immense : elle intéresse toutes les branches des sciences physicomathématiques. Analyse supérieure, Géométries non euclidiennes, Arithmétique, *Analysis situs* (ou Topologie), Mécanique, Astronomie, Physique mathématique, il n'est pas une seule de ces sciences diverses à laquelle il n'ait apporté des contributions essentielles et imprimé la marque de son génie. Mort à 58 ans, il a laissé une œuvre qui étonne par son ampleur : il paraît presque impossible d'avoir accompli dans une vie relativement courte tant de travaux divers et d'une telle valeur.

Je parlerai ici seulement de l'œuvre de Poincaré en Physique mathématique, car je l'ai beaucoup étudiée dans ma jeunesse. Tous les jeunes gens de ma génération qui s'intéressaient à la Physique mathématique se sont nourris des livres de Henri Poincaré. L'enseignement de la Physique mathématique à la Sorbonne étant alors un peu vieilli, Paul Langevin n'ayant jamais publié ses beaux cours du Collège de France, c'est dans les livres de Poincaré que nous pouvions trouver, exposées sous une forme parfaite, les récentes théories de la Physique et cette lecture était de celles dont, bien des années plus tard, on ressent encore les bienfaits.

Certains auteurs ont distingué la Physique théorique de la Physique mathématique : c'est là une distinction que Henri Poincaré lui-même dans ses célèbres livres de Philosophie scientifique (*La Science et l'Hypothèse*, *La Valeur de la Science*, *Science et Méthode*, *Dernières pensées*) n'a jamais faite. Je crois cependant qu'elle correspond à quelque chose d'important. La Physique mathématique, c'est l'examen approfondi et critique des théories de la Physique par un esprit entraîné aux spéculations mathématiques afin d'en améliorer, d'en rendre plus rigoureuses les démonstrations, afin aussi d'y trouver des thèmes pour ses propres recherches mathématiques, la Physique ayant souvent, on le sait, guidé les géomètres dans leurs découvertes. La Physique théorique au contraire, c'est la construction de théories aptes à rendre compte des faits expérimentaux et à guider le travail des hommes de laboratoire : elle nécessite, surtout à l'heure actuelle, des connaissances mathématiques étendues, mais n'est pas ordinairement l'œuvre de véritables mathématiciens : elle exige une grande connaissance des faits expérimentaux et surtout une sorte d'intuition physique que tous les mathématiciens ne possèdent pas.

Poincaré, mathématicien de haute classe, esprit pénétrant et critique, était particulièrement désigné pour s'occuper avec fruit de Physique mathématique au sens que nous venons de définir. Il n'y manqua pas et son œuvre dans ce domaine est considérable. Quelques-uns de ses remarquables Mémoires, plusieurs de ses admirables livres sont, au moins en partie, consacrés à préciser les démonstrations des théories classiques de la Physique et à en affermir les bases par de nouveaux modes de raisonnements. Qu'on se rappelle certaines méthodes nouvelles, notamment la célèbre méthode du balayage qu'il a inventée pour démontrer dans des cas de plus en plus étendus le principe de Dirichlet dans la théorie du potentiel newtonien, ainsi que les belles analyses qu'il a consacrées à la théorie de la propagation de la chaleur de Fourier. C'est uniquement dans son livre sur la théorie de Fourier que les étudiants du temps de mon adolescence pouvaient trouver un exposé complet de la théorie des intégrales de Fourier qui est, et de jour en jour davantage, nécessaire aux physiciens : les intégrales de Fourier, bagage indispensable pour le futur théoricien, étaient alors, comme les fonctions de Bessel et beaucoup d'autres connaissances capitales pour les applications, à peu près complètement ignorées de l'enseignement général dss Mathématiques à la Sorbonne. C'est également en étudiant la propagation de la chaleur que Henri Poincaré a réussi par de belles et ingénieuses méthodes à justifier l'existence de ce que nous nommons aujourd'hui les « valeurs propres » d'une équation différentielle pour des conditions aux limites données, ainsi que la validité des développements en série de fonctions propres. Toutes ces questions, apparentées, comme Poincaré a su le montrer par de profondes analyses, à celles relatives au principe de Dirichlet, ont considérablement progressé, peu après les travaux de Poincaré, par la découverte et l'étude des équations intégrales, puis par l'introduction due à Hilbert de l'espace abstrait qui porte son nom. Il est inutile de rappeler le rôle capital que toutes ces questions jouent aujourd'hui en Physique quantique et ceci suffirait à montrer la portée des recherches de Poincaré dans ce domaine.

A la Physique mathématique, se rattache aussi le bel exposé, resté classique,

que Poincaré a fait de la Thermodynamique. On sait que cette science austère, surtout quand on se prive volontairement des ressources de l'interprétation statistique et moléculaire de Boltzmann et de Gibbs, est difficile à présenter correctement et que son enseignement est plein d'embûches. L'exposé de Henri Poincaré est resté un des modèles du genre et aujourd'hui encore ceux qui enseignent la Thermodynamique ont intérêt à s'y reporter. D'ailleurs, si Poincaré savait à l'occasion s'en tenir au point de vue rigoureux de la Physique des principes, il n'ignorait pas la valeur des théories moléculaires et statistiques dont il a dans plusieurs Mémoires étudié les divers aspects : c'est ainsi qu'on trouve, avec un peu de surprise mais beaucoup de profit, un exposé de la théorie cinétique des gaz dans son beau livre sur *Les Hypothèses cosmogoniques*.

Mais, si Poincaré a apporté comme il était naturel, étant donnée la forme de son esprit, d'éclatantes contributions à la Physique mathématique entendue comme nous l'avons définie plus haut, il a aussi su faire œuvre utile et originale en Physique théorique. C'est surtout dans le vaste domaine de l'Optique et de l'Électromagnétisme, alors en pleine période de renouvellement, qu'il a su lui-même accomplir une œuvre de théoricien en allant de l'avant et en découvrant des idées et des interprétations nouvelles. Il connaissait admirablement toutes les anciennes théories mécaniques de la lumière qui s'étaient succédé depuis Fresnel et il les avaient analysées dans de beaux Ouvrages. Il avait approfondi la théorie de Maxwell, alors peu étudiée en France, et il savait comment elle englobe et généralise toutes les tentatives précédentes en réalisant une admirable fusion de l'Optique et de l'Électricité. Il avait suivi pas à pas la découverte des ondes hertziennes et de leurs propriétés, remarquables vérifications des conceptions de Maxwell : il avait, dans les débuts de la Radioélectricité, critiqué de près les résultats expérimentaux, développé les interprétations théoriques, tenu les ingénieurs au courant des derniers progrès en la matière dans de savants cours faits à l'École supérieure des Télégraphes; il avait même fait des exposés plus simples pour le grand public tels que le résumé des premiers principes de la T. S. F. contenu dans un fascicule de la collection *Scientia*. Partout il avait été sur la brèche, sachant évidemment critiquer et préciser, mais sachant aussi, suivant l'esprit de la Physique théorique, s'élancer en avant pour conquérir un terrain nouveau sans trop se préoccuper de rigueur ou de perfection.

Dans de beaux Mémoires et aussi dans son grand Ouvrage *Électricité et*

Optique, il avait discuté les diverses formes récentes de la théorie électromagnétique, et en particulier la théorie des électrons de LORENTZ dont il appréciait toute la portée. Il avait beaucoup réfléchi à la question du mouvement absolu et du mouvement relatif dont il a souvent parlé dans ses écrits philosophiques : il était convaincu que le mouvement absolu n'avait aucun sens et qu'on ne saurait le mettre en évidence et il ne prenait pas assez au sérieux l'existence de l'éther pour croire qu'on parviendrait à déceler le mouvement relatif d'un observateur par rapport à ce milieu fictif. Aussi n'était-il nullement surpris par le résultat négatif des expériences du genre de celle de MICHELSON et suivait-il avec intérêt, et sans doute un peu d'ironie secrète, les efforts faits par LORENTZ et d'autres théoriciens pour concilier ce résultat négatif avec l'existence de l'éther.

En 1904, à la veille des travaux décisifs d'Albert EINSTEIN sur ce sujet, Henri POINCARÉ possédait tous les éléments de la théorie de la Relativité. Il avait approfondi toutes les difficultés de l'Électrodynamique des corps en mouvement et il connaissait les artifices introduits successivement sous le nom de temps local de LORENTZ et de contraction de FITZGÉRALD pour tenir compte de l'invariance des équations de l'Électromagnétisme et des résultats de l'expérience de MICHELSON. Il voyait clairement que ces hypothèses fragmentaires introduites arbitrairement l'une après l'autre devaient faire place à une théorie générale dont elles ne seraient que des conséquences particulières. La dynamique de l'électron à masse variable avec la vitesse, déjà étudiée par LORENTZ, lui était bien connue : sachant qu'elle entraîne pour les corps matériels l'existence d'une limite supérieure de la vitesse égale à la vitesse de la lumière dans le vide, il en apercevait tout de suite les conséquences quand il écrivait (*Science et Méthode*, p. 252) : « On pourrait être tenté de raisonner comme il suit : un observateur peut atteindre une vitesse de 200 000 km/s; un corps dans son mouvement relatif par rapport à l'observateur peut atteindre la même vitesse : sa vitesse serait alors de 400 000 km, ce qui serait impossible puisque c'est un chiffre supérieur à la vitesse de la lumière. Ce n'est là qu'une apparence qui s'évanouit quand on tient compte de la façon dont LORENTZ évalue les temps locaux ». Ce texte montre que POINCARÉ connaissait, avant EINSTEIN, les formules de composition relativiste des vitesses et d'ailleurs, dans un remarquable Mémoire écrit avant les travaux d'EINSTEIN et paru dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, où il a étudié la dynamique de l'électron d'une façon approfondie, il a donné les formules de la Cinématique relativiste.

Il s'en est donc fallu de peu que ce soit Henri POINCARÉ et non EINSTEIN, qui, le premier, développe la théorie de la Relativité dans toute sa généralité, procurant ainsi à la Science française la gloire de cette découverte. N'écrivait-il pas, en effet, dans *Science et Méthode* (p. 240), résumant toute son expérience de la question : « Quoi qu'il en soit, il est impossible d'échapper à cette impression que le principe de relativité est une loi générale de la Nature, qu'on ne pourra jamais, par aucun moyen imaginable, mettre en évidence que des vitesses relatives, et j'entends par là non seulement les vitesses des corps par rapport à l'éther, mais les vitesses des corps les uns par rapport aux autres. Trop d'expériences diverses ont donné des résultats concordants pour qu'on ne se sente pas tenté d'attribuer à ce principe de relativité une valeur comparable à celle du principe d'équivalence par exemple. Il convient en tout cas de voir à quelles conséquences nous conduirait cette façon de voir et de soumettre ensuite ces conséquences au contrôle de l'expérience ». Il est impossible d'être plus près de la pensée d'EINSTEIN.

Et cependant POINCARÉ n'a pas franchi le pas décisif; il a laissé à EINSTEIN la gloire d'apercevoir toutes les conséquences du principe de relativité et, en particulier, d'établir, par une profonde critique des mesures de longueurs et de durées, le véritable caractère physique de la liaison que le principe de la relativité établit entre l'espace et le temps. Pourquoi POINCARÉ n'a-t-il pas été jusqu'au bout de sa pensée? C'est sans doute la tournure un peu trop hypercritique de son esprit, due peut-être à sa formation de mathématicien pur, qui en est la cause. Comme on le rappellera tout à l'heure, il avait une attitude un peu sceptique vis-à-vis des théories physiques, considérant qu'il existe en général une infinité de points de vue différents, d'images variées, qui sont logiquement équivalents et entre lesquels le savant ne choisit que pour des raisons de commodité. Ce nominalisme semble lui avoir parfois fait méconnaître le fait que, parmi les théories logiquement possibles, il en est cependant qui sont plus près de la réalité physique, mieux adaptées en tout cas à l'intuition du physicien et par là plus aptes à seconder ses efforts. C'est pourquoi le jeune Albert EINSTEIN âgé alors seulement de 25 ans et dont l'instruction mathématique était rudimentaire en comparaison de celle du profond et génial savant français est cependant arrivé avant lui à la vue synthétique qui, utilisant et justifiant toutes les tentatives partielles de ses devanciers, a balayé d'un seul coup toutes les difficultés. Coup de maître d'un esprit vigoureux guidé par une intuition profonde des réalités physiques !

Cependant l'éblouissant succès d'Einstein ne doit pas nous faire oublier combien le problème avait été profondément analysé avant lui par l'esprit lumineux de Poincaré et combien celui-ci avait apporté de contributions essentielles à sa future solution. Sans Lorentz et sans Poincaré, Einstein n'eut pu aboutir.

Et puisque nous avons été amené à citer le beau Mémoire de Poincaré dans les *Comptes rendus du Cercle mathématique de Palerme*, n'oublions pas de rappeler que, étudiant la stabilité de l'électron, l'éminent géomètre montrait qu'elle ne peut être assurée que si, aux forces électromagnétiques connues, s'ajoutait une force de nature inconnue « la pression de Poincaré » : cette force contrebalançant l'effet de la répulsion mutuelle des diverses parties de l'électron lui permet de subsister malgré cette répulsion. Ce fut là une découverte essentielle et aujourd'hui encore, bien que la théorie de l'existence et de la structure des particules élémentaires ait beaucoup évolué, sans parvenir d'ailleurs à un stade vraiment satisfaisant, on entend de nouveau souvent parler de la pression de Poincaré.

Si l'on ajoute à tous ces travaux sur l'Électromagnétisme et les électrons ceux où Poincaré a étudié les ondes hertziennes, leur production, leur propagation et leurs propriétés, on voit à quel point il fut à un moment donné à l'extrême pointe de l'avant-garde des théoriciens de la Physique dans leur marche conquérante.

*
* *

Une question qui présente une grande importance à la fois pour la Physique théorique et pour la Philosophie naturelle tout entière et sur laquelle Henri Poincaré est bien des fois revenu est celle du déterminisme et corrélativement celle de la conception du hasard que la croyance au déterminisme entraîne. Aujourd'hui où ces questions ont été considérées sous des jours nouveaux, il est très intéressant de relire les textes de Poincaré. Comme tous les savants ses contemporains, Poincaré ne paraît jamais avoir mis en doute que tous les phénomènes physiques jusqu'aux plus élémentaires sont régis par des lois rigoureuses, par un déterminisme inflexible qu'expriment des équations différentielles dont les solutions sont entièrement déterminées quand on connaît un nombre suffisant de données initiales. Cette foi dans le déterminisme l'amenait nécessairement à prendre en face du problème du hasard l'attitude qui avait été celle du grand Laplace dans ses Ouvrages fondamentaux sur le Calcul des probabilités. Pour Poincaré comme pour Laplace, le hasard véritable n'existe pas : s'il y a un hasard apparent dans certains phénomènes de la Nature, cette apparence est due soit à notre impuissance de résoudre un problème trop ardu pour les forces de notre esprit, soit à notre ignorance des données nécessaires à sa solution.

Or, l'on sait qu'à la suite du développement de nos connaissances sur les phénomènes de l'échelle atomique où les quanta interviennent d'une manière essentielle, l'opinion de la plupart des physiciens sur cette question est devenue tout à fait différente. Pour eux, à l'échelle atomique, les phénomènes sont purement aléatoires et si, à l'échelle microscopique, il nous semble y avoir des lois rigoureuses, c'est parce que les phénomènes macroscopiques sont le résultat statistique d'un nombre immense de phénomènes élémentaires. Ce point de vue est exactement l'inverse du point de vue classique encore soutenu par Poincaré : ce ne serait pas la loi rigoureuse qui serait la réalité profonde, la loi statistique n'étant qu'une apparence macroscopique; ce serait au contraire la loi statistique qui serait à la base, la loi rigoureuse n'étant qu'une apparence macroscopique. Avec cette conception et, bien que la loi rigoureuse perde sa place priviligiée, on ne peut cependant pas dire que la Nature n'obéit qu'au caprice puisqu'il y a encore des lois statistiques.

Ces idées nouvelles et subtiles, généralement admises par les physiciens quantistes d'aujourd'hui, ont été suggérées par des développements théoriques que Poincaré n'a pas connus. Elles ne pouvaient donc lui être accessibles. Aussi paraît-il être resté toute sa vie partisan intransigeant du déterminisme conçu à la façon classique et de la conception du hasard qu'il entraîne. Adeptes convaincus de l'interprétation purement probabiliste de la Mééanique ondulatoire, la plupart des physiciens théoriciens affirmeraient donc à l'heure actuelle que Poincaré s'était trompé.

Mais s'est-il réellement trompé sur ce point?

Sans vouloir entrer ici dans des explications qui m'entraîneraient trop loin, je rappellerai cependant que des savants aussi éminents que MM. Planck, Einstein et Schrödinger, qui furent parmi les fondateurs et les pionniers de la théorie des quanta lors de son éclosion, n'ont jamais admis l'interprétation purement probabiliste qu'on a ensuite donnée de la Physique quantique. Je rappellerai aussi qu'une tentative fut faite en 1927 pour donner de la Mécanique ondulatoire, encore toute jeune, une interprétation causale et déterministe conforme aux conceptions classiques : cette tentative, la théorie de la double solution, j'en fus moi-même l'auteur, trois ans après avoir énoncé les premières idées de la Mécanique ondulatoire. Mais, découragé par le peu d'attention qu'avaient accordée à ma conception la plupart des autres physiciens théoriciens dès lors séduits par l'interprétation purement probabiliste de MM. BORN, BOHR et HEISENBERG, effrayé aussi des difficultés mathématiques considérables que soulevait le développement de la théorie de la double solution, je renonçai à ma tentative et pendant des années je me suis rallié à l'interprétation couramment admise. A ce moment je pensais donc et j'ai écrit que Henri POINCARÉ avait fait fausse route en s'obstinant dans l'opinion traditionnelle que la probabilité, quand elle s'introduit à la place du déterminisme dans les théories de la Physique, provient toujours de l'ignorance ou de la méconnaissance d'un déterminisme caché. A l'heure actuelle, je suis sur ce point moins affirmatif qu'il y a quelques années. Depuis environ deux ans, en effet, à la suite des travaux de jeunes physiciens, je suis revenu à une étude plus approfondie de mes idées d'il y a 25 ans sur la double solution. Je n'oserais certes pas affirmer que l'on puisse parvenir à justifier entièrement l'interprétation déterministe de la Mécanique ondulatoire proposée par la théorie de la double solution, mais je crois cependant pouvoir dire que quelques pas ont été faits dans cette direction. Si l'on parvenait à aboutir dans cette voie, alors on aurait obtenu une image causale des phénomènes décrits par la Mécanique ondulatoire, et les lois de probabilité, qui sont aujourd'hui classiques en Physique quantique et qui sont certainement exactes, apparaîtraient, au même titre que dans la théorie cinétique des gaz ancienne, comme résultant de notre incapacité à suivre dans son détail un déterminisme caché. Nous obtiendrions ainsi une image assurément beaucoup plus claire des phénomènes de l'échelle corpusculaire que celle qui est aujourd'hui considérée comme orthodoxe par la presque unanimité des physiciens quantistes. Sans retrouver intégralement toutes les conceptions de la Physique classique (car une révolution aussi considérable que celle de l'apparition des quanta en Physique laisse toujours des traces profondes), nous nous serions cependant beaucoup rapprochés d'elle et l'ardeur de POINCARÉ à maintenir intangibles les conceptions traditionnelles dans la Science sur le déterminisme et le sens de l'intervention des probabilités en Physique nous apparaîtrait à nouveau comme entièrement justifiée.

*
* *

Terminons par quelques mots sur les derniers travaux de POINCARÉ relatifs à la théorie des quanta. Il ne semble pas que l'illustre savant, absorbé par tant de travaux et soumis aux nombreuses obligations que sa célébrité lui imposait, ait suivi avec attention les premiers débuts de la théorie des quanta. Les textes qu'il a écrits avant 1910 n'en font jamais explicitement mention bien qu'alors les premiers travaux de PLANCK fussent déjà vieux de plusieurs années. Sa participation au Conseil de Physique Solvay en octobre 1911, réunion où furent discutés tous les aspects encore fragmentaires de la nouvelle théorie, attira vivement son attention sur l'importance des idées de PLANCK. Il écrivit un beau Mémoire pour montrer que, si l'on voulait rendre compte des résultats expérimentaux, il était impossible d'éviter d'adopter avec PLANCK l'hypothèse des quanta. Dans le volume posthume *Dernières pensées*, on trouve résumées en langage ordinaire quelques-unes des remarques et des conclusions auxquelles l'avait amené l'étude de la théorie des quanta. Il avait dû d'ailleurs laisser la plupart des questions sans réponse bien nette et les progrès de la Science dans ce domaine ont depuis lors été tels que les considérations développées à cette époque n'ont plus aujourd'hui un grand intérêt. Cependant on peut noter que Henri POINCARÉ avait très bien vu qu'un quantum de lumière ne peut interférer qu'avec lui-même, fait essentiel qui aujourd'hui sert de base à l'interprétation statistique de la théorie quantique de la lumière et plus généralement de la Mécanique ondulatoire.

Peu de temps après avoir effectué ces recherches sur la théorie des quanta, Henri POINCARÉ mourait subitement au début de juillet 1912, à la suite d'une opération, à l'âge de 58 ans. Il est infiniment regrettable que ce puissant cerveau n'ait pas pu suivre le développement rapide des nouvelles théories relativistes et quantiques et appliquer à leur étude les ressources de son génie mathématique, de ses immenses connaissances et de son esprit si finement critique. Sans doute, il n'aurait pas vu sans étonnement la Physique renoncer à quelques-unes des idées qui lui étaient les plus chères, comme celle du déterminisme des phénomènes. Mais il était trop perspicace pour ne pas s'adapter rapidement à des idées nouvelles, en comprendre l'intérêt ou en discuter l'exactitude. Quels services il eût pu rendre à la jeune théorie des quanta encore si incertaine dans ses démarches, à la future Mécanique ondulatoire aux débuts si difficiles !

Qu'on me permette de terminer par un souvenir personnel. Agé en 1912 de 19 ans, je suivais avec passion le développement de la Physique nouvelle et je relisais, sans me lasser, les cours de Physique mathématique et les Ouvrages de Philosophie des Sciences de Henri POINCARÉ. Partant pour la campagne au début des grandes vacances, j'appris dans le train en lisant le journal la mort subite de ce grand penseur : j'eus l'impression d'une catastrophe qui décapitait brutalement la Science française au moment où la grande révolution que je sentais se préparer en Physique rendait sa présence si nécessaire. J'ai souvent pensé depuis que je ne m'étais pas trompé en ressentant si vivement la perte irréparable que la Science venait de subir.

DISCOURS DU DUC MAURICE DE BROGLIE

DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE,
PRÉSIDENT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Henri Poincaré et la Philosophie.

Henri Poincaré a été un mathématicien de génie, mais ce très grand savant fut aussi un philosophe qui s'est penché sur le sens qu'il convenait d'attribuer à nos conceptions et à nos théories.

En acceptant de me risquer à dire quelques mots sur la philosophie de ce maître éminent, j'avoue que j'ai quelque inquiétude.

D'abord, je ne suis pas un philosophe et ensuite je sens bien que ce n'est pas en consacrant un court espace de temps à lire les Ouvrages de Philosophie d'Henri Poincaré qu'il est légitime de porter sur eux un jugement sérieux. Une seule chose me rassure un peu : ces Ouvrages datent déjà d'une cinquantaine d'années; la Science a fait depuis de grands progrès auxquels ma génération a assisté, on peut donc se rendre compte de la façon dont Poincaré considérait l'avenir de cette Science et apprécier dans quelle mesure, ce qui était le futur pour lui, devenu le présent pour nous, a justifié ou infirmé quelques-uns de ses points de vue : c'est cela seulement que je vais retracer ici.

On peut imaginer un jeune homme d'aujourd'hui trouvant dans la bibliothèque de ses parents, *La Valeur de la Science*, *La Science et l'Hypothèse*, *Science et Méthode*, volumes probablement bien reliés comme on le faisait alors pour des Ouvrages dont le contenu paraissait précieux; ce jeune homme est attiré par leur lecture en espérant y trouver des lueurs prophétiques sur l'avenir que cette fin du XIX^e siècle portait en gestation et qui s'est révélé si chargé de découvertes et de conceptions nouvelles; faut-il dire qu'en refermant le volume on pourra lire quelque déception dans sa curiosité et quelque embarras dans son jugement; c'est cependant ce qui aura eu chance de se produire, ce qu'il faut bien constater et chercher à expliquer dans l'œuvre d'un homme dont le génie mathématique comme la profondeur de pensée sont également incontestables.

Il ne faut pas oublier la date à laquelle ces Ouvrages furent écrits; on ne peut pas séparer un homme de son époque, si grand que puisse être son génie, surtout si c'est un écrivain scrupuleux et défiant vis-à-vis des élans prophétiques vers le futur.

La Valeur de la Science est de 1905, *La Science et l'Hypothèse* de 1906, *Science et méthode* de 1908 et le livre posthume intitulé *Dernières pensées* a paru en 1913.

Pendant le dernier quart du siècle dernier, les très grands développements de la Science avaient donné à toute une génération l'impression que celle-ci était en train de se cristalliser, que toutes ses grandes avenues avaient pris leur direction définitive et que les perfectionnements futurs ne porteraient plus que sur des détails destinés à mieux ordonnancer la majestueuse structure des faits et des théories. Cependant dans les toutes dernières années du XIX[e] siècle, de grandes découvertes s'étaient révélées, les quanta de PLANCK, la relativité d'EINSTEIN, la radioactivité de BECQUEREL et des CURIE; mais leurs développements, bien que rapides, n'en avaient pas encore dégagé la pleine signification. Ce nouvel essor n'avait certes pas échappé à Henri POINCARÉ; il le suivait avec grand intérêt.

En 1911, déjà gravement atteint par la maladie qui devait l'emporter l'année suivante, il s'était rendu à Bruxelles pour suivre les travaux du premier Congrès Solvay; le temps, hélas, devait lui manquer pour en tirer toutes les conséquences.

Louis DE BROGLIE parle aujourd'hui des théories de Physique mathématique que POINCARÉ a étudiées; il rend hommage aux contributions pleines de valeur qu'il a apportées dans la présentation et la perfection mathématique de cette partie de son œuvre, je n'insisterai donc pas sur ce point, mais je ferai seulement allusion à la différence profonde qui sépare ce que l'on appelle souvent la Physique théorique et la Physique mathématique. La première de ces disciplines concerne les théories que les physiciens élaborent pour guider les recherches et présenter des points de vue nouveaux destinés à ouvrir des voies neuves à l'expérimentation; la seconde comprend l'examen mathématique et critique des théories déjà assises pour leur apporter la rigueur qui doit en faire une branche satisfaisante des sciences mathématiques. Dans sa leçon inaugurale du Collège de France en 1952 M. André LICHNEROWICZ a magistralement analysé les divergences de ces deux attitudes et souligné les imperfections que présentent souvent les idées émises par les physiciens théoriques, imperfections qui ne les empêchent aucunement de rendre les plus éminents services.

Ce sont le plus souvent ces embryons hâtifs et quelque peu échevelés de théorie qui ont joué le rôle fondamental dans les progrès de la Physique à l'époque contemporaine et donné, sous ce rapport, une grande célébrité à leurs auteurs; le travail des mathématiciens est moins spectaculaire et l'on s'explique ainsi comment il se fait qu'Henri POINCARÉ n'ait pas attaché son nom aux manifestations les plus connues de ces guides et de ces promoteurs de la Recherche, parce qu'il s'agit en réalité, là, de deux orientations bien différentes de l'esprit.

Les grands novateurs ne s'embarrassent pas des difficultés que présente ce qu'il y a parfois de contradictoire et d'inachevé dans leurs conceptions; pour n'en citer qu'un exemple la théorie de BOHR sur les orbites électroniques de l'atome, présentée sous sa forme initiale était une sorte de monstre, s'appuyant d'une part sur les théories classiques et d'autre part sur des idées nouvelles incompatibles avec la continuité qui est à la base des premières. Cela ne l'a pas empêché d'avoir rencontré tout de suite un succès éclatant et d'avoir jeté la lueur la plus vive sur la constitution des atomes et l'émission de leurs spectres d'émission et d'absorption, tout à fait inintelligibles auparavant. Les raffinements viennent ensuite, mais souvent alors aussi la théorie primitive a tellement évolué qu'elle se présente sous un jour tout nouveau. La hardiesse et l'intuition d'un côté, la rigueur et l'esprit critique de l'autre, voilà les caractéristiques de chacun de ces points de vue.

On a toujours une certaine répugnance à abandonner la logique bien qu'on soit souvent un peu trop porté à le faire aujourd'hui, cependant la rigueur absolue est une chimère dans cet ordre d'idées.

On peut faire une carte exacte des États-Unis d'Amérique, quoiqu'il y ait des régions inexplorées dans l'Afrique centrale ou le bassin de l'Amazone, mais la nature est une, et dans tous les cantons de la Physique, on ne peut espérer raisonner correctement, alors qu'il y a tant de choses inconnues dans les mystères de la Matière.

POINCARÉ, lui-même, reconnaît nettement les différentes tendances des mathématiciens quand il écrit :

« Que l'esprit du mathématicien ressemble peu à celui du physicien ou à celui du naturaliste, tout le monde en conviendra, mais les mathématiciens eux-mêmes ne se ressemblent pas, les uns ne connaissent que l'implacable logique, les autres font appel à l'intuition et voient en elle la source unique de la découverte » ; il dira plus loin : « La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration, l'intuition est l'instrument de l'invention ».

La notion du temps, comme celle de l'espace, et de ses dimensions est une de ses préoccupations favorites, il l'examine avec une profondeur qui n'a guère été dépassée; on sent chez lui, l'influence des idées premières de la Relativité et de ses convictions déterministes auxquelles il aurait beaucoup de répugnance à renoncer.

Dans le chapitre intitulé « l'Analyse et la Physique », l'influence du langage employé retient son attention. A propos de la chaleur et de l'électricité, il montre combien d'erreurs sont résultées de ce que la chaleur n'est pas une chose qui se conserve, tandis que, plus heureuse, l'appellation d'électricité contenait implicitement un principe de conservation qui n'a pas été démenti par la Physique la plus récente.

Tout le chapitre destiné à montrer les services mutuels que se sont rendus l'Analyse et la Physique n'a pas vieilli et reste plein d'enseignements. POINCARÉ insiste sur l'Astronomie qu'il avait tant approfondie et qu'il considère comme la mère des théories de la Physique. Sa grandeur et sa simplicité, sa conception de forces centrales émanant en première approximation de points mathématiques, le triomphe qu'elle assura à la mécanique en font un modèle que s'efforcent de suivre les physiciens du XX^e siècle. C'est un beau sujet de méditations qu'il ne manque pas de développer avec puissance et clarté.

Parlant ensuite de l'histoire de la Physique mathématique, il y trouve d'abord la Physique des forces centrales, inspirée par l'Astronomie et où la notion de centres de forces introduit forcément l'idée d'atomes ou de molécules, et la Physique des principes qui permet, dans des raisonnements du type thermodynamique, de négliger le détail des mécanismes.

Mais ces principes, que sont-ils? C'est là peut-être, que notre grand savant subit l'influence de son époque, mais il voit les périls qui menacent la certitude affirmée de ces principes. Les expériences de GOUY sur le mouvement brownien ne vont-elles pas mettre en péril le principe de CARNOT, la découverte du radium ne risque-t-elle pas d'ébranler notre confiance dans le principe de la conservation de l'énergie? POINCARÉ, un peu inquiet, cherche à se rassurer en songeant que toutes les dérogations observées ne concernent que des infiment petits, nous verrons plus tard que la chose est plus grave et nous aurons l'occasion d'y revenir.

Quand l'auteur s'occupe de la notion du raisonnement mathématiqué, de la définition des opérations sur les nombres, il montre l'importance fondamentale du raisonnement par récurrence pour créer une science, puis il passe aux incommensurables, au continu mathématique à une ou plusieurs dimensions et en arrive à son sujet de prédilection, les considérations sur l'espace, espace tactile, espace visuel, espace abstrait, diverses géométries possibles et il conclut sur une proposition qu'il reproduira souvent ailleurs. La Géométrie, dit-il, la Géométrie fondée sur l'expérience ancestrale de l'humanité n'est, en réalité, que la plus commode : la Géométrie n'est pas vraie, elle est avantageuse.

Science et Méthode est un Ouvrage d'un genre un peu différent et qui ne semble pas s'adresser tout à fait à la même catégorie de lecteurs que les précédents; on peut y noter que l'auteur, en constatant, hélas! il y a 40 ans, que l'Europe domine actuellement le monde, attribue cette supériorité à l'héritage des Grecs dont l'élégance et la beauté ont préparé la suprématie intellectuelle des Européens sur les Barbares.

Poincaré revient souvent à propos de l'avenir des mathématiques sur la notion d'harmonie et d'élégance, qui permet aux solutions qu'elle inspire d'atteindre au grand rendement et de mesurer ainsi la valeur des conceptions nouvelles.

Passant alors à la Mécanique, Poincaré commence par insister sur le fait que cette science, contrairement à certaines tendances qui la présentaient comme une connaissance déductive et *a priori*, est au fond une science purement expérimentale; c'est un point de vue exact, mais qu'il a beaucoup contribué à faire triompher. Malgré son appareil mathématique souvent imposant, la Mécanique est aussi expérimentale que la Physique.

Il y avait là, quand même quelque chose d'un peu inquiétant. Bien que Poincaré trouve superflues les craintes exprimées par Hertz quand il disait : « Dans l'opinion de beaucoup de physiciens, il apparaîtra comme inconcevable que l'expérience la plus éloignée puisse jamais changer quelque chose aux inébranlables principes de la Mécanique et cependant, ce qui sort de l'expérience peut toujours être modifié par l'expérience », on sent qu'il n'est plus tout à fait à l'aise quant à la pérennité de ses principes.

L'Ouvrage posthume *Dernières pensées* débute par des considérations sur l'évolution des lois de la Nature : question alors posée par Boutroux. L'auteur essaye d'évaluer par les lois de la Thermodynamique le temps qui s'est écoulé depuis que le Soleil a pu verser sa chaleur et trouve 50 millions d'années, chiffre évidemment peu compatible avec les estimations de la Géologie. Nous possédons aujourd'hui des données bien différentes sur l'origine et le maintien de la chaleur des étoiles; mais Poincaré avait bien vu qu'une confrontation entre les diverses sciences posait des problèmes qui paraissaient alors insolubles.

Un peu plus loin se trouve cette profonde remarque :

« A quoi bon se demander si dans le monde des choses en soi, les lois peuvent varier avec le temps, alors que dans un pareil monde le mot de temps est peut-être vide de sens. De ce que le monde est, nous ne pouvons rien dire, ni rien penser, mais seulement de ce qu'il paraît, ou pourrait paraître à des intelligences qui ne différeraient pas trop de la nôtre ».

Laissons de côté les réflexions mathématiques sur l'espace, la logique de l'infini, et venons-en aux derniers chapitres, inspirés par le voyage de l'auteur à Bruxelles pour le Congrès Solvay de 1911. « On peut se demander », écrit-il, « si la Mécanique n'est pas à la veille d'un nouveau bouleversement, les physiciens de Bruxelles parlaient d'une mécanique nouvelle qu'ils opposaient à la mécanique ancienne, or, qu'était-ce que cette mécanique ancienne, était-ce celle de Newton? non, c'était celle de Lorentz avec le principe de relativité, qui, il y a cinq ans à peine, paraissait le comble de la hardiesse ». Je me rappelle qu'un jour à Bruxelles, comme Einstein exposait ses idées, Poincaré lui demanda : « Quelle mécanique adoptez-vous dans vos raisonnements? » Einstein lui répondit : « Aucune mécanique » ce qui parut surprendre son interlocuteur.

Poincaré, continuant le déroulement de ses réflexions écrit : « Une hypothèse s'est d'abord présentée à l'esprit de M. Planck, mais tellement étrange qu'on était tenté de chercher tous les moyens de s'en affranchir; ces moyens, on les a vainement cherchés jusqu'ici. Et cela n'empêche pas que la nouvelle théorie soulève une foule de difficultés, dont beaucoup sont réelles et ne sont pas de simples illusions dues à la paresse de notre esprit, qui répugne à changer ses habitudes.

« Il est impossible, pour le moment », poursuit-il, « de prévoir quelle sera l'issue finale; trouvera-t-on une autre explication entièrement différente? ou bien, au contraire, les partisans de la nouvelle théorie parviendront-ils à écarter les obstacles qui nous empêchent de l'adopter sans réserve? La discontinuité va-t-elle régner sur l'univers physique et son triomphe est-il définitif? ou bien reconnaîtra-t-on que cette discontinuité n'est qu'apparente et dissimule une série de processus continus. Le premier qui a vu un choc a cru observer un phénomène discontinu, et nous savons aujourd'hui, qu'il n'a vu que l'effet de changements de vitesse très rapides, mais continus. Chercher dès aujourd'hui, à donner un avis sur ces questions, ce serait perdre son encre ».

Telles furent les dernières pensées d'Henri POINCARÉ. De son temps on tendait à envisager le noyau de l'atome comme un monde fermé, complètement indépendant du monde extérieur, toute la Physique nucléaire est précisément basée sur le contraire.

Cela s'explique par l'état de la Science qui, même dans les dernières années du XX^{e} siècle n'était pas parvenue à mettre en œuvre les moyens nouveaux qui permettent de franchir cette barrière qui entoure le noyau; le plus efficace d'entre eux, le neutron, ne devait être découvert que bien longtemps après.

Qu'un esprit exceptionnel, comme celui de POINCARÉ, n'ait pu soupçonner tout cela, c'est la preuve de l'immense bond en avant qu'il était réservé à la Physique d'accomplir dans la période qui commençait à s'ouvrir.

Ces quelques citations permettent de dire qu'Henri POINCARÉ, malgré la tournure parfois un peu sceptique de son esprit, avait bien entrevu la révolution qui se préparait, et font regretter encore davantage sa disparition prématurée. Sans doute, au contraire, si le flambeau de sa merveilleuse intelligence avait pu nous éclairer un peu plus longtemps aurait-il illuminé les nouvelles routes que les sciences physique s'apprêtaient à suivre.

Que dire du dernier chapitre, *La Morale et la Science* qui termine cet Ouvrage? L'auteur voit bien les excès des deux tendances qui, l'une, estime que demain la Science bâtira la Morale comme elle a bâti l'Astronomie et la Physique et par les mêmes procédés, et l'autre, au contraire, craint qu'en laissant agir les savants, il n'y ait bientôt plus de Morale du tout; il croit généreusement que sans pouvoir, à elle seule, créer une Morale, la Science peut contribuer par son influence, à l'affermir. La question est toujours ouverte; maintenant que l'homme a sur la Nature, une puissance qu'il n'a jamais possédée auparavant, peut-on dire que la Morale a progressé, ou même qu'elle n'a pas reculé, le fanatisme a-t-il diminué sur la Terre? Le respect de la personnalité humaine et l'idéal de la liberté ne sont-ils pas plus gravement menacés que jamais? Nous sommes loin de la sérénité de la Philosophie des sciences.

ALLOCUTION DE M. GASTON JULIA

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PRÉSIDENT DU COMITÉ D'ORGANISATION.

L'Édition des Œuvres d'Henri Poincaré.

Monsieur le Président de la République,
Messieurs les Ministres,
Mon cher Secrétaire perpétuel,

J'ai l'honneur de vous remettre le dixième volume des œuvres d'Henri Poincaré.

Avec ce dixième volume s'achève l'édition entreprise dès la mort d'Henri Poincaré par Gaston Darboux, Secrétaire perpétuel de notre Académie.

Mesdames, Messieurs,

Dans l'éloge historique du disparu, qu'il prononça au cours de la séance du 15 décembre 1913, Gaston Darboux s'exprimait ainsi :

« Pour nous, qui le regretterons toujours, nous lui rendrons l'hommage auquel il aurait été le plus sensible, en veillant, avec le concours et l'assentiment de ses proches, à la publication de ses œuvres mathématiques. Le monument que nous lui élèverons ainsi, sera celui qu'il aurait le plus volontiers agréé; il prolongera son action et lui suscitera des élèves qu'il n'aura pas connus. »

Effectivement, dans le courant de 1916, paraissait d'abord le tome II, dont notre éminent ami le Professeur N. E. Nörlund, ancien élève d'Henri Poincaré et d'Émile Picard à la Sorbonne, venait d'établir le manuscrit. Ce tome II rendait accessible aux mathématiciens tout l'ensemble des travaux sur les fonctions fuchsiennes, qui était devenu introuvable dans les bibliothèques, les tomes des *Acta mathematica* qui les contenaient ayant le plus souvent émigré vers des collections privées. Je me souviens, aujourd'hui encore, de l'extraordinaire impression de grandeur que je ressentis, lorsqu'au début de 1917, enfermé pour un mois dans une cellule du Val de Grâce sous l'inculpation de diphtérie, je dévorai littéralement ce tome II que j'avais réclamé pour me distraire.

La guerre ayant, par ses suites financières, rendu très difficile la poursuite de l'édition, il fallut attendre que la journée Pasteur fournît à l'Académie les moyens de continuer; c'est ainsi que Paul Appell, assisté de Jules Drach, publia le tome I en 1928, et que Jules Drach publia le tome III en 1934.

Les vicissitudes que vous connaissez interrompirent encore une fois l'édition.

En juillet 1948, un congrès de mathématiciens à Genève manifesta par un vœu son désir de voir reprendre au plus tôt l'édition interrompue et il me chargea de le communiquer à l'Académie. Mais les conseilleurs ne sont pas souvent les payeurs, et l'Académie, appauvrie par les dévaluations successives, ne pouvait que manifester le même désir et constater son impuissance. Songez aux ruines qui couvraient encore à cette époque notre pauvre pays.

C'est alors que nos secrétaires perpétuels voulurent bien m'encourager à présenter à l'Académie un plan, que je leur avais soumis d'abord, pour poursuivre l'édition en associant les « Amis de l'École Polytechnique » à sa réalisation. Bien entendu, nous voulions, pour le Centenaire, avoir publié les sept volumes restants, afin de rattraper le retard antérieur. Il était donc urgent de ne plus attendre.

On sait ce qu'en d'autres circonstances aurait dit Lyautey. Comme il fallait reboiser toute une région dévastée de l'Atlas, les forestiers débordés faisaient observer qu'il n'y avait pas urgence, car il faut plus de 50 ans pour que les cèdres atteignent une taille raisonnable. « Vraiment, répondit Lyautey, raison de plus pour commencer tout de suite ». C'est ce que nous fîmes.

Le plan proposé fut adopté et la Commission académique correspondante nommée dans la même séance; nos secrétaires perpétuels me chargèrent d'étudier sa réalisation pendant les vacances. A la rentrée, la Commission dut examiner un projet de démarrage immédiat et un plan de réalisation de l'ensemble des sept volumes, grâce au concours d'un Comité Poincaré, en formation à l'École Polytechnique, qui assumerait les charges financières.

Les premiers fonds nous furent donnés par le C. N. R. S., l'Union astronomique internationale, et par nos élèves de l'École Polytechnique des promotions 46 et 47, à qui il me suffit d'expliquer l'utilité et l'urgence de cette reprise, pour qu'ils s'inscrivent immédiatement comme bienfaiteurs. Nous pûmes ainsi publier un volume.

Le Comité Poincaré s'étant mis d'accord avec nos secrétaires perpétuels, restait la difficile recherche de moyens matériels représentant un nombre respectable de millions. Dans cette recherche, tandis que le C. N. R. S. avec Joseph Pérès et Gaston Dupouy nous continuait son généreux appui, nos amis Roger Boutteville et Pierre Ricard intervinrent avec la plus grande efficacité : le premier auprès des Sociétés industrielles nationalisées, le second auprès des Sociétés industrielles privées et des Chambres de commerce, en mettant à notre disposition et son indiscutable autorité au sein du Conseil national du Patronat français et toute l'organisation de ce Conseil pour la collecte des fonds nécessaires. Dès la fin de 1950 nous étions rassurés, autant qu'on pouvait l'être à cette époque, sur l'issue favorable de notre entreprise.

D'un autre côté, un réconfort nous vint, car la Compagnie des Chargeurs Réunis décida de donner le nom d'Henri Poincaré à l'un de ses beaux paquebots mixtes alors en construction.

On comprend, dans ces conditions, que nous tenions à adresser nos remerciements les plus vifs à tous nos souscripteurs, en particulier aux *bienfaiteurs*, au nombre de 48, dont nous donnons la liste dans la préface du tome X, qui nous ont fourni, à eux seuls, près des deux tiers de la somme totale; à nos amis du Comité Poincaré, à ses présidents successifs les généraux Blanchard et Hartung, à son dévoué secrétaire-trésorier le Général Gœtschy, et tout particulièrement à Roger Boutteville et à Pierre Ricard.

La recherche des collaborateurs compétents, chargés d'établir les manuscrits nous fut beaucoup plus aisée, grâce à l'aide de la Commission académique, et plus particulèrement d'André Danjon et de Louis de Broglie. Là encore, la décision prise de mettre en train simultanément la préparation des différents volumes nous permit de fournir, sans arrêt et sans perte de temps, les manuscrits successifs à l'Imprimerie Gauthier-Villars, qui, de son côté, fit un effort exceptionnel. Que tous les collaborateurs de l'œuvre, nos collègues Georges Valiron, Albert Châtelet, René Garnier, Jean Leray, Jacques Lévy, Pierre Sémirot, Gérard Petiau, sans oublier la propre famille d'Henri Poincaré pour l'aide et les facilités de toute sorte qu'elle nous a accordées, trouvent ici l'expression de notre plus sincère reconnaissance.

Aujourd'hui la grande entreprise est achevée. Nos jeunes géomètres pourront commodément étudier ces travaux illustres, et pour conclure avec Darboux : « ils y recueillent une foule de suggestions fécondes; puissent-ils en même temps, s'inspirer des vertus de leur auteur, et, comme lui, concilier le culte de la Science avec celui de la famille et de la Patrie. »

ALLOCUTION DE M. ÉMILE BOREL.

Monsieur le Président de la République,
Messieurs les Ministres,
Mesdames, Messieurs,

Après les quatre beaux discours que vous venez d'entendre je suis confus de prendre la parole, car tout a été dit, qui pouvait être dit en un court laps de temps, sur l'œuvre du grand Français que nous célébrons aujourd'hui. On a jugé, avec juste raison, que pour l'honorer dignement, il était désirable que quatre savants éminents prennent la parole. Sans doute, chacun d'eux aurait pu, si on le lui avait demandé, traiter de tous les aspects de son œuvre ; mais il a paru préférable que chacun de ces aspects fut évoqué par le savant le plus désigné par ses propres travaux.

Si nous imaginons que Henri Poincaré ait vécu assez longtemps pour participer, en l'honneur de ces quatre savants, à une de ces cérémonies jubilaires dont l'usage se répand de plus en plus, il aurait été le plus qualifié pour parler de chacun d'eux. Cette simple remarque est un témoignage éclatant de l'universalité de son génie, universalité que l'on rencontre à peine une ou deux fois par siècle dans les périodes les plus fécondes de l'humanité.

Ne pouvant redire ce qui a été si bien dit sur son œuvre, je me bornerai à évoquer quelques souvenirs.

Poincaré était atteint d'une maladie qui nécessitait une intervention, fort dangereuse à cette époque. N'ignorant pas le risque grave qu'il courait, il tint à remplir son devoir jusqu'au bout. Quelques jours avant l'opération il assista à une séance du Conseil de la Faculté des Sciences où il devait exposer les titres d'un mathématicien de grande valeur qu'il souhaitait voir venir de Province à Paris.

En même temps il avait rédigé son dernier Mémoire, dans lequel il laissait en suspens une difficulté qu'il n'avait pas eu le temps d'élucider complètement. C'est le mathématicien américain Georges Birkhoff qui démontra rigoureusement ce que l'on a appelé « le dernier théorème de Poincaré ».

C'est précisément un voyage de Georges Birkhoff à Paris qui décida de la création de l'Institut Henri Poincaré. Il était venu, mandaté par une des plus importantes fondations dues à Rockfeller, l'International Education Board, en vue de doter la France d'une institution propre à promouvoir les progrès de la Science. Birkhoff consulta diverses personnes à ce sujet et voulut bien retenir la suggestion que je lui fis. Nous étions tombés d'accord sur le fait que la Science mathématique française occupait le premier rang dans le domaine international, mais qu'il n'en était pas de même pour la Physique, malgré l'enseignement de professeurs éminents tels que Paul Langevin, Jean Perrin et M^{me} Curie. Il apparaissait donc désirable, par la création de chaires, par des conférences demandées à des savants étrangers, d'intéresser à la Physique théorique des jeunes gens trop exclusivement attirés par les Mathématiques.

Une telle fondation ne pouvait être mieux placée que sous l'égide d'Henri Poincaré. Ce nom était à la fois un rappel du passé et une promesse d'avenir. Il a certainement contribué à attirer des élèves et des conférenciers, à susciter des vocations, de sorte que, après sa mort, Henri Poincaré a continué à servir la vérité comme il l'avait fait toute sa vie.

Il n'est pas possible de proposer aux jeunes chercheurs l'exemple d'Henri Poincaré, car on ne peut demander à chacun d'avoir du génie; il est cependant permis de se mettre à son école et de chercher modestement à profiter de ses leçons.

Le trait le plus frappant de son caractère, pour ceux qui l'ont approché, c'est sa passion pour la recherche scientifique et son désir d'y consacrer tout son temps, sans en détourner une parcelle dans des travaux qu'il regarde comme accessoires. Il n'accepta jamais des fonctions administratives, comme celles de doyen ou de secrétaire perpétuel, non qu'il en méconnut l'utilité, mais il pensait que d'autres pouvaient l'y remplacer, tandis que lui seul pourrait résoudre certains problèmes.

Le souci d'économiser son temps se manifestait dans les plus petits détails. C'est ainsi qu'un jour où je lui demandais un tirage à part d'un de ses Mémoires, il me dit : « Je ne fais plus faire de tirages à part, car c'était ma femme qui les envoyait et, depuis que nous avons des enfants, elle n'en a plus le loisir ».

En me remettant les épreuves d'un article, qu'il avait bien voulu écrire pour *La Revue du mois*, il me dit : « Bien entendu, je n'ai corrigé que les fautes qui trahissaient ma pensée; c'est l'affaire des imprimeurs et des secrétaires de rédaction de découvrir les fautes typographiques ; je ne perds jamais mon temps à les corriger, même si je les aperçois ! »

Quand il inventa les fonctions fuchsiennes, il constata qu'il y a économie de temps à appeler droites les cercles qui ont leur centre sur l'axe des X et de définir également les angles et les distances d'une manière qui correspond à une certaine géométrie non euclidienne. Ces manières de parler abrégées sont commodes, donc tout se passe comme si elles étaient vraies ; de là à dire que les diverses géométries non euclidiennes sont également vraies, il n'y a qu'un pas qu'il franchit aisément,

De même, lorsqu'il découvre la divergence des séries de la Mécanique céleste, il ne perd pas son temps à rechercher des séries convergentes ; il préfère montrer que les séries divergentes peuvent être aussi utiles et efficaces que des séries convergentes.

En Calcul des probabilités, il montre que la définition de la probabilité élémentaire peut comporter une fonction arbitraire assujettie seulement à des conditions très larges de continuité, sans modifier les conséquences les plus importantes.

Il en est de même dans la théorie de la Relativité. L'espace-temps de Newton est parfois le plus commode, tandis que pour d'autres problèmes, ce sont les formules de la Relativité générale qui doivent être employées.

C'est dans le même esprit qu'il a traité les questions posées par la Physique nouvelle, notamment pour les quanta, mais je n'ai pas à revenir sur ces questions dont on vient de parler mieux que je ne saurais le faire.

Certains ont regardé Poincaré comme un sceptique, d'autres comme le précurseur des théories axiomatiques ; mais il aurait refusé de se laisser embrigader dans une secte quelconque, même si cette secte pouvait se réclamer de sa pensée.

Pour lui, la morale du savant se résume en une règle que réprouve la simple morale : la fin justifie les moyens.

La fin, c'est la connaissance de l'Univers, c'est l'accord entre les résultats numériques déduits des formules et les nombres inscrits par les physiciens et les astronomes sur leurs cahiers d'observations. Les moyens, pour le mathématicien, ce sont des formules et un langage qu'il a le droit de créer à sa convenance du moment qu'ils lui sont commodes ; ces moyens ne sont jamais immoraux, ils ne sont ni vrais ni faux et le savant doit être laissé libre de les choisir à son gré.

DISCOURS DE M. LE PRÉSIDENT ANDRÉ MARIE,

MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE.

A n'en pas douter, le premier devoir était de rassembler dans une édition définitive les œuvres de Henri Poincaré.

M. Gaston Julia a retracé la longue et difficile histoire de cette édition. Je voudrais lui exprimer pour ses prédécesseurs, pour ses collaborateurs et pour lui, les félicitations du Ministre de l'Éducation Nationale et la gratitude de la Pensée française.

Mais c'est à vrai dire la Pensée universelle qui incline aujourd'hui son hommage devant ce génial savant dont le centenaire rassemble toutes les nations, que d'éminents délégués représentent auprès de nous. Je leur apporte les remerciements chaleureux de l'Université et de la Science française : leur présence parmi nous atteste que Poincaré a parlé assez haut pour que sa voix parvienne encore au-delà de toutes les frontières. Nous lui en faisons nous-mêmes honneur, mais nos hôtes éminents ajoutent à sa gloire le crédit de leur propre renommée. Qu'ils sachent bien notre très vive gratitude.

* * *

La Science vient de rendre à la mémoire d'Henri Poincaré l'hommage auquel il eût été le plus sensible. Maître toujours admiré des Mathématiques et de la Physique mathématique, c'est à cette réunion de ses pairs qu'il eût été d'abord attentif. Mais c'est le destin des grands hommes de n'être pas les maîtres de leur souvenir. Leurs survivants les font revivre à leur mode. Penchés sur l'œuvre des disparus, ils y découvrent des aspects choisis et parfois des significations nouvelles. Ils lui confèrent une portée authentique, mais imprévue. Ainsi plusieurs gloires se réunissent aujourd'hui autour d'Henri Poincaré ; la gloire du mathématicien, celle du physicien mathématicien, celle du philosophe de la science, et enfin, cet obscur et juste prestige qui entoure toujours ce savant dans la grande admiration commune.

Ces gloires multiples, la piété de ses continuateurs vient de les célébrer en des termes d'une simplicité si définitive que je ne serais à aucun égard pardonnable de tenter de répéter le fondement d'une telle célébrité. Peut-être pourtant attend-on de celui que le protocole désigne pour être le dernier orateur qu'il tente de rassembler les traits intellectuels du savant. Cette synthèse, aussi imparfaite qu'elle soit, sera du moins un autre hommage à cet esprit qui ne se satisfaisait jamais de vues sur elles-mêmes fermées.

Je ne pense pas qu'il soit nécessaire de vous proposer de parcourir avec moi la vie et le *cursus honorum* de Henri Poincaré. Sa précocité presque prodigieuse, son entrée au premier rang à l'École Polytechnique, puis à l'École des Mines, ce célèbre Mémoire qu'il publie à 24 ans au *Journal de l'École Polytechnique*, sa thèse rapidement et brillament soutenue, et puis, tôt après le succès, la renommée, la gloire; son élection à 33 ans à l'Académie des Sciences et bientôt aux grandes Compagnies scientifiques du monde entier, les prix et les médailles d'or, ce sont là les triomphes discrets que le savant trouva sur sa route pour récompense d'une œuvre immense.

Les existences des grands hommes se développent parfois dans un mouvement continu et régulier : chaque progrès appelle un progrès voisin; leur science et leur renommée suivent un sillon dès longtemps tracé. Chez d'autres, l'avancement se fait selon une ordonnance moins exigeante. Tel était Poincaré. Déjà tout jeune élève, ses camarades, qui le croyaient au travail, le trouvaient « allant, venant, sautillant dans l'appartement familial ». Et puis, tout à coup, « il s'approchait de la table et posant un genou sur la chaise, il prenait sa plume — de la main gauche ou de la main droite, au hasard —, écrivait quelques mots ou quelques lignes : le devoir était fait ». Plus tard, il devait inquiéter beaucoup son professeur de Mathématiques spéciales en s'obstinant à ne prendre pour tout cahier qu'un faire-part de décès.

A l'École Polytechnique, il écoute, néglige même les cours polycopiés et s'en va réfléchir en se promenant dans les couloirs. Et l'on verra son jeune génie composer un roman, un plaidoyer pour le grec et le latin, et même un petit Ouvrage à l'usage des enfants.

Maître de son savoir, il dira qu'il n'achève jamais un Mémoire tant il a hâte d'en écrire un nouveau. Cette apparente fantaisie était à vrai dire le reflet d'un mouvement d'esprit dont la richesse s'accommodait mal de la continuité et de la règle.

La production scientifique d'Henri Poincaré le fait bien voir. Ce n'est pas qu'il l'ait conduite au hasard. A vrai dire, et M. Hadamard l'a vivement souligné, ses guides ce sont les besoins de la science, où qu'il les constate, ses énigmes ou ses lacunes, en quelque endroit qu'elle les ait consenties. Dès qu'il remarque que la théorie des fonctions analytiques de Cauchy a conduit à la théorie des fonctions elliptiques, il y porte son effort, comme s'il pressentait là une grande voie inconnue, qu'il faut découvrir ou forcer. Et c'est, par une généralisation où apparaît bien l'orientation de son génie, la théorie des fonctions fuchsiennes, ces « clefs du monde algébrique ». Les questions qui passionnent Poincaré, ce sont celles qui avaient jusque-là arrêté les géomètres. Parce qu'il a voulu ici, et là, et plus loin, sans ordre apparent, s'attaquer à toutes les difficultés, parce qu'il a été en même temps, et presque avec un égal génie, mathématicien, physicien et philosophe, son œuvre risque parfois de ne pas montrer au premier regard l'unité de son inspiration et la fermeté de sa pensée. Il arrive qu'un mathématicien soit seulement mathématicien. Poincaré ne le pouvait pas. Son génie l'appelle à tous les problèmes, à ceux de la Mathématique pure, à ceux de la Physique mathématique, à ceux de la Philosophie des sciences, jusqu'à côtoyer quelquefois la Métaphysique elle-même. On peut dire de lui, et pour sa gloire, que dans l'ordre de la pensée aucune question ne lui fut étrangère pourvu qu'elle fût difficile.

Pourtant il n'entendait pas se borner à juxtaposer les solutions. Déjà l'exemple des fonctions fuchsiennes avait souligné son goût profond de la synthèse. C'est à cette rare vertu de l'esprit et au très haut point où son génie la porta, qu'il dut pour la plus large part ses éclatants succès.

Mais je crois que ses triomphes procèdent aussi d'une autre source. On est frappé de la place importante que Poincaré a conférée dans ses recherches aux problèmes du réel. La marque de son génie, autant que nous puissions la saisir, c'était son universalité. Tous les problèmes et tous les aspects du monde venaient se rejoindre en lui.

Aussi ne pouvait-il s'abstraire d'une constante référence aux données. Même en Mathématiques, il paraît porter une secrète préférence par exemple à ces équations différentielles de la Mécanique céleste, qui — M. Hadamard nous l'a magistralement montré — semblaient constituer un problème inabordable, en raison de l'insondable imbrication des attractions réciproques. En Physique mathématique — et c'est cette fois M. Louis de Broglie qui en a apporté l'illustration — ce sont aussi des problèmes presque concrets qui retiennent l'attention du mathématicien : sa théorie de la propagation de la chaleur, sa mise en forme de la thermodynamique, sont encore des reprises, des compléments sur des points essentiels et difficiles, où la science avait jusque-là trébuché et hésité.

Et si l'on en vient à rechercher pourquoi ce mathématicien s'est adonné à la Physique théorique avec tant d'entrain, c'est encore en invoquant sa passion de la synthèse qu'il faudra répondre. L'enthousiasme dans lequel il approfondit l'histoire des théories de la lumière depuis FRESNEL, l'admirable amour qu'il met dans son étude, cette passion contenue avec laquelle il salue l'extraordinaire synthèse que propose la théorie de MAXWELL entre les phénomènes optiques et les phénomènes électriques, autant de signes décisifs de son désir de regrouper la science, de sa volonté de constituer le savoir dans des ensembles cohérents et ordonnés.

On serait sacrilège si l'on laissait entendre que le génie de POINCARÉ comportait une lacune. Il n'avait point de lacune; il suivait une orientation. Le réel lui proposait les objets de sa recherche ; mais lorsqu'il s'en était emparé, c'était pour les absorber dans son génie mathématique. Il songeait rarement à y revenir pour rapporter la théorie aux exigences expérimentales. Il était mathématicien, et le souci de l'expérience ne l'obsédait pas. Il professait assez volontiers que les théories ne sont que des figurations équivalentes de la réalité. Aussi n'apercevait-il pas aussi complètement que les physiciens de notre temps l'exigence plénière de la confrontation physique, l'importance de l'intuition expérimentale. Peut-être son nominalisme n'eût-il pas été éloigné d'approuver ces interprétations trop idéalistes de la science, selon lesquelles le savoir physique serait, dans ses plus hauts degrés, une rationalisation si poussée du réel qu'il deviendrait comme une collection ordonnée de purs êtres mathématiques. Si Albert EINSTEIN devait, au même moment où POINCARÉ frôlait la découverte de la Relativité, en construire la doctrine, c'est sans doute parce que le physicien l'emportait chez lui sur le mathématicien, tandis que POINCARÉ — chacun son génie ! — accomplissait l'inverse.

Les mêmes inclinations de la pensée inspirent l'œuvre philosophique de POINCARÉ. Le problème du déterminisme était au centre de sa réflexion. Sa volonté impérieuse de synthèse et d'ordre mathématique acceptait mal les premières menaces que le mouvement brownien et la découverte de la radioactivité faisaient déjà peser sur les principes consacrés. Comment eût-il réagi devant cet indéterminisme fondamental que, pendant un temps, les prodiges de la Physique atomique et nucléaire ont inspiré à certains des plus illustres physiciens ? POINCARÉ vous eût-il suivi, cher Monsieur le Secrétaire perpétuel Louis DE BROGLIE, dans ces hésitations qui font le plus grand honneur à votre soumission de grand physicien aux exigences du réel ? Je ne le crois pas. Nous pouvons être à peu près sûrs qu'il eût applaudi à votre reconversion récente aux principes de déterminisme. Son sens profond de l'ordre et de l'unité du réel l'eût sans doute conduit à penser qu'il était sage de ne point transposer en une loi de la Nature les infortunes provisoires de son esprit. Sans doute eût-il pensé, un peu comme le profane, que le déterminisme molaire ou statistique s'accorde mieux avec l'affirmation d'un déterminisme élémentaire qu'avec l'acceptation de la fantaisie nucléaire. Tant il est vrai que, si le déterminisme est la charte de notre pensée, ce n'est point tant une convenance de notre esprit qui nous l'impose mais plutôt la constante leçon de l'expérience. Tant il est vrai que notre esprit n'est ni le serf du réel, ni son inventeur. Tant il est vrai que notre savoir doit sa vertu à l'indissociable et féconde conjugaison de ses normes et des impératifs de l'expérience.

* * *

Séduit par les difficultés, désireux de se mesurer avec elles et de leur imposer la clarté de son intelligence, Poincaré ne s'enfermait nullement dans la science. Nul n'a eu, comme le dit Darboux, plus d'ouverture d'esprit, plus de propension à accueillir et à discuter les idées nouvelles, plus de désir de mettre en évidence la part de vérité qu'elles contiennent, le rôle utile qu'elles peuvent jouer dans le développement de nos connaissances.

L'indifférence à la gloire lui semblait devoir être une des vertus du savant, et une vertu en quelque sorte naturelle : « Quand on a eu le bonheur de faire une découverte » écrit-il, « que peut être la satisfaction de lui donner son nom, auprès de la joie d'avoir contemplé un instant la vérité face à face ? ».

En 1870, il avait ressenti profondément les malheurs du Pays. Dans son discours de réception à l'Académie Française, en 1908, il s'exprime ainsi : « Après les heures sombres de la guerre, vint l'heure encore plus sombre de la paix, celle où la France dut se résigner à cette grande douleur, qui nous laisserait deux fois inconsolables si jamais nos fils semblaient s'en consoler. Quand on nous demande de justifier par des raisonnements notre amour pour la Patrie, nous pouvons être très embarrassés; mais que nous nous représentions par la pensée nos armées vaincues, la France envahie, tout notre cœur se soulèvera, les larmes nous monteront aux yeux et nous n'écouterons plus rien ».

Mais ce patriotisme ardent est un patriotisme sans haine, car Poincaré ajoute : « La haine est néfaste, et ce n'est pas elle qui fait les vrais héros ».

Si la hauteur de vues n'excluait chez lui ni la diversité ni la fantaisie, elle n'interdisait pas non plus cet humour sans méchanceté qui est souvent l'apanage du savant. A la *Revue bleue*, qui faisait une enquête sur la participation des savants à la politique, POINCARÉ répondait : « Vous me demandez si les savants politiques doivent combattre ou appuyer le bloc ministériel ? Ah ! s'il y a des savants dans la politique, il faut qu'il y en ait dans tous les partis ; et, en effet, il est indispensable qu'il y en ait du « côté du manche ». La Science a besoin d'argent, et il ne faut pas que les gens au pouvoir puissent se dire : la Science, c'est l'ennemi ! ».

Les « gens au pouvoir » ne proféreront, ne penseront jamais semblable hérésie. Les exigences matérielles de la Science ne leur échappent pas. Et si ce n'est pas le lieu d'indiquer ici l'effort que la République accomplit pour la Science, du moins, permettra-t-on peut-être au Ministre de l'Éducation Nationale de dire la satisfaction intime qu'il a éprouvée à voir doté cette année de moyens financiers importants — ne dépassent-ils pas un milliard et demi, — ce Centre national de la Recherche scientifique dont Henri POINCARÉ n'eût pas manqué d'applaudir le développement et les prestigieux travaux.

Mesdames, Messieurs, cette grande commémoration d'Henri POINCARÉ, de l'un des plus grands savants du monde et de l'histoire, apporte à l'Université de France la fierté d'avoir contribué à sa formation, et de l'avoir compté parmi ses maîtres. Sa pensée est toujours vivante, de nombreux disciples la précisent et la prolongent. Les grands noms qui se rassemblent aujourd'hui pour célébrer sa mémoire attestent la pérennité de sa gloire.

Témoin d'une illustre famille, Henri POINCARÉ est aussi l'un des grands témoins de la permanence de l'esprit français. En lui rendant hommage, nous nous donnons à nous mêmes nos meilleures raisons de croire en notre Patrie, de nous dévouer à la Science, et de les rassembler l'une et l'autre dans notre orgueil et notre foi.

TROISIÈME PARTIE.

MANIFESTATIONS PARISIENNES EN MAI 1954.

A. — LA MATINÉE DU DIMANCHE 16 MAI 1954 A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Le dimanche 16 mai, l'École Polytechnique fêtait à son tour le 100^{e} anniversaire de la naissance du major de la promotion 1873, ou pour être plus précis du major d'entrée, car on sait que Henri Poincaré, par suite d'un 10 malheureux en stéréotomie n'a été classé que second à l'examen de sortie.

La cérémonie, placée sous la présidence de M. le Président René Pleven, Ministre de la Défense Nationale, comprenait deux parties : inauguration d'un médaillon à l'effigie de Henri Poincaré dans le hall du pavillon des élèves, dit pavillon Joffre; discours du général Dassault, Grand Chancelier de la Légion d'honneur, lui-même ancien élève de l'École Polytechnique et Membre de l'Académie des Sciences.

Au cours de la première partie, M. Gaston Julia, qui est aussi professeur à l'École Polytechnique, a remis à l'École, à titre de Président du Comité d'Organisation, le médaillon œuvre de M^{me} Guzman-Nageotte qui dans le hall du pavillon Joffre fait maintenant face à celui qui représente le Maréchal. Puis, au nom de la famille de Henri Poincaré, le fils du grand savant a fait don au musée de l'École Polytechnique de l'épée de polytechnicien et de l'habit vert de son père. Le général Leroy, Commandant l'École, a remercié le Comité d'Organisation et la famille de Henri Poincaré et il a rappelé la fidélité de celui-ci envers l'École Polytechnique qui l'avait formé.

La seconde partie s'est déroulée dans la cour des élèves, où une estrade avait été dressée. En présence du bataillon des élèves, sous les armes, le général Dassault dans un magistral discours a dressé un tableau complet de Henri Poincaré et de son œuvre scientifique et philosophique sous ses divers aspects.

Le général Leroy qui, après la cérémonie, offrait dans ses salons du pavillon Boncourt, une réception aux invités de marque et aux délégués étrangers les a conduits d'abord devant les vitrines d'une exposition de souvenirs de Henri Poincaré, obligeamment prêtés par la famille. Cette exposition devait rester ouverte au public, dans la salle du Conseil de l'École, jusqu'à la fin du mois de mai.

Sur la cheminée trois bustes celui de Joffre, celui de Foch et celui d'Henri Poincaré paraissaient présider l'exposition. Ils rappelaient trois promotions voisines 1869-1871-1873, cette dernière promotion comportant d'ailleurs aussi un Maréchal de France, le Maréchal Fayolle qui en est sorti avec le n° 116. Cette exposition rassemblait des photographies, des lettres, des manuscrits ou des pièces officielles se rapportant à l'enfance de Henri Poincaré, à son passage à l'École Polytechnique et à l'École des Mines, aux débuts de sa carrière, ou aux principaux événements de celle-ci : découverte des fonctions fuchsiennes, grand prix du Roi Oscar II de Suède et de Norvège, entrée à l'Académie des Sciences à 33 ans, et plus tard à l'Académie Française. De nombreux diplômes d'Académies ou Universités étrangères, et surtout une grande carte, sur laquelle étaient soulignés les noms des villes qui abritent une Académie, une Université, ou une Société savante dont Henri Poincaré était Membre, traduisaient d'une manière frappante l'importance de son rayonnement à l'étranger. Plus intimes et plus émouvantes, trois vitrines nous montraient enfin Henri Poincaré en famille, les derniers manuscrits ou les dernières lettres qu'il a écrites, et la photographie de la pierre tombale sous laquelle il repose au cimetière Montparnasse au milieu des siens.

On trouvera dans la sixième partie la reproduction en fac-similé d'un certain nombre des documents présentés à cette exposition.

ALLOCUTION DE M. LE PROFESSEUR GASTON JULIA
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Mon Général,

Au nom du Comité d'Organisation du Centenaire que nous célébrons aujourd'hui, j'ai l'honneur de vous remettre le médaillon, qui rappellera à nos élèves les traits et conservera la mémoire d'un des plus grands savants que l'École ait formés.

Ce n'est pas par hasard que ce médaillon fait face à celui qui perpétue dans notre École le souvenir d'un des plus grands hommes de guerre qu'elle ait aussi formés.

Nous avons pensé, en effet, que, dans ce hall du Joffre, face à l'effigie du vieux Maréchal, calme comme un roc à l'heure du plus pressant danger, si intrépide qu'il put demander à des troupes écrasées de fatigue cet immortel demi-tour qui sauva notre Pays, il convenait de dresser l'effigie du savant illustre dont la pensée lucide, « comme un éclair dans une longue nuit », fait reculer la limite de l'inconnu, afin qu'en un saisissant raccourci, ces deux effigies présentent à nos élèves une illustration complète de la devise de l'École : « pour la Patrie, les Sciences et la Gloire ».

Rappelons-nous ce temps qui vit entrer à l'École Henri Poincaré. C'est l'année 1873. Poincaré est Lorrain. Il a vécu à Nancy pendant l'occupation. Il y a deux ans que Foch a quitté Saint-Clément de Metz pour entrer à l'École; puis il a quitté l'École après un an seulement, pour embrasser cette carrière des armes qu'il va illustrer de sa fougue géniale, comme Joffre, qui l'a précédé ici de deux ans, l'illustrera de son calme inébranlable, et tous deux de leurs mâles vertus.

Pour Poincaré, c'est la carrière scientifique qu'il va embrasser, et il l'illustrera comme ses anciens ont illustré la carrière des armes, et ses immortelles découvertes ajouteront à la gloire de l'École un pacifique et impérissable laurier.

Cette providentielle conjonction dans le temps de nos plus pures gloires polytechniciennes, nous avons voulu, mon Général, la rappeler dans ce hall, où nos élèves circulent tous les jours, afin qu'elle soit pour eux génératrice de nobles ambitions et excitatrice d'efforts.

Veuillez, mon Général, accueillir dans vos murs l'image de ce grand mathématicien, qui fut aussi un grand astronome, un grand physicien et un grand philosophe, et qui, plaisons-nous à le souligner ici, fut, en tout, un grand, un éminent Français.

ALLOCUTION DE M. LÉON POINCARÉ
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Monsieur le Président,
Monsieur le Grand Chancelier,
Messieurs les Généraux,
Mesdames, Messieurs,

J'aurais voulu d'abord vous donner connaissance du message du Doyen d'âge des polytechniciens que j'ai reçu hier. Le colonel Cros de la promotion 1874, qui est donc un conscrit de mon père et qui est aussi centenaire m'écrit de sa main, en réponse à un mot que je lui avais adressé :

« Mon général,

« Je vous remercie d'avoir pensé aux anciens pour la célébration du centenaire de votre illustre père » .... Plus loin il parle « des sentiments de ses 20 ans » .... Mais malheureusement mes officiers du chiffre sont restés défaillants, et force m'est de me contenter de vous lire la note explicative qui était jointe à cet envoi.

La voici :

« Je crains qu'il vous soit difficile de déchiffrer les quelques mots que vous adresse le colonel Cros, et, cependant il a été très sensible à votre communication et a plaisir de vous dire combien il a gardé intacts le souvenir et l'admiration qu'ils avaient tous pour le grand savant qu'était Henri Poincaré. Certains détails même sont restés vivants dans sa mémoire. (Exemple). La présidence du jury qu'avait votre père d'un tribunal qui avait attribué la cote « rogne » à l'élève Cros. »

Mon Général,

Après le souvenir de cet authentique témoin, qui est le seul à avoir été élève de l'École en même temps que Henri Poincaré, je voudrais vous remettre, pour le musée de l'École un autre témoin des années 1873-1875, authentique lui aussi. C'est l'épée de polytechnicien de mon père, la tangente qu'il portait il y a 80 ans; connaissant l'attachement qu'il avait pour l'École Polytechnique, je suis sûr d'être dans la ligne qu'il aurait aimée, comme je suis sûr que dans votre musée du souvenir cette épée sera pieusement conservée.

Le culte des glorieux antiques est une tradition de l'École, nous savons que les promotions à venir n'y failliront pas. Mais il n'est peut être pas inutile de souligner le geste qu'ont fait les promotions présentes à l'École au moment où fut ouverte la souscription qui devait permettre au Professeur Gaston Julia de remettre hier à M. le Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences le dixième et dernier volume des œuvres de mon père.

Marquant la voie à leurs antiques et à l'industrie, qui les ont très généreusement suivis, ils ont tenu à ce que les élèves de l'École Polytechnique soient inscrits parmi les premiers bienfaiteurs. Au premier appel ils ont versé les 200 000 francs qui donnaient droit à ce titre. Je suis heureux de saisir l'occasion qui m'est offerte aujourd'hui de les en remercier publiquement, et bien qu'ils aient agi au nom des promotions passées, présentes et à venir, de donner la référence de leurs promotions 1946-1947, 1947 sp et 1948 sp.

Avec l'épée de polytechnicien de Henri Poincaré, je vous remets aussi, mon Général, son habit d'académicien qui, présenté dans les collections de l'École, incitera, je l'espère, quelques-uns des jeunes conscrits des promotions futures, à s'adonner à la science désintéressée, et à montrer que la formule de notre vieille École qui unit la discipline scientifique à la discipline tout court, reste valable aussi bien pour la formation des hommes de science que pour celle des hommes d'action.

ALLOCUTION DU GÉNÉRAL LEROY,

COMMANDANT DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Monsieur le Président,
Monsieur le Grand Chancelier de la Légion d'honneur,
Mesdames, Messieurs,

Hier la Science rendait hommage au grand savant Henri Poincaré.

Aujourd'hui, la cérémonie est plus intime; elle est familiale, car l'illustre mathématicien était des nôtres.

Je vous remercie, Messieurs, vous tous qui êtes venus ici partager notre joie de cette gloire.

A vous Madame, à vous Messieurs les éminents représentants de la Science mondiale, je tiens, comme Commandant de cette École, à vous dire combien votre présence nous est précieuse en ce jour.

MONSIEUR LE PRÉSIDENT DU COMITÉ,

C'est pour l'École Polytechnique une grande satisfaction et un honneur insigne de recevoir aujourd'hui ce médaillon à la mémoire d'Henri POINCARÉ, l'un des plus grands X de ces cent dernières années.

J'en remercie le Comité que vous présidez.

Je vous sais gré, Monsieur le Président, d'avoir rapproché tout à l'heure ces deux figures si dissemblables par leurs caractères, si semblables par leur gloire : Henri POINCARÉ et JOFFRE.

Car leurs effigies, placées face à face, dans ce même hall, constitueront pour les générations polytechniciennes à venir, une illustration éclatante de la vocation universelle de cette École capable de donner à la civilisation aussi bien les hommes qui la batissent que ceux qui en assurent la garde.

MONSIEUR L'INGÉNIEUR GÉNÉRAL,

Reçu, en même temps qu'à l'École Polytechnique, à l'École Normale Supérieure, Henri POINCARÉ, votre père, a choisi d'être instruit ici même.

Tous les Polytechniciens sont très fiers de ce choix.

Il est évidemment vraisemblable, il est probable même, qu'un tel génie, formé où que cela soit, se fût développé. Mais à quoi bon supposer : La réalité, c'est que notre École, et elle seule, a établi la solide charpente de sa pensée scientifique et aussi l'universalité de son esprit.

Son attachement à l'X se retrouve d'ailleurs autant dans le cours qu'il y professa que dans le simple fait que vous-même, son fils, êtes aussi Polytechnicien.

L'X prétend donc à l'orgueil légitime et exclusif d'avoir initié, pour la France un savant éminent, et pour l'Université le maître incontesté qu'elle célébrait hier.

Aussi l'École, qui n'oublie pas, a-t-elle encouragé, tout naturellement et sans attendre le succès, les beaux efforts de M. JULIA pour faire éditer les œuvres d'Henri POINCARÉ.

Tous ces liens avec l'un des nôtres, parmi les plus grands, vous disent bien, Monsieur l'Ingénieur Général, combien l'École est honorée que vous ayez songé à lui confier la garde de reliques familiales.

Soyez assuré que cette épée, que cet habit d'académicien, que vous me remettez aujourd'hui, recevront ici une place d'honneur auprès des souvenirs des antiques les plus célèbres, et rendront plus vivace encore le culte des polytechniciens pour l'un des génies mathématiques les plus complets de l'histoire du monde.

DISCOURS DU GÉNÉRAL DASSAULT,

GRAND CHANCELIER DE LA LÉGION D'HONNEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

L'École Polytechnique, à l'occasion du centenaire de la naissance d'Henri POINCARÉ, se devait de manifester solennellement sa fidélité au souvenir du plus illustre savant qu'elle ait jamais formé. Certes une telle gloire déborde largement le cadre d'une école et même d'un pays; c'est ce qu'a si justement exprimé M. Émile BOREL, lors de la disparition du célèbre géomètre, en déclarant : « L'intelligence humaine est en deuil : Henri POINCARÉ n'est plus. » Cependant, l'École Polytechnique a tenu une place privilégiée dans la carrière et dans le cœur de POINCARÉ : elle l'a connu comme élève, comme répétiteur d'Analyse, comme professeur d'Astronomie générale et comme Membre de son Conseil de perfectionnement; elle lui conserve une particulière reconnaissance pour tout le lustre dont elle lui est redevable : c'est ainsi que, lors d'une cérémonie mémorable, le Président du Conseil de l'époque, parlant ici-même, a pu dire : « Il me suffit, pour attester le rôle de l'École Polytechnique, d'invoquer ces deux grands noms : Henri POINCARÉ, le plus grand des penseurs de ce dernier siècle, et le vainqueur de la plus grande des guerres : le Maréchal FOCH. »

* * *

Pour donner une image aussi fidèle que possible d'Henri POINCARÉ, il a semblé qu'un exposé, même essentiellement destiné à commémorer son œuvre scientifique, devait tout d'abord mettre en lumière les traits caractéristiques de l'homme.

Du point de vue moral, Henri POINCARÉ n'a cessé de montrer un sentiment du devoir, une générosité et un désintéressement admirables. Pour illustrer cette assertion, trois exemples seulement vont être cités.

Son sentiment du devoir, il le manifesta en particulier, comme tout jeune ingénieur des mines, en n'hésitant pas à descendre, au mépris d'un péril mortel, dans une mine où couvait l'incendie à la suite d'un coup de grisou terriblement meurtrier.

Sa générosité, il en fit la preuve en donnant aux célèbres fonctions fuchsiennes, dont il est le père incontesté et dont l'invention reste un des plus beaux fleurons de sa couronne, le nom du professeur allemand FUCHS pour reconnaître les efforts tentés par celui-ci dans la même direction : c'était une preuve bien remarquable d'altruisme que de se dépouiller ainsi d'une partie de sa gloire scientifique, le plus précieux des biens au cœur d'un savant.

Quant à son désintéressement, l'exemple qui va être donné est rapporté d'après Maurice d'OCAGNE, personnalité scientifique bien connue à l'École Polytechnique. A la mort de CALLANDREAU, Professeur d'Astronomie et de Géodésie, le Ministre de la Guerre de l'époque décida de supprimer ce cours pour raison budgétaire. Atterré par la disparition d'un enseignement aussi important, POINCARÉ, bien que déjà surchargé de besogne, se proposa pour le professer sans aucune rémunération. Le Ministre accepta, et c'est dans ces conditions que POINCARÉ fut chargé à l'École du cours d'Astronomie générale.

Toutes ces vertus, Henri POINCARÉ, né et élevé à Nancy, les devait pour une part à son terroir lorrain qui le dota en outre d'un ardent patriotisme, et surtout à son milieu familial dont tant de membres firent preuve d'une éminente distinction : son père, Léon POINCARÉ, fut professeur à la Faculté de Médecine de Nancy ; son oncle, Antoni, polytechnicien, fut inspecteur général des Ponts et Chaussées ; ses cousins germains étaient Raymond POINCARÉ, futur Président de la République, et Lucien POINCARÉ, futur Recteur de l'Académie de Paris ; sa jeune sœur, qu'il chérissait, devint la femme et la collaboratrice de l'illustre philosophe Émile BOUTROUX. Henri POINCARÉ fit ses études au Lycée de Nancy où il se révéla aussitôt comme un élève extraordinairement doué aussi bien d'ailleurs pour les lettres que pour les sciences. Son seul point faible était le dessin et, par la suite, il eut quelque peu à en souffrir. Il ne quitta sa ville natale et sa famille que pour entrer à l'École Polytechnique, premier de sa promotion.

*
* *

En ce qui concerne la « vie intellectuelle », pour parler le langage des psychologues, celle d'Henri POINCARÉ était essentiellement marquée, d'une part, par un pouvoir exceptionnel de concentration de l'esprit et, d'autre part, par une extraordinaire mémoire. Certes, on ne peut songer à analyser le don transcendantal qu'est le génie, mais on est en droit de penser que la réunion de ces deux facultés, surtout élevées à un si haut degré, doit en augmenter singulièrement le rendement.

La puissance de concentration de l'esprit de l'illustre savant était évidente pour tous ceux qui l'on bien connu. Maurice d'OCAGNE, en particulier, a parlé de ces périodes où POINCARÉ, poursuivant sa méditation, perdait la notion de l'ambiance où il se trouvait. « Cette absence, dit d'OCAGNE, se lisait sans hésitation sur ses traits; il n'avait alors aucune conscience de ce qui se passait autour de lui. » D'habitude il semble que la faculté d'abstraction et la puissance de concentration de la pensée soient l'apanage des jeunes géomètres et qu'elles diminueraient plutôt avec l'âge. Tous les grands géomètres d'ailleurs, comme POINCARÉ lui-même, ont été précoces, et certains, bien que très tôt disparus, ont pu laisser une œuvre originale et féconde, par exemple, ABEL ou GALOIS, ce dernier tué en duel à 21 ans.

Quant à la mémoire dont était doté POINCARÉ, tous ceux qui l'ont approché, tels APPELL, DARBOUX, d'OCAGNE et LECORNU en sont restés émerveillés. APPELL declare que POINCARÉ enfant pouvait toujours dire à quelle page, à quelle ligne d'un livre il avait vu telle ou telle chose, et ajoute qu'il a conservé une mémoire aussi remarquable pendant toute sa vie, ce que confirme LECORNU qui a été élève à l'École en même temps que POINCARÉ, puis son collègue comme professeur et son confrère à l'Académie des Sciences. Il est hors de doute que la fécondité de POINCARÉ qui, mort à 58 ans, a laissé à la postérité une œuvre non seulement d'une incomparable valeur, mais comprenant une véritable multitude de travaux, de cours, de mémoires et de notes intéressant les branches les plus variées de la Science, n'aurait pu se manifester à ce degré sans la mémoire extraordinaire dont il était doué. Un autre que lui, obligé de se reporter à des références, de procéder à des vérifications — toutes opérations que lui évitaient l'étendue et la fidélité de sa mémoire — n'aurait pu, à génie égal, trouver en aussi peu d'années le temps de réaliser une production si étonnamment abondante.

*
* *

Les grandes inventions, chez POINCARÉ plus que chez tout autre, ont pour bases des rapprochements. Ce fait avait frappé Jacques HADAMARD : « Nul mieux que POINCARÉ, a-t-il écrit, ne sut découvrir ces relations imprévues, sans doute parce que personne ne sut mieux dominer la Science de tous les côtés à la fois. » Et Poincaré lui-même a déclaré : « Parmi les combinaisons que l'on choisira, les plus fécondes seront souvent celles qui sont formées d'éléments empruntés à des domaines très éloignés. »

La question s'éclaire en se reportant au texte classique où Poincaré nous conte la genèse des fonctions fuchsiennes. Successivement il est conduit à des rapprochements avec la série hypergéométrique, avec les fonctions elliptiques, avec les transformations de la Géométrie non euclidienne, avec les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies. Certains de ces rapprochements étonnent d'ailleurs Poincaré lui-même. Il prononce le mot d' « illumination »; dans d'autres textes il parlera d'intuition, d'inspiration, d'étincelle sacrée ou d'étincelle divine. En réalité, ce qui est en cause n'est autre que le génie mathématique. Mais Poincaré nous précise qu'avant que surviennent ces illuminations, un long travail de concentration de l'esprit, conscient et peut-être surtout inconscient, est indispensable. Il convient aussi d'ajouter que l'étincelle sacrée ne peut intervenir que si une mémoire active et extrêmement étendue — telle celle de Poincaré — lui présente les matériaux permettant à la flamme de jaillir.

*
* *

Il ne saurait être question d'étudier ni même seulement d'énumérer ici les travaux de Poincaré; ils intéressent en effet toutes les sciences rationnelles : Mathématiques, Physique, Astronomie, Mécanique, Géodésie et aussi la Philosophie scientifique. Dans cet exposé on se bornera donc essentiellement à indiquer les voies principales qu'a ouvertes Poincaré et à tenter de dégager un aperçu d'ensemble de l'œuvre gigantesque qu'il a accomplie.

C'est dans le domaine de la *Mathématique pure*, aristocratie de la Science, que Poincaré porta son effort principal. Il s'est, en particulier, proposé d'intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. C'est pour y parvenir qu'il a imaginé ces nouvelles transcendantes, les fameuses fonctions automorphes dont il vient d'être parlé. Il en a développé la théorie, donné la représentation par des séries et a finalement abouti, non seulement à l'intégration recherchée, mais aussi à montrer que les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique quelconque peuvent s'exprimer par des fonctions fuchsiennes.

Ce sont ces magnifiques résultats que visait Camille Jordan, que j'ai eu l'honneur d'avoir ici-même comme professeur, lorsqu'il disait : « Il faut le reconnaître : nous assistons en ce moment à une révolution de tous points comparable à celle qui s'est manifestée il y a un demi-siècle par l'avènement des fonctions elliptiques. »

Les travaux de Poincaré en Mathématiques pures sont si nombreux et si importants qu'il est difficile d'opérer un choix parmi eux. On mentionnera encore pourtant ceux consacrés à la théorie des nombres et le Mémoire célèbre où il étend aux intégrales doubles la théorie de Cauchy relative aux intégrales prises le long d'un contour fermé.

Mais il faut aussi signaler spécialement d'autres Mémoires, relatifs ceux-là à la théorie des courbes définies par les équations différentielles. Le but poursuivi est de se rendre compte, dans le champ réel, de l'allure générale des courbes intégrales; l'étude en cause est donc purement qualitative et rejoint ainsi le domaine de l'*Analysis situs* (aujourd'hui nommée Topologie) que Poincaré avait en particulière affection et à laquelle il a consacré plusieurs Mémoires.

L'*Analysis situs* est une des disciplines les plus profondes de la science mathématique. On sait que cette discipline, d'un caractère essentiellement qualitatif, étudie les relations qui subsistent dans une figure lorsqu'on la déforme d'une manière quelconque, mais sans déchirure ni soudure. Du point de vue de l'*Analysis situs* un cercle, par exemple, est équivalent à une ellipse ou même à toute courbe fermée sans point double, mais ne l'est pas à un segment de droite parce que celui-ci n'est pas fermé.

L'*Analys situs* donne lieu à une série de propositions parfaitement enchaînées et, en les prenant pour base, Riemann avait établi une des théories les plus intéressantes et les plus fécondes de l'Analyse pure. Poincaré, qui lui a donné un remarquable essor, a fait appel à elle dans nombre de ses travaux mathématiques et en particulier dans ses études sur l'intégration qualitative des équations différentielles.

* * *

Dans le domaine de la *Physique* le génie de Poincaré s'est manifesté avec le même éclat et il n'existe d'ailleurs guère de frontière entre la Mathématique pure et la Physique mathématique. Mais, tandis que l'œuvre mathématique de Poincaré s'est développée tout entière avec une majestueuse continuité, ses conceptions en Physique, soumises pendant longtemps aux seules lois de la Mécanique classique, se sont trouvées ensuite affectées par l'avènement de la Physique relativiste, à la naissance de laquelle il a d'ailleurs puissamment contribué, puis de la Physique quantique.

C'est principalement pendant les dix années où Poincaré occupa à la Faculté des Sciences la chaire de professeur de Physique mathématique qu'il réalisa la première partie de son œuvre. Ses cours, d'une incomparable qualité, ne se bornaient pas à mettre les auditeurs au courant des travaux déjà faits sur les questions traitées; ils précisaient en outre bien des points jusque-là laissés dans l'ombre et comportaient des développements importants entièrement originaux. Parmi ces cours on peut citer et admirer : Thermodynamique; Capillarité; Propagation de la chaleur; Oscillations électriques; Électricité et Optique. Dans ces derniers il faut mentionner particulièrement la partie relative aux théories de MAXWELL et à la théorie électromagnétique de la lumière, alors presque inconnues en France; et également celle relative aux travaux de HERTZ que POINCARÉ ne se borna pas à exposer, mais auxquels il ajouta des précisions toutes nouvelles et apporta même des rectifications nécessaires.

C'est dans cette même période que POINCARÉ établit ses célèbres Mémoires sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique.

En ce qui concerne l'avènement de la Physique relativiste, le rôle de Poincaré a été d'une importance capitale et peut-être non apprécié à sa valeur véritable. Les travaux de LORENTZ l'avaient vivement intéressé et il y avait apporté une contribution personnelle de premier plan. En particulier dans un remarquable Mémoire, écrit avant la publication des travaux d'EINSTEIN et paru dans les *Comptes rendus du Cercle mathématique de Palerme*, l'étude pénétrante qu'il fit de la dynamique de l'électron assura à la théorie de LORENTZ une parfaite cohérence, et il est certain que ce Mémoire restera classique dans l'histoire du principe de la relativité. Rendant à POINCARÉ un juste hommage, M. Louis DE BROGLIE a pu écrire : « Sans LORENTZ et sans POINCARÉ, EINSTEIN n'eût pu aboutir. »

De ce qui précède, il résulte qu'Henri POINCARÉ a fait largement bénéficier de son génie la Physique mathématique et la Physique théorique. S'il n'a pas été personnellement un expérimentateur, il s'est tenu au courant de toutes les expériences et en a même provoqué. Il a d'ailleurs proclamé bien haut : « L'expérience est la source unique de la vérité : elle seule peut nous apprendre quelque chose, elle seule peut nous donner la certitude. »

*
* *

Dans le domaine de l'*Astronomie* et de la *Mécanique céleste*, Henri POINCARÉ s'est également acquis une renommée universelle.

On mentionnera tout d'abord son magnifique succès à un concours ouvert aux mathématiciens du monde entier pour l'obtention d'un prix fondé en 1889 par le roi de Suède et Norvège à l'occasion de son 60e anniversaire. Parmi les membres du jury figuraient HERMITE et WEIERTRASS; parmi les concurrents Henri POINCARÉ et Paul APPELL; c'est assez dire qu'il s'agissait d'une épreuve de tout à fait exceptionnelle qualité. Le prix revint à POINCARÉ pour son Mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique*. Les principaux résultats énoncés dans ce Mémoire furent ensuite repris et développés par POINCARÉ dans son Ouvrage *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* et dans les leçons de Mécanique céleste qu'il professa à la Sorbonne à partir de 1896. Dans ces travaux, après avoir mis en évidence les défectuosités des méthodes antérieurement suivies, POINCARÉ fait appel à des instruments nouveaux, les « invariants intégraux », les « solutions périodiques » où les trois corps reviennent périodiquement dans les mêmes positions relatives et les « solutions asymptotiques » qui, sans être périodiques, tendent à le devenir au bout d'un temps infini.

On citera encore, puisque là aussi il faut choisir, la théorie des marées et surtout le célèbre Mémoire sur les figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, où POINCARÉ montre qu'il peut exister d'autres figures d'équilibre que l'ellipsoïde de révolution de MAC LAURIN et que l'ellipsoïde à trois axes inégaux de JACOBI.

POINCARÉ a également étudié la *Cosmogonie* dans ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*. Il y fait un examen critique magistral de toutes les hypothèses émises par des savants aussi éminents que LAPLACE, ARRHENIUS, HELMHOLTZ et Lord KELVIN au sujet du plus ardu et du plus délicat des problèmes : celui de l'origine du monde, et, avec sa haute probité scientifique, il n'hésite pas à déclarer : « Après cet exposé on attend sans doute de moi une conclusion et c'est cela qui m'embarrasse. Plus on étudie cette question de l'origine des astres, moins on est pressé de conclure...» Il fallait cependant, dit DARBOUX, un savant tel que POINCARÉ pour suivre, avec autant de pénétration, ces discussions qui exigent la réunion des connaissances du géomètre, du physicien et même du géologue.

La *Géodésie*, enfin, a toujours vivement retenu l'attention de POINCARÉ qui a consacré un chapitre de *Science et Méthode* à la gloire de la géodésie française. Lorsque l'Académie des Sciences obtint du Gouvernement l'envoi à l'Équateur d'une mission chargée de reprendre l'œuvre géodésique qui avait honoré notre

Pays au XVIII[e] siècle, c'est POINCARÉ qui présida et anima la Commission de contrôle des opérations. On doit encore spécialement mentionner son important Mémoire sur *les mesures de gravité et la géodésie.*

*
* *

Reprenant la tradition des PASCAL, des DESCARTES et des LEIBNITZ, Henri POINCARÉ ne s'est pas contenté d'être un homme de Science éminent : il a également accompli, dans le domaine de la *Philosophie*, une œuvre remarquable et qui, d'ailleurs, a fait sensation dès sa publication. POINCARÉ procédait, principalement dans son premier Ouvrage *La Science et l'Hypothèse*, à la critique des fondements de nos connaissances scientifiques. Cette attitude d'un aussi illustre savant provoqua de profonds remous dans l'opinion et beaucoup allèrent jusqu'à taxer POINCARÉ de scepticisme.

Certes POINCARÉ a poussé très avant la liberté d'examen vis-à-vis de notions essentielles qui bénéficaient d'un prestige paraissant hors de toute atteinte. Mais rechercher la vérité, sans tenir compte de la tradition ou de l'autorité, c'est en réalité être proprement cartésien, et non pas sceptique. Un sceptique s'exprimerait-il comme le fait POINCARÉ dans un autre de ses Ouvrages *La Valeur de la Science* où l'on peut lire des passages tels que ceux-ci :

« Si j'ajoute que l'harmonie universelle du monde est la source de toute beauté, on comprendra quel prix nous devons attacher aux lents et pénibles progrès qui nous la font peu à peu mieux connaître. »

Et ailleurs : « La meilleure expression de cette harmonie, c'est la loi ».

Ou encore : « Non, les lois scientifiques ne sont pas des créations artificielles ».

Quelles sont les causes de ce malentendu sur la position philosophique réelle de POINCARÉ ? Elles sont de deux sortes :

Entraîné par l'extraordinaire engouement qu'avait provoqué *La Science et l'Hypothèse*, un vaste public, dont la plus grande partie n'était nullement préparée à l'examen de semblables problèmes, avait pris part à leur discussion. C'est ce qu'a noté l'illustre physicien LIPPMANN en ces termes pleins de sens et aussi d'humour :

« La philosophie de POINCARÉ qui implique une profonde connaissance de la Mécanique et de la Physique mathématique, qui est une des plus abstruses et des plus inaccessibles qu'on puisse trouver est, par surcroît, devenue populaire : ce qui montre combien elle est difficile à comprendre ».

A cette première cause de malentendu il faut encore ajouter que certains écrivains, bien que de tendances très différentes de celles de Poincaré, étaient fort désireux de s'annexer, même au prix d'une interprétation assez abusive, une recrue aussi éminente.

En fait, Henri Poincaré se refusait à admettre aveuglément les axiomes et les propositions premières et avait résolu d'en rechercher la valeur fondamentale réelle : il est d'ailleurs à noter que si son libre examen a abouti à ébranler nombre de ces notions essentielles, les progrès si rapides de la Physique et de la Mécanique relativistes et quantiques les ont ensuite perturbées beaucoup plus profondément encore.

Mais, pour suivre l'ordre chronologique, c'est d'abord dans le domaine de la Géométrie que s'exerça la critique de Poincaré. Vivement intéressé par la Géométrie non euclidienne, à laquelle il eut recours pour le développement de sa magistrale théorie des fonctions fuchsiennes, il rappelle l'impossibilité de déduire le célèbre *Postulatum* d'Euclide des autres axiomes qui sont à la base de la Géométrie, ce qu'avaient vainement tenté de faire des savants aussi illustres que Legendre et Lagrange. Il montre que la géométrie de Lobatschewsky par exemple, où l'on admet la possibilité de faire passer par un point plusieurs parallèles à une droite donnée, comporte une suite de théorèmes d'une logique aussi impeccable que la Géométrie euclidienne; il montre aussi que l'on peut passer d'une géométrie à l'autre de telle sorte qu'il ne pourrait y avoir de contradiction dans l'une qui ne fût aussi dans l'autre. Du point de vue de la logique pure les deux géométries sont donc également valables. Ainsi le *Postulatum* d'Euclide n'est qu'une convention. Mais le choix de cette convention n'est pas arbitraire : la Géométrie euclidienne est en effet, dit Poincaré, la plus « commode ». Il faut noter au passage que ce terme de « commode » revient à de multiples reprises dans son œuvre, et cette expression familière et quelque peu vague a certainement contribué à accréditer la légende du scepticisme de Poincaré à l'égard de la Science. En réalité Poincaré explique que par « commode » il faut entendre : simple et propre à la satisfaction de nos besoins.

Dans le domaine de la Mécanique et de la Physique classiques, Poincaré aboutit à des résultats du même ordre : « La loi de l'accélération, la règle de la composition des forces ne sont-elles que des conventions arbitraires ? Conventions ? oui; arbitraires ? non; elles le seraient si l'on perdait de vue les expériences qui, si imparfaites qu'elles soient, suffisent à les justifier. » Quant aux masses, ce sont seulement des « coefficients qu'il est commode d'introduire dans les calculs ». En ce qui concerne les théories physiques, l'hypothèse y joue un rôle capital. « Or ces hypothèses ne peuvent pas être vraies ou fausses, elles ne peuvent être que commodes ou incommodes. »

Mais, malgré le haut intérêt de ces discussions relatives à la Mécanique et à la Physique classiques, il est d'un intérêt encore plus grand et plus actuel d'examiner comment POINCARÉ a réagi en présence des thèses relativites et quantiques qui, comme il a été dit, atteignent encore beaucoup plus profondément les théories classiques que les réserves qu'il avait formulées. C'est surtout à partir de 1904 et après le Congrès de Saint-Louis, où il se rendit avec Paul LANGEVIN, qu'il apporta le concours de son puissant génie aux théories de la relativité. « Il voyait avec un peu d'inquiétude, nous dit LANGEVIN, ébranler le vieil édifice de la Dynamique newtonienne. » Mais bientôt POINCARÉ allait lui-même apporter une contribution capitale à la construction de l'édifice nouveau.

Quant aux théories quantiques, la mort survenue brusquement l'empêcha de prendre une position définitive à leur égard. Dans ses *Dernières pensées* il fait toutefois ressortir leurs graves conséquences : avènement de la discontinuité dans les lois naturelles et atteinte à la tradition classique de la représentation des phénomènes par des équations différentielles.

De tout ce qui précède il résulte que la philosophie de POINCARÉ est caractérisée par la profondeur, l'originalité et l'indépendance qui étaient les attributs de son génie.

*
* *

Telle est l'œuvre de géant qu'a accomplie Henri POINCARÉ et dont le présent exposé ne peut donner qu'un faible aperçu. Elle suffirait à assurer la renommée de plusieurs savants de très haute distinction. Le plus beau monument qu'on pouvait songer à élever à la mémoire d'Henri POINCARÉ, « celui qu'il aurait le plus volontiers agréé », a dit en 1913 DARBOUX, alors Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, était la publication de ses œuvres scientifiques.

Grâce à l'Académie des Sciences et en particulier à M. le Professeur Gaston JULIA qui fut l'âme de l'entreprise, grâce à la Société des Amis de l'École Polytechnique et à l'École Polytechnique elle-même, grâce au Centre National de la Recherche scientifique, grâce au généreux concours de l'Industrie française, ce monument à la mémoire d'Henri POINCARÉ est aujourd'hui réalisé : il constitue le reliquaire de son incomparable génie.

B. — L'APRÈS-MIDI DU DIMANCHE 16 MAI 1954 A VERSAILLES.

Après un déjeuner intime à la maison des X offert par le Comité d'Organisation, les délégués étrangers ont été conduits à Versailles où une visite du château avait été prévue spécialement à leur intention. Sous la conduite de M^lle^ Erlich, qui a fait profiter son auditoire de sa connaissance détaillée des lieux et de sa grande érudition, ils ont pu admirer non seulement la chapelle, les grands appartements, la galerie des glaces, la chambre de Louis XIV ou la salle de l'œil de bœuf, mais aussi les petits appartements de la reine qui ne sont pas normalement ouverts au public. Ils ont pu enfin jeter un trop rapide coup d'œil sur les grandes eaux et le bassin de Neptune.

Pour permettre aux délégués étrangers de prendre quelque repos avant de regagner Paris, le Président de la Chambre de Commerce de Versailles, M. Bamberger, avait bien voulu organiser pour eux une réception dans les salons de la Chambre de Commerce, situés dans l'ancien hôtel de M^me^ du Barry, et qui ont conservé tout leur cachet du XVIII^e^ siècle. En quelques mots M. Bamberger a souhaité la bienvenue à ses hôtes, précisant que, en dehors du château, Versailles possède de nombreuses demeures plus modestes mais dont le charme et l'intérêt historique ou architectural font le prix. M. le Professeur Severi, représentant l'Académie Nationale de Linceï et l'Académie Nationale des Quarante a répondu au nom des délégués étrangers. Il a remercié la Chambre de Commerce de son accueil, dit le plaisir, après la visite du château, d'avoir pu connaître aussi le cadre plus intime d'un viel hôtel d'époque. Il a rappelé enfin qu'il avait connu Henri Poincaré, lorsque celui-ci est venu à Rome en 1908, et que c'est au cours de son séjour dans la capitale italienne que Henri Poincaré a subi les premières atteintes du mal qui devait provoquer quatre ans plus tard l'intervention chirurgicale dont il semblait se remettre, lorsqu'une embolie l'a terrassé.

C. — LA MATINÉE DU LUNDI 17 MAI 1954 A L'INSTITUT HENRI POINCARÉ ET A LA RUE CLAUDE-BERNARD.

L'Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, qui est l'Institut de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Paris se devait de fêter aussi le centenaire de celui dont il porte le nom. C'est par la pose d'un médaillon que l'Institut Henri Poincaré a voulu commémorer ce centenaire, en même temps que l'inauguration de la surélévation des bâtiments de l'Institut. M. Gaston Julia a donc fait remise au Doyen de la Faculté des Sciences, et au Directeur de l'Institut d'une réplique du médaillon de l'École Polytechnique, et il a prononcé à cette occasion une courte allocution à laquelle ont répondu M. Joseph Pérès, Membre de l'Académie des Sciences et Doyen de la Faculté des Sciences, et M. Gaston Dupouy, Membre de l'Académie des Sciences, Directeur du Centre national de la Recherche scientifique, tandis que M. Émile Borel évoquait lui aussi, en quelques mots improvisés, les origines de l'Institut Henri Poincaré, et son développement, attesté par les agrandissements actuels.

ALLOCUTION DE M. GASTON JULIA
A L'INSTITUT HENRI POINCARÉ.

Mon cher Directeur,
Mon cher Doyen,

En un temps où, dans les sciences exactes, l'abstrait aurait plutôt tendance à tout envahir, et où la connaissance des relations entre individus y importe souvent plus que la connaissance de ces individus eux-mêmes; où cependant les relations sociales réclament plus de chaleur humaine, d'échanges directs, en un mot de charité, nous avons pensé qu'il serait bon, pour nos étudiants de Mathématiques, d'apercevoir en passant, pour entrer dans cet Institut Henri

Poincaré, l'effigie de l'illustre savant qui lui a donné son nom, et avec qui nous voudrions qu'ils fissent amitié.

La vertu d'une telle amitié, MONTAIGNE l'a exprimée en termes émouvants; il est plus difficile de l'expliciter que d'énoncer maint théorème et corollaire. Beaucoup cependant comprendront, pour qui la Science n'est pas exclusive de cette amitié, dans laquelle s'accordent et se développent les tempéraments divers.

L'Institut Henri Poincaré a maintenant 26 années. Les concours bienfaisants grâce auxquels il a pu naître et grandir sont inscrits sur ces plaques que nous avons devant nous. Nous avons pensé que les traits de son parrain, l'un des plus éminents mathématiciens que la France et le monde aient produit, devaient réchauffer ce marbre un peu froid, pour évoquer familièrement et fortement une présence, une puissance dont nous pouvons être fiers, et nous avons demandé à M^{me} GUZMAN-NAGEOTTE, dont les réussites sont nombreuses, de les graver pour nous dans le bronze.

On juge souvent des autres d'après soi-même. Je ne puis pas oublier en ce moment, l'émotion que j'éprouvai il y a près de 25 ans, lorsque, dans le petit cimetière de Göttingen, je rencontrai la tombe de GAUSS, que je cherchais. Auparavant, GAUSS c'était, pour moi, un grand nom, une belle œuvre; ce jour-là ce fut comme une présence.

Eh ! bien, notre ambition, que certains trouveront peut-être un peu naïve, c'est que ce médaillon nous soit ici comme une présence; nous croyons fermement, mon cher Directeur, mon cher Doyen, que nos étudiants s'en trouveront bien.

C'est dans cet esprit, qu'au nom du Comité d'Organisation je vous remets ce beau médaillon en vous remerciant d'avoir bien voulu le placer là où nos étudiants pourront chaque jour l'apercevoir, afin qu'Henri POINCARÉ soit pour eux un ami, un conseiller, et le meilleur des guides.

ALLOCUTION DE M. JOSEPH PÉRÈS

A L'INSTITUT HENRI POINCARÉ.

MON CHER JULIA,

Le Comité que tu présides avec tant de dynamisme a eu la pensée très délicate de prévoir, à l'entrée de ces bâtiments dédiés à Henri POINCARÉ, l'admirable médaillon qu'a gravé M^{me} GUZMAN-NAGEOTTE. Au nom du Conseil de Direction de l'Institut Henri Poincaré et mandaté par son Directeur, notre maître Émile

Borel, au nom de toute la Faculté des Sciences, j'ai l'agréable devoir de témoigner ici de notre vive gratitude. Et j'ai aussi le plaisir de remercier M^{me} Guzman-Nageotte d'avoir si bien su faire revivre, après plus de 40 ans, celui que nous ne pouvons oublier.

Mesdames, Messieurs,
Mes chers Collègues et Amis,

Je n'aurai pas l'outrecuidance de revenir, après les beaux exposés que nous avons entendus, hier et avant-hier, sur les caractères de l'œuvre d'Henri Poincaré. Permettez-moi cependant, mon cher Maître, quelques mots à propos du principe que vous avez dégagé samedi dernier, en nous rassurant d'ailleurs sur sa parfaite indépendance des lois morales, lorsqu'on l'utilise en Mathématiques. Le principe est d'une application très large en Mathématiques appliquées, on en abuse peut-être parfois, on l'utilise inconsciemment comme M. *Jourdain* faisait de la prose. En l'évoquant vous vouliez sans doute nous faire sentir, par un exemple que son apparence de paradoxe rendait plus frappant, combien la puissante intuition de Poincaré dominait problèmes et méthodes, combien elle était ouverte à toute forme de démarche vers la vérité. Cela peut être médité ici-même.

Ceux d'entre nous qui ont suivi les cours d'Henri Poincaré le revoient dans les locaux qui furent le domaine des mathématiciens, presque sous les toits de la Sorbonne, au-dessous de la tour qui domine la rue Saint-Jacques et que couronne une demi-sphère, assez agréablement patinée et qui abrita peut-être, mais la tradition s'en est perdue, un instrument astronomique d'observation. Poincaré enseignait dans l'amphithéâtre Le Verrier, où ceux de ma génération ont pu entendre aussi les leçons de MM. Hadamard et Émile Borel, de Darboux et de Picard. Cet amphithéâtre a un tableau très long devant lequel se trouve donc une piste de marche à pied fort plaisante (je l'ai éprouvé beaucoup plus tard) pour ceux qui aiment agrémenter le travail de réflexion par un peu d'exercice. S'il m'en souvient bien, Poincaré était de ceux-là et j'ai eu, hier matin, confirmation de ce souvenir en visitant l'exposition organisée à l'École Polytechnique : dans une *Revue des Ombres*, il est question de raisonnements subtils qui s'achèvent en un demi-tour, évidemment à une des limites d'oscillation.

L'amphithéâtre Le Verrier est actuellement presque entièrement abandonné par les mathématiciens et vous comprenez ainsi combien était opportun le transfert en ces lieux, que nous devons au Comité du Centenaire, de la présence figurée d'Henri Poincaré.

M. Émile Borel vous a rappelé avant-hier par quels concours avait été rendue possible, au cours de la seconde décade de notre siècle, la construction de l'Institut Henri Poincaré. Si j'y reviens ici, c'est pour souligner que c'est par son initiative et grâce à son autorité qu'ont été réunis les concours et qu'il a été véritablement le maître de l'œuvre. Nous ne saurions l'oublier.

L'Institut Henri Poincaré, destiné en principe aux Services de Physique mathématique et de théories physiques, a accueilli ultérieurement l'ensemble des Services de Mathématiques. Par suite du développement normal des enseignements, de l'accroissement du nombre des étudiants et du nombre des chercheurs du Centre national de la Recherche scientifique, il était devenu beaucoup trop petit. Son agrandissement posait des problèmes difficiles, mais la Faculté des Sciences avait alors heureusement à sa tête le Doyen Châtelet que les difficultés ne faisaient pas reculer, qui s'attachait à les vaincre et qui les a surmontées. La largeur de vue de M. Dupouy, Directeur du C. N. R. S. et de M. Donzelot, Directeur de l'Enseignement supérieur, a permis, par une heureuse association, de financer les travaux. Nos profonds remerciements vont au Doyen Châtelet, aux Directeurs Donzelot et Dupouy. Je suis particulièrement heureux de saluer ici M. le Directeur Dupouy et de lui dire combien sont précieux les liens qui sont établis entre la Faculté des Sciences et l'organisme qu'il dirige, liens qui se sont resserrés encore récemment pour le bon fonctionnement, en ces lieux, des Services de recherches de Mathématiques.

Par une heureuse coïncidence, les agrandissements projetés, qui doublent et au-delà la surface utile de l'Institut Henri Poincaré, sont terminés aujourd'hui. Ce n'est pas un simple hasard, mais c'est bien grâce à la compétence et à la diligence des architectes et des entrepreneurs chargés de l'œuvre, que j'ai plaisir à féliciter aujourd'hui.

Messieurs les Délégués étrangers,

Je suis heureux de vous souhaiter aujourd'hui la bienvenue dans cette maison des Mathématiques et de vous remercier de l'honneur que nous fait votre présence. Beaucoup d'entre vous connaissaient sans doute l'Institut Henri Poincaré d'hier. Avant de faire un tour rapide dans les installations actuelles, je veux exprimer le souhait sincère de vous revoir souvent dans ces murs.

ALLOCUTION DE M. GASTON DUPOUY

A L'INTITUT HENRI POINCARÉ.

Le C. N. R. S. a tenu à s'associer à l'hommage rendu au célèbre mathématicien Henri Poincaré en donnant aux mathématiciens français de nouveaux moyens de travail, groupés à l'Institut Henri Poincaré.

Ceci s'est réalisé dans des conditions que je vais rappeler brièvement.

Les sciences expérimentales ne sont pas les seules à avoir des besoins matériels. Les recherches de Mathématiques et de Physique mathématique s'effectuent aujourd'hui — dans divers pays — dans des centres remarquablement installés et équipés.

En France nous disposons, à Paris, de l'Institut Henri Poincaré construit avec des crédits provenant en partie de la fondation Rockefeller.

Mais cet Institut construit en 1928, ne pouvait plus suffire aux besoins actuels; d'une part les locaux n'étaient plus assez vastes, ensuite l'organisation et l'équipement devaient être adaptés aux nécessités présentes de la Recherche.

Tenant compte de ces faits et du devoir de réduire au minimum les dépenses, le Groupe de Mathématiques du Comité national de la Rceherche scientifique a proposé la création d'un Centre de recherches de Mathématiques et de Physique mathématique dans les conditions suivantes.

1° Le Centre se développerait autour de ce qui existe déjà à l'Institut Henri Poincaré.

2° La question des locaux pourrait être résolue en surélevant de deux étages l'Institut Henri Poincaré.

3° Il serait procédé à une réorganisation de l'ensemble des services.

Dès que ce projet lui fut soumis, la Direction du C. N. R. S. s'y intéressa très vivement et s'engagea immédiatement à fournir la moitié des crédits nécessaires pour les constructions prévues.

Pour aboutir, de nombreuses réunions se sont tenues au C. N. R. S. et à l'Institut Henri Poincaré sous la présidence de notre très distingué confrère M. É. Borel, Président du Conseil d'Administration de l'Institut Henri

Poincaré. Qu'il nous soit permis de lui rendre un chaleureux hommage pour son inlassable activité en faveur de la Recherche scientifique française.

M. Louis DE BROGLIE, nous a, bien des fois, aidé de ses avis et de ses conseils pour la mise au point du projet en question. Nous le prions de bien vouloir trouver ici l'expression de notre reconnaissance.

M. le Doyen CHÂTELET a eu la lourde tâche de réaliser les vœux de nos collègues mathématiciens. C'est grâce à son activité et à son dévouement que les travaux ont pu être menés à bonne fin. Et cela lui vaut de nouveaux titres à la reconnaissance des mathématiciens et des chercheurs français.

Aujourd'hui les travaux sont achevés, les mathématiciens français disposent maintenant de nombreuses salles de réunion et de travail pour nos chercheurs. Nos collègues de Province, de passage à Paris, y trouveront des locaux pour les accueillir; ce sera aussi le cas pour les mathématiciens venus de l'étranger prendre contact avec leurs collègues français.

Dans les nouveaux locaux les chercheurs en Physique mathématique, les physiciens théoriciens, les économètres pourront être hébergés; ils y connaîtront des conditions confortables de travail.

La bibliothèque de l'Institut s'est agrandie; elle sera organisée de façon moderne. Nous en profiterons pour regrouper les bibliothèques de mathématiques, pour procéder au renouvellement et à l'harmonisation des collections existantes.

Un secrétariat technique sera mis à la disposition des mathématiciens pour l'ensemble de leurs travaux et de leurs besoins.

Le Centre national de la Recherche scientifique fournira le personnel technique nécessaire pour mener à bien ce programme.

Le C. N. R. S. est désormais représenté au Conseil d'Administration de l'Institut Henri Poincaré. Ainsi, étroitement associé à sa vie et à son développement, il aura à cœur de favoriser le travail des jeunes chercheurs français afin que ceux-ci, s'engageant sur les traces de leur illustre aîné, puissent faire briller d'un nouvel éclat le renom de l'École française de Mathématiques.

*
* *

Le Comité d'Organisation, ayant pensé qu'il était convenable de rappeler aux passants que Henri POINCARÉ avait vécu au 63 de la rue Claude-Bernard les 25 dernières années de sa vie, a voulu qu'une plaque commémorative soit apposée sur cet immeuble. L'inauguration de cette plaque, qui porte l'inscription :

HENRI POINCARÉ
MATHÉMATICIEN
PHYSICIEN-PHILOSOPHE
(1854-1912)
a vécu dans cette maison
de 1887 jusqu'à sa mort

a eu lieu à la fin de cette même matinée du lundi 17 mai. De la rue Pierre-Curie, les personnes présentes se sont donc rendues devant la maison de la rue Claude-Bernard, et M. le Doyen PÉRÈS a évoqué quelques souvenirs d'avant la guerre de 1914, et de ce coin de quartier où habitaient tant de savants et de penseurs, dans les termes suivants :

ALLOCUTION DE M. JOSEPH PÉRÈS.

RUE CLAUDE-BERNARD.

MESDAMES, MESSIEURS,
MES CHERS COLLÈGUES,

C'est une très heureuse initiative que celle à laquelle nous nous associons aujourd'hui, en nous réunissant devant la plaque conmémorative que le Comité du Centenaire a fait poser sur la maison qu'habita Henri POINCARÉ. JULIA nous disait tout à l'heure l'émotion qu'il avait ressentie en trouvant, au cimetière de Göttingen, la tombe de GAUSS. J'ai éprouvé des sentiments du même ordre en découvrant fortuitement, à Strasbourg, la plaque qui marque la maison natale de Paul APPELL et aussi, dans le petit cimetière d'Ariccia, devant la tombe de Vito VOLTERRA, portant encore des traces des combats de libération des Castelli Romani. Nous retrouvons aujourd'hui, en commun, une émotion de même qualité.

Les pierres de ce quartier peuvent évoquer le souvenir de nombreux maîtres disparus. De ce côté de la rue Claude-Bernard il convient d'en rappeler au moins un, qui, je crois, succéda à Henri POINCARÉ dans la chaire de Physique mathématique de la Faculté des Sciences lorsque ce dernier prit l'enseignement de Mécanique céleste. Joseph BOUSSINESQ demeurait tout près d'ici, rue

Berthollet, et on le rencontrait journellement, dans les années d'après-guerre, faisant, avec Mme Boussinesq, à heures très régulières, une petite promenade sur ce trottoir ensoleillé.

Henri Poincaré, nommé Chargé de Cours à Paris en octobre 1881, habita d'abord rue Gay-Lussac. Il s'est installé au 63 de la rue Claude-Bernard en 1887 et Mme Henri Poincaré est restée dans le même appartement jusqu'à sa mort en décembre 1934. La fenêtre au-dessus du porche, au troisième étage, fut celle du bureau d'Henri Poincaré, les deux fenêtres voisines celles du salon, les deux suivantes celles de la salle à manger. Dans un périmètre restreint se groupaient d'ailleurs les habitations de parents très proches : Mme Léon Poincaré, mère de Henri et de Mme Boutroux, rue des Ursulines, le ménage Boutroux, 220, rue Saint-Jacques, jusqu'au moment où le philosophe Émile Boutroux devint Administrateur de la Fondation Thiers; enfin le grand chimiste Albin Haller, marié avec une cousine germaine de Henri Poincaré, demeurait au n° 86 de la rue Claude-Bernard.

La plaque qui vient d'être posée sera certainement l'objet de pieux pèlerinages et, pour celui qui, vivant dans ce quartier, la verra journellement et connaîtra, de façon plus ou moins précise, l'œuvre du savant et du philosophe, elle sera toujours l'occasion d'une pensée, peut-être rapide, mais la somme de ces pensées est un hommage non négligeable à la mémoire de l'homme admirable dont nous célébrons le centenaire.

D. — L'APRÈS-MIDI DU LUNDI 17 MAI 1954 A L'INSTITUT DE FRANCE.

L'après-midi du 17 mai, l'Académie des Sciences a reçu, au cours de sa séance ordinaire de travail, les délégués étrangers venus à Paris pour fêter le centenaire de la naissance de Henri Poincaré. En présence de ceux-ci, le Professeur Gaston Julia a déposé sur le Bureau de l'Académie le tome X des *Œuvres de Henri Poincaré*, consacré à la Physique mathématique et publié sous sa direction avec la collaboration de M. Gérard Petiau.

L'édition des *Œuvres de Henri Poincaré*, faite sous les auspices de l'Académie, grâce au concours du Centre national de la Recherche scientifique et de nombreux bienfaiteurs, dont les souscriptions ont été suscitées par M. Pierre Ricard, Vice-Président du Conseil national du Patronat français, ou par M. Boutteville, se trouve ainsi terminée l'année même où est célébré le centenaire de la naissance de l'éminent mathématicien.

En qualité de Président du Comité de ce Centenaire, M. Gaston Julia a remis à l'Académie, pour son médaillier, un exemplaire de la médaille commémorative qui a été frappée à cette occasion, et qui est due à M[me] Guzman-Nageotte.

M. Gaston Julia a pris ensuite la parole pour présenter à l'Académie les savants étrangers délégués par leurs Académies ou Universités pour les représenter aux cérémonies du Centenaire.

Mon cher Président,
Mes chers Confrères,

Je vais avoir l'honneur de vous présenter les savants étrangers délégués à la célébration du centenaire de notre illustre confrère, Henri Poincaré, par les Académies et Universités qui avaient voulu se l'attacher comme Membre correspondant, associé étranger, ou docteur *honoris causa*.

Notre Comité d'Organisation a estimé en effet, que ces Académies et Universités, par la distinction qu'elles avaient marquée à notre confrère, devaient être associées à la famille spirituelle des Académies, Universités, Écoles françaises, qui célèbre aujourd'hui le centenaire de sa naissance.

Nous avons, par conséquent, invité toutes ces Académies ou Universités à figurer dans notre Comité d'Honneur et à nous envoyer un délégué. Presque toutes ont répondu à notre appel, et nous leur en sommes très reconnaissants ; si le nombre des délégués n'est pas le double de celui que vous voyez, c'est que, la période des examens retenant en ce moment dans leurs pays respectifs un grand nombre de nos collègues étrangers, d'une part quelques-uns des délégués qui vont vous être présentés ont bien voulu accepter de représenter ici plusieurs institutions, d'autre part quelques institutions ont choisi de se faire représenter par certains de nos confrères ou correspondants français :

L'Union internationale de Mathématiques, par M. Émile Borel ; l'Académie des Sciences de Turin, par M. Joseph Pérès ; l'Union internationale de Radioélectricité, par M. Pierre Lejay ; l'Union internationale d'Astronomie, par

M. André Danjon; la « Royal Society of Edinburgh », par M. Maurice Fréchet. Enfin l'Union Géodésique et Géophysique internationale est représentée par son Secrétaire général, M. Georges Laclavère.

Le Comité d'Organisation se réjouit de la présence de ses invités. S'il les prie d'excuser la simplicité d'un décor qu'ennoblit le souvenir d'illustres savants qui s'y sont succédé, il les remercie très sincèrement et très cordialement d'avoir bien voulu prendre part à la célébration d'une des gloires les plus authentiques et les plus chères à notre cœur français.

*
* *

M. Gaston Julia a présenté ensuite à l'Académie chacun des délégués dans l'ordre alphabétique des pays représentés, en indiquant l'organisme qui l'a désigné.

Allemagne. — MM. Alexander Dinghas, de l'Université de Berlin-Ouest, Max Deuring, de l'Académie des Sciences de Göttingen, Georg Faber, de l'Académie des Sciences de Munich, O. Berninger, de la Société Physicomédicale d'Erlangen.

Autriche. — M. Johann Radon, de l'Académie des Sciences de Vienne.

Belgique. — MM. Lucien Godeaux, de l'Académie des Sciences de Belgique, Franz van den Dungen, de l'Union internationale de Mécanique, Pierre Baudoux, de l'Université libre de Bruxelles, Paul Gillis, de l'Institut Solvay.

Danemark. — M. Niels Erik Nörlund, Correspondant de l'Académie, de l'Académie des Sciences de Copenhague.

États-Unis d'Amérique. — M. John Gamble Kirkwood, de l'Académie des Sciences de Washington et de l' « American Philosophical Society ».

Finlande. — M. Pekka Juhana Myrberg, de l'Académie des Sciences de Finlande.

Grande-Bretagne. — MM. John Henry Constantine Whitehead, de la « Royal Society of London » et de l'Université d'Oxford, Louis Melville Milne-Thomson, de la « Royal Astronomical Society », Miss Mary Lucy Cartwright, de l'Université de Cambridge, de la Société Mathématique de Londres et de la « Cambridge Philosophical Society », M. Léon Rosenfeld, de la « Manchester Literary and Philosophical Society ».

Hongrie. — MM. Frederic Riesz, Correspondant de l'Académie et Georges Alexits, tous deux de l'Académie des Sciences de Hongrie.

Irlande. — M. John Lighton Synge, de la « Royal Irish Academy ».

Italie. — MM. Francesco Severi, des Académies Nationales des « Lincei » et des XL, Nicolas Minorski, de l'Académie des Sciences de Bologne.

Norvège. — M. Ralph Tambs Lyche, de l'Université d'Oslo.

Pays-Bas. — M. Luitzen Egbertus Jan Brouwer, de l'Académie des Sciences de Hollande.

Union des Républiques Socialistes Soviétiques. — MM. Paul Alexandroff et Andrei Markhov, tous deux de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S., de la Société Mathématique de Kharkov et de la Société Physicomathématique de Kasan.

* * *

M. le Duc de Broglie, Président de l'Académie des Sciences, a remis alors à chaque délégué la médaille du Centenaire, et il a reçu de ceux-ci les adresses qu'ils avaient apportées au nom de l'Université libre et de la Société Mathématique de Berlin, de la « Bayerische Akademie der Wissenschaften », de la « Physikalisch-Medizinische Sozietät zu Erlangen », de l'Académie Autrichienne des Sciences, de l'Académie Royale de Belgique, de l'Union internationale de Mécanique théorique et appliquée, de l'Université libre de Bruxelles, de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, de la « National Academy of Sciences » de Washington, de « l'American Philosophical Society », de l'Académie Finnoise des Sciences et des Lettres, de la « Royal Society », de la « Royal Astronomical Society », du « Royal Naval College » de Greenwich, de la « London Mathematical Society », de la « Cambridge Philosophical Society », de la « Literary and Philosophical Society » de Manchester, de la « Royal Society of Edinburgh », de l'Académie des Sciences de Hongrie, de la « Royal Irish Academy », des « Accademia Nazionale dei Lincei » et « dei LX », de l'Université d'Oslo, de l'Académie Royale Néerlandaise des Sciences d'Amsterdam, de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S., de l'Université de Bordeaux.

* * *

M. le Duc DE BROGLIE a prononcé ensuite les quelques mots suivants :

L'Académie des Sciences, très fière d'avoir compté Henri POINCARÉ parmi ses Membres, s'honore grandement de voir ici réunis les représentants des Académies et Universités étrangères qui partagent avec nous la gloire de l'avoir élu parmi leurs associés. Ils ont bien voulu se joindre aux célébrations du centenaire d'un grand savant dont la mémoire appartient au monde entier. L'Académie les accueille avec reconnaissance et leur témoigne toute sa gratitude; les continuateurs de l'œuvre de Henri POINCARÉ que nous saluons ici comptent parmi les illustrations scientifiques actuelles des diverses branches des Mathématiques, c'est à eux-mêmes et à leurs œuvres que nous tenons à apporter notre hommage. Ils représentent au-dessus des vicissitudes des temps actuels, le pur rayonnement de la Pensée scientifique internationale et, par ce fait, donnent à leur présence une portée profonde que nous accueillons avec émotion.

L'Académie des Sciences veut aussi exprimer aux membres du Comité d'Organisation du centenaire de Henri POINCARÉ ses remercîments pour cette célébration à laquelle ils ont su donner toute l'ampleur qu'elle méritait.

*
* *

Pendant que l'Académie achevait sa séance en Comité secret, les délégués étrangers ont été invités à visiter la bibliothèque de l'Institut réservée normalement aux Académiciens, et la bibliothèque Mazarine qui est au contraire ouverte au public. Ils ont pu admirer la richesse de ces deux bibliothèques qui est faite du nombre des volumes qui s'accroît chaque jour, et des collections de livres anciens qu'elles contiennent.

Une réception offerte par l'Institut a réuni ensuite au musée de Caen, les Membres des cinq Académies et les délégués étrangers ainsi que certaines personnalités du monde savant.

E. — LE MARDI 18 MAI 1954 A LA SOCIÉTÉ DES INGÉNIEURS CIVILS.

La Société des Ingénieurs Civils de France et l'Union des Associations scientifiques et industrielles françaises, ont tenu à organiser aussi une séance commémorative du centenaire de la naissance de Henri POINCARÉ, et à rappeler l'influence que Henri POINCARÉ avait eue sur les sciences de l'ingénieur.

Sous la présidence de M. Albert CAQUOT, Membre de l'Académie des Sciences, suppléant M. Gaston JULIA souffrant, le professeur Nicolas MINORSKI, M. Georges DARMOIS et M. Georges DARRIEUS, Membre de l'Académie des Sciences, et ancien Président de la Société des Ingénieurs Civils de France, ont parlé successivement : de l'*Influence de Henri Poincaré sur l'évolution moderne de la théorie des oscillations non linéaires*, de la *Répercussion des travaux de Henri Poincaré dans le domaine du Calcul des probabilités et de ses applications* et des *Contributions diverses de Henri Poincaré à l'électrotechnique*.

CONFÉRENCE DE M. N. MINORSKI
AUX INGÉNIEURS CIVILS.

Influence d'Henri Poincaré sur l'évolution moderne de la théorie des oscillations non linéaires.

La répercussion des travaux d'Henri POINCARÉ s'est fait sentir dans presque tous les domaines des sciences appliquées, mais c'est surtout dans la théorie des oscillations qu'elle a provoqué de tels changements que cette théorie est aujourd'hui passablement différente de ce qu'elle était.

Pour pouvoir aborder ce sujet, il est utile de résumer, en quelques mots, ce qu'était l'ancienne théorie au commencement de ce siècle. Le mouvement harmonique simple jouait un rôle important dans cette théorie et le principe de la superposition simplifiait pas mal de choses. La présence simultanée de plusieurs oscillations dans un système physique quelconque se ramenait à l'étude de séries trigonométriques, le plus souvent celles de FOURIER. *L'analyse harmonique*, comme on appelle quelquefois l'ensemble de ces problèmes, est trop bien connue dans les applications pour y insister davantage. De même, l'étude des oscillations régies par des équations différentielles parfois assez compliquées pouvait se faire assez aisément grâce à la méthode des petites oscillations qui simplifiait de pareils problèmes dès le début, en sorte qu'il n'y avait aucune difficulté ni dans la détermination des fréquences des oscillations, ni dans celle des rapports de leurs amplitudes. Quant aux amplitudes elles-mêmes, elles s'obtenaient aisément en imposant les conditions initiales voulues.

Toutefois, on rencontrait, de temps en temps, des problèmes non linéaires proprement dits, ce qui exigeait l'application de méthodes appropriées à chaque problème particulier, car il n'existait aucune méthode générale susceptible de traiter ces problèmes uniformément, comme dans le cas des problèmes linéaires. Les travaux importants de Lord RAYLEIGH, HELMHOLTZ et d'autres physiciens de cette époque donnent des exemples des tentatives diverses faites pour s'affranchir du long règne de la théorie linéaire dans ce domaine. Toutefois, au fur et à mesure que la Physique expérimentale apportait des faits nouveaux, la situation devenait de plus en plus compliquée et il fallait souvent remplacer les procédés analytiques par toutes sortes de constructions graphiques pour pouvoir aboutir à des conclusions même purement qualificatives. C'est surtout dans le cas des oscillations entretenues par des arcs électriques, des décharges dans les gaz et phénomènes analogues, que les constructions graphiques ont commencé à remplacer, peu à peu, l'étude analytique de ces phénomènes qui échappaient à la théorie linéaire.

En plus de ceux qui pouvaient être encore analysés partiellement par des méthodes mixtes de ce genre, on rencontrait, de temps en temps, des phénomènes qui ne pouvaient pas être expliqués du tout et qu'on devait « laisser de côté » pour ainsi dire, pendant de longues années, parfois même des siècles.

Par exemple, si l'on considère comme le commencement de la théorie linéaire l'époque où GALILÉE (1569-1647) a découvert la loi de l'isochronisme, il est intéressant de mentionner un phénomène curieux observé par HUYGENS (1629-1659). Ce savant, en plus de ses autres travaux, s'intéressait beaucoup à l'horlogerie. Il est, en effet, l'inventeur du mécanisme de l'échappement. Dans un de ses Mémoires, il mentionne l'observation suivante :

Deux pendules légèrement déréglées quand elles étaient fixées sur un mur, se synchronisaient automatiquement quand on les fixait sur une paroi mince. Ce fait curieux avait été complètement oublié, mais un jour, plus de deux siècles plus tard, on l'a retrouvé dans les circuits électriques et c'était un autre Hollandais, M. Balth. VAN DER POL, qui a donné la théorie moderne de ce phénomène connu aujourd'hui sous le nom de « synchronisation ».

Toutefois, le « coup de grâce » à la théorie linéaire a été porté par la découverte des oscillateurs à lampes triodes et c'est le grand mérite de M. VAN DER POL d'avoir attiré l'attention sur l'impossibilité de formuler le fonctionnement de ces oscillateurs dans le cadre de la théorie linéaire. Guidé par une intuition physique remarquable, VAN DER POL a réussi à former une équation différentielle non linéaire qui porte aujourd'hui son nom et à constater (1920), par le procédé graphique des isoclines, qu'elle possède une solution périodique représentée dans le plan de phase par une courbe fermée.

Ce n'est, cependant, que neuf ans plus tard, par une Note insérée dans les *Comptes rendus* (1929), que le physicien russe ANDRONOV attirait l'attention sur ce que la courbe fermée de VAN DER POL n'est autre que le *cycle limite* de la théorie de POINCARÉ.

Une fois cette constatation faite, le développement de la théorie nouvelle a progressé de façon rapide et les premières étapes de ces études ont été faites presque exclusivement en U. R. S. S. sous la direction de deux physiciens éminents, MM. MANDELSTAM et PAPALEXI, entre 1930 et 1940, avec la collaboration de nombreux savants.

Le développement de la nouvelle théorie fut guidé principalement pendant cette période initiale, par les trois œuvres suivantes de POINCARÉ :

1. *Sur les courbes définies par une équation différentielle;*

2. Tome premier du Traité : *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste;*

3. *Les figures d'équilibre d'une masse fluide animées d'un mouvement de rotation.*

C'est par la première œuvre que ces études ont commencé. Dans son Mémoire, POINCARÉ étudie la structure topologique de courbes intégrales définies par les équations différentielles de la forme

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \tag{1}$$

Or, c'est précisément aux équations de cette forme que se ramène l'équation de VAN DER POL avec ses généralisations ultérieures par MM. E. et H. CARTAN, A. LIÉNARD et autres. De cette façon, la théorie mathématique exposée dans ce Mémoire a acquis rapidement une signification physique grâce à une série d'identifications presque évidentes. Ainsi, les points singuliers ont reçu une interprétation physique de positions d'équilibre; les cycles limites, celle de mouvements stationnaires et ainsi de suite. La question de la stabilité a trouvé une formulation mathématique commode dans les équations aux variations (deuxième œuvre) et, de cette façon, on a identifié la stabibilité d'équilibre avec la stabilité de points singuliers; les structures topologiques simples envisagées par POINCARÉ ont été facilement généralisées à la lumière de données expérimentales pour des systèmes oscillatoires ayant plus d'un seul cycle limite, etc.

Tout s'est passé, pendant cette première période d'études, comme si les idées mathématiques du grand géomètre n'attendaient que des données expérimentales pour donner naissance à une théorie physique.

Cette première étape franchie, on est passé au développement du côté quantitatif de la théorie. C'est ici la deuxième œuvre de POINCARÉ qui a servi de base pour ces études. En particulier, les développements de la théorie des approximations ont suivi de près sa méthode d'intégration par des séries ordonnées selon les puissances ascendantes d'un paramètre. Or, ce paramètre figure déjà dans l'équation de VAN DER POL, en sorte que, par ce moyen, toute la théorie des oscillations autoentretenues s'est rangée sans difficulté dans le cadre de la théorie de POINCARÉ sans qu'on soit obligé d'ajouter quelque chose de plus.

L'importance du troisième Mémoire est apparue un peu plus tard lorsqu'on a abordé l'étude de problèmes plus compliqués dans lesquels figurent plusieurs cycles limites et il est utile d'insister un peu plus sur ce point. Dans ce Mémoire, POINCARÉ introduit un paramètre auxiliaire (à ne pas confondre avec le paramètre qui vient d'être mentionné au paragraphe précédent) et étudie comment les solutions de l'équation différentielle varient en fonction de ce paramètre. Si, pour une petite variation du paramètre autour d'une valeur quelconque, la solution de l'équation différentielle varie aussi peu sans aucun changement dans sa structure topologique, une pareille valeur du paramètre est appelée *ordinaire*. Il existe, toutefois, certaines valeurs critiques ou de *bifurcation* du paramètre pour lesquelles à une petite variation de ce dernier correspond un changement qualitatif de cette structure et c'est dans ce cas qu'on aboutit à des conclusions nouvelles. Cette *théorie de bifurcation* a trouvé une application extrêmement intéressante dans la nouvelle théorie des oscillations et a permis d'un seul coup d'expliquer un grand nombre de phénomènes qui restaient jusqu'ici sans aucune explication.

Comme il vient d'être mentionné, les conclusions de la théorie de Poincaré ont pu être généralisées grâce aux données expérimentales qui ont révélé l'existence de problèmes dans lesquels figurent plusieurs cycles limites. Cela arrive généralement dans les cas où la fonction non linéaire entrant dans l'équation de van der Pol est représentée par un polynome d'un degré suffisamment élevé. Or, étant donné une structure topologique de ce genre, les cycles limites successifs sont généralement contenus les uns dans les autres à la façon de cercles concentriques. Dans une pareille configuration, les cycles stables alternent toujours avec des cycles instables, le point singulier au centre de la configuration étant considéré comme un cycle réduit à un seul point. Il est clair que, si l'on fait varier le paramètre, une pareille structure subit des variations aussi et il arrive souvent que, pour une valeur de bifurcation du paramètre, un cycle stable s'approche indéfiniment d'un cycle instable voisin et les deux se détruisent mutuellement en disparaissant ainsi à la limite. Poincaré a dit à ce sujet : « Les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques. »

Il est clair que, si le phénomène oscillatoire était localisé sur le cycle stable qui disparaît de cette façon, l'affixe qui suivait ce cycle se trouve brusquement dans la zone d'attraction d'un autre cycle — celui qui reste encore — et il en résulte ainsi un saut quasi discontinu du régime oscillatoire d'un cycle à l'autre. Ces phénomènes sont connus depuis assez longtemps, mais c'est grâce à la théorie de bifurcation de Poincaré que leur nature a pu être expliquée d'une façon précise. Un autre phénonème du même genre se manifeste par le fait que l'évolution du phénomène oscillatoire en fonction du paramètre n'est pas la même quand ce dernier croît que lorsqu'il décroît. MM. Appleton et van der Pol, qui ont découvert ce phénomène, l'appellent « l'hystérésis oscillatoire » et, de nouveau, sa formulation se fait facilement dans le cadre de la même théorie de Poincaré.

Le progrès rapide de ces études s'est ralenti, toutefois, quand on a abordé l'étude de phénomènes régis par des équations différentielles de la forme

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, t) \tag{2}$$

dans lesquelles la variable indépendante t (le temps) entre explicitement. A cette classe de phénomènes appartiennent la résonance sous-harmonique, l'excitation paramétrique, les phénomènes de l'action asynchrone et quelques autres.

Il est impossible de ne pas apercevoir la difficulté qui se présente ici. En effet, dans le cas d'équations différentielles du type (1), la variable t s'élimine aisément. Il en résulte une équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$ qui mène à une étude purement géométrique des courbes intégrales (Mémoire 1). Or, dans le cas des équations (2), il est impossible de se servir de la notion des points singuliers, cycles limites, etc., qui était si commode dans le premier stade de ces études.

Il est à remarquer qu'aucune difficulté de ce genre ne se présente dans l'exposé de Poincaré (Mémoire 2) qui commence l'étude par des équations différentielles du type (2) et passe ensuite à celles du type (1) comme cas particulier. Cela est dû uniquement à ce que les Mémoires 1 et 2 ne sont nullement liés dans l'exposé de Poincaré, tandis que, pour former la théorie des oscillations sur cette base, il a fallu tenter de lier ensemble ces deux théories pour obtenir une théorie unique. Tant qu'il s'agissait des équations différentielles du type (1), il n'y avait aucune difficulté à le faire, la difficulté est apparue dans les problèmes régis par des équations différentielles (2), comme il vient d'être mentionné.

Il y avait un procédé normal pour résoudre ces problèmes, savoir : suivre les méthodes générales de la Mécanique céleste (Mémoire 2) en renonçant à la représentation topologique commode à laquelle on s'est habitué déjà dans la première étape de ces études. C'était la marche qu'ont suivie MM. Mandelstam et Papalexi dans leur Mémoire classique sur la résonance non linéaire. Cependant, cette étude conduit à des équations aux variations ayant des coefficients périodiques, ce qui mène à un calcul assez pénible des exposants caractéristiques. Le problème fut résolu, mais au prix de complications plus grandes que celles rencontrées dans la première étape de ces travaux.

Pour cette raison, une autre tendance est apparue ensuite, en essayant de transformer, par un artifice de calcul quelconque, les équations différentielles du type (2) en équations du type (1). Effectivement, en se basant sur la théorie générale des transformations d'équations différentielles, on peut montrer que cela est toujours possible, mais en tenant compte de quelques conditions supplémentaires qui résultent de cette transformation. Une fois que cette transformation est effectuée et le problème étant ramené dans le cadre du Mémoire 1 de Poincaré, le reste ne présente plus de difficulté.

J'ai essayé d'esquisser, à grands traits, les contacts principaux entre les travaux de Poincaré et la théorie des oscillations dont l'évolution a été guidée par ces travaux. Si l'on considère le changement de la théorie dans son ensemble en laissant de côté ces questions de détail, on peut résumer, en quelques mots, la situation de la façon suivante :

Le rôle privilégié et, en quelque sorte, artificiel, joué par l'oscillateur harmonique dans l'ancienne théorie, est remplacé maintenant par celui de l'oscillateur à cycle limite qui semble être beaucoup plus approprié à l'étude de phénomènes oscillatoires naturels à l'état stationnaire, En effet, dans tous ces phénomènes, l'état stationnaire n'est nullement défini par les conditions initiales comme dans les problèmes linéaires, mais se détermine uniquement en fonction de paramètres de l'équation différentielle elle-même. Ainsi, par exemple, le fonctionnement d'une pendule ou d'un oscillateur à lampes triodes n'a rien à faire avec les conditions initiales avec lesquelles ces systèmes ont été lancés au début, mais dépend seulement de paramètres qui apparaissent dans leurs équations différentielles. Il est bien entendu que ce qui vient d'être dit s'applique seulement aux systèmes non conservatifs avec lesquels on a affaire dans nos expériences terrestres. Il est visible que ces changements ne concernent pas les systèmes conservatifs.

La nouvelle théorie offre un cadre commode pour l'étude d'un grand nombre de phénomènes qui échappaient à l'ancienne théorie linéaire. Ainsi, le fonctionnement de divers oscillateurs susceptibles d'osciller en régime permanent, celui des mécanismes à échappement, les fluctuations biologiques et économétriques, etc., tout cela commence à être traité peu à peu d'une façon uniforme par la nouvelle théorie.

Il est difficile de trouver dans l'histoire de la Science un autre exemple de théorie mathématique développée saus aucune relation aux applications (dont la plupart n'étaient même pas connues, du reste, à cette époque) qui ait présenté une base aussi parfaite pour l'étude de phénomènes innombrables qui se sont révélées depuis lors, sans qu'il y ait presque rien à changer à cette théorie un demi-siècle plus tard.

C'est aujourd'hui seulement que l'on commence à se rendre compte de la portée des paroles du grand géomètre, quand il dit :

« Ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable ».

CONFÉRENCE DE M. G. DARMOIS

AUX INGÉNIEURS CIVILS.

Répercussion des travaux d'Henri Poincaré dans le domaine du calcul des probabilités et de ses applications.

Henri Poincaré a été nommé le 22 août 1886, à la chaire de Physique mathématique et Calcul des probabilités. Il avait alors 32 ans, et enseignait déjà depuis cinq ans à la Sorbonne. Il avait été successivement Maître de Conférences d'Analyse en 1881, puis chargé, en mars 1885, du cours de Mécanique physique. En août 1886, il devint titulaire de la chaire de Physique mathématique et de Calcul des probabilités. Fondée en septembre 1834, elle n'était occupée que depuis 1840. Le premier titulaire avait été le fameux Comte Libri, célèbre à d'autres titres, et qui mourut à Londres, où il s'était enfui en 1848. La chaire demeura vacante jusqu'en 1851, où elle fut occupée peu de temps par Lamé.

Les prédécesseurs immédiats de Poincaré étaient Briot et Lippmann. Poincaré restitua pleinement à cette chaire son caractère, car il y enseigna pendant dix ans la Physique mathématique et le Calcul des probabilités, comme l'attestent, dans une collection d'une douzaine de volumes, des cours sur la Thermodynamique, l'Élasticité, la Théorie de la lumière, la Capillarité, les Tourbillons, la Théorie de la chaleur, le Calcul des probabilités. Tous ces cours, d'une admirable clarté, témoignent de la rapidité foudroyante avec laquelle Poincaré maîtrisait des questions si diverses. Je me suis souvent demandé pourquoi, dans le groupe étendu de jeunes mathématiciens et physiciens qui rédigèrent ces cours, et parmi les autres auditeurs, si peu s'étaient dirigés vers la Physique mathématique. Poincaré, sans doute, on l'a dit souvent, détestait perdre son temps, mais il était bienveillant, et, a-t-on dit également, d'une aménité parfaite, même avec les importuns qui demandaient un conseil.

Parmi ces auditeurs et rédacteurs figurent Émile Borel, René Baire, Le Roy. Sans donte, l'influence de Jules Tannery à l'École Normale, les grands succès de la théorie des fonctions, qui frappèrent les jeunes mathématiciens, sont une réponse très forte à ma question. D'autre part, Poincaré lui-même, dans son œuvre prodigieuse d'ampleur, a peut-être mieux employé son temps à résoudre lui-même les questions dont il aurait pu conseiller l'étude. Il faut d'ailleurs reconnaître qu'en ces temps, que j'ai connus, aborder un professeur nous faisait hésiter bien longtemps, sauf quand nous avions un résultat à lui présenter. Je pense que c'est mieux maintenant, à condition, bien entendu, que le professeur défende un peu son temps.

Mais la disparition, en 1912, de Henri Poincaré fut comme si une grande lumière éteinte, l'édifice de la Physique mathématique se trouvait dans une quasi-obscurité. Le caractère vraiment irréparable de sa disparition, ressenti sans doute immédiatement, se manifesta surtout à la naissance de la Relativité générale; les très difficiles problèmes qu'elle posait n'auraient pu trouver d'intelligence mieux adaptée que celle de Henri Poincaré, qui unissait les Mathématiques pures à la Physique mathématique et la Mécanique. Il aurait, d'un coup d'œil, vu le champ tout entier de la théorie nouvelle.

Si j'insiste sur ces points, c'est pour faire sentir le danger que ce fut pour la France de manquer d'une équipe de Physique mathématique et à quel point nous devons porter notre attention sur le maintien d'un équilibre entre les diverses formations mathématiques.

Mais revenons à Poincaré lui-même; j'ai déjà dit le caractère foudroyant de ses progrès dans les problèmes que lui posaient à la fois le monde du concret et son enseignement. On a dit qu'il n'était pas de voie royale en Mathématiques, entendant par là qu'il n'y a pas de raccourci facile pour les rois de ce monde, mais il existait une voie royale pour Poincaré lui-même.

Et, venant enfin aux probabilités, qui sont l'objet de cette conférence, nous verrons comment, en même temps que la forme concrète des problèmes, lui apparaissent immédiatement les correspondants abstraits, la construction mathématique, l'outil efficace qu'il utilise ou qu'il fabrique. Que le problème soit concret assure en général, comme dit Jacques Hadamard, qu'il est bien posé, c'est-à-dire qu'il a une solution. Les problèmes qui se présentaient les premiers à l'esprit de Poicaré étaient ceux qui étaient au cœur d'une question générale.

Prenons, par exemple, le problème, posé et résolu par lui, du battage des cartes. Pour appliquer le Calcul des probabilités aux jeux de cartes, on admet généralement qu'il y a égale probabilité pour toutes les permutations, pour tirer une carte ou une autre, et l'on peut calculer sur cette base d'uniformité toutes sortes de probabilités pour des structures de jeux. En vérité, tout le monde sait que, pour des observateurs attentifs, la structure du jeu de cartes faiblement battu est influencée par la structure initiale. POINCARÉ s'est demandé pourquoi, si le jeu a été battu longtemps, nous admettons que tous les ordres, toutes les permutations possibles, doivent être considérées comme également probables.

Il s'agit donc de l'influence du nombre de battages, et le problème est de démontrer que, si ce nombre augmente indéfiniment, il y a une limite commune pour les probabilités de toutes les permutations.

Immédiatement, dans son esprit, apparaît le groupe des battages, au sens de la théorie des groupes. Comment, d'ailleurs, intervient le joueur ? Ses habitudes de battage attribuent, dit POINCARÉ, une probabilité déterminée à une certaine permutation. Voici le joueur, ou le batteur, remplacé par une suite de probabilités, de somme égale à 1, de remplacer un ordre initial S_0 par un ordre S_1.

POINCARÉ introduit alors un nombre hypercomplexe $P = \Sigma p_i l_i$, les ei étant des unités complexes, auxquelles il impose une règle évidente (pour lui) de multiplication. Alors, la loi, au bout de n coups, c'est P^n et il faut montrer que, si n augmente indéfiniment, P^n a pour limite

$$\frac{1}{r+1}(e_0 + e_1 \ldots + e_r).$$

C'est ce problème qu'il résout complètement par utilisation des valeurs propres, données par l'équation caractéristique introduite par Élie CARTAN.

Ces questions ont été reprises, on peut dire amplifiées, certaines solutions étant plus élémentaires, mais la méthode de POINCARÉ s'applique aussi aux cas singuliers où, certaines permutations étant exclues par le joueur, le résultat général ne s'applique pas. Sa méthode était la plus puissante.

Idée générale. — POINCARÉ s'est posé le problème général de nivellement des probabilités par passage à la limite, soit qu'il s'agisse d'un morcellement de l'espace, le nombre des cellules augmentant indéfiniment, soit qu'il s'agisse d'une sorte d'infinité de tirages au sort, d'actes aléatoires comme dans le problème précédent.

La roulette. — Le premier problème est celui de la roulette, généralisé par la méthode des fonctions arbitraires. Pourquoi est-il raisonnable de supposer qu'à la roulette, si l'on imprime une rotation qui fait parcourir un grand nombre de secteurs rouges et noirs, la probabilité est la même pour un rouge et un noir.

Il est clair que ce ne serait pas vrai avec une impulsion faible; l'uniformisation tient au grand nombre de secteurs parcourus. POINCARÉ a montré qu'en prenant arbitrairement la loi des probabilités élémentaires de l'angle total de rotation, la différence des probabilités totales pour les deux couleurs tend vers zéro quand le nombre de secteurs parcourus augmente indéfiniment. Fonction arbitraire qui n'est pas très précise. La démonstration de POINCARÉ a été généralisée dans cette direction par BOREL, puis FRÉCHET. On voit l'idée générale. Ces notions de probabilités simples, acceptées dès le début, ne sont nullement nécessaires, et l'uniformisation se fait par les grands nombres.

HOSTINSKY a beaucoup développé ce point de vue en découpant en cellules l'espace des réalisations, une cellule correspond au succès, la voisine à l'échec. L'uniformisation se fait quand le nombre des cellules augmente indéfiniment. En particulier, il a traité le célèbre problème de l'aiguille de Buffon et montré que, si le nombre n des parallèles augmente indéfiniment, la probabilité de rencontre tend vers la valeur classique $\frac{2}{\pi}$.

Principe ergodique. — C'est ici le deuxième point de vue, l'infinité des opérations successives.

A la fin de la deuxième édition (revue et augmentée, 1912) du *Calcul des probabilités*, POINCARÉ développe largement ses idées et les problèmes qu'elles posent sur le mélange des liquides; il s'agit de molécules roses disposées arbitrairement au temps $t = 0$, et dont l'expérience nous apprend qu'elles sont uniformément réparties au bout de quelque temps.

Il s'agit, on le voit, et POINCARÉ le dit, du fameux postulat ou principe ergodique. MAXWELL, en 1850, avait le premier énoncé cette hypothèse que les moyennes temporelles prises sur une trajectoire avaient la même valeur que les moyennes statistiques ou moyennes d'ensemble prises sur tous les états possibles du système étudié. POINCARÉ parle du problème de MAXWELL-BOLTZMANN.

On ne peut se défendre de penser que POINCARÉ craignait de n'avoir plus le temps de traiter lui-même cette question. La phrase du début est la suivante : « Je ne dirai que quelques mots d'une autre question dont l'importance est très grande, mais que je ne suis pas en mesure de résoudre. »

Il est d'ailleurs remarquable que POINCARÉ, à la fin des 12 pages qu'il a consacrées à cette question, fait une allusion précise au processus stochastique de l'évolution des molécules qu'il est évidemment plus facile d'étudier quand on peut ne pas tenir compte de l'histoire antérieure.

Poincaré signale dans le détail l'importance de la difficulté, les cas d'exception du principe ergodique. Il y a un peu plus de 20 ans que G. D. Birkhoff a donné la première solution rigoureuse, la première démonstration du théorème ergodique : les résultats ont été établis depuis avec des hypothèses moins strictes. La théorie a sa forme la plus parlante dans le langage de la théorie des fonctions aléatoires ou processus stochastiques.

On voit qu'il a fallu 20 ans après la mort de Poincaré pour mettre au point, et 20 autres années pour parfaire, la solution de ce problème qu'il jugeait, avec raison, difficile.

On peut, dans un domaine plus modeste, signaler un problème d'ajustement traité au passage par Poincaré, et qui, par son importance pratique, occupe encore les biologistes, économistes, statisticiens....

Poincaré dit : « On vise une trajectoire rectiligne. Les points ne sont pas en ligne droite. Comment ajuster ? »

Il propose, dans le cas le plus simple, une droite des moindres carrés, mais des carrés des distances des points observés à la droite cherchée.

En vérité, cela suppose une loi d'erreur de Laplace-Gauss, et qu'elle soit connue. De très nombreux travaux, soit théoriques, soit de calculs et d'essais numériques, ont été faits, et sont encore en cours, pour l'application de cette méthode d'ajustement, qui met évidemment en jeu, dans le cas général, les valeurs propres relativement à une forme quadratique à n dimensions, généralisant le grand axe de l'ellipse considérée par Poincaré dans les quelques lignes qu'il y a consacrées.

Répercussion. L'Institut Henri Poincaré. — La plus grande répercussion des travaux d'Henri Poincaré est dans les mémoires des chercheurs qui, dans le monde entier, ont poursuivi et ne cessent de poursuivre les travaux qu'il a commencés ou indiqués.

Mais il existe une répercussion vivante. C'est l'Institut Henri-Poincaré. Comme l'a dit, le samedi 15 mai à la Sorbonne, Émile Borel qui l'a fondé et fait vivre avec des dons généreux (de Rockefeller en particulier), il fallait développer en France et dans le monde le Calcul des Probabilités et la Physique mathématique. Ce fut le premier but. Le nom prestigieux d'Henri Poincaré a permis de faire venir à Paris, pour des cours et des conférences, les savants du monde entier (France comprise) qui travaillaient à la Physique mathématique, Physique théorique, Théorie des probabilités.

Pour le centenaire, une grande œuvre a été terminée : l'agrandissement de l'Institut Henri Poincaré, par les efforts unis du C. N. R. S et de la Faculté des Sciences de Paris. Les Mathématiques pures y ont maintenant leur maison, avec tout ce qui s'y trouvait déjà, et qui s'agrandit aussi des applications du Calcul des probabilités, de la Statistique, et de l'Économétrie. Sur cet ensemble rayonne l'esprit de Poincaré, qui garantit l'avenir.

L'année où nous célébrons le centenaire de la naissance de Poincaré est, pour le Calcul des probabilités, et de deux façons différentes, un tricentenaire.

En effet, c'est dans la deuxième moitié de l'année 1654 que Pascal et Fermat échangeaient leur célèbre correspondance, qui peut être considérée comme posant les fondations du Calcul des probabilités. A la fin de l'année 1654, naissait à Bâle Jacques Bernoulli, auteur du premier Traité (*Ars Conjectandi*) de Calcul des probabilités.

Dans cette lignée de princes de l'esprit, Poincaré a une place que le destin semble avoir choisie ; il a lui aussi semé les idées les plus profondes, et son souvenir reste attaché à quelques-uns des plus beaux, des plus profonds et des plus féconds développements du Calcul des probabilités.

CONFÉRENCE DE M. G. DARRIEUS
AUX INGÉNIEURS CIVILS.

Contributions diverses d'Henri Poincaré à l'Électrotechnique.

En dehors des découvertes capitales qui font apparaître Henri Poincaré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, et en marge des contributions si importantes du grand savant à la Physique mathématique, se placent au début de ce siècle un certain nombre de travaux, relativement peu connus, qui méritent la reconnaissance particulière des électriciens.

Henri Poincaré, ingénieur des Mines, bien que ses dons exceptionnels et une vocation impérieuse l'aient dirigé presque immédiatement vers la recherche et l'enseignement, paraît néanmoins avoir gardé sans cesse le souci de servir son corps d'origine, ainsi que l'art de l'ingénieur dans lequel il avait été formé.

Que cette attitude, délibérée, ait été inspirée par un sentiment élevé de son devoir et par le souci du patriote lorrain de servir son Pays, ou qu'elle procédât d'une juste préoccupation du théoricien de ne pas perdre le contact avec les réalités expérimentales et les applications de la Science, il demeure qu'Henri

POINCARÉ a su, toute sa vie, accorder aux travaux des ingénieurs et aux questions industrielles une attention sympathique et efficace.

Nous bornant ici à ce qui concerne plus particulièrement l'Électrotechnique, rappelons que, parmi les électriciens illustres de la grande époque 1890-1910, contemporains de POINCARÉ, se trouvaient plusieurs polytechniciens : POTIER, BLONDEL, Maurice LEBLANC, qui avaient notamment la charge d'enseigner la technique naissante, aux Écoles des Mines et des Ponts et Chaussées.

POINCARÉ fit lui-même un cours à l'École Supérieure des Postes et Télégraphes en 1903 et 1904. Enfin, Joseph BLONDIN, à la rédaction attentive et dévouée duquel nous devons la publication d'un grand nombre des volumes où se trouvent reproduites les célèbres leçons de Physique mathématique que POINCARÉ a professées en Sorbonne, était alors directeur de l'*Éclairage Électrique*, la principale revue d'Électricité de cette époque. C'est sans doute à cette circonstance que nous devons la contribution assez régulière que POINCARÉ a donnée à cette publication, sous forme d'une trentaine d'articles, depuis 1894 jusqu'à sa mort en 1912.

Les premières de ces études portent en général sur des problèmes de Physyque théorique ou expérimentale liés à la question, alors à l'ordre du jour, des oscillations électriques, et sur l'examen critique approfondi des grandes theories en voie d'élaboration, telles que celles de LORENTZ et de LARMOR.

C'est sans doute en très grande partie à l'influence et à l'autorité de POINCARÉ que nous devons l'acclimatation en France de la théorie de MAXWELL. Bien que le grand traité d'Électricité et de Magnétisme eût été traduit quelques années plus tôt, les conceptions, à beaucoup d'égards révolutionnaires, du génial savant anglais, heurtaient le plus souvent les physiciens français, qui, en dépit de l'étude attentive que leur avaient prêtée des initiateurs éminents comme POTIER ou MASCART, éprouvaient quelque peine à se déprendre de la beauté classique du magnifique édifice construit par l'école des NEWTON, LAPLACE, POISSON, AMPÈRE, GAUSS, WEBER, alors même que les progrès de la Science en appelaient impérieusement l'élargissement.

Si, dans les exposés qu'il a consacrés à cette théorie, POINCARÉ paraît par endroits, notamment à l'égard de la notion du courant de déplacement, céder aux réticences ou aux objections de son entourage, c'est dans la mesure où il partage avec lui le goût traditionnel des Latins pour les constructions rationnelles que leur apparente perfection peut faire passer quelque temps pour définitives; mais, dans l'œuvre géniale que la fin prématurée de MAXWELL ne lui a pas laissé le loisir de refondre harmonieusement, ni de parachever, la sûreté et la profondeur de l'intuition de POINCARÉ ont tôt fait de lui faire reconnaître les traits indéniables de la Vérité.

Outre divers chapitres de ses Ouvrages bien connus de Philosophie scientifique, POINCARÉ a consacré à cette théorie l'un de ses petits chefs-d'œuvre d'initiation, la *Théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes*, où il excelle à donner, sous une forme élémentaire, et sans calculs, en dégageant clairement les principes et procédant par analogies, l'exposé des questions les plus difficiles.

C'est ainsi que, traitant de l'emploi, familier aux physiciens anglo-saxons de l'époque victorienne, des modèles mécaniques, il en précise la signification, circonscrit la portée et souligne l'indétermination, en montrant que leur principal intérêt, outre celui, parfois temporaire ou changeant, de servir l'intuition sensible, consiste dans l'illustration qu'ils fournissent des principes fondamentaux que la Physique théorique, même celle moderne, semble devoir toujours emprunter à la Dynamique classique.

Le même petit Ouvrage, après lui avoir permis de montrer, sur des exemples simples, l'application de ces principes, lui fournit l'occasion de décrire et d'interpréter, en manifestant déjà une intelligence remarquable des détails expérimentaux, les travaux contemporains les plus marquants sur les oscillations électriques à haute fréquence et les débuts de la télégraphie sans fil.

Une controverse sur l'induction unipolaire, amorcée par une étude d'ailleurs intéressante et orthodoxe de C. RAVEAU, donne à POINCARÉ l'occasion d'écarter des paradoxes et de montrer comment des conclusions erronées peuvent résulter d'une application défaillante ou incomplète de la notion intuitive du mouvement des lignes d'induction de FARADAY, qui conduit cependant à un résultat exact à condition d'être correctement appliquée.

A l'égard du principe même de cette représentation, dont les travaux ultérieurs, notamment ceux de MM. HADAMARD et LIÉNARD, devaient montrer qu'elle soulève en certains cas de sérieuses difficultés, POINCARÉ ne se prononce pas, mais, ouvert comme d'ordinaire à toutes les possibilités et ne repoussant *a priori* aucune solution, il se contente de souligner son caractère indéterminé ou hypothétique et l'impossibilité de trouver dans les expériences de cette nature aucun *experimentum crucis* en faveur de l'une ou l'autre des conceptions opposées (lignes d'induction immobiles dans l'espace ou tournant avec l'aimant), pourvu que soit respecté à chaque instant le caractère conservatif du flux d'induction.

La question se trouve de nouveau posée quelques années plus tard dans une correspondance entre Potier et Poincaré au sujet des recherches de V. Crémieu, et par la suite S. R. Milner a réussi à définir les conditions auxquelles la représentation si suggestive et si féconde de Faraday peut être précisée et conciliée avec les exigences du principe de relativité.

Il paraît d'ailleurs permis de penser que le sujet n'est pas épuisé et qu'une intelligence plus profonde de la structure géométrique et de la quantification du champ électromagnétique réintroduira quelque jour sous une forme convenablement épurée, dans le cadre de la Physique moderne, l'essentiel tout au moins de certaines des conceptions à première vue les plus naïves ou les plus grossières de Faraday et de Maxwell.

L'évaluation précise que donne Poincaré à cette occasion de la force électromotrice d'induction le long d'un circuit matériel déformable ou en mouvement, trouve aujourd'hui son application, non seulement dans les grandes machines à induction unipolaire que le développement moderne des pompes électromagnétiques pour liquides conducteurs (métaux fondus pour piles atomiques) paraît devoir remettre à l'ordre du jour, mais aussi dans l'étude des courants de convection que déterminent les forces électrodynamiques dans le bain des fours métallurgiques à induction, ou dans les théories modernes que suscite l'interprétation de maints phénomènes de Géophysique et d'Astronomie solaire ou stellaire sous le nom d'effet « dynamo ».

Le même mode de raisonnement devait trouver quelques années plus tard une nouvelle application lorsque Poincaré fut en 1902 sollicité d'intervenir dans la controverse célèbre qui divisait les sommités électrotechniques de l'époque.

Le développement rapide, réalisé ou entrevu, des applications des machines à collecteur à courant alternatif, notamment de celles à courant polyphasé, posait alors le problème du comportement de leur induit tournant dans un champ variable, à l'égard de la fréquence. Alors que ce problème, maintenant résolu par la séparation devenue familière des forces électromotrices dites de rotation et de transformation, nous paraît aujourd'hui bien simple, nous avons peine à imaginer qu'il pût, il y a 50 ans, faire broncher ou douter des électriciens aussi éminents que Blondel et Maurice Leblanc. Ce dernier, notamment, pensait pouvoir déduire d'un raisonnement, à première vue correct, que l'inductance de l'armature entre balais devait se montrer indépendante de la vitesse de rotation, tandis qu'un jeune électricien, Marius Latour, la veille encore inconnu, mais pour lequel cette circonstance devait marquer le début d'une brillante carrière d'inventeur, reconnaissait d'emblée, comme facteur de la réactance effective, la vitesse relative entre l'armature et le champ tournant.

En vue de départager les opinions qui s'affrontaient ainsi, et sans se prononcer lui-même, BOUCHEROT fit réaliser aux Établissement Postel-Vinay l'expérience qui donna raison à Marius LATOUR, en mettant en évidence pour l'inductance apparente entre balais d'un induit à collecteur polyphasé, une valeur qui, de positive qu'elle était au repos, diminuait lorsque l'armature était mise en mouvement dans le sens du champ tournant, pour s'annuler, puis changer de signe au-delà du synchronisme.

C'était la fameuse réalisation, par l'emploi d'organes essentiellement inductifs, mais avec adjonction de contacts glissants, d'une inductance négative équivalente à celle de condensateurs statiques et que Maurice LEBLANC, reconnaissant son erreur, mit d'ailleurs aussitôt à profit en inventant le compensateur de phase, lequel, monté en cascade dans le circuit rotorique à basse fréquence des moteurs asynchrones, assure la compensation de leur puissance réactive.

A cette occasion, POINCARÉ montra, en deux articles sur les propriétés des anneaux à collecteur, comment ce résultat aurait dû être prévu, par une évaluation correcte de la force électromotrice ou de la variation du flux magnétique qu'embrasse la série définie des conducteurs qui constituent à un moment donné une voie d'enroulement, compte tenu de l'apport ou du prélèvement des spires en commutation.

Quelques années plus tard, au terme d'une période qui comporte, outre la publication de diverses études sur les rayons cathodiques, celle du cours sur la propagation du courant le long d'une ligne munie d'un récepteur, ainsi qu'une assez longue étude sur le récepteur téléphonique, alors qu'il venait de donner au Cercle mathématique de Palerme le célèbre Mémoire sur la Dynamique de l'électron qui devance l'énoncé par EINSTEIN du principe de relativité, POINCARÉ revient, dans *L'Éclairage Électrique*, sur *Quelques théorèmes relatifs à l'Électrotechnique*, qui retiendront plus particulièrement notre attention.

Ce Mémoire assez important comporte la démonstration de l'impossibilité de l'autoexcitation de courants dans un réseau ou système de conducteurs quelconque, sans collecteur, ni contacts glissants, ni résistances variables, enfin sans la présence concomitante de capacités et d'inductances.

Ces propositions sont établies à partir des équations générales (LAGRANGE et HAMILTON) de la Mécanique analytique, que MAXWELL, en les appliquant aux circuits électriques, démontre, pour un système dynamique quelconque à liaisons, presque sans calculs, par des considérations très élémentaires, malheureusement incomplètes, mais qu'il serait intéressant de reprendre pour leur conférer plus de rigueur, en raison de leur caractère éminemment simple et suggestif.

POINCARÉ a ainsi beaucoup contribué à implanter parmi les électriciens, outre l'emploi des puissantes méthodes de la Physique mathématique, l'usage si fécond des principes généraux et des concepts de la Mécanique analytique, dont il savait d'ailleurs mettre en évidence l'aspect physique et intuitif, en se mettant à la portée d'un auditoire que sa formation ordinaire avait mal préparé à reconnaître l'importance du nouveau point de vue.

Il est même permis de penser qu'aujourd'hui encore, l'enseignement élémentaire de la Physique et notamment de l'Électricité dans notre pays demeure, par ses programmes, et par les habitudes traditionnelles de ses maîtres, trop imprégné d'une forme classique qui a connu son apogée dans l'œuvre admirable des grands physiciens du début du siècle dernier, mais qui, aujourd'hui dépassée, et coupée, dans une large mesure, du courant des recherches expérimentales et des problèmes pratiques modernes, ne manifeste plus à présent la même fécondité; et, si les idées de MAXWELL, qui n'ont plus à faire leurs preuves dans les domaines plus jeunes de l'Electricité, comme la Radiotechnique et, d'une manière plus générale, les concepts empruntés à la théorie des champs, ne sont pas, aujourd'hui encore, aussi familiers qu'il serait désirable aux techniciens du courant fort, le guide et l'exemple de POINCARÉ pourront longtemps encore exercer leur salutaire influence.

A ces considérations, d'une portée très générale, se rattache un théorème énoncé vers la même époque (1903) par SCHWARZSCHILD, et qui est d'autant plus remarquable que son expression, dès l'origine conforme aux exigences du principe de relativité, quoique antérieure de deux ans à la découverte d'EINSTEIN (1905), n'a trouvé l'explication de son invariance naturelle à l'égard des transformations de LORENTZ ou des changements du système de référence, que dans l'interprétation géniale de MINKOWSKI en 1908.

Or, le concept, si important en Physique théorique, d'action stationnaire, éclaire de manière inattendue une question pratique d'Électrotechnique qui s'est trouvée fort débattue il y a une trentaine d'années.

Il s'agit de la notion, introduite principalement par BOUCHEROT, de puissance réactive, et de sa généralisation en courants quelconques non sinusoïdaux. Tandis qu'une première tentative, conduisant à une représentation complexe en composantes, dites déformantes, dans une sorte d'espace d'HILBERT, paraissait ne présenter qu'un caractère trop purement formel, sans interprétation physique, nous avons montré en 1931, encouragé par LANGEVIN qui avait pressenti d'emblée l'intérêt de cette remarque, que la grandeur physique à considérer, dont la généralisation s'introduit naturellement et dont la mesure s'effectue en conséquence sans artifice par une adaptation simple des compteurs existants, est non pas une énergie, mais une « action ».

Cette proposition aboutit à un théorème de conservation qui rattache à l'expression d'une densité de potentiel cinétique (fonction de LAGRANGE), différence entre l'énergie électrocinétique (ou magnétique) et l'énergie électrique distribuées dans le champ, la balance entre, d'une part, la variation, de l'état initial à l'état final, d'un certain contenu d' « action » et, d'autre part, l'intégrale de surface ou le flux, aux limites du système, d'un certain courant d'action.

Tandis que, notamment dans l'expression applicable aux milieux continus, la densité de potentiel cinétique est une fonction d'état déterminée par les seules composantes du champ électromagnétique, les autres termes dépendent, au moins en apparence, directement du potentiel vecteur, dont la signification physique, niée dans la théorie classique (invariance de jauge), est supposée parfois, notamment dans quelques travaux modernes, devoir intervenir directement et non plus seulement par le champ électromagnétique que détermine ce potentiel.

De ce théorème découle immédiatement une proposition curieuse, énoncée par HEAVISIDE et démontrée par LORENTZ, suivant laquelle la demi-différence entre l'énergie fournie à un système électromagnétique au cours de la période variable qui suit l'application brusque de forces constantes, et celle dépensée dans le même intervalle de temps en période stationnaire, est égale, au signe près, au potentiel cinétique.

Citons enfin, parmi les prolongements modernes de ces recherches, que POINCARÉ, avec sa maîtrise de la Mécanique analytique, aurait sans doute illuminées de la clarté de son génie, celles qui soulignent sans cesse de nouveaux aspects, des plus profonds en Physique théorique aux plus élémentaires en Électrotechnique, de la dualité évidemment fondamentale entre les facteurs déplacement q et moment conjugué p, de l' « action » sous ses diverses formes.

A l'égard de la recherche expérimentale, alors que le développement si rapide des Mathématiques et le caractère de plus en plus abstrait et difficilement accessible de la Physique théorique tendent à élargir le fossé qui sépare les différentes catégories de chercheurs, l'attitude et le comportement de Poincaré constituent une édifiante leçon. Bien que ses biographes le montrent handicapé par sa myopie, maladroit en dessin, et gauche dans la manœuvre des instruments, il ne cesse de manifester son souci de garder le contact avec les expérimentateurs, et de se tenir au courant, de manière attentive et avisée, du détail de leurs travaux. C'est ainsi qu'il a suivi, avec une sympathie qui peut surprendre à première vue, surtout aujourd'hui, les recherches d'un jeune physicien, V. Crémieu, qui avait cru pouvoir mettre en défaut l'équivalence, postulée par Maxwell et Lorentz et confirmée par Rowland, des effets électrodynamiques du courant de convection et des courants de conduction.

Le résultat négatif annoncé par Crémieu était, en réalité, dû à une interprétation erronée des conditions de l'essai, mais l'attitude de Poincaré en cette affaire montre bien sa détermination constante de ne rien rejeter *a priori*, et sa disposition à accueillir, quel qu'il puisse être, le verdict de l'expérience, dont il suppute et entreprend déjà de développer les conséquences, avec une remarquable absence de parti-pris ou d'idée préconçue.

En un temps où la Physique théorique peut être particulièrement tentée de poursuivre, dans un développement trop formel, l'idéal d'une construction logique peut-être satisfaisante pour l'esprit, mais relativement vaine et parfois stérile, il est bon que Poincaré nous rappelle avec son irrécusable autorité que : « l'expérience est la source unique de toute vérité ».

F. — LE MERCREDI 19 MAI 1954 A LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE FRANCE.

De son côté la *Société Astronomique de France* s'est réunie le 19 mai pour fêter le centenaire de celui qui fut son Président de 1901 à 1903, et qui fut nommé Président d'honneur en 1912. Devant une nombreuse assistance le Prince Louis de Broglie, reprenant et complétant son discours de la Sorbonne, a parlé sur *Henri Poincaré et les théories de la Physique*. En particulier il a ajouté cinq pages sur les conceptions philosophiques de Henri Poincaré, qui forment un tout et que nous reproduisons ci-après, en nous excusant d'y faire figurer à nouveau une vingtaine, puis une quinzaine de lignes qu'on aura déjà lues dans la reproduction du discours de la Sorbonne. Nous reproduisons aussi trois alinéas qui complètent la dernière partie de ce discours du Prince Louis de Broglie.

EXTRAITS DE LA CONFÉRENCE DU PRINCE L. DE BROGLIE A LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE FRANCE.

. . . .

Les savants n'ont pas en général de « philosophie » qui leur soit propre. Ils se méfient des systèmes philosophiques trop vagues et trop ambitieux, ils éprouvent une certaine répulsion en face des raisonnements à leurs yeux peu convaincants et du langage souvent alambiqué des philosophes de profession. Certains savants cependant aiment à développer des idées générales sur les sciences qu'ils cultivent, sur leurs progrès et leurs perspectives d'avenir : parfois même, ils s'intéressent au fonctionnement de notre esprit dans la recherche scientifique et se livrent à une critique de la connaissance. Henri Poincaré fut de ceux-là et, dans de beaux articles écrits dans une langue élégante, il a passé au crible d'un esprit critique fin et profond les idées essentielles des sciences mathématiques et physiques de son temps. Ces études sont pour la plupart réunies dans les quatre volumes célèbres dont j'ai déjà eu l'occasion de citer le titre. Je n'entreprendrai point d'analyser cette partie importante de l'œuvre de POINCARÉ et je me contenterai de rappeler l'attitude assez sceptique qu'il a adoptée vis-à-vis des théories physiques.

POINCARÉ a plus d'une fois insisté sur le caractère, dans une large mesure arbitraire, des théories physiques. Pour lui, il existe toujours un grand nombre de théories qui sont logiquement équivalentes, et qui rendent compte avec le même degré d'exactitude des faits observés. C'est uniquement, pense-t-il, pour des raisons de « commodité » que les savants adoptent l'une ou l'autre de ces explications possibles. Il va même jusqu'à penser que les principes des sciences physiques sont des sortes de conventions que l'on pourrait toujours, quels que soient les faits expérimentaux, justifier au prix d'hypothèses plus compliquées si on le trouvait utile. Pour étayer cette attitude nominaliste, ce « commodisme » comme on l'a appelé, il a donné, à l'appui, de nombreux exemples. C'est ainsi que dans *La Science et L'Hypothèse* (p. 119), après avoir montré que le principe de l'inertie en Mécanique classique se ramène essentiellement au fait que, dans cette Mécanique, les équations de base sont des équations différentielles du second ordre, il ajoute : « Je suppose maintenant que nous observions n molécules et que nous constations que leurs coordonnées satisfont à un système de $3n$ équations différentielles du quatrième ordre (et non du second ordre comme l'exigerait le principe de l'inertie). Nous savons qu'en introduisant $3n$ variahles auxiliaires, un système de $3n$ équations différentielles du quatrième ordre peut être ramené à un système de $6n$ équations différentielles du second ordre. Si alors on suppose que ces $3n$ variables auxiliaires représentent les coordonnées de n molécules invisibles, le résultat est de nouveau conforme à la loi de l'inertie ». Ainsi le principe de l'inertie serait une sorte de convention dont on pourrait toujours rétablir la validité à l'aide d'hypothèses appropriées si les faits expérimentaux paraissaient le contredire. De même, et cette affirmation de POINCARÉ a fait sensation à l'époque où elle fut énoncée, l'hypothèse de la rotation de la Terre n'est qu'une hypothèse commode : on pourrait tout aussi bien la supposer immobile, on obtiendrait simplement une théorie du mouvement des astres beaucoup plus compliquée et par suite beaucoup moins commode que celle qui a pris naissance à la suite des travaux des COPERNIC, des GALILÉE et des NEWTON. Dans un autre ordre d'idées, POINCARÉ, parlant dans la préface d'*Électricité et Optique* de l'interprétation mécanique des lois de l'Électromagnétisme, démontre que « si un phénomène comporte une explication mécanique, il en comportera une infinité d'autres qui rendent également bien compte de toutes les particularités révélées par l'expérience » et il semble se complaire dans cette idée de la multiplicité des explications possibles.

Que les fines analyses de Poincaré sur toutes ces questions de critique de la connaissance scientifique soient remarquables, qu'elles aient contribué à faire mieux juger ce qu'il y a d'artificiel et de provisoire dans les images théoriques que nous construisons, cela ne fait pas de doute et justifie pleinement la grande renommée de Poincaré comme philosophe scientifique. Cependant il nous semble que le « nominalisme » de Poincaré, conçu par un esprit abstrait et puissamment critique, appelle quelques réserves. Son aboutissement naturel serait de considérer la Science comme une œuvre artificielle, création en grande partie de l'esprit humain. Poincaré était trop fin pour tomber dans un tel excès et il a, dans *La Valeur de la Science*, consacré d'intéressantes pages à réfuter les opinions, à son avis exagérées, de M. Édouard Le Roy sur le caractère purement conventionnel des vérités scientifiques. Il s'est même indigné qu'on ait pu considérer ses remarques sur le mouvement de la Terre comme pouvant justifier la condamnation de Galilée. Il n'en est pas moins vrai que le point de vue ultracritique de Henri Poincaré peut être un peu dangereux en inspirant un scepticisme non justifié à l'égard des théories scientifiques. Quelques exemples ne suffisent pas à prouver qu'il y a toujours une infinité de théories possibles pour rendre compte des mêmes faits expérimentaux et il nous semble certain que même, quand il y a un grand nombre de théories logiquement équivalentes, le physicien peut à bon droit penser que l'une d'entre elles est plus conforme à la réalité physique profonde, plus susceptible de généralisations, plus apte à nous révéler des harmonies cachées. Le scepticisme de Poincaré pourrait être décourageant et stérilisant. Peut-être, je l'ai dit plus haut, l'avait-il lui-même un peu stérilisé dans ses recherches de Physique théorique puisque, ayant une connaissance approfondie des difficultés de l'Électrodynamique des corps en mouvement et pressentant le caractère général du Principe de Relativité, il n'a pas su apercevoir cette magnifique doctrine de la Relativité qui s'est imposée brusquement à l'esprit plus jeune et moins sceptique d'Albert Einstein. Convaincu qu'on peut toujours, à l'aide d'hypothèses appropriées, considérer l'espace physique comme euclidien, Poincaré aurait-il pu, comme Einstein le fit quelques années après sa mort en 1916, passer de la Relativité restreinte à la Relativité généralisée en considérant la métrique de l'espace-temps comme non euclidienne, et tirer de cette intuition géométrique sur la nature de l'espace-temps la magnifique interprétation des lois de la Gravitation qui est aujourd'hui classique ?

Je dois à l'obligeance d'Albert RANC de m'avoir signalé un texte de POINCARÉ qui montre clairement à quel point son attitude hypercritique a pu parfois l'égarer. Prononçant à l'Académie des Sciences, en 1906, l'éloge funèbre de Pierre CURIE qui venait de succomber dans un déplorable accident, il disait, parlant de l'hypothèse suivant laquelle les phénomènes radioactifs s'accompagnent de transmutations des éléments : « Il est probable que les chimistes réussiront finalement à faire rentrer ces phénomènes étranges dans les cadres qui leur sont familiers : on s'arrange toujours en effet et, si les éléments sont par définition ce qui demeure constant dans toutes les transformations, il faudra bien qu'ils soient immuables. » On est fort surpris, en lisant aujourd'hui ces lignes de voir un savant aussi clairvoyant se laisser emporter par un excès d'esprit critique et méconnaître complètement la portée de cette découverte si capitale et si grosse de conséquences qu'a été celle de la transmutation des éléments par radioactivité !

Mais, si l'on peut faire des réserves sur le commodisme et l'attitude hypercritique de Henri POINCARÉ, on ne saurait oublier les profondes réflexions et les remarquables analyses qu'il a consacrées à la méthode et au développement de la Physique théorique. Tout en mettant nettement en évidence la valeur intellectuelle et l'unité de la théorie, il n'en proclamait pas moins cette vérité qu'aucun théoricien ne doit jamais oublier : « L'expérience est la source unique de la vérité : elle seule peut nous apprendre quelque chose, elle seule peut nous donner la certitude ». Il discernait admirablement le caractère ondulant des progrès de la Science lorsqu'il écrivait dans *La Science et l'Hypothèse* (p. 176) : « Sans doute, si nos moyens d'investigation devenaient de plus en plus pénétrants, nous découvririons le simple sous le complexe, puis le complexe sous le simple, puis de nouveau le simple sous le complexe, et ainsi de suite sans que nous puissions prévoir quel sera le dernier terme ». Nul doute que ce ne soit là, en effet, le rythme véritable du progrès de nos connaissances. Deux pages plus loin (p. 178), il ajoutait cette profonde remarque : « Le physicien qui vient de renoncer à l'une de ses hypothèses devrait être plein de joie, car il vient de trouver une occasion inespérée de découverte. Son hypothèse, j'imagine, n'avait pas été adoptée à la légère :

elle tenait compte de tous les facteurs connus qui semblaient pouvoir intervenir dans le phénomène. Si la vérification ne se fait pas, c'est qu'il y a quelque chose d'inattendu, d'extraordinaire : c'est qu'on va trouver de l'inconnu et du nouveau ». On le sent dans cette fin de phrase, le mathématicien oubliait son scepticisme pour frémir d'enthousiasme devant l'inconnu qui va se révéler. Comme aimait à le faire M[me] DE NOAILLES, il se fût volontiers écrié : « La Science, ce sont des voiles qui se déchirent ».

Les citations que nous venons de faire, et bien d'autres que l'on pourrait ajouter, suffisent à mettre en lumière la place de premier plan que POINCARÉ a tenue dans la Philosophie scientifique de son temps.

Une question sur laquelle Henri POINCARÉ est bien des fois revenu est celle du déterminisme et corrélativement celle de la conception du hasard que la croyance au déterminisme entraîne. Aujourd'hui où ces questions ont considérablement évolué, il est très intéressant de relire les textes de POINCARÉ. Comme tous les savants ses contemporains, POINCARÉ ne paraît jamais avoir mis en doute que les phénomènes physiques jusqu'aux plus élémentaires sont régis par des lois rigoureuses, par un déterminisme inflexible qu'expriment des équations différentielles dont les solutions sont entièrement déterminées quand on connaît un nombre suffisant de données initiales. Cette foi dans le déterminisme, qui lui était commune avec tous les savants de son époque, l'amenait nécessairement à prendre en face du problème du hasard l'attitude qui avait été celle du grand LAPLACE dans ses Ouvrages fondamentaux sur le Calcul des probabilités. Pour POINCARÉ comme pour LAPLACE, le hasard véritable n'existe pas : s'il y a un hasard apparent dans certains phénomènes, cette apparence est due soit à notre impuissance de résoudre un problème trop ardu pour les forces de notre esprit, soit à notre ignorance des données nécessaires à sa solution. Parfois nous connaissons les lois des phénomènes et les équations différentielles qu'il faut écrire pour les exprimer, mais la complication du problème est telle que nous ne savons pas trouver les solutions; parfois aussi ce qui nous manque, c'est une connaissance exacte des données initiales qui nous permettraient de choisir, parmi les intégrales des équations différentielles, celle qui doit représenter le cours exact des événements, et cette incertitude sur les données entraîne l'incertitude de nos prévisions; parfois même, notre ignorance peut être plus grave car nous pouvons ignorer la forme même des lois qui s'appliquent aux phénomènes étudiés, mais, suivant le point de vue de LAPLACE et de POINCARÉ, nous devons toujours supposer que ces lois existent, qu'elles sont rigoureuses et qu'elles nous permettraient, si notre esprit était assez puissant pour pouvoir toujours résoudre les problèmes mathématiques que leur application pose et si nous connaissions avec une parfaite précision les données initiales nécessaires, de parvenir à une prévision non moins rigoureuse du cours inexorable de ces phénomènes. Dans presque tous ses Ouvrages de Philosophie scientifique, Poincaré est revenu sur cette question du hasard et il a illustré son point de vue par de pénétrantes discussions et de nombreux exemples qu'il est toujours très intéressant d'étudier en relisant ses livres. Mais à aucun moment, Poincaré ne paraît avoir eu l'idée que les lois ultimes de la Physique pourraient avoir le caractère de simples lois de Probabilité ne comportant pas l'existence de lois rigoureuses sous-jacentes et d'un déterminisme caché. Souvent Poincaré paraît affirmer que, si la Nature n'obéissait pas à des lois rigoureuses, elle serait régie par le « caprice ». Il ne lui apparaît pas qu'entre la loi rigoureuse et le caprice, il y ait un intermédiaire qui serait précisément la loi de probabilité, la loi purement statistique. Sans doute l'illustre géomètre connaissait bien les lois de probabilité, mais pour lui elles n'avaient qu'un caractère en quelque sorte secondaire et ne faisaient que traduire notre incapacité de trouver la solution rigoureuse du problème ou notre ignorance des données nécessaires. Pour lui comme pour les fondateurs de la théorie cinétique de la matière, les molécules d'un gaz obéissent aux lois rigoureuses de la Mécanique de sorte que, si nous connaissions les positions et les vitesses initiales de toutes ces molécules, nous pourrions suivre en détail l'évolution ultérieure du gaz et calculer exactement tous les chocs des molécules entre elles et contre la paroi. Si nous ne parvenons à trouver pour les gaz que des lois statistiques telles que la loi de Mariotte ou la loi de répartition des vitesses de Maxwell, c'est que le problème rigoureux est impossible à résoudre tant à cause de la complexité des équations qu'en raison de notre incapacité d'observer les conditions initiales de position et de vitesse à l'échelle moléculaire.

. . . .

Dans *La Valeur de la Science* Poincaré avait écrit après avoir constaté l'impossibilité d'interpréter les lois spectrales avec les anciennes théories : « De cela, on n'a pu encore rendre compte et je crois que c'est là un des plus importants secrets de la Nature ». Il ne se trompait pas. Cet important secret que Niels Bohr devait arracher à la nature un an après la mort de Poincaré, c'est que la stabilité de la Matière repose sur l'existence des quanta : c'est parce que les états des atomes sont quantifiés que les lois spectrales ont la forme simple dont les anciennes théories de la Physique ne parvenaient pas à rendre compte. Ici encore POINCARÉ a vu juste.

. . . .

Après la mort de Henri POINCARÉ, la Physique mathématique et théorique a été quelque peu délaissée en France et ce pays qui avait au siècle dernier tenu dans ce domaine, à l'époque des FRESNEL, des FOURIER, des AMPÈRE, des POISSON, des LAMÉ, une place si éclatante a dans l'ensemble assez peu participé au grand mouvement qui a changé depuis 40 ans la face des théories physiques. La situation à ce point de vue commence à se redresser, notamment grâce à l'Institut de la Faculté des Sciences qui est placé sous le patronage de l'illustre savant.

A l'heure où est célébré le centenaire de la naissance de Henri POINCARÉ, il est juste de marquer fortement la place qu'il a tenue dans le développement des théories de la Physique contemporaine. Ainsi apparaît dans toute son étendue, l'immensité d'une œuvre qui a apporté de géniales contributions à tant de branches de la Science, ainsi se dégage dans toute sa gloire intellectuelle la noble figure d'un des plus puissants penseurs que la race humaine ait produit, d'un des plus grands savants dont la France ait le droit d'être justement fière.

QUATRIÈME PARTIE

MANIFESTATIONS EN PROVINCE EN MAI 1954.

A. — LE JEUDI 20 MAI 1954 A CAEN.

La Faculté des Sciences de Caen où Henri Poincaré a fait ses débuts dans l'Université, a voulu honorer la mémoire de celui qui y a enseigné pendant deux ans. Aussi, le jeudi 20 mai avait-elle organisé une séance dans un des amphithéâtres de la nouvelle Université pour l'inauguration d'une plaque rappelant que c'est à Caen que Henri Poincaré a fait la découverte des fonctions fuchsiennes, et pour entendre une conférence de M. Roger Apéry, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen sur l'œuvre de Henri Poincaré. On trouvera le texte de cette conférence plus loin.

En présence de M. Daure, Recteur de l'Université de Caen qui faisait les honneurs des nouveaux bâtiments de l'Université de Caen, et de M. Albert Châtelet, venu tout exprès de Paris pour présider la séance, M. Moreau, Doyen de la Faculté des Sciences de Caen a d'abord dévoilé la plaque et dit quelques mots sur le passage de Henri Poincaré en Normandie.

M. Roger Apéry a fait ensuite sa conférence avec beaucoup de chaleur, et M. Châtelet, après l'avoir félicité de son brillant exposé, a rappelé que la ville de Caen avait encore des attaches avec Henri Poincaré en la personne de sa nièce M^{me} Pierre Villey, fille de Émile Boutroux. Il a évoqué à son tour le passage de Henri Poincaré à Caen et la découverte des fonctions fuchsiennes. Puis derrière le savant il a montré l'homme qui savait se mettre à la portée de tous, de ses collègues, de ses élèves, de ses enfants, et, en terminant il a cité cette phrase de Guillaume Bigourdan aux obsèques de Henri Poincaré :

« Ce prodigieux érudit, cet analyste impeccable savait sourire; il savait ignorer, il savait douter ».

CONFÉRENCE DE M. ROGER APÉRY
A CAEN.

En 1855, un grand deuil frappait le monde mathématique; la mort du prince des mathématiciens Karl-Friedrich Gauss : l'ampleur du développement des Mathématiques ôtait tout espoir de revoir un savant compétent simultanément dans toutes les branches des Mathématiques. Un tel savant était né à Nancy l'année d'avant et se nommait Henri Poincaré, mais le monde l'ignorait encore.

En 1873, le jury d'entrée de l'École Polytechnique se trouva placé devant un cas de conscience délicat : un candidat de 19 ans, qui devait être refusé à cause de ses notes éliminatoires en dessin et en gymnastique, avait un total de points très supérieur à tous les autres candidats. Soucieux de ne pas renouveler l'erreur qui, une cinquantaine d'années auparavant, avait brisé la carrière d'Évariste Galois, les examinateurs décidèrent de laisser entrer avec le n° 1 le jeune Henri Poincaré.

Docteur ès sciences à 25 ans, il est nommé Maître de Conférences à la Faculté des sciences de Caen pendant deux ans.

Cette courte période de sa vie fut la plus importante. Dans un Mémoire publié à l'Académie Nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen, il crée les fonctions fuchsiennes. Je m'excuse de ne pas expliquer ici ce que sont les fonctions fuchsiennes, les connaissances de la licence en Mathématiques sont indispensables pour comprendre, même sommairement, les questions auxquelles a répondu Poincaré. Signalons seulement que l'illustre Weierstrass, Professeur à l'Université de Berlin et maître incontesté de l'Analyse mathématique à cette époque, dut reconnaître que le flambeau des Mathématiques, si longtemps tenu par l'Allemagne, passait à la France. Poincaré a lui-même expliqué plus tard les circonstances de sa découverte :

« Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé, depuis, les fonctions fuchsiennes, j'étais alors fort ignorant; tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude; je ne pus m'endormir : les idées fourmillaient dans ma tête, je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochèrent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

« Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie, l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries, si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thétafuchsiennes.

« A ce moment, je quittai Caen où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations que j'avais utilisées pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la Géométrie non euclidienne. Je ne fis pas la vérification ; je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

« Je me mis alors à étudier des questions d'arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la Géométrie non euclidienne.

« Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences ; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thétafuchsiennes et que, par conséquent, il existait des fonctions fuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions; j'en fis le siège systématique et j'enlevai l'un après l'autre tous les ouvrages avancés; il y en avait un cependant qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de la place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me faire mieux connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

« Là-dessus, je partis pour le Mont-Valérien, où je devais faire mon service militaire; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et les ordonner. Je rédigeai donc mon Mémoire définitif et sans aucune peine ».

Maître de Conférences à Paris en 1881, Membre de l'Académie des Sciences en 1887, à 33 ans, Membre de l'Académie Française en 1909, Membre de 34 autres Sociétés savantes, titulaire de nombreux prix internationaux, il imprime la marque de son génie dans tous les domaines : Fonctions analytiques d'une et de deux variables, Équations différentielles, Arithmétique, Astronomie, Topologie, Problème des Marées, Propagation de la chaleur, Théorie électronique, Potentiel, Cosmogonie, Élasticité, Calcul des probabilités, Théorie des quanta, etc.

Le savant, économe de son temps au point de refuser toutes les fonctions administratives, de refuser de corriger les épreuves de ses Mémoires ou d'en envoyer des tirages à part, ne ménage pas son énergie quand de grandes causes sont en jeu ou quand il peut rendre service. En 1879, quand il est encore ingénieur des Mines, il n'hésite pas à descendre dans un puits où une explosion de grisou avait allumé l'incendie. Père de quatre enfants, il suivit de près leur éducation et cinq articles intitulés *Ce que disent les choses* montrent qu'il savait oublier ses propres connaissances pour se mettre au service des jeunes cerveaux.

Ses travaux de Philosophie scientifique sont groupés dans quatre Ouvrages : *la Science et l'Hypothèse*, *la Valeur de la Science*, *Science et Méthode*, *Dernières Pensées*.

Contrairement au grand public qui imagine souvent la Science comme un instrument au service de la technique et du confort, il voit la technique comme instrument de la libération de l'homme qui lui permettra de consacrer son temps à la Science pure. Répondant à ceux qui opposent science et morale, il écrit : « La Science est grande, elle est belle, elle est bonne. Ceux qui la cultivent pour elle-même se sentiront purifiés par ce culte désintéressé ».

Il est passionné de musique et fidèle à la tradition hellénique qu'il défend dans un petit Ouvrage sur la Science et les Humanités. Fidèle à la tradition de Pythagore et de Platon, il n'hésite pas à recourir au mythe pour faire comprendre la Géométrie non euclidienne, qui, de son temps, n'est acceptée que d'un petit nombre de mathématiciens....

« Supposons, dit-il, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes :

« La température n'y est pas uniforme, elle est maxima au centre et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire an zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé.

« Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite, soit r la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$.

« Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient le même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.

« Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre dont la température est différente se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.

« Rien, dans ces hypothèses, n'est contradictoire ou inimaginable. Un objet mobile deviendra de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera de la sphère limite.

« Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.

« Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits ; de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre la sphère limite.

« Je ferai encore une autre hypothèse, je suppose que la lumière traverse des milieux diversement réfringents, et de telle sorte que l'indice de réfraction soit inversement proportionnel à $R^2 - r^2$. Il est aisé de voir que, dans ces conditions, les rayons lumineux ne seraient pas rectilignes, mais circulaires ».

Il fut le précurseur des travaux d'Einstein et toutes les considérations sur la relativité de l'espace et du temps qui constituent, pour le grand public, la théorie d'Einstein, sont en réalité de Poincaré.

Les considérations d'Henri POINCARÉ sur la relativité du mouvement furent mal comprises. Certains milieux crièrent victoire et Mgr BOLO écrivit dans le Matin du 20 février 1908 : « POINCARÉ, qui est le plus grand mathématicien du siècle, donne tort à l'obstination de GALILÉE ». L'emprisonnement à vie de GALILÉE et le bûcher de GIORDANO BRUNO se trouvaient justifiés.

POINCARÉ ne tarda pas à répondre : « *E pur si muove*, Monseigneur » et résuma brillamment toutes les raisons modernes de justifier l'obstination de GALILÉE » : vents alizés, sens de rotation des cyclones, pendule de FOUCAULT, renflement de la Terre à l'équateur, sans parler des phénomènes astronomiques.

Il précisa sa pensée sur le caractère ni vrai, ni faux, mais *commode*, des énoncés scientifiques. Cette commodité porte sur l'expression et non sur les faits que nous ne sommes pas libres de modifier. Pour prendre un exemple banal, si l'on décide d'appeler 4 ce que tout le monde appelle 2 et 2 ce que tout le monde appelle 4, il faudra dire que 4 et 4 font 2 ; il est donc conventionnel que 2 et 2 fassent 4, mais cette formule exprime une vérité qui, elle, n'est pas conventionnelle. De même, il est conventionnel de dire que les droites réelles sont euclidiennes ou non euclidiennes, mais à partir du moment où on définit la droite par le rayon lumineux, c'est un fait physique de savoir si ces rayons sont ou non des droites euclidiennes. La convention ne joue que sur le fait de savoir ce qu'on appellera droites d'où la fameuse formule de POINCARÉ : « Les postulats sont des définitions déguisées ».

En 1909, l'Université de Bruxelles, l'unique Université au monde dont les professeurs et les étudiants sont groupés autour d'un principe commun : le libre examen, invite H. POINCARÉ. Ce dernier, dans un exposé magistral, prononce entre autres les paroles suivantes qui devaient désormais figurer sur les murs de l'Université de Bruxelles :

« La pensée ne doit jamais se soumettre, ni à un dogme, ni à un parti, ni à une passion, ni à un intérêt, ni à une idée préconçue, ni à quoi que ce soit, si ce n'est aux faits eux-mêmes, parce que, pour elle, se soumettre, ce serait cesser d'être ».

Il proteste contre les logisticiens qui veulent réduire les Mathématiques à un simple jeu de symboles et défend la valeur de l'intuition contre le formalisme. Tout en déclarant modestement qu'il n'entend pas le péamin, il montre la faiblesse (BURALI-FORTI) de la définition du nombre 1 par l'équation

$$1 = \mathrm{T}' \{ k_0 \cap (u, h) \in (u \in \mathrm{U}n) \}$$

qui, au bout de 27 équations permet de montrer que 1 est un nombre ou de la définition du même nombre 1 (COUTURAT) comme le nombre des éléments d'une classe dont *deux* éléments quelconques sont identiques.

H. POINCARÉ fit une étude approfondie des lois du hasard. Pour lui, le hasard n'est que la mesure de notre ignorance, il montra par un calcul rigoureux que l'hypothèse d'une loi élémentaire inconnue et soumise seulement à des conditions de régularité mathématique suffit à expliquer les « lois du hasard ».

Les idées dominantes dans le monde savant, après la mort de POINCARÉ, parurent lui apporter un démenti : les développements de la théorie des quanta et la découverte des célèbres relations d'incertitude d'HEYSENBERG inclinèrent les savants à penser que contrairement aux vues de POINCARÉ, l'indéterminisme était la loi profonde, le déterminisme l'apparence. POINCARÉ s'était-il trompé sur un sujet aussi grave? J'ai entendu la réponse à la récente manifestation de Paris en l'honneur d'Henri POINCARÉ où le grand savant Louis DE BROGLIE, chargé d'ans et de gloire, Secrétaire perpétuel de l'Institut, n'hésita pas à déclarer : « J'ai adopté, pendant longtemps le point de vue indéterministe de BOHR et HEYSENBERG, je ne serais plus aussi affirmatif et les derniers résultats de la physique semblent prouver que c'est POINCARÉ qui avait raison ».

Le 17 juillet 1912, un grand deuil frappait le monde mathématique, une embolie avait terrassé Henri POINCARÉ, et cette fois, on ne revit plus de mathématicien universel.

B. — LA MATINÉE DU SAMEDI 22 MAI 1954 AU LYCÉE DE NANCY.

La journée du samedi 22 mai était celle des manifestations de la Ville, du Lycée, et de l'Université de Nancy. Ces manifestations devaient commémorer à la fois le 150e anniversaire de la fondation du lycée et le 100e anniversaire de la naissance de Henri POINCARÉ, dont le lycée porte le nom depuis 1913. Elles étaient toutes placées sous la présidence de M. Maurice LEMAIRE, Ministre de la Reconstruction et du Logement, ancien élève du lycée de Nancy et de l'École Polytechnique.

La Ville de Nancy ayant décidé de donner le nom de Henri Poincaré à la partie de la rue Gambetta qui passe devant le lycée, M. Lemaire, avant de pénétrer dans celui-ci, a coupé le ruban symbolique qui barrait la nouvelle rue Henri-Poincaré, tandis que les plaques indicatrices étaient dévoilées. Aussitôt après a eu lieu l'inauguration d'un médaillon, dû comme les précédents à Mme Guzman-Nageotte. Dominant la porte d'honneur du lycée, l'image de Henri Poincaré paraît placée là pour accueillir les nouvelles générations d'élèves.

C'est le Sénateur Raymond Pinchard, Maire de la ville et Président du Comité local d'organisation, qui a dévoilé le médaillon et qui en a fait remise au lycée de Nancy, où Henri Poincaré a fait toutes ses études depuis la neuvième. M. Léon Poincaré, au nom de la famille, dit ensuite toute la gratitude de celle-ci pour l'hommage rendu à la mémoire de son père, dont il a souligné la fidélité à sa ville natale et à la terre lorraine. Un discours de M. Maurice Lemaire a clôturé cette première partie des cérémonies de Nancy, plus spécialement consacrée à commémorer le centenaire de Henri Poincaré.

L'accueil des élèves pour leur ancien, le Ministre Maurice Lemaire, le dépôt d'une gerbe devant les monuments aux élèves du lycée morts pour la France, la visite d'une exposition de souvenirs des anciens élèves, et de travaux faits par ceux qui sont actuellement sur les bancs du lycée, le banquet de l'Association des anciens élèves à l'Hôtel de Ville de Nancy, se rattachent plutôt au 150e anniversaire de la fondation du lycée.

Pour cet anniversaire, sous le titre :

Le Livre des Centenaires.

150e anniversaire de la fondation du lycée.

Centenaire de Henri Poincaré

l'Association des anciens élèves du lycée de Nancy a publié un Ouvrage qui évoque la vie du lycée depuis sa fondation et toutes les étapes « dans l'évolution des esprits et des mœurs », « des missions, des façons de penser », qui ont marqué ces 150 dernières années. La seconde partie de cet Ouvrage, consacrée tout entière à Henri Poincaré, contient une étude du Professeur Gaston Julia que nous reproduisons en entier, après avoir donné les allocutions et le discours prononcés devant le médaillon.

ALLOCUTION DE M. RAYMOND PINCHARD,

SÉNATEUR, MAIRE DE NANCY,
AU LYCÉE DE NANCY.

MONSIEUR LE MINISTRE,

MONSIEUR LE PRÉFET,

MONSIEUR LE RECTEUR,

MONSIEUR LE PROVISEUR,

MONSIEUR LE PRÉSIDENT DE L'ASSOCIATION DES ANCIENS ÉLÈVES,

MESDAMES, MESSIEURS,

En procédant à l'inauguration du médaillon qui orne désormais le seuil du Lycée Henri POINCARÉ, il me semble qu'un hommage plus digne et plus complet est enfin rendu à l'homme illustre dont on a pu dire : « qu'il n'est, sur le globe, aucun savant digne de ce nom, qui ne se considère à quelque degré comme un de ses élèves ».

Je tiens à remercier publiquement le Comité National du Centenaire qui a offert ce bronze : Que M. Gaston JULIA, Président de ce Comité trouve ici l'expression de notre reconnaissance pour son acte généreux.

Ce devoir de gratitude rempli, je voudrais me faire l'interprète de la volonté commune du Conseil Municipal et de la Ville de Nancy de s'associer pleinement à la solennelle manifestation de ce jour. En donnant à la rue que nous venons de parcourir le nom d'Henri POINCARÉ, nous avons cru répondre au sentiment public de notre Cité, justement fière de la célébrité de ses fils et tout particulièrement du savant qui a enrichi, plus qu'aucun autre peut-être, le patrimoine de ses gloires.

Par le bronze, le statuaire a immortalisé sa mémoire, mais c'est bien davantage encore dans les cœurs que vit le souvenir de cet enfant de Nancy, qui voici 100 ans, naissait dans une maison de la Ville-Vieille.

Noble descendant d'un bourgeois lorrain « d'entière réputation et de bonne expérience » suivant le mot de nos antiques chartes, Henri POINCARÉ a grandi dans une ambiance familiale où se transmettaient des traditions de labeur, de désintéressement, de simplicité et de droiture, bien propres à l'épanouissement d'une intelligence supérieure, aux dons exceptionnels.

Entré au lycée en neuvième, il devait y poursuivre toutes ses études jusqu'en

Mathématiques spéciales. Partout il prend la première place et se fait remarquer par son esprit personnel, vif, facile, que ne rebutaient les éléments d'aucune connaissance. Déjà s'affirmait cette vaste intelligence qui, plus tard, devait les embrasser toutes. A sa vocation pour les Mathématiques répondait un égal amour des Lettres. Alliant une intuition remarquable à la force du raisonnement, il n'en témoignait pas moins une égale maîtrise dans l'art de la composition, un art qui, plus tard, devait se manifester avec un particulier bonheur dans l'œuvre du philosophe.

Esquisser à grands traits ce que fut sa jeunesse studieuse, c'est également dépeindre cette délicate sensibilité, cette simplicité et cette bonté qui firent d'Henri Poincaré un homme aimable et affectueux, souvent timide, toujours modeste, mais dont la générosité du caractère était sans égale.

Parmi toutes ces noblesses, il entretenait au fond de l'âme, contenue mais ardente, la flamme d'un patriotisme résolu. Jeune homme, il avait connu les horreurs de la défaite et les servitudes de l'occupation étrangère. Ne disait-il pas lors de son discours de réception à l'Académie Française : « qu'après les heures sombres de la guerre, vint l'heure encore plus sombre de la paix, celle où la France dut se résigner à cette grande douleur, qui nous laisserait deux fois inconsolables, si jamais nos fils semblaient s'en consoler ». Magnifique pensée d'un Français que bientôt le monde devait reconnaître comme le plus grand savant du siècle et l'un des maîtres de la Philosophie moderne.

Sa vie tout entière ne fut que la floraison, comme spontanée, d'un génie dont la puissance éclata dès l'éveil de la vie consciente.

Il lut, travailla, apprit, chercha, discuta, composa, professa, écrivit, en apportant à cette intense activité ses dons inégalables qui l'amenaient à tout comprendre, mais aussi à tout repenser en des traits fulgurants, à la Pascal. Et cependant, apportant des idées nouvelles dans tous les ordres du savoir, il avait l'art, par des comparaisons prises aux choses de la vie quotidienne, de faire toucher du doigt en quelque sorte, de faire voir « avec les yeux » les plus abstruses vérités : ainsi faisait déjà Descartes.

Tenter d'exposer l'œuvre d'Henri Poincaré est une entreprise impossible tant il nous apparaît comme l'incarnation même de la Science. Avec lui s'est éteint un homme dont les facultés d'entendement furent telles que la Nature, dans le cours des siècles, n'en a produit qu'un tout petit nombre. Son esprit était un foyer où se donnaient rendez-vous et se confrontaient toutes les connaissances, si diverses soient-elles, qu'a pu acquérir l'Humanité.

Un esprit supérieur comme le sien, dont l'œuvre a été profonde et originale, devait tôt ou tard pénétrer dans le champ de la Philosophie, et dans ce domaine il devait encore apporter une force et une pénétration de pensée admirable. Prenant la défense des humanités, il donnait le spectacle d'un scientifique n'hésitant pas à déclarer qu'il était redevable aux Lettres de sa maîtrise, même dans les sciences, et par là il proclamait l'excellence d'une formation qui éduque le cœur de la jeunesse aussi bien que son esprit.

Pour la gloire de son Pays, il a conquis l'admiration des savants et des penseurs de tous les peuples ; il a établi chez eux la domination du génie français.

Henri Poincaré nous a légué une œuvre scientifique qui se révèle comme l'une des plus vastes, l'une des plus originales qu'un homme ait jamais produite.

Lui qui s'étonnait et s'attristait, en son âme aimante et sincère, qu'il y eut au monde des gens, disait-il, « qui semblent n'avoir d'intelligence que pour mentir et de cœur que pour haïr », il nous a laissé comme philosophe un enseignement essentiellement humain, nous apprenant que l'esprit, sans lequel le Vrai et le Beau ne se conçoivent pas, est une réalité vivante et efficace, tandis que les principes de justice et de bonté sont, au même titre que la Science et en connexion avec elle, les fins qui s'imposent à notre activité.

Sa pensée et sa vie sont pour nous un modèle inimitable; il demeure un exemple à suivre, ne fût-ce que de loin. Puisse-t-il rappeler aux générations nouvelles de ce lycée — pépinière de nos grandes Écoles scientifiques, creuset où se forge l'élite de la jeunesse lorraine — que dans un monde parfois hostile et malveillant la primauté intellectuelle de la France demeure intacte, et que c'est à elles qu'il appartient de se montrer dignes d'un de leurs plus illustres aînés.

ALLOCUTION DE M. LÉON POINCARÉ

AU LYCÉE DE NANCY.

Monsieur le Ministre,
Mesdames, Messieurs,

Si je prends la parole aujourd'hui, c'est pour exprimer, au nom de la famille de Henri Poincaré, les sentiments de gratitude qu'elle éprouve devant l'hommage solennel et émouvant qui est rendu à mon père ; c'est pour remercier les organisateurs des cérémonies du Centenaire, au premier rang desquels se place mon ami le professeur Gaston Julia dont il est superflu de vanter le dynamisme et la volonté, mais dont il faut louer aussi le courage, le mot n'est pas trop fort pour celui qui, malgré le handicap de sa gorge défaillante, a voulu jouer son rôle complètement, en dépit des avis de la Faculté.

Mes remerciements aujourd'hui, vont au Président du Comité d'Organisation de Nancy, M. le Recteur Capelle, et à l'Université dont il est le Maître et qui veut bien nous accueillir tout à l'heure.

Ils vont à la ville de Nancy, et à son Maire, M. le Sénateur Pinchard qui ont donné le nom de Henri Poincaré à cette grande artère qui passe devant le lycée.

Ils vont au lycée de Nancy, et à son Proviseur M. Depain qui ont tenu à ce que l'effigie de celui dont le lycée porte le nom depuis 1913 domine la porte d'entrée, comme s'il était là pour accueillir ses jeunes camarades.

Ils vont aussi à l'Association des anciens élèves et à son actif Président le Général Braun, qui tiennent le flambeau des traditions.

Il me semble que je faillirais à mon devoir si j'oubliais d'envoyer aussi un message de gratitude aux organisateurs et aux orateurs des autres manifestations, la grande séance de la Sorbonne samedi dernier, celle de l'École Polytechnique le lendemain, celle de l'Institut Henri Poincaré, et de l'Institut de France le 17 mai. L'Union des Professeurs de Mathématiques, d'une part, la Société des Ingénieurs Civils de l'autre ont consacré une séance à Henri Poincaré. L'Université de Caen enfin, où mon père a fait ses débuts d'universitaire et où il a inventé les fonctions fuchsiennes, a voulu, elle aussi, rappeler le passage de Henri Poincaré en Normandie.

Si je sais ainsi très bien à qui adresser mes remerciements je sais moins bien quelle forme leur donner. Les mots ordinaires ont été trop souvent répétés pour pouvoir servir à autre chose qu'à construire des formules polies mais fades et ici, à Nancy, il me semble que j'ai mieux à faire que d'essayer une nouvelle manière de les assembler.

Lorsqu'une mère glorifie son fils, quelle plus belle récompense peut-elle espérer que d'entendre celui-ci, en retour, lui crier son affection filiale. C'est donc le témoignage de la fidélité de Henri Poincaré à la Lorraine et à sa ville natale que je voudrais vous apporter, et aussi celui de son amour de la France, et de la vérité.

Car je voudrais que passant les portes de votre ville, mes remerciements aillent à tous ceux qui en France se sont dépensés pour le succès des manifestations du Centenaire et aussi aux savants étrangers qui en ont rehaussé l'éclat par leur présence.

Homme et savant, Henri Poincaré a aimé la vérité universelle et son instrument, la Science, qui ne connaît pas de frontières. Il a trouvé maintes occasions de le dire, et il a proclamé que la Science créait un lien entre les hommes : « Elle nous donne le sentiment », a-t-il écrit, « de la coopération nécessaire, de la solidarité de nos efforts et de ceux de nos contemporains, et même de ceux de nos devanciers et de nos successeurs.... Nous sentons que nous travaillons pour l'humanité, et l'humanité nous devient plus chère ».

Français, il a trouvé pour parler de la Patrie des accents qui partent du cœur, et dont certains prennent *a posteriori* un aspect prophétique. « Quand on nous demande de justifier par des raisonnements notre amour de la Patrie », dit-il, « nous pouvons être très embarrassés; mais que nous nous représentions par la pensée, nos armées vaincues, la France envahie, tout notre cœur se soulèvera, les larmes nous monteront aux yeux, et nous n'écouterons plus rien. Et si certaines gens accumulent aujourd'hui tant de sophismes, c'est sans doute qu'ils n'ont pas assez d'imagination, ils ne peuvent se représenter tous ces maux, et si le malheur ou quelque punition du ciel voulaient qu'ils les vissent de leurs yeux, leur âme se révolterait comme la nôtre ».

Depuis 1910, date à laquelle ces lignes ont été écrites, le malheur est venu deux fois. Et si en 1940, par son ampleur, il a pris figure de punition du ciel c'est peut-être parce que notre imagination s'était assoupie, et que nous n'avions plus, comme en 1914, la blessure de l'Alsace-Lorraine pour la maintenir en haleine. Mais, dans le grand sursaut de la Résistance, les âmes de ceux qui paraissaient, jusque-là, considérer la Patrie comme un concept périmé, se sont révoltées à l'égal de celles des autres.

Je demande qu'on ne voie dans cette simple constatation d'un fait aucun caractère provocant. Le patriotisme de Henri Poincaré n'avait rien d'exclusif, au contraire, pour lui, la mission de la France est essentiellement humaine. Après avoir cité ce vers de Sully-Prudhomme :

« Et plus je suis français, plus je me sens humain »

il dit « peut-être aujourd'hui croirait-il nécssaire d'ajouter que trahir la France, ce serait trahir l'humanité ». Et quelques lignes plus haut il a cette formule « C'est que la Patrie n'est pas un simple syndicat d'intérêts, c'est le faisceau des idées généreuses, et même des généreuses folies pour lesquelles nos pères ont combattu et souffert, et alors une France haineuse ne serait plus la France ».

Lorrain et nancéen, s'il a moins parlé de l'amour pour la terre natale, c'est qu'il s'agit d'un sentiment encore plus subtil, qui ne peut, comme l'amour de la Patrie, s'ériger en règle de morale, puisqu'il doit céder le pas à celui-ci; c'est qu'il s'agit d'un sentiment qui est fait précisément, pour partie, de toutes les souffrances que la petite Patrie a dû endurer pour servir la grande, de tous les sacrifices qu'elle a dû lui consentir; et ces choses-là une certaine pudeur répugne à les étaler.

Bien qu'on puisse en trouver la trace dans ses livres, au besoin en lisant entre les lignes, ce n'est donc pas dans son œuvre que nous chercherons le témoignage de la fidélité de Henri POINCARÉ à la Lorraine et à Nancy. Mais, si ce n'est pas être trop présomptueux, c'est en moi que nous le trouverons, c'est dans les sentiments que j'éprouve et qui ne peuvent me venir que de l'hérédité paternelle, ou de ce que mon père m'a légué, par sa manière de nous parler de Nancy, par ses récits, par son attitude, à moins que ce ne soit par je ne sais quel fluide que nous respirions auprès de lui.

Je suis né à Paris, et Nancy ne représente pas pour moi une vieille maison familiale où vous attendent un grand-père ou une grand'mère. Le premier était mort un an avant ma naissance, ma grand-mère était venue s'installer à Paris à côté de ses enfants. Je crois bien n'avoir pas passé une seule nuit à Nancy avant 1913, j'avais 20 ans; certes depuis l'âge de 11 ans j'avais plusieurs fois traversé votre ville, mais toujours en courant, entre deux trains; j'avais vu la place Stanislas et la place Carrière, je connaissais la rue des Dominicains et le Point central.

Mais cela ne suffit pas à expliquer cette sorte d'exaltation que je ressens en abordant vos vallées et vos coteaux, en respirant votre atmosphère, cela ne suffit pas à expliquer pourquoi c'est chez vous que je me sens chez moi. Non ce ne peut être que le reflet des sentiments encore plus vifs que Henri POINCARÉ éprouvait lui-même, et c'est pourquoi je suis sûr de pouvoir vous apporter le témoignage que je vous avais promis.

DISCOURS DE M. MAURICE LEMAIRE

MINISTRE DE LA RECONSTRUCTION ET DU LOGEMENT POUR L'INAUGURATION DU MÉDAILLON DE HENRI POINCARÉ AU LYCÉE DE NANCY.

C'est un grand honneur qui m'échoit aujourd'hui que d'inaugurer au nom du Gouvernement de la République, en cette ville de Nancy, ce médaillon à la mémoire de l'illustre Lorrain, Henri POINCARÉ, l'un des plus parfaits cerveaux de l'humanité, l'un des plus grands serviteurs de la Civilisation.

Ce grand savant nous dépasse de si haut qu'il eût été préférable sans doute de nous incliner en silence devant son souvenir pour mieux songer à la somme de ses travaux et des apports à la Création dans les temps modernes.

Aussi pénétrés que nous le soyons de l'ampleur de son œuvre qui a marqué le monde dans tout le domaine de la Pensée et dans toutes les Disciplines idéales du Génie qu'il s'agisse de la Mathématique, de la Philosophie ou de la Littérature, nous voulons tout d'abord retrouver la personnalité infiniment humaine qui l'incarne avant de rappeler à grands traits son œuvre gigantesque, dont nous ne saurions prévoir les conséquences qui surviendront encore à coup sûr jusque dans la vie de nos petits enfants.

Quand je dis qu'en tant qu'homme Henri POINCARÉ était infiniment humain, ce n'est pas vous, mes chers compatriotes, qui me démentirez. Vous connaissez tous, l'exemple familial de tendresse et de bonté que fut sa vie privée, parallèlement à sa vie sociale qui elle, fut un exemple de dévouement à la Science, à la Nation et à la cause incertaine de tous les peuples de la terre dont les guides attendaient les Oracles.

Je ne reprendrai pas sa biographie dans le détail. D'autres, naguère, ont fait mieux que je ne saurais pour vous en instruire. Certains de ses anciens condisciples du lycée de Nancy, certains de ses anciens camarades des Grandes Écoles ou de ses anciens collègues de l'Enseignement Supérieur, et surtout sa sœur, M^{me} Émile BOUTROUX, qui nous fit présent de Mémoires fidèles, vous ont conté de façon précise et touchante cette existence d'une personnalité hors de pair comme l'Histoire en a peu à nous proposer.

Mais je ne résisterai pas au besoin d'évoquer rapidement les grandes étapes de sa carrière prodigieuse avec la fierté légitime d'exalter une pure gloire de chez nous.

Il fut, vous a-t-on dit, « un enfant précoce et docile », un peu effacé, réfléchi et parfois assez austère. Entré au lycée de Nancy en neuvième, au mois d'Octobre 1862, il y poursuivit ses études complètes, jusqu'aux Mathématiques spéciales, avant d'être reçu à la fois, la même année, en 1873, à l'École Normale Supérieure et à l'École Polytechnique pour laquelle il opta. Son envol vers les cimes de l'intelligence, de la connaissance et de la découverte était pris. Mais si haut qu'il dût s'élever par la suite, il revenait passer régulièrement et modestement ses vacances à Arrancy, chez ses grands-parents maternels, ce qui montre la sûreté de ses affectueuses attaches à sa famille et à sa Lorraine natale dont il ne perdit jamais jusqu'à son dernier jour le sentiment ni le souci. Il avait vécu les affres de l'occupation de 1870-1871 et partagé les misères qui s'étaient ensuivi; il avait assisté à l'exode désespéré des Alsaciens refusant la condition que leur apportait la défaite : autant de chocs, autant de sources de trouble et de douleur sur quoi s'enracina solidement son patriotisme fervent.

D'ailleurs, ce patriotisme qui l'animait du plus profond de lui-même, il l'habitait du plus lointain des âges, Henri Poincaré le tenait en effet, d'une lignée magnifique de notables, cultivés et laborieux, également distingués à titres divers et qui, depuis le xviii^e siècle établis dans notre Pays, incarnaient les vertus de notre race. Ces vertus, quant à lui, il les possédait toutes; et la rigueur de son raisonnement, l'extraordinaire puissance de son estimation des valeurs, n'étaient peut-être que l'expression géniale du robuste bon sens des gens d'ici.

L'École Polytechnique l'amena à celle des Mines où s'épanouirent encore, à l'admiration de ses maîtres, les dons d'intuition et d'imperturbable mémoire qui l'avaient fait remarquer au cours de ses études antérieures. Mais il commençait seulement à étonner son entourage. Après une brève activité administrative à Vesoul comme ingénieur ordinaire chargé de l'arrondissement minéralogique, puis comme attaché au contrôle de l'exploitation des Chemins de fer de l'Est où ses chefs constatent « son sang-froid exemplaire et son amour du devoir », il devient docteur ès sciences mathématiques après avoir brillamment soutenu, à Paris, en 1879, une thèse : *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque d'inconnues*; et c'est ainsi que le 1er décembre de la même année il est mis à la disposition du Ministre de l'Instruction Publique, pour être chargé du cours d'Analyse à la Faculté de Caen. Puis, successivement nommé en 1881 Maître de Conférence à la Faculté des Sciences de Paris et en 1885 chargé du cours de Mécanique physique, il succédait en 1886 à l'illustre Professeur Lippmann dans la Chaire de Physique mathématique et Calcul des probabilités. Alors, parallèlement aux leçons qu'il dispense avec la générosité qui le caractérise, il entreprend son œuvre de savant qui embrassera les Mathématiques pures, la Mécanique et l'Astronomie, la Physique, la Géodésie, la Philosophie et la Littérature sous la forme la plus sérieuse qui fut celle de Pascal; et je ne citerai à ce propos qu'une pensée de Henri Poincaré qui, dans sa simplicité, vaut et rejoint celles de son prestigieux devancier : « Dans la lutte de la vie il faut deux choses », a-t-il écrit au sujet de la prétendue faillite de la Science : « des armes et du courage; la Science nous a promis des armes et elle nous les a données; si nous n'avons pas le courage de nous en servir, ce n'est pas elle qui fait faillite, c'est nous... ».

Ainsi l'œuvre éclatante d'Henri Poincaré qui semble s'ordonner autour de la théorie des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles, recouvre en réalité l'ensemble du domaine de la pensée, en allant de la spéculation théorique aux applications les plus audacieuses du Calcul. En cela, seule « la recherche de la vérité » l'a guidé sans cesse; la recherche de la vérité dont il a dit au début de l'introduction de son Ouvrage intitulé : *La Valeur de la Science*, qu'elle « doit être le but de notre activité et l'unique fin qui soit digne d'elle ». Car il est indispensable en effet, qu'en dehors de la foule qui ne conçoit que l'utile, et même pour que le salut de cette foule soit assuré, il y ait des hommes d'élite qui conservent la tradition de la culture désintéressée. « Ils y trouvent », formule encore Poincaré, « des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique. Ils admirent la délicate harmonie du nombre et des formes, ils s'émerveillent quand une découverte leur ouvre des perspectives inattendues, et la joie qu'ils éprouvent n'a-t-elle pas le caractère esthétique, bien que les sens n'y aient aucune part? » Mais si la Science n'a pas été créée uniquement en vue de l'action, si la vérité doit précéder l'utilité, comme le pensait Henri Poincaré, bien des entreprises qui ne semblaient d'abord que des jeux abstraits de l'esprit n'en sont pas moins à l'origine des inventions qui ont bouleversé le monde.

Dans le temps que s'édifiait ce monument scientifique magistral, qui ouvrait à son auteur la porte du Bureau des Longitudes en 1893 après son élection à l'Académie des Sciences en 1887, il renouvelait la Philosophie par une série de travaux justement célèbres réunis aujourd'hui en quatre volumes : *La Science et l'Hypothèse; La Valeur de la Science; Science et Méthode; Dernières pensées* qui le conduisirent très naturellement à l'Académie Française où il fut reçu le 5 mars 1908 par Frédéric Masson.

Quiconque possède une bonne culture connaît maintenant ces Ouvrages. A leur lecture on voit que le littéraire, l'écrivain, n'ont rien à envier par la hauteur des idées et par la tenue du style, au mathématicien. De toute évidence Henri Poincaré n'a point éprouvé la moindre difficulté à écrire. On sent qu'avant de naître la phrase était en place dans sa pensée qui n'était que clarté, et que la phrase était définitiee.

Le style chez Henri Poincaré est simplement l'expression raisonnable d'une connaissance ; si bien que le lecteur, même non compétent, s'il ne le comprend pas c'est qu'il ne fait pas l'effort élémentaire que requiert un minimum d'attention en vue de comprendre n'importe qui. RENAN affirmait que les « vrais savants écrivaient d'instinct un langage châtié ». Combien les textes de Henri POINCARÉ lui donnent raison ! Ces textes où les mots sont autant de traits déliés, autant d'évocations précises dont l'ensemble constitue, en définitive, un chef-d'œuvre d'harmonie. Et comme on comprend, en lisant POINCARÉ, cette saillie de CUVIER qui disait : « Le savant n'est qu'un artiste qui s'ignore, mais un artiste qui, en plus, sait des choses »....

Cependant, il ne faudrait pas que l'ampleur de sa production scientifique, philosophique et littéraire fît oublier l'œuvre morale et sociale de Henri POINCARÉ. Si à aucun moment il n'appartint à un parti politique, il avait ses idées arrêtées sur toutes les questions qui pouvaient se poser au Parlement ou au Gouvernement.

Comme il n'avait pas de doctrine préconçue, non plus que de ligne d'interprétation établie par une politique déterminee, il arrivait que ses idées fussent d'accord tantôt avec les opinions d'un parti, tantôt avec celles d'un autre. Les préoccupations pédagogiques d'une importance capitale dans une démocratie tiennent chez lui une place privilégiée, et les avis qu'il nous a laissés sur ce plan attestent les rôles moral et social considérables qu'il a joués. Ainsi, au Musée Pédagogique, en 1904, il fit une conférence sur *Les définitions générales en Mathématiques*. Dans *la Revue de l'Enseignement* il publia des quantités d'articles, dont un sur *La Logique* et un sur *L'Intuition dans l'Enseignement* qui eurent des échos retentissants. Ce grand homme, cet homme dont on dit peu en le qualifiant de supérieur, ne manqnait jamais une occasion de donner un conseil, de développer une remarque par la parole ou par la plume au profit des Maîtres de tous rangs, s'adressant s'il le jugeait utile aux instituteurs comme aux agrégés ou professeurs de Facultés qu'il traitait vraiment en « collègues », sans distinction. En cela encore son obligeance et sa modestie triomphaient.

Tel fut ce penseur, ce savant, ce citoyen. Une vie exemplaire, régulièrement appliquée à la méditation, détendue par les joies de l'Art, au sein d'une famille parfaitement unie qui s'appliquait à faciliter le travail harassant de son chef aimé et respecté, et parmi des confrères, des collègues, des élèves, des disciples tous fervents admirateurs d'une œuvre impressionnante, d'un homme simple et bon, tout promettait à Henri POINCARÉ une vieillesse longue et heureuse. Hélas !

A la suite d'une intervention sérieuse mais sans gravité, une embolie terrassa le malade en pleine convalescence, le 17 juillet 1912. A la stupeur désespérée du monde entier « le cerveau vivant des sciences rationnelles », gémit alors PAINLEVÉ, « avait cessé de vivre ».

Mesdames, Messieurs, que ce simple médaillon tel qu'il l'aurait aimé et que nous devons au remarquable talent de Mme NAGEOTTE, perpétue l'illustre mémoire de Henri POINCARÉ dans les générations futures, tel est le vœu le plus cher que je forme aujourd'hui, de cœur avec vous, en un élan unanime de reconnaissance et d'admiration.

ÉTUDE DE M. GASTON JULIA.

POUR L'ASSOCIATION DES ANCIENS ÉLÈVES DU LYCÉE DE NANCY.

Henri Poincaré, sa vie et son œuvre.

La Lorraine célèbre aujourd'hui la naissance d'un de ses plus illustres fils.

Henri POINCARÉ naît à Nancy le 29 avril 1854, d'une famille qui a donné à la France plusieurs hommes éminents. Son père, neurologue et professeur à la Faculté de Médecine, et son grand-père, pharmacien, ont laissé tous deux le souvenir d'esprits très distingués. La souche maternelle est, elle aussi, purement lorraine et Henri POINCARÉ reconnaissait en sa grand-mère maternelle un don réel pour les Mathématiques. Et l'on sait que l'oncle Antoni POINCARÉ, Inspecteur général des Ponts et Chaussées, eut deux fils : Raymond, Président de la République et Président du Conseil ; Lucien, physicien très connu qui fut Recteur de l'Université de Paris.

Henri POINCARÉ fut un enfant précoce et docile, Doué d'une vive intelligence, et devenu grand liseur après une diphtérie grave qui l'immobilisa longtemps, il n'oubliait rien de ce qu'il lisait ou entendait, dans le cercle de savants, d'universitaires, de polytechniciens qui entourait sa famille.

Il entre en neuvième au lycée de Nancy au mois d'octobre 1862, après avoir appris le rudiment de l'Inspecteur primaire HINZELIN. Il y restera jusqu'en 1873, l'année de son admission à l'École Polytechnique, et il passera régulièrement ses vacances à Arrancy chez ses grands-parents maternels. Il sera constamment un élève exceptionnel et dominant son travail. Enfant, il fait ses devoirs dans le salon où sa mère reçoit, et tantôt participe à la conversation, tantôt s'isole pour rédiger ses réflexions. D'un caractère très doux, il partage volontiers les jeux de ses camarades, mais ne réussit brillamment que dans ceux où prime l'intelligence. A 11 ans, au cours d'une excursion, il explique à ses camarades l'écho de Ramberchamps. Il aime les charades, les petites saynètes, la danse.

Sa vocation mathématique se dessine en quatrième et devient bientôt impérieuse, sans nuire à ses études classiques au dire de son professeur de Rhétorique. Le 5 août 1871, il est bachelier ès lettres avec mention *bien*; en novembre 1871, il est bachelier ès sciences avec mention *assez bien*, après avoir failli échouer à l'écrit pour sa composition de Mathématiques.

En Mathématiques élémentaires, il montre ses exceptionnelles qualités en enlevant le premier prix du concours général, et il est reçu le 2[e] à l'École forestière en juillet 1872.

Octobre 1872, il entre en Spéciales, chez Elliot, avec Paul Appell et Colson : Écoutons Colson : « Dès la première leçon, le nouvel élève sortit de sa poche un faire-part d'enterrement en guise de cahier de notes. Nous crûmes à un oubli; mais les jours suivants nous le vîmes avec stupéfaction griffonner quelques lignes sur la même feuille.... Évidemment le nouvel élève n'était pas sérieux. Il fallait s'en assurer. Car, enfin, il avait eu le premier prix au Concours général. On lui délégua un vieil élève de quatrième année pour lui demander une explication sur un point qui avait paru particulièrement obscur. Poincaré la donna immédiatement, sans réfléchir une minute, et partit en laissant son interlocuteur et les témoins dans un tel ébahissement que l'un d'eux se demanda : comment fait-il ? ».

Et Appell : « Dès les premières interrogations en classe, sa supériorité apparut éclatante : il répondait aux questions en supprimant les raisonnements intermédiaires, avec une brièveté et une concision telles, que le professeur lui demandait toujours de développer ses réponses ». Et Elliot dit à son ami Liard : « J'ai dans ma classe, à Nancy, un monstre de Mathématiques, c'est Henri Poincaré ».

Après la classe, longues déambulations pour accompagner à Malzéville ses amis, Henry, Hartmann, en passant par les portes de la Craffe et de la Citadelle, puis revenir chez lui, 6, rue Lafayette toujours accompagné d'Appell. Nancy était occupée; on vivait dans le souvenir de l'Alsace-Lorraine perdue. Au début de la guerre, Henri Poincaré, âgé de 16 ans, avait vécu l'invasion et ses horreurs, dans les ambulances d'abord, où il accompagnait son père ; plus tard au cours d'un voyage avec sa mère et sa sœur, il atteignit Arrancy, près de Saint-Privat, après avoir traversé plusieurs villages incendiés; il y trouva les grands-parents souffrants dans la maison familiale dévastée.... Jamais Henri Poincaré ne devait oublier ce voyage et l'on comprend qu'il soit devenu le patriote conscient et ardent, l'acharné travailleur qu'il fut toute sa vie. Mais, comme il fallait s'instruire et ne pas oublier, il apprit d'abord tout seul l'allemand, pour pouvoir lire les nouvelles dans les seuls journaux qu'il eût à sa disposition.

Il travailla énormément pendant son année de Spéciales, lisant et méditant Joseph Bertrand, Duhamel, Chasles, Rouché. Ses aperçus synthétiques et ses solutions géométriques étaient célèbres. Sa maladresse au dessin ne l'était pas moins, et l'on connaît les anecdotes plaisantes qu'Appell nous a transmises à ce sujet.

En juillet 1873, il enlève le premier prix de mathématiques au Concours général, et voici ce que le correcteur, Rollier, déclare à son ancien professeur : « Vous avez à Nancy un élève de Mathématiques spéciales extraordinaire; c'est moi qui ai corrigé les compositions du Concours général de Mathématiques; eh bien ! lors même que Poincaré eût fait des fautes de calcul, qu'il n'eût point achevé sa copie, je l'aurais encore placé premier hors ligne... rien que pour la façon dont il avait posé la question ».

Au concours de l'École Polytechnique, il se classe 1^er^ sans difficulté, malgré des notes lamentables en dessin et en lavis, qu'expliquent en partie sa hâte de quitter la salle pour assister à l'entrée des troupes françaises à Nancy le jour de la libération.

Ses examens oraux sont restés célèbres : La salle était comble .... Il parlait lentement, s'arrêtant, fermant parfois les yeux, demandant la permission d'interrompre sa démonstration pour en essayer une autre ..., puis s'écriant : « non, décidément, j'en reviens à ma première démonstration, plus courte et plus élégante ... ». L'examinateur était émerveillé. Chez Tissot, sur une question de Géométrie élémentaire, il fournit coup sur coup trois solutions du problème et obtient le maximum.

A l'École Normale Supérieure, moins heureux, il ne fut classé que 5^e^, et nous le retrouvons à l'École Polytechnique en octobre 1873.

Il ne prend aucune note aux cours. Mais il écoute; il réfléchit, et il travaille en se promenant dans les couloirs. Même aux récréations il peut s'isoler en pensée tout en déambulant bras dessus, bras dessous, avec ses camarades de Nancy. Dès sa première année, il publie dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* une élégante méthode géométrique d'étude de la courbure des surfaces. Il reste encore très faible au dessin et aux exercices physiques.

Et son habitude de négliger les intermédiaires lui vaut une note médiocre à l'examen de sortie de Géométrie et Stéréotomie, chez un examinateur moins perspicace que Tissot.

Sorti 2e de l'École Polytechnique, il entre à l'École des Mines en octobre 1875; il s'y prépare consciencieusement au métier d'ingénieur et il se classe 3e à la sortie de l'École en mars 1879. On l'envoie à Vesoul du 1er avril au 1er décembre 1879. A cette date, il est détaché comme chargé de cours à la Faculté des Sciences de Caen, et, s'il continue de figurer sur les contrôles du Ministère des Travaux Publies, comme ingénieur ordinaire, puis ingénieur en chef (1893), puis inspecteur général des Mines (1910), il deviendra en fait l'universitaire et le savant légendaires dont nous allons maintenant parler.

*
* *

C'est que, durant sa scolarité à l'école des Mines il a repris ses études et ses réflexions sur un plan plus élevé, il a pris conscience de sa vocation de savant.

Le résultat de ce travail, c'est sa thèse de doctorat *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, qu'il soutient le 1er août 1879. « Ce qu'il faut admirer surtout dans ses débuts, dit Darboux, c'est la décision... l'audace avec laquelle il s'adresse aux questions les plus élevées, les plus difficiles et les plus générales. Il va droit aux problèmes les plus importants, les plus essentiels ».

Il revient à Paris comme Maître de Conférences d'Analyse en octobre 1881. Il est chargé du cours de Mécanique physique en mars 1885 puis titularisé dans la chaire de Physique mathématique et Calcul des probabilités en août 1886. Après la mort de Tisserand en novembre 1896, il prend la chaire d'Astronomie mathématique et de Mécanique céleste, qu'il occupera jusqu'à sa mort. Il devient Membre du Bureau des Longitudes le 4 janvier 1893. Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique de 1883 à 1897, puis Professeur d'Astronomie générale de 1904 à 1908, il assure bénévolement le service de cette chaire pour qu'elle ne soit pas supprimée. Depuis 1902 il occupe la chaire d'Électricité théorique de l'École Supérieure des P. T. T.

Le 31 janvier 1887, il est élu Membre de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences, qu'il présidera en 1906. Le 5 mars 1908, il entre à l'Académie Française.

Une carrière aussi exceptionnellement brillante se justifiait par une œuvre éclatante, qui recouvre à peu près tous les domaines des Mathématiques et de leurs applications et qui semble-t-il, s'ordonne autour de la théorie des équations différentielles, et des équations aux dérivées partielles.

Aussitôt après sa thèse, aimantée par les travaux remarquables, mais incomplets, que FUCHS vient de publier sur les équations différentielles linéaires du deuxième ordre, POINCARÉ s'attaque à *l'intégration de toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques;* et ce problème, d'une généralité et d'une difficulté encore insoupçonnées, il va le résoudre complètement. Il commence par une généralisation des fonctions périodiques (fonctions circulaires ou elliptiques, dont SCHWARZ avait donné un exemple particulier qui, probablement, retarda Félix KLEIN plus qu'il ne le servit dans la généralisation qu'il cherchait, lui aussi). POINCARÉ ignore SCHWARZ, mais ayant compris toute la puissance de l'idée de FUCHS, elle-même inspirée de celle d'ABEL, il aborde la question *par la voie la plus générale* : il construit *a priori* les groupes discontinus les plus généraux, et en hommage à FUCHS, il les appelle *groupes fuchsiens*; il construit les fonctions méromorphes invariantes par les substitutions d'un tel groupe, les *fonctions fuchsiennes*, et il obtient (comme dans le cas particulier des fonctions elliptiques) la clé du monde algébrique, car :

1° deux fonctions fuchsiennes de même groupe sont liées par une relation algébrique;

2° réciproquement, les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique *quelconque* s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'un même paramètre;

3° l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients algébriques d'un ordre *quelconque* s'obtient par les fonctions *zétafuchsiennes.*

Simultanément, il approfondit la nature et la forme des intégrales *réelles* d'une équation différentielle à coefficients *réels*; il reconnaît l'importance fondamentale des points singuliers, qu'il classe en *cols*, *nœuds*, *foyers*, éventuellement en *centres*; il met en valeur le rôle primordial des cycles *limites* et des intégrales *fermées* ou *périodiques*, qui reparaîtront dans ses recherches ultérieures de Mécanique céleste et jusque dans la technique moderne des oscillations non linéaires.

Une telle œuvre justifiait déjà l'appréciation de Camille JORDAN : « elle est au-dessus des éloges ordinaires et nous rappelle invinciblement ce que JACOBI écrivait d'ABEL, qu'il avait résolu des questions qu'avant lui personne n'aurait osé imaginer ».

C'est alors que le Roi OSCAR II de Suède, ayant mis au concours pour 1889, une étude sur le *problème des trois corps*, H. POINCARÉ, bien préparé par ses propres travaux sur les équations différentielles, attaque le problème par des voies nouvelles, et WEIERSTRASS, couronnant son Mémoire conclut : « ce Mémoire... est sans contredit un travail de haute portée...; il est d'une telle importance que sa publication ouvrira une ère nouvelle dans l'histoire de la Mécanique céleste; ... il comptera parmi les plus importantes productions mathématiques du siècle... ».

A partir de là, POINCARÉ, dont la renommée gagne le grand public, ne cesse plus de s'intéresser à la Mécanique céleste. Les nombreux cours qu'il lui consacre en Sorbonne, et dans lesquels les découvertes essentielles ne se comptent plus (telles les *équations aux variations* et les *invariants intégraux*), aboutissent à ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, puis à ses *Leçons de Mécanique céleste*, à ses *Leçons sur les figures d'équilibre d'une masse fluide*, enfin à ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*. Dans le même temps, il n'est guère de domaine mathématique ou physique que POINCARÉ n'ait abordé, armé comme il l'est pour tout comprendre. C'est, par exemple, toute une série de livres exposant ses cours de Physique mathématique de Sorbonne : Calcul des probabilités, Thermodynamique, Électricité, Optique, Élasticité, Théorie de la lumière, Oscillations électriques, Propagtion de la chaleur. Sur demande de l'École Supérieure des P. T. T., il donne aussi plusieurs séries de cours techniques sur l'équation des télégraphistes, le récepteur téléphonique, la télégraphie sans fil.

C'est qu'il pense, avec Joseph FOURIER, que « l'étude approfondie de la Nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques ». Et cette étude le conduit effectivement à la belle méthode dite de *balayage*, pour la résolution du problème de DIRICHLET, puis à la démonstration de l'existence de *tous les harmoniques d'une membrane tendue*, par une méthode qui précède la célèbre méthode de FREDHOLM pour la résolution des équations intégrales linéaires.

C'est aussi par ses recherches sur les équations différentielles et sur les solutions périodiques, et par ses recherches algébriques, que POINCARÉ est conduit à ses recherches fondamentales de *Topologie*, condensées en six *Mémoires sur l'Analysis Situs* dans lesquels il se montre un des pionniers les plus puissants de cette science nouvelle, actuellement en plein essor.

Dans le temps que se construisait cette œuvre scientifique si vaste, si solide et si variée, les méditations de POINCARÉ le conduisaient à renouveler la philosophie scientifique par une série de travaux justement célèbres, aujourd'hui réunis dans quatre volumes que tout le monde a lus : *La Science et l'Hypothèse*, *La valeur de la Science*, *Science et Méthode*, *Dernières pensées*.

Ces titres indiquent bien, en gros, le contenu de ces Ouvrages, où se trouve en quelque sorte dégagée et fixée *la méthode des sciences exactes*, en particulier celle des Mathématiques, le sens et le rôle des postulats ou des axiomes de la Géométrie, l'importance du raisonnement par récurrence, ou de l'induction, la valeur et le rôle des hypothèses et des postulats en Mécanique, en Physique.... Le quatrième volume, posthume, révèle aussi les préoccupations morales qui ne furent jamais absentes de la conscience du grand savant. Ces quatre volumes, plus que toute son œuvre scientifique probablement, ont rendu familier au grand public le nom d'Henri POINCARÉ.

*
* *

Devant l'ampleur d'une telle œuvre (plus de 500 Mémoires ou Volumes) on peut se demander par quel miracle elle put être réalisée en si peu d'années. En réalité, elle résulta d'abord de l'activé véritablement incessante de l'esprit d'Henri POINCARÉ, de son intuition prodigieuse, de la rapidité de son assimilation et de ses conceptions, mais aussi de la régularité exceptionnelle de sa vie, que son neveu Pierre BOUTROUX nous a fait connaître dans une lettre à MITTAG-LEFFLER. « Il pensait dans la rue lorsqu'il se rendait à la Sorbonne, lorsqu'il allait assister à quelque réunion scientifique, ou lorsqu'il faisait après son déjeuner une de ces grandes marches à pied dont il était coutumier. Il pensait dans son antichambre, ou dans la salle des séances de l'Institut, lorsqu'il déambulait à petits pas, la physionomie tendue, en agitant son trousseau de clefs. Il pensait à table, dans les réunions de famille, dans les salons même, s'interrompant souvent brusquement au milieu d'une conversation, et plantant là son interlocuteur, pour suivre au passage une pensée qui lui traversait l'esprit. Tout le travail de découverte se faisait mentalement chez mon oncle, sans qu'il eût besoin, le plus souvent, de contrôler ses calculs par écrit ou de fixer ses démonstrations sur le papier. Il attendait que la vérité fondit sur lui comme le tonnerre, et il comptait sur son exellente mémoire pour la conserver ».

D'autre part « Au lieu de suivre une marche linéaire, son esprit rayonnait du centre de la question qu'il étudiait vers la périphérie. De là vient que dans l'enseignement et même dans la conversation ordinaire, il était souvent difficile à suivre et parfois semblait obscur. Qu'il exposât une théorie scientifique, ou qu'il contât une anecdote, il ne commençait presque jamais par le commencement, mais *ex abrupto* il lançait en avant le fait saillant, l'événement caractéristique, ou le personnage central, personnage qu'il n'avait point même pris le temps d'introduire et dont parfois son interlocuteur ignorait jusqu'au nom ».

« Cette tournure d'esprit explique comment la pensée d'Henri Poincaré a pu être si agile et s'appliquer à tant d'objets différents, comment, par suite, il lui a été possible de satisfaire une curiosité presque universelle ».

« Habitué à négliger les détails et à ne regarder que les cimes, il passait de l'une à l'autre avec une promptitude surprenante et les faits qu'il découvrait, se groupant d'eux-mêmes autour de leur centre, étaient instantanément et automatiquement classés dans sa mémoire».

*
* *

Une œuvre aussi puissante valut à Henri Poincaré, de son vivant, les hommages les plus flatteurs du monde scientifique tout entier. Après l'élection à l'Académie des Sciences, après le prix du Roi Oscar II, c'est la médaille d'or de la Société Royale Astronomique de Londre, la médaille Sylvester de la Société Royale elle-même, la médaille Lobatchewsky de la Société Physico-mathématique de Kasan, le prix Bolyai de l'Académie Hongroise des Sciences.... Une longue suite d'Académies ou d'Universités étrangères l'admettent à titre de membre étranger, ou de correspondant, ou de docteur *Honoris causa*. C'est aussi toute une série d'invitations de l'étranger à exposer ses idées et ses travaux, dans un temps où ces invitations étaient rarissimes. Henri Poincaré les acceptait d'autant mieux qu'il fut un voyageur infatigable et qu'il savait tirer de ses voyages le plus grand profit

*
* *

Une vie exemplaire, régulièrement appliquée à la méditation, détendue par les joies de l'art, au milieu d'une famille parfaitement unie, s'appliquant à faciliter le travail de son chef; des confrères, des collègues, des élèves, fervents admirateurs d'une œuvre magnifique et d'un homme simple et bon, tout semblait promettre à Henri Poincaré une longue et heureuse vieillesse. Hélas !

Des ennuis de santé répétés ne pouvant être écartés qu'au prix d'une opération chirurgicale sévère, mais sans gravité spéciale, on la pratique avec succès le 9 juillet, et le malade était en pleine convalescence lorsqu'une embolie le terrassa le 17 juillet 1912.

« Le cerveau vivant des sciences rationnelles » dit alors Painlevé, avait cessé de vivre. Et il ajoutait : « ... Il a tout pénétré, tout approfondi. Inventeur incomparable, il ne s'est pas borné à suivre ses inspirations, à ouvrir des voies inattendues, à découvrir dans l'univers abstrait des Mathématiques mainte terre inconnue. Partout où la raison d'un homme a su se glisser, si subtils, si hérissés qu'aient été ses chemins, qu'il s'agît de télégraphie sans fil, de phénomènes radiologiques ou de la naissance de la Terre, Henri Poincaré s'est glissé près de lui pour aider et prolonger ses recherches, pour suivre le précieux filon ».

« Avec le grand mathématicien français disparaît donc le seul homme dont la pensée fût capable de faire tenir en elle toutes les autres pensées, de comprendre jusqu'au fond, et par une sorte de découverte renouvelée, tout ce que la pensée humaine peut aujourd'hui comprendre. Et c'est pourquoi cette disparition prématurée, en pleine force intellectuelle, est un désastre ».

L'Académie des Sciences, en éditant ses œuvres complètes, a voulu lui élever le seul monument qui fût digne de lui. Cette édition, nous l'espérons, sera terminée pour le centenaire de la naissance de l'illustre savant. Elle attestera que Nancy et la Lorraine peuvent légitimement s'enorgueillir de le compter parmi leurs fils.

C. — L'APRÈS-MIDI DU SAMEDI 22 MAI 1954 A L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

A la fin de l'après-midi du samedi 22 mai, l'Université de Nancy honorait la mémoire de Henri Poincaré au cours d'une séance solennelle tenue dans la salle d'honneur de l'Université. Cette séance était présidée, elle aussi par M. Maurice Lemaire, assisté de M. le Recteur Capelle.

Après quelques mots d'introduction dits par M. Gaston JULIA, qui a analysé les raisons qui avaient amené Henri POINCARÉ à se poser la question des fondements de la Science et de la valeur que, en toute rigueur, il fallait leur attribuer, M. René POIRIER, Professeur à la Sorbonne a fait une conférence sur *Henri Poincaré et le problème de la valeur de la Science* qui constitue une étude très poussée et très profonde de la pensée de Henri POINCARÉ et des développements qu'elle a suscités.

ALLOCUTION DE M. GASTON JULIA

A L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

MONSIEUR LE MINISTRE,
MONSIEUR LE RECTEUR,
MESDAMES, MESSIEURS,

Ce qui, pour les scientifiques, donne du prix aux études d'Henri POINCARÉ sur la Philosophie des sciences, c'est qu'elles sont le fait de quelqu'un qui a beaucoup pratiqué, et avec le plus grand succès, les sciences dites exactes. C'est pour la même raison que l'*Introduction à la médecine expérimentale* de Claude BERNARD est, dans un autre domaine, un document d'une inestimable valeur.

Essayons de comprendre pourquoi Henri POINCARÉ devait être amené à de telles études.

Il commence ses immortels travaux mathématiques dans une période où s'éclaircit le mystère de la *Géométrie non euclidienne* qui préoccupe depuis si longtemps les géomètres. BOLYAI et LOBATCHEWSKY, ignorant d'ailleurs les travaux non publiés de GAUSS, ont donné des constructions logiques, et sans contradiction apparente, de Géométrie non euclidienne où le postulatum d'EUCLIDE n'est pas vrai; CAYLEY, KLEIN et RIEMANN en donnent des images représentatives très simples.

L'une de ces représentations, qu'il a d'ailleurs fortement améliorée, lui sert d'instrument fondamental pour la construction de ses groupes fuchsiens.

C'est aussi le temps où Sophus LIE a posé les bases de sa *théorie des groupes continus de transformation*, et où Félix KLEIN a montré que chaque type de Géométrie, c'est-à-dire d'étude d'une classe de propriétés des figures, est l'étude des propriétés de ces figures qui restent invariantes pour les transformations d'un *certain groupe caractérisant la Géométrie*. La *Géométrie projective*, traitée par Poncelet, indépendamment de la notion de groupe, avait d'ailleurs familiarisé les esprits avec ces idées et montré le rôle fondamental de l'invariant caractéristique appelé rapport anharmonique de quatre points en ligne droite.

D'autre part, la reprise, sur des bases logiquement plus sûres et plus générales, de la construction d'Euclide a déjà provoqué de nombreux travaux, qui aboutiront vers 1900 au livre fameux d'Hilbert sur les *Fondements de la Géométrie*.

En Analyse, les critiques, par Weierstrass et Du Boisreymond, des notions antérieurement admises par Riemann et d'autres, sur des bases, plus ou moins intuitives, provoquent une floraison de recherches, notamment sur le *problème de* Dirichlet (et celles d'Henrt Poincaré lui-même), jointes aux recherches sur la *théorie des ensembles* de Cantor, de Camille Jordan, de leurs disciples français Borel, Baire et Lebesgue ; toutes ces recherches ont affirmé une prise de conscience plus précise de la nécessité de reconstruire les Mathématiques sur des bases logiques sûres, à partir des éléments et des résultats livrés par l'expérience et l'intuition.

En Astromomie, Poincaré fait la critique des méthodes anciennes, jusqu' alors pratiquement suffisantes, mais dont plus d'une est mathématiquement sans rigueur.

Quant à la Physique, l'époque 1870-1900 est, comme on sait, une époque de bouversements et d'essor constructif extraordinaire, où les anciennes et nouvelles théories sont constamment remises en question et dévoilent progressivement leurs points faibles à la lueur de faits nouveaux.

Cet aperçu à grandes lignes du climat scientifique dans lequel Henri Poincaré accumule ses immortelles découvertes explique qu'il ait été forcé, à chaque instant, de s'interroger sur la valeur des méthodes employées, sur le rôle des hypothèses faites, et d'abord sur la mise sous forme explicite de ces hypothèses elles-mêmes, parfois implicitement ou confusément admises, sur le rôle des postulats, des conventions, de la « commodité ». On s'explique ainsi qu'il ait été conduit à analyser les raisonnements employés eux-mêmes, l'ordonnance et le rôle des chaînes de syllogismes dans la conduite d'une démonstration.

Les idées et les techniques qu'il a ainsi dégagées d'une pratique personnelle constante et infiniment heureuse de la recherche mathématique ou physique, et de la profonde compréhension qu'il eut des recherches des autres, sont celles qu'il a exposées dans ses livres de Philosophie scientifique, et c'est pourquoi nous attachons à ces livres un grand prix.

Sans doute, on a été, depuis 50 ans, beaucoup plus loin que lui dans la finesse des analyses et dans les constructions purement logiques de la Géométrie, de l'Analyse, et de l'Arithmétique, qui d'ailleurs l'intéressaient moins que l'étude des phénomènes de la Nature. Mais, d'une part c'est la destinée des chercheurs d'être dépassés par leurs disciples, et d'autre part c'est bien souvent en s'appuyant sur lui que l'on a pu le contredire ou le critiquer.

M. le Professeur POIRIER va nous dire ce qu'Henri POINCARÉ représente, à l'heure actuelle, pour les philosophes. Pour les mathématiciens, il reste un maître à penser que nous aimons à placer à côté de DESCARTES et de d'ALEMBERT, dans le Panthéon de ces philosophes qui ont rendu clairs à tous, les éléments de pensée inclus dans les méthodes que nous employons tous les jours.

CONFÉRENCE DE M. R. POIRIER

A L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

Henri Poincaré et le problème de la valeur de la Science.

Il est à la fois facile et difficile de parler de la philosophie de Henri POINCARÉ. Sa pensée est en effet si précise et si claire, elle s'appuie sur des exemples si lumineux et si frappants, dans leur simplicité, qu'à la réexposer, on craint de l'abîmer et qu'on préférerait souvent citer. Elle est, par ailleurs, dans l'ensemble, demeurée fidèle à elle-même; tout au plus a-t-elle évité sur le tard certaines formules que des lecteurs enthousiastes avaient mal interprétées. Elle est bien délimitée : Henri POINCARÉ a voulu s'en tenir à quelques sujets où son autorité est incomparable : le raisonnement mathématique, la théorie de l'espace, la valeur de la théorie physique. Et il est malheureusement mort prématurément, alors que les grands créateurs comme lui attendent souvent la vieillesse pour philosopher, au sens le plus large.

Ses thèses sont avant tout critiques et modérées, et l'on oublie parfois qu'elles sont de lui, tant elles semblent exprimer la raison impersonnelle, qui se révèle par la Science. Sur ce point, il fait à Henri BERGSON une remarquable antithèse : c'est qu'il y a en Philosophie deux familles de très grands esprits. Les uns sont grands parce qu'ils représentent avec une force et une audace extrêmes des problèmes, des méthodes, des types de solutions, qui nous obsèdent, une aventure intellectuelle à laquelle nous ne pouvons renoncer, en dépit d'éternels échecs, une sorte d'essence de notre inquiétude et de notre idéal intellectuel. Ils nous ouvrent la route vers les sources et, même si cette route se révèle impraticable ou nous ramène en arrière, leur exploration aura été féconde, ils nous auront ouvert un chemin que nous reprendrons tôt ou tard, avertis par leur exemple. Nous pouvons rejeter leurs solutions, juger leur position intenable, leur souffle nous inspire et nous pensons par eux, alors même que nous croyons penser contre eux. On peut rejeter la liberté bergsonienne, la distinction des deux mémoires, la perception sur les choses, l'intuition de la durée, le rôle d'écran du cerveau, la genèse idéale de la matière à partir de l'élan vital, BERGSON reste vivant en nous, comme DESCARTES dont chaque théorie est vulnérable et dont l'œuvre est incomparable.

D'autres, au contraire sont grands parce qu'ils ont raison et ils constituent ces places fortes où l'esprit se replie, après une aventure intellectuelle, et d'où il pourra repartir. Ils représentent en général un rationalisme critique et nous enseignent une vérité définie, directe, solide à laquelle on ne peut reprocher en général que d'être partielle. Tel fut Emmanuel KANT et, tout près de nous, Henri POINCARÉ lui-même. Nous voudrions montrer comment la doctrine de celui-ci reste valable pour nous et comment nous revenons toujours à elle. Nous considérerons ici ses idées sur la valeur de la Science et principalement de la théorie physique.

Ces idées se sont traduites, dans ses premières études, en des formules bien connues : la vérité-commodité, le caractère conventionnel des principes, les lois comme définitions déguisées, l'équivalence des hypothèses et des théories.

Les théories physiques, dit-il, ne prétendent pas toucher la texture profonde de la réalité, pas plus que nos jugements sur la couleur ou le son ne prétendent exprimer la nature spécifique et individuelle de nos sensations, et nous ne saurions atteindre la substance des phénomènes, mais seulement leurs rapports objectifs et communicables. Elles reposent sur un ensemble d'hypothèses, constituant un langage dont les concepts sont le vocabulaire et les lois de la syntaxe. Prises en elles-mêmes, ces hypothèses ne sont que des conventions, dont les plus fondamentales constituent, plus ou moins explicitement, la définition même des objets théoriques qu'elles font intervenir. Prises, par contre, dans leur valeur objective, elles ne se justifient que solidairement, et par leur valeur expérimentale. Si l'on modifie l'une d'elles, il faut corrélativement modifier les autres, si bien qu'aucune d'elles n'est séparément vérifiable, ni vraie, mais qu'elle n'est pas non plus séparément réfutable, ni fausse.

La vérification d'une théorie dans son ensemble est d'ailleurs toujours imparfaite, car elle fait intervenir des hypothèses adventices, des simplifications, des interprétations implicites, et, comme savant, Poincaré s'est plu à montrer souvent que les raisonnements comme celui de Laplace sur la vitesse de la gravitation, des interprétations comme celle de l'expérience de Wiener touchant le plan de vibration d'une lumière polarisée ne prouvaient rien, en raison des hypothèses gratuites que l'on utilisait.

Nous n'atteignons donc jamais que des probabilités en cette matière, mais cela est tout naturel, car une théorie n'est qu'un moyen d'ordonner et de prévoir des faits expérimentaux, et ne se justifie qu'*a posteriori* par sa fécondité et sa valeur d'anticipation. Elle n'est donc pas vraie au sens accoutumé et dogmatique, mais suggestive, utile, en un mot commode.

Ce sont là des notations assez analogues à celles des pragmatistes. Mais, pour Poincaré, la commodité n'est pas simplement adaptation aux prévisions empiriques, elle est aussi commodité subjective, mentale. Il y a des notions plus naturelles, plus simples, plus satisfaisantes pour l'esprit, et nous retrouvons ici une sorte de rationalité plus pragmatique que dogmatique, exprimant les désirs d'un esprit plus industrieux que législateur.

Plusieurs théories peuvent exprimer les phénomènes. Parfois elles y réussissent inégalement; l'une traduit mieux certaines expériences, l'autre certaines autres; elles ont alors chacune leur valeur, chacune leur vérité. Parfois, au contraire, elles sont sensiblement équivalentes et nous ne pouvons choisir entre elles que pour des raisons théoriques.

Or, certaines hypothèses sont systématiquement préférées et érigées, par libre décision, en vérités définitives : on les appelle des principes. Elles caractérisent des schémas théoriques que l'on est décidé à sauver au prix d'artifices convenables. Ainsi, la conservation de l'énergie est un principe, parce que nous convenons implicitement d'introduire autant d'espèces d'énergies nouvelles qu'il en faudra pour qu'il se vérifie en toute circonstance; le caractère euclidien de l'espace est un principe, parce que nous interpréterons de parti pris les mesures donnant des résultats non euclidiens comme dues à une modification des corps matériels, au sein d'un espace immuable; la constance même des lois de la Nature est un principe, puisque, d'une part, en ce qui touche le passé, c'est justement en la supposant que nous reconstruisons ce passé, d'autre part, en ce qui touche l'avenir, nous ferons toujours appel, au cas où elle semblerait démentie, à des circonstances nouvelles et et à des facteurs cachés qui la rétabliront. C'est ici que le caractère conventionnel de la Science se révèle le plus nettement, étant donné qu'on ne saurait invoquer ici des exigences *a priori* de l'esprit.

De telles pensées n'étaient pas, même à son époque, entièrement propres à Henri Poincaré; elles traduisaient une sorte de doctrine commune, suggérée par le progrès de la Physique et le conflit de l'énergétique et du mécanisme. Elles s'opposaient aux apriorismes anciens et aussi à l'espérance que l'on peut appeler positiviste de remonter sûrement et méthodiquement des faits aux lois, par régression régulière. Ce que l'on peut dire, c'est que l'auteur de *Science et Méthode* les a formulées avec une fermeté et une profondeur si remarquables, les a illustrées par des exemples si convaincants, que l'expression en semble définitive et porte à juste titre son nom.

Elles suscitèrent cependant une exégèse et un débat dont il faut ici dire un mot.

Vers la fin du XIX[e] siècle, une réaction s'était produite contre le « Scientisme », suivant lequel la Science allait incessamment apporter une vérité définitive touchant la Nature, fondée sur la seule expérience, et résoudre, accessoirement, tous les problèmes humains. Le matérialisme dogmatique de certains biologistes, les théories mécanistes de certains physiciens offraient déjà leur Évangile. Assurément, ce n'étaient pas en général les très grands savants qui défendaient ces thèses, elles n'en avaient pas moins obtenu un grand succès. Inversement, leurs adversaires (et l'on songe à l'article de Brunetière sur *La faillite de la Science*) portèrent la guerre sur deux terrains : d'abord sur celui des prolongements idéologiques : Morale, Métaphysique, Religion, où ils n'eurent pas grand'peine à montrer que les extrapolations de la Science positive n'allaient pas très loin et n'étaient pas très solides, ensuite sur celui de la Science elle-même, et ils prétendirent prouver qu'elle n'obtenait pas les résultats proclamés, qu'elle n'atteignait pas cette vérité dont elle se faisait gloire; et ici les arguments et même la bonne foi furent parfois beaucoup plus faibles. Cependant de grands esprits prirent parti en ce sens et voulurent limiter les droits et la valeur de la Science positive afin d'ouvrir, ou de rouvrir, d'autres chemins vers la vérité. Qu'il me suffise de citer, en France, Pierre Duhem et Édouard Le Roy.

Édouard Le Roy, dans la flamme de sa jeunesse et de sa généreuse intelligence, donna aux formules de Poincaré une interprétation et une portée imprévues, inspiré par la philosophie pragmatiste et bergsonienne, par le renouveau du spiritualisme chrétien et par sa propre originalité. Il prit au sens fort le mot de convention et, pour lui, toutes les lois physiques devinrent des définitions déguisées, si bien que, devenant irréfutables, elles cessaient *ipso facto* d'être vraies. N'importe quelle convention peut être accordée avec l'expérience, puisqu'on peut toujours, par des hypothèses complémentaires et des causes cachées, concilier la théorie et l'observation. Les êtres de la Science théorique ne sont donc pas imposés par les faits, ils sont librement choisis par l'esprit et ne correspondent à aucune réalité objectivement déterminée : la Science, et surtout la Physique, est une construction artificielle, qui ne dit rien de vrai sur la Nature des choses. Elle est un discours sur cette Nature, et n'en est pas l'image, et cela n'est pas vrai seulement des grandes théories sur la matière ou l'Univers, mais des faits les plus simples, les plus élémentaires, qui sont pétris de théorie, d'interprétation, d'ontologie et sont par là foncièrement relatifs à nos conventions de langage, à nos libres procédés de description. D'où l'affirmation célèbre : le savant crée le fait théorique et, comme tous les faits sont foncièrement théoriques, il crée le fait scientifique.

La vérité de la Science n'est donc bien que commodité, mais le mot est pris cette fois en un sens étroit et péjoratif : la Science est commode pour prévoir, c'est-à-dire pour agir. Elle est un discours pratique, un formulaire d'action, un système de recettes, elle n'a qu'une valeur d'efficience, elle nous permet de parler utilement des phénomènes, non de les penser ou de les connaître dans leur être réel [1]. Il faut noter, d'ailleurs, que son artifice prolonge l'artifice même de l'intelligence, qui morcèle et solidifie le réel en le conceptualisant et en laisse échapper la vie et la signification essentielle. Mais

---

[1] Nous retrouvons dans ces expressions sans doute excessives certaines formules de Pierce et de ses successeurs, qu'il ne faut d'ailleurs pas prendre à la lettre ni confondre avec les outrances absurdes d'un Prezzolini

É. Le Roy n'entend pas s'en tenir à une critique négative, et ce déblaiement un peu brutal ouvre, dans son esprit, la voie à une nouvelle spiritualité et un nouvel ordre du connaître.

Henri Poincaré s'inquiéta cependant et exposa avec une parfaite clarté les réserves à faire touchant ce néo-nominalisme en même temps que les limites de ses propres thèses.

Si l'action réussit, fit-il observer, c'est que les énoncés de la Science reflètent une certaine structure objective des phénomènes et qu'ils ont, dans leur ensemble, une espèce de vérité. Les faits élémentaires proprement dits, par opposition aux théories (où il fait entrer, il est vrai, la structure de l'espace, l'existence des atomes et même la rotation de la Terre), sont effectivement vérifiables, l'accord est unanime à leur sujet, ils ne sont donc en rien l'œuvre du savant; tout ce que celui-ci crée, c'est le langage dans lequel il les énonce et qui ne change rien de plus au fond des choses qu'une traduction du français en allemand ne change au fond la pensée de l'auteur. Les faits théoriques eux-mêmes sont bien des constructions conventionnelles, mais ils doivent être adaptés aux faits expérimentaux et s'il y a quelque latitude dans l'ajustement elle est fort réduite; en effet, il serait absurde pour sauver une convention d'introduire des hypothèses inutilement compliquées ou des causes dont l'expérience nous montrerait l'absence, ou si l'on préfère, dont elle se refuserait à nous montrer la présence. Quant aux principes mis, par convention, au-dessus du contrôle des faits, ils doivent être accordés à ceux-ci par un réseau de lois secondaires qui sont, elles, parfaitement déterminées, et ces principes, d'ailleurs rares en Physique, par cela même qu'ils sont irréfutables, sont, pris isolément, tout à fait vains. Il y a même une sorte d'antipathie de Poincaré à l'égard des principes, que l'on sauve trop aisément à coup d'hypothèses et d'un rafistolage des théories qui dispenserait d'une refonte totale, ce qui n'est pas sans embarrasser parfois le lecteur. — En fait, ajoute-t-il, s'il y a par ailleurs des hypothèses, des théories équivalentes au point de vue strictement logique et expérimental, nous arriverons tôt ou tard à choisir entre elles pour des raisons de simplicité, d'unité, de relativité, de fécondité, de rationalité diffuse : ainsi l'espace euclidien, étant le plus simple, sera toujours préféré. — Enfin, même dans le cas d'une équivalence complète, les théories en apparence opposées diffèrent par les mots qu'elles emploient et les images qu'elles évoquent, mais elles ont un élément commun, infiniment plus important que le reste : les équations mathématiques qui fondent nos prévisions et expriment les rapports essentiels qui sont, au fond, toute la vérité connaissable du monde physique, si bien que, sous des apparences diverses, nous n'avons réellement affaire qu'à une seule théorie.

Y a-t-il eu évolution à ce sujet dans la pensée de Poincaré? Dans les expressions peut-être, mais dans la pensée non, semble-t-il. On a plutôt le sentiment qu'il y a toujours eu en lui deux hommes : le philosophe qui formule des interprétations logiquement possibles, le savant qui juge certaines d'entre elles pratiquement infécondes et s'en désintéresse. Et, sans désavouer à proprement parler le philosophe, il redevient très vite le savant. En tout cas, par ces rectifications, que peut-être je formule d'une manière un peu systématique, il s'établissait sur une position extrêmement forte, mais beaucoup plus traditionnelle, et il faut avouer que s'il eût été d'emblée mieux compris on l'eût beaucoup moins invoqué. Le mot convention, dépouillé de son apparence d'arbitraire définitif, traduit plutôt la démarche de l'esprit qui invente ses théories et les propose au contrôle de l'expérience, au lieu de les extraire continûment des faits. L'œuvre du savant ressemble infiniment plus à celle d'un artiste qui dessine librement sur sa feuille et ne juge qu'après coup de la ressemblance avec le modèle (qui l'a tout de même inspiré) qu'à celle d'un photographe ou d'un radiologiste qui, en perfectionnant leurs appareils et leurs méthodes, obtiendraient des clichés de plus en plus parfaits et détaillés.

Maintenant, on peut se demander si, dans ces conditions, la thèse de Poincaré n'est pas à son tour à double tranchant ou, si l'on préfère, trop facilement gagnante. En effet, s'il y a des théories équivalentes, elle est confirmée; mais elle ne l'est pas moins si, au bout du compte il y a toujours une théorie qui l'emporte.

Il faut avouer aussi que l'on se sent un peu perplexe, devant ce débat : est-ce que vraiment É. Le Roy pouvait contester l'objectivité de la Science, définie en des termes aussi modérés? Ne s'agit-il pas, à certains égards, d'un problème de notations ou d'un débat quasi sentimental, qui ferait un peu songer, si l'on osait être familier, à celui de l'Irlandais et de l'Écossais : l'un se réjouit de ce que la bouteille soit encore à moitié pleine, l'autre se désole de ce qu'elle soit déjà à moitié vide, mais sur le fait ils sont d'accord.

Il s'agit tout de même de quelque chose de très important.

Si, pour É. Le Roy, la Science réussit comme artifice, échoue comme vérité, c'est qu'à ses yeux elle a pour fin naturelle une vérité au sens fort et, chose curieuse, Meyerson, si différent de lui par ailleurs, lui donnerait sans doute raison sur ce point : un énoncé scientifique fait toujours allusion à une structure ontologique; or, s'il en est ainsi, deux hypothèses logiquement et empiriquement équivalentes peuvent tout de même signifier quelque chose de très différent, et ce n'est pas rien, à cet égard, qu'une différence de langage. Nous ne savons pas ce qu'est une onde électromagnétique ni d'ailleurs ce qu'est un photon, mais nous avons le sentiment que c'est quelque chose de distinct et, même si une idée a toujours quelque chose qui reste à élucider, elle n'en a pas moins dès maintenant certains caractères originaux. Un petit aimant et un petit courant circulaire sont équivalents, mais n'y a-t-il aucun sens à se demander si les aimants ne sont pas autre chose que de petits courants. Parler avec un homme, ce n'est pas tout à fait la même chose que parler avec un corps humain; dire que l'âme ou Dieu existent, ce n'est pas tout à fait la même chose que de reconnaître un ordre intelligent dans les gestes de notre corps ou le cours de l'Univers. Autrement dit, les mots ont un sens qui dépasse l'expérience positive et les mesures effectives, ils font allusion à une réalité, ils sont des prophètes d'une vérité qui peut-être se précisera. S'il en est ainsi, choisir un langage avec ses implications secrètes, c'est bien faire une convention au sens fort, et, si diverses conventions restent possibles, c'est que la Science est, sinon irréelle, au moins imparfaitement réelle; ses succès sont immenses, mais à la surface du monde; un au-delà demeure, en profondeur, qui est essentiel et auquel nous nous référons inévitablement. Or, la Science n'y atteint pas.

A ce désir de transcendance, Henri Poincaré oppose un rationalisme plus positif, plus confiant, plus modeste aussi; moins exigeant quant à l'idéal de la Science, il est plus optimiste quant à ses résultats et l'œuvre humaine de la raison lui semble une destinée suffisante pour l'esprit; ce qui est échec pour É. Le Roy est victoire à ses yeux, car, comme disait déjà Montaigne, il s'agit de bien faire l'Homme

Cette attitude non plus ne lui est pas personnelle. Peut-être la manière dont il a servi la Science et la Pensée humaine a-t-elle quelque ressemblance avec celle dont un autre homme illustre, qu'il est naturel d'évoquer aujourd'hui, en cette ville, et qui était son propre cousin, a servi la France dans l'ordre juridique et politique : rationalisme à tendance spiritualiste plutôt que religieuse, humanisme et philosophie des lumières plutôt qu'élan métaphysique.

Beaucoup, en tout cas, étaient de cœur avec lui, parmi ceux, savants ou philosophes qui créèrent et animèrent, à la fin du siècle dernier, la *Revue de Métaphysique et de Morale*, où parurent ses études les plus célèbres. Pour les uns c'était une attitute spontanée, qu'ils n'érigeaient pas en système; tandis que d'autres tentaient de construire un idéalisme aux formes diverses qui pût justifier en lui donnant sa charte cet humanisme de la Raison inspirée et informée par la Science. Et cette génération, celle de nos maîtres, a été incomparable.

Peut-être la nôtre est-elle, dans l'ensemble, métaphysiquement plus inquiète. Elle chercherait volontiers en cette merveilleuse intelligence, curieuse de toutes les sciences, parlant tous les langages, chez cet homme si sensible, bien qu'il fût parfois gêné de le montrer, si musicien et connaissant si bien Pascal, un peu de nostalgie de l'être, un peu de soif du transcendant. Pourtant nulle phrase de ses œuvres, nul trait de sa vie ne permettent de croire qu'il eût plus tard incliné à de tels soucis, à de telles pensées. Dans sa belle conférence sur la Morale et la Science, il montre bien comment la Science, par la pratique de certaines vertus, crée un climat moral, encore qu'elle soit aussi incapable de fonder une Éthique que de s'opposer à elle; mais il semble admettre que cette morale se fonde d'elle-même et naît spontanément de notre conscience. Ici encore, c'est à la Raison qu'il se confie et il ne fait même pas allusion à des sources transcendantes possibles et peut-être nécessaires de la vie morale.

Qu'est-il advenu des thèses de Poincaré? Inspirent-elles l'épistémologie contemporaine, sont-elle confirmées par elle, ou celle-ci s'oriente-t-elle vers d'autres voies?

Il est bien difficile, assurément, de parler de l'épistémologie actuelle comme d'une doctrine définie et cohérente; elle présente cependant quelques traits généraux qui, dans une certaine mesure, permettent de répondre à notre question.

Tout d'abord, il est un point sur lequel l'accord est facile, c'est la description même du procédé de pensée, ce que l'on peut nommer le bond épistémologique. On n'extrait pas de l'expérience les concepts et les lois théoriques par une sorte de distillation intellectuelle, il faut poser, par convention, des hypothèses de moins en moins intuitives, de plus en plus formelles, et nos concepts tombent en défaut quand on change l'échelle à laquelle ils ont été primitivement définis. La théorie physique va au-devant de l'expérience et ne se justifie que par son accord final et global avec elle. Loin de reconstruire, d'autre part, la Nature à l'aide d'idées claires et distinctes, le savant multiplie les schémas mathématiques dont il identifie après coup les variables à des grandeurs physiques, souvent d'une manière indirecte. Le sens et la raison de ses formules n'apparaissent qu'après coup, si bien qu'à une épistémologie classique du développement progessif des notions on peut opposer une épistémologie de l'identification rétrospective des jugements. Or, c'est là une chose très importante pour un philosophe, car cela correspond à une idée assez paradoxale, mais dont il est difficile de se passer : c'est qu'un énoncé peut être vrai alors que le sens en est encore imparfaitement déterminé, ou que sa vérité s'actualisera au fur et à mesure que sa signification se précisera, se définira. Ce qu'un auteur anglo-saxon ne manquerait pas de traduire en disant que l'on peut être dans le vrai sans savoir de quoi on parle. C'est là une manière de revenir, contre Descartes, à une certaine primauté de l'existence sur l'essence, dans l'ordre même du connaître.

Par ailleurs, la théorie physique ne se justifie que par des critères imparfaits, expérimentaux ou rationnels, nos inductions ne sont que probables et la logique de l'induction est une logique de la composition des arguments et des vraisemblables. En ce sens, toute l'épistémologie actuelle est bien conforme au pragmatisme de Poincaré, suivant sa double norme d'exactitude empirique et d'esthétique rationnelle.

Mais deux points méritent un examen particulier : l'équivalence des hypothèses et la possibilité des explications mécaniques, les critères de rationalité et l'idée même de la raison scientifique.

Les théories nouvelles ont fourni au premier thème l'occasion de développements nouveaux. En particulier, les remarques de Poincaré sur l'indétermination Physique-Géométrie s'appliquent exactement à la Relativité générale : on peut dire indifféremment que l'espace-temps se déforme et cesse d'être euclidien, ou que, dans un espace-temps euclidien immuable, les mètres et les horloges sont modifiés, ainsi que les phénomènes physiques qui se règlent naturellement sur eux : il n'y a là qu'un passage de langage riemannien au langage cayleyen. De même, en Relativité restreinte, il revient au même d'admettre un espace-temps absolu, et de dire que les espaces-temps propres des systèmes en inertie correspondent à des mesures de lumière, sur lesquelles se règlent naturellement les phénomènes observables, ou de dire qu'il n'y a pas d'espace-temps fondamental, et que tous les systèmes propres sont non seulement indiscernables expérimentalement, mais égaux, si j'ose dire, en dignité ontologique. Mathématiquement, c'est la même équivalence que celle des excentriques et des épicycles, si connue depuis l'antiquité. Si l'on préfère une hypothèse à l'autre, c'est uniquement pour des raisons épistémologiques ou philosophiques, les mêmes qui ont alimenté, au temps de Newton, les débats de Leibniz et de Clarke sur l'action à distance et l'espace absolu. Et, en fait, la Relativité restreinte ne fait qu'étendre aux phénomènes électromagnétiques, plus généralement aux phénomènes se propageant à vitesse finie, les conditions de Relativité que la Physique newtonienne avait établies pour les actions mécaniques à distance.

De même, l'expérience nous contraint d'admettre une masse variable, si l'on conserve l'expression traditionnelle de la Dynamique et la valeur de la force d'attraction électrostatique ou gravifique; mais la masse redevient invariable si l'on prend les dérivées par rapport à l'intervalle d'Univers, comme il est normal, et si l'on donne aux forces l'expression convenable.

On peut de même interpréter l'expansion de l'Univers, supposée réelle, soit comme une expansion de l'espace même entraînant les nébuleuses (dont on se demande d'ailleurs pourquoi elles ne s'agrandissent pas en même temps que l'espace), soit comme une dispersion des nébuleuses à partir de l'explosion initiale (les vitesses initiales étant alors la cause des distances). Sans parler de l'hypothèse d'une altération progressive du temps en général, au sens de de Sitter, ou du temps propre aux atomes rayonnants, à la manière de Milne, et même des explications proprement physiques qui gardent malgré tout des possibilités.

On a même pu rêver de généraliser cette doctrine de l'équivalence et de l'appliquer systématiquement à la fameuse dualité du langage ondulatoire et du langage corpusculaire. Il eût été bien satisfaisant de trouver un principe de correspondance généralisé, un dictionnaire permettant d'exprimer toute propriété ondulatoire sous forme corpusculaire et inversement, si bien que le choix du langage eût été une simple affaire d'opportunité, certaines propriétés se simplifiant, certaines démonstrations s'abrégeant, les unes dans le langage des ondes, les autres dans celui des corpuscules, comme certains théorèmes géométriques s'expriment plus aisément en coordonnées ponctuelles, d'autres en coordonnées tangentielles. C'est ainsi que l'analogie entre le déplacement d'un corps et celui d'une énergie de champ ou autre mène naturellement à envisager dans les deux cas un moment cinétique et, indirectement, à identifier la masse propre du corps et l'énergie au repos. Cependant, la Nature résiste, et il y a parfois une véritable antinomie entre les phénomènes qui s'expriment naturellement dans un langage et ceux qui s'expriment dans l'autre, et il faut alors refondre entièrement les théories et trouver un autre point de vue. C'est ainsi que la Relativité restreinte est faite pour accorder l'invariance de la vitesse de la lumière dans les systèmes propres liés à diverses sources en mouvement relatif (toute naturelle dans l'hypothèse de l'émission) avec celle de la même vitesse dans le cas d'un système unique, observant la lumière émise par diverses sources en mouvement relatif (toute naturelle dans l'hypothèse des ondulations).

La Mécanique ondulatoire, de son côté, essaie de concilier les propriétés interférentielles avec les propriétés quantiques des phénomènes, mais, si, en apparence, elle semble donner une sorte de primauté aux corpuscules, dont on ne calcule plus que la probabilité de présence dans un certain domaine ou un certain état, cette probabilité elle-même suit une loi d'allure ondulatoire, dont on voit mal actuellement le fondement mécanique : l'onde de probabilité impose à des éléments de type mécanique des modes de devenir provisoirement irréductibles.

Sera-t-il possible d'unifier ces aspects dans le cadre d'une théorie déterministe de type classique, c'est, on le sait, un problème actuellement fort controversé et fort important, car la solution de l'indéterminisme radical, dans la mesure où elle est pensable, nous ramènerait à des vues aristotéliciennes, entièrement contraires à tout ce que la Science considérait jusqu'à ce jour comme acquis en matière d'épistémologie.

Et c'est ici qu'on voudrait avoir l'aide de H. Poincaré. Il avait montré à plusieurs reprises que, lorsqu'un système d'équations satisfait à certaines conditions, il est toujours possible d'en donner un modèle mécanique, et même une infinité, sans entraîner toutefois la conviction de Langevin, par exemple en ce qui concerne les lois de l'Électromagnétisme. Il est probable qu'il eût admis la possibilité de trouver un fondement mécanique, par introduction d'un infradéterminisme et de paramètres cachés, aux lois de probabilité de la Mécanique ondulatoire et sans doute eût-il, dès le début, délimité exactement les conditions et la portée de la démonstration de von Neumann, comme il avait, autrefois, montré les hypothèses implicites qui grevaient celle de Laplace sur la vitesse de la gravitation. Il est vraisemblable que les vues actuelles de M. L. de Broglie, comme celles d'Einstein ou de Schrödinger vont plus que les autres dans le sens de Poincaré.

D'une manière générale, donc, si, dans le premier enthousiasme d'une nouvelle exégèse, certains ont pu déclarer que les positions de *La Valeur de la Science* étaient dépassées, que la Relativité générale condamnait l'espace euclidien, la Mécanique ondulatoire, le déterminisme et l'explication mécanique, une critique plus réfléchie et moins enthousiaste montre au contraire combien les vues de Poincaré étaient solides.

Il est, par contre, un point sur lequel on serait tenté, au premier abord, de faire quelques objections à Henri Poincaré ; c'est ce que j'ai appelé tout à l'heure son optimisme rationaliste.

Arrivons-nous à donner une forme précise et définitive à ces considérations d'invariance, de continuité, de simplicité, de relativité, de rationalité au sens le plus large et le plus pragmatique, à ces principes généraux qui guident notre choix entre les théories et fondent l'éventuelle unité de la Science ?

Henri Poincaré lui-même a longuement analysé ce qu'il nommait « la crise des principes » et en a montré, à son époque, la gravité, mais il paraît avoir eu toute confiance en l'avenir pour rétablir l'ordre et l'unité rationnelle dans la Science, et sans doute a-t-il été confirmé en bien des points par cette refonte totale qu'il appelait et prévoyait : la théorie relativiste.

Mais bien des irrationnels demeurent et se sont même ajoutés. Surtout, c'est la notion même de rationalité qui chancelle. Le grave, ce n'est pas le conflit de nos désirs et de l'expérience, où Meyerson voyait le drame épistémologique, c'est que nous ne savons plus bien ce que nous désirons et que la raison, à force d'être plastique, devient insaisissable.

La Science a pris de nos jours l'aspect d'un immense chantier et, sous tant d'échafaudages dispersés, comment deviner si un édifice unique et définitif s'établira bientôt ?

Par exemple, nous sommes obligés de convenir que, si l'interprétation ontologique d'un espace-temps incurvé, au sens riemannien, ne s'impose pas logiquement, on ne peut dire inversement que la simplicité de l'hypothèse euclidienne rende celle-ci universellement préférable et pratiquement inébranlable, et sur ce point H. Poincaré s'est sans doute un peu avancé. L'enthousiasme même avec lequel beaucoup de jeunes physiciens et quelques philosophes avertis ont cru voir dans l'emploi d'un ds^2 non euclidien et dans la substitution d'une application géométrique, par inertie généralisée, à une explication physique par l'action des forces, un progrès extraordinaire de l'intelligence et un type nouveau et définitif de rationalité montre que la simplicité, la rationalité d'une hypothèse sont des notions bien fragiles et que la conscience des principes intellectuels est aussi incertaine que la conscience morale. Il y a certainement beaucoup d'illusion dans cet enthousiasme et l'on s'étonnera sans doute un jour qu'un philosophe aussi profond qu'informé ait vu dans la Relativité générale la solution définitive du problème de l'action physique et du problème cosmologique, et l'Évangile du dernier âge de l'Intelligence, comme nous nous étonnons des espoirs de Renan, il y a un siècle, lorsqu'il croyait atteindre par la philologie l'origine des croyances humaines, le secret de l'esprit humain et la promesse de l'esprit futur. Mais le fait n'en est pas moins instructif, car il nous montre la relativité de nos principes rationnels et de notre esthétique intellectuelle.

Infeld prétend que nul mathématicien n'hésitera, du point de vue rationnel, entre un Univers sphérique et un Univers euclidien et qu'il choisira le premier. Je crains bien que cette préférence toute parménidéenne ne soit un peu affaire de mode, et qu'en tout cas elle s'applique mal à l'Univers elliptique, communément admis, mais il est clair que l'affirmation inverse de Poincaré n'est pas plus décisive. Est-il un exemple plus significatif à ce sujet que celui de la constante cosmologique qu'Einstein avait d'abord introduite dans sa loi de gravitation et qu'il a abandonnée comme irrationnelle dès que les travaux de Friedmann et de Lemaître le lui ont permis. Pendant ce temps, Eddington et d'autres grands savants se refusaient énergiquement à un tel abandon, la constance cosmologique correspondant à leurs yeux à ce qu'il y a de plus profond et de plus rationnel dans la théorie.

Nous vivons à une époque singulière où les statues les plus vénérables sont abattues ou se fendent d'elles-mêmes, dans la Science comme dans les arts.

Le principe de conservation de l'énergie, en absorbant celui de conservation de la masse, en s'adjoignant celui de conservation du moment cinétique, semblait avoir conquis la place suprême, et symbolisait le désir d'invariance qui caractérise l'esprit; des hypothèses comme celle de Bohr, Kramers et Slaters, qui le mettaient en défaut dans des circonstances très particulières et très provisoires, n'avaient pas été retenues par leurs auteurs; et voici que des cosmologistes comme Hoyle et d'autres proposent comme une chose naturelle une création continue d'énergie et de matière, sans se croire obligés d'en préciser les conditions et les causes, simplement parce qu'ils ont besoin de ce terme pour maintenir une uniformité locale au cours de l'expansion de l'Univers.

Ce n'est pas le seul cas où, après avoir réduit un principe à exprimer une exigence de l'esprit, un parti pris d'interprétation des phénomènes, au prix d'un nombre suffisant d'hypothèses accessoires, nous en arrivons à nous demander si nous y tenons tellement. Pendant longtemps on a considéré comme exprimant une exigence fondamentale de la raison le principe de Nernst, suivant lequel une théorie satisfaisante de l'Univers doit rendre possible et même prévisible le retour éternel, si bien qu'à un Univers historique, jouant sa destinée une seule fois à partir d'une seule origine, comme celui de la pensée chrétienne, s'opposerait un Univers cyclique, conforme à ce genre d'éternité dans le renouvellement qui était familière aux Grecs. Et c'est ce dernier Univers que la Science, prétendait-on, a naturellement pour idéal, la raison réclamant la réversibilité, comme dit Meyerson. Les cosmologies traditionnelles s'efforçaient donc, sans grand succès d'ailleurs, par l'artifice statistique des fluctuations ou par quelque autre comme le rêve d'un temps fermé, de trouver une genèse de l'Univers, à partir d'un état indifférencié, destiné à se régénérer lui-même. Comment tourner le principe de Carnot, tel était le problème. Mais que désirons-nous au juste aujourd'hui ? En fait, cet antihistorisme, cet anticréationnisme s'appuyait sur une image du temps et de l'espace homogènes, indéfinis, illimités, mais, celle-ci abolie ou pouvant l'être, nous sommes en face d'un conseil sans grand fondement théorique et qui, chose grave, n'est même plus à la mode. Aussi voyons-nous surgir des univers non statiques, en expansion, et des cosmologies pseudo-créationnistes.

Le principe même de raison suffisante est traité avec désinvolture, sinon dans son énoncé général, au moins dans les formes particulières qui seules lui donnent un intérêt pratique. La simple position temporelle ne pouvait autrefois altérer la marche d'une horloge, et nous considérons comme possibles des effets de vieillissement, en nous contentant d'une équivalence des moments du temps quant aux perspectives temporelles, et encore ! Nous ne jugeons pas absurde, *a priori*, que deux phénomènes isolés, de nature différente, soient synchrones à l'origine et cessent ultérieurement de l'être, comme il se passe dans la théorie de Milne.

Quant au principe de continuité, il subsiste en ce sens que la Mécanique ondulatoire est un artifice pour concilier la continuité de nos méthodes mathéthématiques avec la discontinuité des faits physiques élémentaires, mais il céderait aisément si nous trouvions un langage mathématique simple exprimant commodément une discontinuité de l'espace et du temps, qui déterminerait toutes les discontinuités proprement physiques.

Le principe même de simplicité est à bien des égards une exigence naturelle de l'esprit, soit qu'on l'interprète à la manière de Mach comme visant à une simple économie de pensée, soit qu'on lui donne une signification esthétique ou même métaphysique, qu'on en fasse une perfection au sens leibnizien. Mais cette simplicité est une notion bien fragile, elle dépend en général de l'état de notre langage mathématique, qui se modifie perpétuellement, parfois de simples conventions d'écriture (les conventions d'emploi des indices, notamment les indices muets, pour les tenseurs ont été de nos jours aussi fécondes que celles de Descartes pour la notation des variables) et aussi de certaines exigences de rigueur.

Si bien qu'il y a un résultat assez paradoxal, c'est que le plus solide parmi les principes dont le contenu est assez précis pour être efficace, c'est le principe de relativité, auquel Henri Poincaré attachait d'ailleurs un prix tout particulier, mais qu'il est bien difficile de considérer comme proprement rationnel. S'il s'agit de la relativité de la position spatiotemporelle, nous sommes en face d'un principe d'équivalence des origines spatiotemporelles, d'une homogénéité, au sens réduit, de l'espace et du temps, telle que nous la trouvons, par exemple, proclamée par Milne sous le nom de principe cosmologique, et admise en fait à peu près universellement. S'il s'agit de la relativité de la grandeur, la solution est moins évidente, puisque ce principe qui ne vaut que pour les propriétés purement géométriques, dans un espace admettant des figures semblables, risque fort d'être mis en défaut dans un Univers à rayon fini, où s'introduit une unité absolue de longueur, et peut-être même éventuellement une période temporelle finie. Quant à la relativité du mouvement, la signification n'en est plus très claire. Autrefois, en effet, elle était liée à un procédé général de description du monde suivant lequel le mouvement purement géométrique ne pouvait altérer aucune grandeur ni aucune force, toute variation apparente exigeant l'intervention de forces et de causes nouvelles proprement physiques, à substrat et à mécanisme matériels, susceptibles d'être mis en évidence par l'expérience. Or, sous cette forme, le principe ne joue plus et est remplacé par un principe de réciprocité des apparences et d'équivalence des systèmes de référence, valable seulement pour le mouvement uniforme relatif, et il est solidaire d'une affirmation proprement expérimentale : il est impossible de mettre en évidence le mouvement absolu uniforme. Et sans doute, avant même les expériences de Michelson ou de Trouton et Noble, on s'attendait à ce qu'il fût vérifié, mais sans pouvoir dire exactement pourquoi. Par ailleurs, il ne saurait être démenti, puisque tout mouvement mis en évidence pourrait être considéré comme relatif non à l'espace, mais à l'éther (quelque nom qu'on lui donne), ou à l'ensemble des masses matérielles. Enfin, si l'on accepte des accélérations absolues d'une part, des grandeurs absolues de l'autre, on voit mal pourquoi la Raison imposerait la relativité des mouvements uniformes. Il s'agit donc là, semble-t-il, d'un principe empirique de même nature que l'égale vitesse de la lumière et de la gravitation ou du caractère de limite de cette vitesse. Le plus curieux est qu'il réussisse !

On comprend donc comment beaucoup de savants peuvent aujourd'hui se désintéresser dans une certaine mesure et sans doute provisoirement de l'unité rationnelle de la Science et peuvent compléter, retoucher, transformer leurs formules sans un souci excessif des exigences théoriques ou même d'une cohérence logique rigoureuse. Ils remettent à plus tard les synthèses harmonieuses, sans être tout à fait sûrs qu'elles soient possibles. Ce sont des pragmatistes et des ingénieurs en théorie physique.

Nous pouvons donc conclure sur ce point, en disant que, provisoirement, la crise des principes continue et que dans la pensée quelque peu antithétique de Poincaré le thème de l'équivalence des théories l'emporte souvent sur celui de la raison unificatrice.

Si maintenant, cessant de nous interroger sur la raison scientifique, nous passons au thème de la valeur de la Science, de la réalité objective de la théorie physique, nous sommes en présence d'une sorte de paradoxe lié au progrès de la Science.

D'une part, les théories physiques sont de plus en plus précises, de plus en plus profondes, et se vérifient en leurs moindres détails, au moins dans les cas favorables. Ce n'est pas seulement l'existence des atomes ou des électrons, mais les particularités mêmes des structures de l'atome ou de la molécule, que les anciens chimistes jugeaient souvent purement allégoriques, qui apparaissent comme figurant la réalité : non seulement l'atome de Bohr, mais le carbone tétraédrique avec ses angles caractéristiques, les chaînes de valences de la Chimie, les liaisons moléculaires avec leur étalement plan, correspondent, au-delà de toute espérance, à une réalité expérimentale. Les formes de nos schémas traduisent bien, dans certaines conditions d'observation, les formes mêmes de la Nature.

Mais, d'autre part, jamais nous ne nous sommes sentis aussi loin d'atteindre les éléments des choses et l'intelligence profonde de la Nature. La correspondance entre les formes est certaine, mais ce qui se dispose suivant ces formes est irreprésentable. la substance du réel nous échappe et l'on se demande même si ce mot a un sens : il y a des variables dont la nature physique nous est inconnue et dont nous ne saisissons que les distributions spatiales et les variations de grandeur; et c'est en ce sens que l'on a pu parler d'un retour au pythagorisme par-delà le cartésianisme; la substance des êtres physiques devient purement mathématique, c'est-à-dire qu'elle disparaît. Tout élément simple requiert une structure complexe et ainsi à l'infini, et chaque déterminisme réclame un infradéterminisme. On dirait que nous transportons avec nous une loi d'intelligence des faits qui nous oblige à refaire l'inconnu avec du connu, qui, à son tour, devra être refait avec un autre inconnu, imité de lui-même, et nous savons bien que ce ne sont là que des images virtuelles, projetées dans une suite de miroirs et que ce qui est au fond de l'expérience ne ressemble effectivement pas à celle-ci. On a même pu nier que cette réalité fût une chose déterminée, ce qui la rend presque impensable physiquement.

Rien en tout cela qui puisse surprendre ou émouvoir Henri Poincaré, car les explications intuitives ne le touchent que médiocrement et il parle avec quelque dédain de ceux qui veulent faire éprouver à Dieu devant les atomes les sentiments d'un joueur de billard devant ses boules. Son relativisme se satisfait d'une connaissance purement formelle, pourvu que cette forme s'exprime mathémathiquement, car elle est encore foncièrement rationnelle et résume même toute la rationalité possible du monde.

Il nous faut donc, pour finir, considérer ce qu'on peut appeler le mathématisme de Poincaré et chercher d'abord si les procédés mêmes de la construction mathématique actuellement utilisée par les sciences physiques nous satisfont entièrement; en second lieu, si la mathématique a gardé ce prestige de rationalité, cette signification spirituelle que lui attribuaient un Platon, un Descartes et même un Kant.

Le mathématisme. — Le premier point donne beaucoup à réfléchir. En effet, si l'efficience de nos schémas mathématiques s'est étrangement accrue, si des correspondances, des symétries formelles neuves et profondes donnent à certaines théories une beauté extrême et sont une joie extraordinaire pour l'esprit, cette joie n'est cependant pas sans mélange. D'abord parce que les moindres équations sont désormais à peu près insolubles autrement que par des méthodes d'approximations et de perturbations; mais cela ne fait à vrai dire que généraliser une difficulté classique et nous est une occasion d'admirer, une fois de plus, combien la Nature se soucie peu des difficultés analytiques [suivant le mot qu'on prête tantôt à Fresnel et tantôt à Fourier], et comme elle résout aisément le problème des n corps et les équations de Schrödinger. Ce qui est plus grave, c'est que nous n'avons plus de méthodes générales directes, naturelles, pour écrire ces équations, et c'est en ce sens que le rêve de Descartes, si profondément qu'il traduise l'intention de l'esprit humain, n'est guère en voie de se réaliser, et l'on a pu parler avec raison d'une épistémologie non cartésienne. Loin de partir de quelques idées claires, et d'en déterminer directement les lois exactes, individualisées, nous partons de variables à sens indéterminé et nous les enserrons dans des réseaux de formules elles-mêmes partiellement indéterminées, et de sens indéterminé. C'est ainsi qu'en Relativité générale, nous cherchons par tâtonnements un ds^2 qui se plie aux équations d'Einstein, et qui redonne, en première approximation, les forces de Newton. Est-il même bien satisfaisant de mettre au premier plan des équations aux dérivées partielles, complétées par certaines conditions aux limites, qui ne décrivent pas directement les phénomènes, mais constituent plutôt une forme générale, dont le sens physique est sans doute moins clair intuitivement que celui de la loi de Laplace-Poisson ?

De même, en théorie quantique, nous avons bien une méthode pour transformer à l'aide de certains opérateurs les hamiltoniens classiques et en tirer les équations d'ondes. Mais n'est-il pas singulier qu'on doive partir des expressions d'une Mécanique et d'une Physique traditionnelles, dont on rejettera ensuite les concepts les plus fondamentaux : on aimerait arriver au vrai autrement que par le faux. Par ailleurs, ces transformations sont difficiles à interpréter, ne serait-ce que par l'usage qu'on y fait des opérateurs complexes. Dans le choix des solutions élémentaires, et surtout dans celui des combinaisons linéaires applicables aux phénomènes, il y a bien du conventionnel; le sens physique même des fonctions d'ondes, et surtout de l'élément proprement sinusoïdal, pose bien des problèmes. Si bien que la Mécanique ondulatoire constitue un peu un miracle épistémologique perpétuel, qui a certainement un sens, mais encore obscur. Les efforts mêmes qui sont faits incessamment pour substituer aux équations d'ondes classiques des équations d'ordre supérieur, toutes les variantes que l'on en construit par tâtonnements et complications successives montrent assez que l'édifice actuel n'est pas considéré comme réalisant, même de loin, un idéal rationnel définitif.

Assurément, il ne s'agit ici que d'une science en construction, et peut-être l'avenir nous élèvera-t-il un édifice plus conforme à notre idéal traditionnel de la raison et à ses vieilles proportions, et je le croirais volontiers.

Assurément aussi, nous pouvons faire contre mauvaise fortune bon cœur, et ériger en lois de la raison nos propres déceptions. Quelques formules y suffisent parfois : pourquoi n'opposerions-nous pas, par exemple, à la méthode cartésienne, où l'on superpose progressivement des idées simples et vraies, comme ces architectes qui construisent des édifices en pierres de taille en hissant celles-ci, l'une après l'autre, grâce à un élévateur assis sur la partie déjà construite, une méthode nouvelle, qu'on pourrait appeler celle du ciment armé, celle où l'on utiliserait les théories classiques comme un coffrage à couler le béton ? Après quoi on enlève le coffrage et l'architecture définitive apparaît.

De même, il suffirait de proclamer avec énergie que toute force doit, à partir d'une certaine distance, se transformer en une force de sens opposé, avec un état d'équilibre médian, et d'en faire un principe dialectique, emphatiquement proféré, et érigé en dogme, pour que ce qui semblait paradoxal devînt l'image même de la raison : on choisirait systématiquement des lois de force dualistes, où la force primitive se renverserait, ce qui éviterait des forces supplémentaires. De même que la répulsion cosmique, avec certains ds^2, apparaît dans le prolongement de l'attraction gravifique, une répulsion au contact pourrait également apparaître, et l'impénétrabilité ne serait plus, à son tour, que l'envers de la gravitation, et la valeur de tout cela dépendrait d'un accident du langage mathématique, d'une heureuse invention [1]. Peut-être arriverons-nous ainsi à rationaliser, ou si l'on veut à déguiser sous une expression rationnelle, la prévision la plus inacceptable en apparence : celle d'un arrêt progressif des phénomènes au bout d'un temps fini, et un renversement du devenir, par retournement des conditions finales, rien n'étant changé dans les lois locales

[1] La transformation tensorielle du champ électromagnétique, permettant de géométriser l'électrodynamique des corps en mouvement, correspond à un procédé quelque peu homologue, qui introduit par ailleurs des difficultés épistémologiques du même ordre que la théorie newtonienne des actions à distance.

apparentes. Cela supposerait un temps fermé et comme circulaire, dont le temps expérimental ne serait qu'une projection diamétrale; mais, jusqu'ici, nous n'arrivons guère à définir le sens effectif d'une hypothèse de ce genre, ni la nature d'une telle projection.

Tout cela est très bien, mais nous aimerions tout de même mieux construire les phénomènes et leurs lois directement, intrinsèquement, de proche en proche, et, si une théorie nous permettait de le faire, nous nous précipiterions sur elle. Il y a des femmes que l'on n'aime que par dépit, et si une autre revient, et est libre, on peut parier pour un divorce. De même si l'interdiction de Pauli ou l'équation de Schrödinger pouvaient être justifiées par des raisons de forme classique, en partant d'hypothèses sur une structure infraélémentaire, qui ne s'en réjouirait, et qui préférerait conserver comme axiomes ultimes les formes actuelles ? L'épistémologiste ne doit pas s'inspirer à l'excès de fables trop connues, comme celle du *Renard et des raisins*, ou du *Renard à la queue coupée*.

Reste le second problème : une mathématisation achevée nous permettrait-elle de « penser » l'Univers d'une manière totalement rationnelle et nous dispenserait-elle de toute autre recherche. Nous devons ici préciser certains aspects de la pensée de Poincaré lui-même.

Quant on prononce son nom, on songe aussitôt au raisonnement par récurrence, dont trop d'étudiants lui attribuent l'invention, ou dont ils font trop souvent l'unique raisonnement des mathématiques. Ce qui est certain, c'est que Poincaré a mis en lumière l'aspect essentiel, irréductible, par lequel l'infini s'introduit en Mathématiques et par où le mot tous, naturellement indéfini, exprime spécifiquement l'infini numérique. Il le considérait comme une vérité intuitive, alors que les axiomaticiens en font un postulat formel, en apparence semblable aux autres; mais ce n'est pas un hasard si, même de ce point de vue, c'est sur lui qu'échouent les démonstrations de non-contradiction, si c'est lui qui figure l'infini sous sa forme exhaustive et si l'on ne peut le justifier qu'en se donnant une intuition mathématique équivalente à celle de la suite des nombres naturels.

Mais le point qui nous touche est de savoir si la logicisation actuelle des Mathématiques leur laisse tout leur prestige de rationalité.

Henri Poincaré s'est occupé à diverses reprises de cette question, sans formuler à ce sujet une doctrine systématique. Il a plutôt caractérisé des attitudes et indiqué ses préférences. Il n'est certainement pas très favorable à la reconstruction purement logique des Mathématiques, y compris l'Arithmétique, telle qu'elle avait été entreprise à son époque par FRÈGE, SCHRÖDER, PEANO, RUSSELL, d'abord parce qu'il y pressent des appels dissimulés à l'intuition, notamment dans la définition du nombre naturel, ensuite parce que la mise en forme purement logique, pour convaincante qu'elle soit, laisse échapper quelque chose d'essentiel, qu'exprime par exemple l'opposition entre vérification et démonstration proprement dite : la signification rationnelle des énoncés, la réalité mathématique au sens fort.

On irait, je crois, dans le sens de sa pensée en disant que le logicien est comme l'ingénieur qui explique par quels concours de forces mécaniques et suivant quelles lois une cathédrale tient debout, mais qui néglige l'idée qu'elle représente, sa signification religieuse ou esthétique. De même les mathématiques ne sont pas un simple calcul logique, mais un édifice rationnel, correspondant à des idées.

Tel est bien, semble-t-il, l'arrière-pensée de beaucoup de grands mathématiciens, mais il n'est pas facile d'expliciter cette intention idéaliste, de dire en quoi consiste cette réalité au-delà du logique : les uns se réfèrent à l'usage intuitif et physique qu'on peut faire des notions abstraites, d'autres à la perfection formelle de certaines notions, à la « fermeture » de certains systèmes d'êtres, et à la possibilité d'une classification naturelle des objets mathématiques, d'autres à certaines apparences dialectiques, à un certain rythme méthodologique, à des antithèses de méthodes et de propriétés qui se retrouvent dans les domaines les plus divers, d'autres enfin à l'existence d'un domaine privilégié, celui des nombres naturels ou celui des ensembles intuitifs, à l'intérieur duquel on tente de « réaliser » toutes les constructions axiomatiques. Henri POINCARÉ est malheureusement demeuré très discret et très prudent sur ce point, même dans ses expressions; il semble que la réalité à laquelle il songe soit d'ordre arithmétique d'une part, d'ordre esthétique plutôt que métaphysique de l'autre. Il n'a pas expliqué en quel sens les mathématiques, parce qu'elles expriment une certaine réalité, peuvent rendre foncièrement intelligible une Nature, alors même qu'elles n'en figurent rationnellement que les rapports

Le problème reste toujours vivant, mais il semble que, depuis un demi-siècle, l'accent ait été mis sur le formalisme, sur la preuve des énoncés, par vérification purement logique, et que, bon gré mal gré, les Mathématiques se présentent comme une combinatoire purement formelle, un calcul d'expressions symboliques, ayant uniquement pour sens les règles opératoires qui en permettent les transformations. Elles sont une cybernétique de symboles, ou si l'on veut un immense jeu d'échecs, dont l'esthétique ne serait pas d'une autre nature que celles de ces parties dont les commentateurs exaltent lyriquement la beauté et les initiatives géniales. Au fond c'est un retour à la conception de Hobbes.

Dans ces conditions, comment s'appliquent-elles au monde ? Elles sont une sorte de pantin mécanique, merveilleusement articulé et compliqué, dont les gestes miment et permettent de prévoir ceux des êtres réels, c'est un immense schéma imitatif, que l'on peut revêtir d'intuitions, ce qui lui donne une apparence plus vivante, mais qui n'exprime pas une emprise originale de l'esprit sur la réalité, qui ne rationalise pas autrement la Nature que les schémas du mécanisme traditionnel. On fait un dessin, un modèle des événements physiques avec des mots ou des variables, avec des phrases et des équations, comme on en faisait avec des tiges articulées ou des fils élastiques. Logiciser n'est pas rationaliser au sens fort et les néonominalistes contemporains croiraient aisément que ce dernier mot n'a aucun sens.

Bien entendu, tout le problème de l'esprit et de l'activité créatrice et interprétatrice des Mathématiques demeure, mais il est au-delà d'elles; quant à l'analogie purement formelle des symboles et du monde des phénomènes, elle ne répond pas tout à fait à l'idéal primitif de l'intelligence de la Nature et il est difficile de la présenter comme le terme unique et définitif de toute recherche.

S'il en est ainsi, deux thèmes intellectuels ne se trouvent-ils pas réhabilités et remis en lumière ?

D'abord, celui des figurations intuitives de la Nature, conçues non pas seulement comme un artifice guidant et aidant le savant dans ses découvertes (toute la Physique se construit à coup d'images, parfois incohérentes et imparfaites), mais comme un instrument d'intelligence. Ce que la Science nous prouve, c'est qu'on peut parler des choses sans en pénétrer la nature, et d'une manière purement formelle. Notre Physique est vraie, notre Mathématique est vraie alors que le sens de leurs objets nous échappe. Mais cette vérité formelle recouvre sans doute une vérité matérielle, il ne suffit peut-être pas de parler du monde, il faut essayer de le penser, et la manière la plus naturelle de le penser n'est-elle pas de le faire par des allégories sensibles, de reconstruire intuitivement le réel inconnu à l'image du connu, suivant une loi implicite de correspondance entre les niveaux de la réalité. N'est-il pas naturel que les lois des éléments reflètent celles de notre perception, les formes d'appréhension du monde sensible régénérant, par une sorte d'harmonie préétablie, celles de la réalité ultime, l'imagination restituant la réalité. Les théories intuitives sont peut-être un mythe, mais ce mythe n'est-il pas nécessaire, en Physique comme en Métaphysique, toute ontologie n'est-elle pas négative ou analogique, pour parler comme les théologiens ?

Ensuite celui de la recherche d'un au-delà. Et l'on peut dire que la Science contemporaine marque moins de répugnance que celle d'il y a un demi-siècle à certains prolongements cosmologiques ou même métaphysiques et la Philosophie des sciences est moins strictement épistémologique et critique.

Parce que les savants actuels sont moins sensibles que leurs aînés à la perfection rationnelle ou même à l'unité logique de leurs théories, ils sont volontiers plus audacieux dans leurs projets. Il est vrai que Poincaré a consacré aux hypothèses cosmogoniques un de ses derniers Ouvrages, mais c'est en fait une étude mathématique des hypothèses relatives à la formation du système solaire. Au contraire nous passons hardiment de l'évolution des étoiles à la formation des nébuleuses, à la forme et à l'expansion de l'espace total, à l'origine de l'Univers, à la création continue de l'énergie, c'est un nouveau *Traité du Monde*, dont les hypothèses sont sans doute vêtues de mathématiques et tentent de se raccorder à quelques faits expérimentaux, mais qui, sous ce vêtement, sont moins des corps vivants et équilibrés que des mannequins parfois singuliers. Il n'en reste pas moins que ces cosmologies, si à la mode, réintègrent dans la Science des régions autrefois dédaigneusement laissées aux philosophes.

Dans un autre ordre, celui de la profondeur ontologique, certains doctrinaires parfois illustres de l'indéterminisme ont reconnu un sens au problème de la liberté, à partir du moment où ils ont cru pouvoir le résoudre eux-mêmes ; ils ont renouvelé celui de la nature du monde physique, en rétablissant, avec des probabilités pures de présence comme stade ultime de la connaissance, quelque chose qui, malgré qu'on en ait, ressemble fort aux puissances aristotéliciennes. Ils ont même cru pouvoir donner aux organismes biologiques le moyen de rompre les liens de l'irréversibilité et du deuxième principe.

De telles vues sont audacieuses et parfois, sans doute, bien fragmentaires et fragiles. Il est douteux en effet qu'on puisse poser de tels problèmes hors d'un contexte métaphysique d'ensemble. On voit mal la liberté humaine intervenant à l'échelle infraatomique comme un homme qui pousserait du doigt les aiguilles d'une horloge, ou bien jouant au *Démon* de MAXWELL. Si l'on en fait un petit gnome, le difficile n'est pas de savoir comment, sa décision prise, il pourrait agir sur la matière, et d'ailleurs une telle action trouverait tout aussi bien sa place dans la Physique classique; mais toutes les difficultés, toutes les antinomies de la liberté se rassemblent autour de l'existence même et de la nature de ce petit être, qui n'est que l'image en miniature de tout l'individu psycho-organique, et en inclut tous les paradoxes. Que signifie pour lui être libre, par rapport à l'ensemble de l'Être, par rapport à son propre passé, et comment peut-il être intelligemment sa propre origine, son propre créateur? Dans cette liberté humaine cristallisent les obscurités de la liberté divine, et ce n'est pas une formule nouvelle des lois physiques qui nous en affranchira.

De même il n'y a, semble-t-il, pas grand sens à poser le problème de la réalité physique, déterminée ou non, en dehors de celui de la représentation sensible, dans son individualité, en dehors de celui de l'âme et du corps, de celui de l'unité des esprits et de leurs expériences. Le problème cosmologique, sous sa forme courante, est sans doute un pseudo-problème, comme en serait un de se demander si la voûte du ciel est effectivement sphérique : il faudrait d'abord préciser quel genre de réalité nous pouvons attribuer à l'Univers physique commun de l'action, des expériences et des mesures, qui n'est ni l'un des Univers sensibles individuels ni, vraisemblablement, l'Univers réel qui détermine ceux-ci par le mécanisme psychophysique de la perception. On ne saurait construire séparément une ontologie purement physique.

Et pourtant, nous voyons ainsi renaître, au cœur même de la Physique, l'idée qu'il doit y avoir une autre figure d'intelligibilité de l'Univers et que nos hypothèses de structure ne nous donnent qu'une face des choses. Par là nous rejoignons un thème aussi obscur qu'il est ancien, auquel tant de biologistes reviennent aujourd'hui, souvent malgré eux, au terme de leurs longues enquêtes : c'est qu'il y a dans la Nature organisée un aspect dont le simple enchaînement des causes physicochimiques ne rend pas raison, un élément de finalité qu'on ne peut définir par aucun caractère proprement objectif d'adaptation, de perfection, de totalité dominante, mais seulement par la similitude de notre vie mentale, avec ses routines et ses clairvoyances emmêlées, ses automatismes et ses inventions divinatrices, ses hasards et ses intentions, ses échecs et ses succès, ses absurdités et ses merveilles, et avec les mêmes paradoxes : comment, dans l'hypothèse presque inévitable du parallélisme, un déterminisme psychique se superpose-t-il à un déterminisme matériel, en lui conférant une signification ? Comment le présent peut-il être l'œuvre de l'avenir, ce qui est de ce qui n'est pas ? Comment un être peut-il se chercher avant même d'exister, et aller au-devant de soi-même ?

Il semble qu'ici encore le déterminisme matériel de la phylogénèse ou de l'ontogénèse joue le même rôle que le déterminisme cérébral de notre psychisme, il nous donne l'enchaînement nécessaire, logique des événements, non leur sens rationnel, leur signification profonde. La Science nous donne, par ses lois, l'entrecroisement, la connexion des fils à l'envers de la toile et nous explique la solidité du tissu. Mais l'endroit signifie bien quelque chose, et l'analogie de l'esprit humain, si obscure qu'elle soit, est encore le meilleur élément d'un mythe de la finalité.

Le philosophe doit-il se réjouir de cette situation ? Oui et non.

Oui, sans doute, parce qu'on se satisfait mal d'une science qui s'isolerait dédaigneusement des problèmes de l'Univers et de l'Homme, et de la profondeur d'un Réel, dont elle explore merveilleusement la surface. Après la phase matérialiste, puis la phase critique, comment voir sans plaisir s'annoncer une phase, disons idéaliste ou spiritualiste.

Non, peut-être, parce que certains des physiciens, même illustres, qui consentent à s'occuper de tels problèmes les résolvent parfois d'une manière un peu rapide et brusque, par des extrapolations un peu simples, sans se soucier de données gnoséologiques qu'un philosophe un peu averti sait être essentielles. Ils n'acceptent de philosophies que celles qu'ils construisent eux-mêmes, comme des alliés qui apportent avec eux, dans un pays, tous leurs moyens de subsistance. Si bien que les contacts avec les philosophes sont plutôt de courtoise diplomatie. Chose curieuse, la Philosophie des sciences passe par une crise, alors que tout le monde en fait.

Nous sommes en tout cas bien loin de l'épistémologie critique de H. Poincaré et de sa prudente réserve.

On ne voit même pas bien à quelles doctrines sa sympathie serait allée, parmi celles qui n'acceptent pas d'ontologie au-delà de la Science. Eût-il été satisfait du néopositivisme de l'École de Vienne ou de ses émules anglo-saxons, pour qui tout problème ayant un sens se réfère, par des artifices de langages, à des jugements élémentaires d'expérience, constituant l'Univers unique et fondamental de vérité, à des mesures considérées comme des absolus épistémologiques, ne supposant aucune réalité qu'elles-mêmes, si bien que l'objet n'est rien que ce qu'on le mesure. Il me semble qu'il eût senti la pauvreté et l'arbitraire de cette métrolâtrie et de cet atomisme épistémologique, aussi vain sans doute que l'atomisme psychologique du siècle dernier, et contre lequel portent si fortement les critiques de Duhem ou de Le Roy.

Eût-il adhéré à l'idéalisme brunschvicgien, qui, en affranchissant les relations de leurs termes, les rapports de leurs supports, l'expérience de toute substance ontologique, tente de remplacer la philosophie de l'être par une philosophie de l'esprit créateur de sa propre expérience, et la réformant lui-même, averti par les chocs, les démentis qui lui sont infligés par quelque chose qui n'est pas un être. Il s'en fût sans doute quelque peu défié, bien qu'il fût souvent invoqué comme caution par l'auteur de la *Modalité du jugement*.

Au fond, il semble qu'il ait toujours raisonné dans les cadres du réalisme du sens commun, avec le sentiment que tout effort pour le définir était voué à la stérilité, comme l'était tout effort pour résoudre le problème du fondement de l'induction.

Sans doute la sagesse est de son côté, cette sagesse qui, ce sont ses propres paroles, repose sur un demi-scepticisme et se détourne du souci de la certitude et de la réalité absolues parce que dans notre monde relatif toute certitude est mensonge et que la réalité est fantôme. La vie humaine n'est-elle pas remplie par les tâches fécondes du savant et ne suffit-il pas d'une vue d'ensemble de l'harmonie et de la beauté des pensées humaines au lieu des luttes contre les moulins à vent de l'ontologie, et n'est-il pas, à cet égard, le plus sûr des maîtres, l'exemple de ce qu'il faut chercher et de ce à quoi il faut renoncer ? Le salut n'est-il pas d'être géomètre ? Et c'est pour cela qu'il ne se croit pas obligé de fonder la Science et de justifier sa confiance en la raison, qu'il ne s'interroge pas, au moins publiquement, sur la nature des choses, la liberté, la signification de l'homme, de son origine et de sa mort.

Pourquoi faut-il, pense-t-on cependant, qu'il ait disparu prématurément ? En ces vingt ans de vie auxquels il avait encore droit, peut-être eût-il simplement enrichi la Science d'autres découvertes physiques ou mathématiques, et se serait-il éteint en toute sérénité, conscient d'avoir fait son devoir d'homme. Mais peut-être aussi se fût-il détourné du monde des faits et des raisons logiques pour se pencher sur le monde intérieur, sur les problèmes de l'esprit et tous les au-delà de la Science, et c'eût été pour nous une leçon incomparable.

CINQUIÈME PARTIE

HOMMAGE DE L'ÉTRANGER ET AUTRES MANIFESTATIONS EN FRANCE.

A. — CLÔTURE DE LA PREMIÈRE ÉTAPE DES CÉRÉMONIES DU CENTENAIRE.

Avec les cérémonies de Nancy, la décade des grandes manifestations destinées à célébrer le centenaire de la naissance de Henri POINCARÉ a pris fin. Le Comité d'Organisation espère avoir donné, dans les pages qui précèdent, une idée de l'ampleur de ces manifestations, ampleur qu'il aurait voulu plus grande encore. Il s'excuse des oublis qui auraient pu être faits dans les récits de ces journées, et il remercie tous ceux qui ont contribué à leur succès, à quelque titre que ce soit, qu'ils aient pris une part active à leur organisation, ou que, comme les délégués étrangers, ils en aient rehaussé l'éclat par leur présence.

Mais la date du 22 mai 1954 n'a pas, pour autant, mis un point final aux manifestations provoquées par le 100e anniversaire de la naissance de Henri POINCARÉ. Le monde entier, en effet, a voulu rendre un témoignage à la mémoire de l'illustre savant, et en France également d'autres témoignages se sont produits et se produiront encore.

C'est ainsi que la société des Radioélectriciens, réunie le 19 juin 1954 à la Sorbonne, a entendu la lecture d'une notice de M. Edouard PICAULT, ancien président de la société, ingénieur général des Télécommunications, sur « la contribution de Henri POINCARÉ à la radioélectricité et aux télécommunications ».

Mais le Comité d'Organisation devait se limiter à une certaine date, faute de ne pouvoir jamais considérer sa tâche comme terminée, et de retarder indéfiniment la publication de ce *Livre du Centenaire*. Ou plutôt il devait considérer cette date comme étant la fin d'une première étape, car il n'entend pas se désintéresser maintenant de ce qui touche à Henri POINCARÉ.

B. — LA JOURNÉE INTERNATIONALE HENRI POINCARÉ A LA HAYE.

A l'issue du Congrès International des Mathématiques, qui s'est tenu à Amsterdam au début de septembre 1954, une « Journée internationale Henri Poincaré » a été organisée aux Pays-Bas, au cours de laquelle six conférenciers, ont cherché à « mettre en lumière le développement des idées de Henri Poincaré, dans le domaine spécial », qui leur était propre.

C'est à La Haye, à la « Rolzaal » que cette manifestation a eu lieu. Deux séances, une le matin, une l'après-midi, ont été tenues le samedi 11 septembre 1954. Le Professeur Gaston Julia, Président du Comité du Centenaire, a ouvert cette journée par une allocution dont on trouvera le texte plus loin, puis les six conférenciers ont pris successivement la parole; ils se sont tous exprimés en français.

M. André Weil, de l'Université de Chicago, sur *Poincaré et l'Arithmétique*.

M. Hans Freudenthal de l'Université d'Utrecht sur *Poincaré et les fonctions « automorphes »*.

M. Laurent Schwartz de la Sorbonne sur *Poincaré et les équations différentielles de la Physique*.

M. Jacques Lévy, Astronome à l'Observatoire de Paris sur *Poincaré et la Mécanique céleste*.

M. Paul Alexandrov, de l'Université de Moscou sur *Poincaré et la Topologie*.

M. Evert W. Beth, de l'Université d'Amsterdam sur *Poincaré et la Philosophie*.

Tous ces textes ne nous étant pas encore parvenus, nous nous excusons de ne pas donner ci-après la totalité de ces conférences.

Son Excellence M. P. J. Garnier, Ambassadeur de France à La Haye, a bien voulu assister à la séance de l'après-midi, et c'est lui qui a clôturé cette journée internationale en prononçant les quelques mots que nous reproduisons ci-après, pour affirmer avec Henri POINCARÉ que, si les théories et les idées qui nous guident passent, il subsiste toujours quelque chose de ce qu'elles ont apporté, et que les efforts de ceux qui les ont soutenues n'ont pas été inutiles au progrès.

Pour terminer cette soirée du samedi 11 septembre 1954, l'Ambassadeur de France a offert, en sa résidence Princessegracht 28, à La Haye, une brillante réception, pour remercier les Congressistes d'avoir bien voulu prolonger leur séjour en Hollande, pour marquer en commun d'une façon particulière le centenaire de la naissance de Henri POINCARÉ.

ALLOCUTION DE M. GASTON JULIA,

POUR L'OUVERTURE DE LA JOURNÉE INTERNATIONALE HENRI POINCARÉ A LA HAYE LE 11 SEPTEMBRE 1954.

Le Comité d'Organisation du Congrès des Mathématiciens, réuni à Amsterdam en 1954, a voulu commémorer par une réunion spéciale le centenaire de la naissance d'un des savants qui ont le plus illustré et enrichi la science mathématique.

Henri POINCARÉ est né à Nancy le 29 avril 1854. Par sa naissance, par sa vie et par sa mort, il appartient à la France, et dans la semaine du 15 au 22 mai derniers nous lui avons rendu, à Paris, à Caen, à Nancy, l'hommage national qu'il méritait. Mais par son œuvre, Henri POINCARÉ appartient aussi à l'humanité tout entière, et c'est l'hommage de tous les mathématiciens que nous allons lui rendre aujourd'hui.

Il nous a semblé que l'hommage qui convenait le mieux à un génie de cette envergure, c'était encore de passer en revue les principaux aspects de son œuvre et les principaux progrès qu'elle a suscités. MM. KOKSMA, LOONSTRA, FREUDENTHAL et VISSER, à qui j'étais joint en complète union de pensée, ont, d'une part, préparé toute la partie technique de la présente réunion, et, d'autre part, dressé un projet de six courts exposés destinés, non à embrasser l'ensemble de l'œuvre de POINCARÉ (c'était impossible!), mais à en esquisser les traits principaux.

Six conférenciers, choisis parmi les plus distingués du domaine mathématique où ils travaillent, ont bien voulu répondre à nos vues et accepter la charge d'un travail rendu plus difficile par la concentration et la concision qu'il exigeait des exposés. Que nos six conférenciers reçoivent dès maintenant l'expression de notre gratitude.

Je veux aussi remercier toutes les personnes qui se sont jointes à nous pour la commémoration d'aujourd'hui : toutes les personnalités néerlandaises qui, par leur présence, nous marquent l'intérêt bienveillant qu'elles apportent aux manifestations de la pensée; tous les mathématiciens étrangers enfin, qui, malgré des difficultés de toute sorte, ont bien voulu prolonger leur voyage pour joindre au nôtre leur hommage.

Permettez-moi encore quelques mots pour résumer à grands traits la vie d'Henri Poincaré. Après avoir fait ses classes au lycée de Nancy, il entre à l'École Polytechnique en 1873, le premier de sa promotion. Il en sort le second, en 1875, à cause de sa faiblesse en dessin. Il entre alors à l'École des Mines et il en sortira ingénieur ordinaire pour aller, à ce titre, travailler à Vesoul. En 1879 commence sa carrière mathématique. A Caen, puis à Paris, il est successivement professeur d'Analyse, de Mécanique céleste, de Physique mathématique. Dans une activité incessante et toujours novatrice, il parcourt tous les domaines mathématiques et physiques connus de son temps, il en dégage aussi les principes philosophiques, il découvre enfin bien d'autres champs de recherches, si bien qu'il n'est peut-être pas un des domaines mathématiques d'aujourd'hui qu'il n'ait fécondé et où il n'ait laissé sa marque. Il meurt en 1912, d'une embolie consécutive à une opération chirurgicale, et ce fut une grande perte pour l'humanité.

MM. André Weil, Hans Freudenthal, Laurent Schwartz, Jacques Lévy, Paul Alexandrov, Evert Beth vont successivement nous présenter leurs exposés. Je m'empresse de leur céder la parole.

CONFÉRENCE DE M. A. WEIL

A LA HAYE.

Poincaré et l'Arithmétique.

Qu'il me soit permis avant tout d'adresser mes remerciements à nos collègues hollandais, organisateurs de cette journée consacrée à Henri Poincaré, pour leur aimable invitation. J'ai accueilli celle-ci avec plaisir, car elle va me donner l'occasion d'attirer l'attention sur des aspects peu connus de l'œuvre de POINCARÉ, dont je suis persuadé qu'on trouverait profit à reprendre l'étude.

Malheureusement les limitations de temps qui nous sont imposées aujourd'hui n'ont laissé aucune place pour un exposé, si bref fût-il, des travaux de POINCARÉ sur la géométrie algébrique et sur les fonctions abéliennes; je ne puis néanmoins me dispenser ici d'en signaler l'importance capitale et la profonde influence sur le développement que ces branches des Mathématiques ont pris depuis lors.

Les écrits de POINCARÉ qui touchent à l'Arithmétique occupent un volume entier (tome V des *Œuvres*). On ne saurait nier qu'ils sont de valeur inégale. Certains n'ont guère d'autre intérêt que de nous faire voir combien attentivement POINCARÉ à ses débuts a étudié toute l'œuvre d'HERMITE et comme il s'en est assimilé les méthodes et les résultats. On a dit parfois que POINCARÉ lisait peu; ce qui frappe dans le volume de ses *Œuvres* dont il s'agit, c'est surtout qu'il s'y montre fort peu instruit des travaux en langue allemande; sans doute ne lisait-il l'allemand qu'avec beaucoup de peine. Mais il ne donne certes pas l'impression d'un ignorant ni d'un autodidacte.

C'est sous l'influence d'HERMITE, bien évidemment, que POINCARÉ a consacré plusieurs de ses premiers travaux à la théorie algébrique et arithmétique des formes, et particulièrement des formes cubiques ternaires et quaternaires. Ses réflexions sur ce sujet l'ont amené en particulier à une démonstration et à une extension du théorème de JORDAN d'après lequel il n'y a qu'un nombre fini de classes de formes algébriquement équivalentes à une forme donnée de discriminant non nul (*Œuvres*, t. V, p. 299-305); cette question, longtemps négligée, mériterait certainement d'être reprise, par exemple afin d'étendre le théorème de JORDAN aux corps de nombres algébriques; sans doute conviendra-t-il pour cela d'avoir recours à POINCARÉ.

Mais laissons la parole à notre auteur. Voici comme il parle de ses premières recherches, dans son célèbre récit de la découverte des fonctions fuchsiennes (*Science et Méthode*, p. 52) :

« ... Je me mis alors à étudier des questions d'Arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures (sur les fonctions fuchsiennes). Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la Géométrie non euclidienne.

« Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique; je vis que je pourrais leur appliquer la théorie des séries thétafuchsiennes.... »

Ainsi Poincaré, au moment dont il parle, venait de découvrir le premier exemple de groupe discontinu et de fonctions automorphes définis par des moyens arithmétiques. On connaît assez la très vaste extension de ces résultats à la théorie des fonctions automorphes de plusieurs variables, extension qui est avant tout l'œuvre de Siegel. S'appuyant sur cet exemple (ainsi que sur celui qu'il avait tiré de l'étude de la série hypergéométrique), Poincaré ne tarda pas à édifier une théorie générale, d'allure surtout géométrique, de tous les groupes fuchsiens et des fonctions automorphes qui leur appartiennent; notons en passant que nous n'avons rien d'analogue jusqu'ici en ce qui concerne les fonctions de plusieurs variables; nous n'avons même aucun procédé général de construction de groupes discontinus donnant naissance à de telles fonctions en dehors de ceux que fournit l'Arithmétique.

Mais l'intérêt des fonctions automorphes liées à la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies n'est pas seulement historique et anecdotique. Ces fonctions ont une propriété qui, découverte par la suite par Poincaré, l'a vivement frappé : c'est de donner lieu à une généralisation de la théorie de la transformation des fonctions modulaires. Ce point mérite un exposé plus détaillé.

Soit F une forme quadratique indéfinie à coefficients réels à trois variables X, Y, Z. Dans le plan projectif, l'équation $F = 0$ représente une conique réelle C; C admet une représentation paramétrique où X, Y, Z s'écrivent comme polynomes du second degré à coefficients réels en un paramètre réel τ. Soit Γ le sous-groupe du groupe linéaire unimodulaire réel à trois variables X, Y, Z qui laisse F invariante. Toute substitution S de Γ transforme C en elle-même et induit sur le paramètre τ une substitution homographique réelle $\overline{S}$; la correspondance entre S et $\overline{S}$ est un isomorphisme entre Γ et le groupe homographique réel $\overline{\Gamma}$. Soit G le sous-groupe de Γ d'indice 2 formé des substitutions qui laissent invariant le sens de parcours sur C; soit $\overline{G}$ le sous-groupe correspondant de $\overline{\Gamma}$; $\overline{G}$ est l'ensemble des substitutions homographiques réelles sur τ qui transforment en lui-même le demi-plan supérieur du plan de la variable complexe τ, et peut être considéré suivant POINCARÉ comme groupe des déplacements non euclidiens dans ce demi-plan.

Supposons maintenant que F soit à coefficients entiers; soient G' et g les sous-groupes de G formés respectivement des substitutions de G à coefficients rationnels et à coefficients entiers; soient $\overline{G}'$ et $\overline{g}$ les sous-groupes correspondants de $\overline{G}$. De la représentation paramétrique, en général biunivoque, de G, connue sous le nom de « transformation de CAYLEY », il résulte que G' est partout dense dans G. Distinguons deux cas, (A) et (B), suivant que C admet ou non une représentation paramétrique à coefficients rationnels; pour qu'on soit dans le cas (A), il faut et il suffit que C ait un point rationnel, ou encore que la forme F « représente zéro », c'est-à-dire que $F = 0$ ait une solution en nombres entiers; alors, pour un choix convenable du paramètre τ, les substitutions de $\overline{G}'$ seront à coefficients rationnels.

Comme on l'a vu, POINCARÉ avait découvert très tôt que $\overline{g}$ est un « groupe fuchsien ». Plus précisément (cf. *Œuvres*, t. V, p. 267-274), dans le cas (A) $\overline{g}$ est commensurable au groupe modulaire si l'on convient avec POINCARÉ de dire que deux groupes sont commensurables lorsque leur intersection est d'indice fini dans chacun d'eux. On se trouve alors ramené en principe à la théorie des fonctions modulaires. Il est à noter qu'en ce cas $\overline{g}$ contient nécessairement des substitutions paraboliques, donc que pour un choix convenable de τ les fonctions invariantes par ce groupe sont des fonctions périodiques, admettant par conséquent des développements en série de FOURIER. On sait quelle est l'importance fondamentale de ces développements dans la théorie des fonctions modulaires jusque dans ses aspects les plus arithmétiques, et par exemple dans l'œuvre de HECKE.

Dans le cas (B), au contraire, $\overline{g}$ ne peut contenir de substitution parabolique et a donc un domaine fondamental compact (*loc. cit.*, p. 272). Du point de vue de la pure théorie des fonctions, cela rend en principe son étude plus simple. En revanche, on ne peut plus développer en série de FOURIER; c'est peut-être là ce qui explique l'ignorance profonde où nous sommes encore au sujet des fonctions automorphes appartenant à de tels groupes.

Dans un cas comme dans l'autre, soit S une substitution appartenant à G'; on peut l'écrire sous la forme $a^{-1}T$, où a est un entier et T une substitution à coefficients entiers. Si U est une substitution quelconque à coefficients entiers, il suffit, pour que $S^{-1}US$ soit aussi à coefficients entiers, que l'on ait $U \equiv 1 \pmod{D}$, 1 désignant la substitution unité et D le déterminant de T. Comme l'observe POINCARÉ, il résulte aussitôt de cette remarque que les groupes g et $S^{-1}gS$ sont commensurables pour tout S dans G'. L'application des principes généraux de la théorie des fonctions automorphes montre alors immédiatement que, si f est une fonction fuchsienne de groupe $\overline{g}$, *il y a une relation algébrique entre f et sa transformée par toute substitution* $\overline{S}$ *de* $\overline{G}'$. Le groupe $\overline{g}$ qui laisse f invariante est donc contenu dans un groupe $\overline{G}'$ beaucoup plus vaste, et même partout dense dans $\overline{G}$, transformant f en une fonction liée à f par une relation algébrique. Dans le cas (A), ce résultat est essentiellement celui qui donne naissance à la théorie de la transformation des fonctions modulaires et des « correspondances modulaires »; là-dessus repose par exemple toute la théorie de HECKE, avec les conséquences qu'on n'a pas fini d'en tirer. Est-ce faute de l'instrument fourni par la série de FOURIER que les problèmes analogues pour le cas (B) n'ont même pas été effleurés jusqu'ici, en dépit de l'insistance apportée par POINCARÉ à attirer l'attention sur eux? Il est certainement à souhaiter qu'on s'y attaque au plus tôt, peut-être à la lumière des connaissances récemment acquises sur les correspondances entre courbes algébriques.

Le dernier travail arithmétique de POINCARÉ (*Œuvres*, t. V, p. 483-548) a évidemment aussi son origine dans les premières réflexions de POINCARÉ sur la théorie des formes. Mais à ses débuts il ne s'était pas écarté des principes de la théorie traditionnelle, dominée par le groupe linéaire. Par la suite, ses travaux sur les fonctions fuchsiennes et l'influence de KLEIN l'amenèrent à étudier l'œuvre de RIEMANN, où domine la notion d'invariance birationnelle. Il ne pouvait donc manquer de s'apercevoir que certaines des propriétés essentielles d'une forme ternaire $F(X, Y, Z)$, par exemple celle de pouvoir représenter zéro, sont en réalité des propriétés intrinsèques de la courbe $F(X, Y, X) = 0$, invariantes non seulement par rapport aux transformations projectives mais par rapport aux correspondances birationnelles à coefficients rationnels. C'est sur ce sujet qu'il publie en 1901 un Mémoire qui est, dit-il, « plutôt un programme d'étude qu'une véritable théorie ».

Passons sur ses résultats sur les courbes de genre zéro, qui en réalité n'étaient pas nouveaux et que nous savons aujourd'hui déduire très facilement de la théorie des courbes algébriques à corps de constantes quelconque. L'importance et l'originalité du Mémoire tient à l'étude qui y est faite des courbes de genre 1, et particulièrement des cubiques, sur le corps des rationnels C'est ici que Poincaré introduit la notion de *rang* d'une telle courbe ; ce rang est à peu près le plus petit nombre de points rationnels sur la courbe à partir desquels on puisse obtenir tous les autres par addition des arguments elliptiques attachés à ces points lorsqu'on uniformise la courbe par des fonctions elliptiques. D'une manière précise, le rang se définit comme rang du groupe des points rationnels sur la jacobienne de la courbe. Poincaré a-t-il conjecturé que le rang est toujours fini ? C'est ce que son texte ne permet pas de décider avec certitude ; en tout cas un théorème célèbre de Mordell nous assure qu'il en est bien ainsi. La démonstration de Mordell repose sur la descente infinie au moyen de la bisection des fonctions elliptiques. Une partie des calculs de Poincaré équivaut à une étude de la trisection, qui, poussée jusqu'au bout, aurait en principe pu conduire au même résultat, au prix de beaucoup de complications supplémentaires ; mais Poincaré n'en tire rien de décisif, et ce n'est qu'à la lumière du travail de Mordell et des recherches ultérieures qu'on aperçoit la portée véritable de ces calculs. La notion de jacobienne d'une cubique de genre 1 sur le corps des rationnels se trouve aussi implicitement dans le travail de Poincaré ; mais il est difficile de l'y apercevoir si on ne la possède déjà, et en effet il n'y a aucun lien entre ce travail et les recherches récentes qui ont définitivement précisé cette notion, non seulement pour les courbes de genre 1 mais pour les courbes de genre quelconque, sur un corps de constantes arbitraire.

Sur tous ces points, l'intérêt du Mémoire de Poincaré est d'ordre historique ; on peut en dire autant de ses remarques sur les courbes de genre supérieur à 1, où en somme il étend à ces courbes la notion de rang qu'il a introduite auparavant pour le genre 1. Que ce rang soit toujours fini, non seulement sur le corps des rationnels mais sur tout corps de nombres algébriques de degré fini, c'est ce que j'ai démontré dans ma thèse en m'inspirant de la démonstration de Mordell pour le genre 1 ; ce résultat a reçu récemment une très vaste et importante extension dans la thèse de Néron. Mais, même en ce qui concerne les courbes de genre 1, nos connaissances demeurent très incomplètes au sujet de celles de ces courbes qui n'admettent aucun point rationnel et ne sont donc pas birationnellement équivalentes à leur jacobienne. Sans doute y a-t-il intérêt à considérer, pour ces courbes, les extensions non ramifiées, c'est-à-dire en langage classique, les courbes qui se déduisent de la courbe donnée par « transformation » des fonctions elliptiques correspondantes. Or Poincaré considère justement des cubiques déduites d'une cubique donnée par une transformation du troisième ordre. Il se peut donc qu'une étude plus attentive de son Mémoire puisse encore conduire à de nouveaux résultats. Sur ce point comme sur beaucoup d'autres, j'espère vous avoir montré que l'œuvre de Poincaré n'appartient pas seulement à l'histoire de notre science; elle appartient aussi à la plus vivante actualité.

CONFÉRENCE DE M. H. FREUDENTHAL

A LA HAYE.

Poincaré et les fonctions automorphes.

Les fonctions « fuchsiennes » que nous avons l'habitude d'appeler « automorphes », sont le premier chapitre de l'œuvre scientifique de Poincaré, précédé seulement par sa thèse et un petit nombre de travaux qu'on peut négliger dans l'œuvre totale sans faire tort à son auteur. C'est le premier chapitre et c'est aussi celui qui, après un développement de quelques dizaines d'années, atteignit le premier cet état où l'on dira d'une théorie mathématique qu'elle est « déjà classique ».

Puisse cette réflexion vous réconcilier avec le choix d'un conférencier quis sur le théâtre des fonctions automorphes, s'est toujours contenté du rôle de spectateur intéressé, choix fort contestable, mais qui s'imposa quand, il y a 15 jours, une lacune sérieuse vint menacer l'harmonie de cette commémoration ! Permettez donc que je traite mon sujet en historien, qui se plonge dans un passé revolu, pour vous peindre l'image d'une époque qui se termine au moment où ce chapitre de l'œuvre de Poincaré est devenu classique.

Vous connaissez bien la place qu'occupent les fonctions automorphes créées par Poincaré en 1881 dans l'histoire de l'analyse : elles étaient pour lui-même et pour Félix Klein l'outil puissant pour attaquer le problème de l'uniformisation des fonctions algébriques ou même analytiques et des surfaces de Riemann. On sait aussi que leurs attaques hardies et admirables, mais insuffisamment préparées n'ont pas réussi à vaincre le problème, mais qu'elles ont préparé la résolution définitive, un quart de siècle plus tard.

Voilà un abrégé de l'histoire des fonctions automorphes qui est formellement correct, mais qui pourtant doit créer des idées fausses sur tous les points essentiels. L'histoire a toujours été plus compliquée que la postérité ne le pense.

Premièrement, quand POINCARÉ faisait ses débuts en 1880-1881, il n'y avait pas de problème d'uniformisation, ou plutôt, s'il y en avait, il était résolu depuis longtemps. Oui, c'est une constatation paradoxale qu'il faut justifier.

Le premier problème non trivial d'uniformisation a été résolu par ABEL et JACOBI. C'était celui de la fonction algébrique définie par

$$w^2 = R(z), \tag{1}$$

où R est un polynome du troisième ou quatrième degré; l'intégrale elliptique de première espèce

$$u = \int \frac{dz}{w} \tag{2}$$

est une fonction multivalente qui possède deux périodes, son inverse est une fonction doublement périodique, qui transforme le plan u univoquement dans la surface de RIEMANN (z, w). Par cette transformation z et w deviennent des fonctions uniformes de u : la relation (1) paraît uniformisée par l'introduction du paramètre u.

Si le degré de $R(z)$ est plus grand, par exemple 5, tout est moins simple. L'intégrale (2) possède alors quatre périodes, son inverse serait une fonction quadruplement périodique, dont le caractère paradoxal a plongé JACOBI dans la perplexité, la multivalence de cette fonction n'a été comprise que grâce aux notions de la théorie riemannienne des fonctions complexes. Quoi qu'il en soit, au cas hyperelliptique, l'intégrale (2) ne pouvait pas effectuer l'uniformisation de la relation (1).

JACOBI trouva l'issue. Il opéra sur la puissance $p^{\text{ième}}$ topologique de la surface de RIEMANN (de genre p) et en fit l'uniformisation par p intégrales de première espèce $u_1, \ldots, u_p$, grâce au théorème d'ABEL. Si $x_1, \ldots, x_p$ est un système variable de p points de la surface, les congruences

$$u_i(x_1) + \ldots + u_i(x_p) = c_i \text{ mod. pér.} \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{3}$$

possèdent une solution unique, les c_i étant des valeurs données générales.

JACOBI n'avait traité que le cas hyperelliptique de genre 2 et il n'avait pas encore démontré l'uniformité de la solution, mais sa méthode resta définitive pendant un demi-siècle. Riemann l'a étendue à des fonctions algébriques quelconques dans ses travaux fondamentaux sur les fonctions abéliennes.

Telle était la situation quand Poincaré avait 27 ans : le problème de l'uniformisation des fonctions algébriques était bien résolu et personne n'aurait pu y ajouter une idée essentielle. Il est vrai que cette uniformisation s'effectuait au moyen de p fonctions de p variables [celles qui apparaissent dans (3)], mais à cause du paradoxe de Jacobi on ne pouvait pas s'attendre de s'en tirer à meilleur compte.

Et pourtant Poincaré réussit à faire ce tour de force. On ne pourrait imaginer une illustration plus frappante de ce que Poincaré affirmera au Congrès de Rome (I, 1908, p. 173) : « Il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas, il y a seulement des problèmes *plus ou moins* résolus... ». Ce qu'on a cru impossible pendant un demi-siècle, l'uniformisation des relations algébriques quelconques par des fonctions d'une seule variable complexe, est d'une simplicité enfantine, en tout cas beaucoup plus simple que toute la théorie d'inversion à laquelle Jacobi et Riemann avaient donné tant de soin. Mais pour en venir à bout, on ne devait pas se laisser aveugler par des intégrales de première espèce; on devait inventer ces nouvelles transcendantes que Poincaré appelait fuchsiennes.

Comment expliquer ce geste audacieux d'un jeune homme de 27 ans qui rompt brusquement avec une tradition d'un demi-siècle? Son génie était sûrement une condition nécessaire, mais qui ne suffisait pas. Il y avait un secret, un secret mémorable et étonnant : quand en 1881 Poincaré attaqua à sa manière le problème de l'uniformisation, il ne savait pas qu'il était déjà résolu par une méthode canonisée depuis un demi-siècle. C'est à son insu qu'il brise cette tradition vénérable.

Me soupçonnez-vous d'exagération et de vous raconter des histoires fantastiques? Si c'étaient vraiment des fantaisies, elles resteraient toujours considérablement au-dessous de la réalité. La réalité est que Poincaré ignorait non seulement le problème d'inversion de Jacobi-Riemann, mais presque tout ce qu'il y avait de remarquable à cette époque dans la théorie des fonctions. Son instruction mathématique était des plus pauvres.

On en trouve les preuves dans ses premiers travaux, mais il en a témoigné lui-même dans l'analyse de son œuvre rédigée 20 ans plus tard. Il y mentionne le principe de Dirichlet et il continue : « Je ne connaissais pas ce principe à cette époque, mais l'eussé-je connu, que je ne m'en serais pas servi...

(*Acta Math.*, t. 38, 1921, p. 45). Si Poincaré n'a pas connu le principe de Dirichlet, il est absolument sûr qu'il n'avait jamais lu Riemann et les auteurs qui ont continué sa théorie. Même la notion de la surface de Riemann semble avoir été inconnue de Poincaré et en tout cas la définition topologique du genre était nouvelle pour lui, à l'époque où il échangeait ses premières lettres avec Klein (*Acta Math.*, t. 39, 1923, p. 105).

Je vous avais promis de traiter mon sujet en historien, mais même pour un historien il doit être difficile de se transporter à une époque où un jeune mathématicien de 27 ans qui va devenir un des plus grands de son siècle, ne connaît pas les travaux fondamentaux de ses prédécesseurs de 25 ans plus tôt. Il est vrai que Poincaré était l'élève d'Hermite, analyste d'une habileté admirable et ressemblant aussi peu que possible à Riemann et guère plus d'ailleurs à Poincaré, esprits intuitifs et géomètres. Reconnaissons qu'à cette époque les jeunes savants n'avaient pas encore pris l'habitude de parler plusieurs langages et de voyager entre les centres où les sciences florissaient et que les relations personnelles se bornaient toujours à l'échange de correspondance, pourtant quelque trait dans le caractère de Poincaré doit être responsable de cette ignorance merveilleuse. On y reconnaît sans peine l'homme tel que ses amis l'ont décrit, retiré du monde extérieur, introverti et en général ne sachant pas ce qui se passe autour de lui, mais qui, dès qu'il le saisit, réagit avec une intensité qui rappelle une éruption. La première de ces éruptions scientifiques a eu lieu dans ces années 1881-1882, où il a publié une série de 25 Notes dans les *Comptes rendus* et quelques Mémoires très étendus.

Le point de départ de Poincaré n'a pas été le problème de l'uniformisation des fonctions algébriques. Vous savez que pendant toute sa vie ce sont presque toujours les applications qui l'ont inspiré. Rien n'était plus étranger à son esprit que d'uniformiser une fonction algébrique au moyen de fonctions transcendantes, petit jeu intellectuel qui réduit le simple au compliqué. Sur la route qu'il pensait prendre, ce n'était qu'une traverse moins importante. Qu'elle en soit devenue le but principal, c'est une vicissitude, qui n'est plus caractéristique de l'œuvre de Poincaré.

Poincaré s'était posé un problème tout à fait pratique : l'intégration effective d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients algébriques. Il cherche des possibilités d'exprimer leurs solutions au moyen de transcendantes bien définies, par exemple par des séries de Mac Laurin toujours convergentes. A ce moment il a formulé à son insu le problème de l'uniformisation des solutions d'équations différentielles, dont celui de l'uniformisation des fonctions algébriques n'est qu'un cas spécial.

Au commencement de mai 1880, Poincaré lit un travail de Fuchs qui va occuper son esprit. Le 28 mai il présente au concours d'un prix de l'Académie un Mémoire où le travail de Fuchs est analysé et continué (*Acta Math.*, t. 39, 1923, p. 58). Aux mois de juin et de juillet il y a eu échange de correspondance avec Fuchs (*Acta Math.*, t. 38, 1921, p. 185-187), qui refuse de reconnaître les graves erreurs que Poincaré a découvertes dans son travail. Dans la troisième lettre Poincaré parle de la fonction fuchsienne, dans la quatrième ce mot figure déjà au pluriel. En février 1881 la première Note sur les fonctions fuchsiennes dans les *Comptes rendus* fait voir que le plan général de cette théorie qui, dans les *Œuvres* de Poincaré, remplira presque un volume, est déjà bien tracé dans l'esprit de l'auteur.

L'idée est assez simple. Fuchs avait cherché des conditions, pour que le quotient de deux intégrales d'une équation à coefficients rationnels

$$y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$$

soit l'inverse d'une fonction méromorphe. Un système fondamental d'intégrales subit une transformation linéaire, quand on tourne autour d'une singularité des coefficients, leur quotient se transforme de manière projective et son inverse se reproduit, si l'on applique à sa variable indépendante cette projectivité. Ainsi Poincaré est conduit à chercher des fonctions « fuchsiennes », qui satisfont à des équations fonctionnelles

$$F(Sz) = F(z),$$

où S parcourt les substitutions d'un groupe de transformations

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

à coefficients réels (ou conservant le cercle-unité). Ce groupe doit être discontinu. Poincaré en construit ce qu'on appelle alors le domaine fondamental. Inversement, il se donne un polygone fondamental bordé par des cercles orthogonaux à l'axe réel et par des morceaux de cet axe et pourvu d'identifications de frontière, et il trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce polygone appartienne à un groupe discontinu. Enfin il parvient aux fonctions automorphes par le procédé le plus simple du monde.

A partir d'une fonction rationnelle $H(z)$ il forme la « série de POINCARÉ »

$$\Sigma H(S_i z)\left(\frac{dS_i z}{dz}\right)^m,$$

qui dans la substitution $z \to Sz$ du groupe est multipliée par $\left(\frac{dS}{dz}\right)^{-m}$; le quotient de deux séries avec le même m est donc automorphe. Il étudie spécialement le cas où le groupe est engendré par des rotations autour d'un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_{n+1}$; si les angles respectifs sont $\frac{2\pi}{k_i}$, l'image décrite par la fonction automorphe F est une surface de RIEMANN ramifiée aux points $F(a_i)$ de degrés respectifs k_i. L'inverse d'un F bien choisi est donc une uniformisante de cette surface de RIEMANN. Pour uniformiser une surface de RIEMANN quelconque à un nombre fini de ramifications (préalablement réelles), il faut varier les a_i de telle manière que les $F(a_1), \ldots, F(a_{n+1})$ parcourent tous les systèmes possibles de valeurs. Ce problème est résolu par le principe fameux dit de continuité : si l'on transforme biunivoquement une variété compacte M (celle des systèmes $a_1, \ldots, a_{n+1}$ possibles) dans une autre M′ de la même dimension (celle des surfaces de RIEMANN d'un type de ramifications donné), l'image couvrira tout M′. Ce même principe est appliqué, pour effectuer une autre « inversion » : étant donné un groupe, trouver l'équation de FUCHS qui y appartient. Enfin l'ensemble des groupes admis est étendu; aux groupes kleinéens, c'est-à-dire groupes de transformations linéaires rationnelles quelconques (pas seulement réelles), POINCARÉ applique toutes ces méthodes, dont la fécondité avait apparu dans le cas fuchsien. Il n'oublie jamais son point de départ; il retourne toujours aux équations différentielles, dont la solution effective reste son problème principal.

Le développement que je viens d'esquisser se déroule comme un enchaînement logique et naturel d'idées simples et intuitives. Mais je dois avouer franchement que j'ai triché un peu. J'y ai introduit illicitement une idée qui provient de KLEIN. POINCARÉ n'a jamais lié l'uniformisation des fonctions algébriques à ces groupes spéciaux engendrés par des rotations, qu'il a traités si longuement. Au moment où il a fini toutes les préparations nécessaires et où seul le résultat devrait être formulé, il change de route et par une méthode différente il parvient au théorème de l'uniformisation. Il admet des valeurs $k_i = \infty$, c'est-à-dire qu'il s'occupe de polygones à angles zéro et des fonctions automorphes (généralisant les fonctions modulaires) qui transforment le demi-plan dans la surface de RIEMANN recouvrant un plan dont on a ôté $n+1$ points. Grâce au principe de continuité il peut localiser ces points justement aux ramifications de la fonction algébrique donnée, qui sera uniformisée au moyen de cette fonction automorphe.

Pourquoi ce détour mystérieux? Avait-il des raisons que nous ne connaissons pas, ou est-ce simplement une faiblesse d'un auteur qui se noie dans la mer de ses idées et qui avec une vitesse incroyable produit des travaux, clairs dans tous les détails, mais chaotiques dans leur composition? En tout cas, il a laissé à Klein l'honneur de signaler le premier la voie plus directe, et si je ne me trompe pas, c'est le seul point essentiel où Klein, dans les recherches sur les fonctions automorphes, a dépassé Poincaré.

Dès les premières notes que Poincaré publiait, Klein avait saisi l'importance de ses idées. Tout le monde était stupéfait, mais le seul, dont l'admiration était fondée sur une compréhension plus profonde, était Klein. La notion de la fonction automorphe lui était familière, quoiqu'il ne l'eût rencontrée que dans des cas très spéciaux. Klein aimait la beauté idyllique des problèmes spéciaux, la « nature morte » telle qu'il la peint dans ses cours sur l'icosaèdre. Si Poincaré n'était pas intervenu, Klein aurait développé les fonctions automorphes, passant d'une généralisation à la suivante sans manquer aucun degré de l'échelle. Embrasser un problème dans toute sa généralité, ce n'était pas la manière de Klein. L'apparition de Poincaré lui imposa des méthodes qui n'étaient pas les siennes. Klein se trompe, quand il compare cette concurrence à une course où parfois l'un, parfois l'autre est en tête. Dès le début Poincaré a une avance que Klein ne peut plus rattrapper.

Vingt-six lettres ont été échangées entre Klein et Poincaré sur les fonctions automorphes. Klein en a écrit la première, après la parution de la troisième Note de Poincaré. Dans cette correspondance Poincaré est l'élève, qui pose des questions, et Klein est le maître, qui en toute sincérité et loyauté guide son élève et lui fait combler les lacunes énormes de son érudition mathématique. Il n'y avait qu'un seul différend : Klein désapprouvait la dénomination de fonctions fuchsiennes que Poincaré avait choisie, ignorant les mérites des mathématiciens de l'école de Riemann, mais Poincaré y tenait. En parlant de fonctions automorphes on a accepté le point de vue de Klein.

Qui peut mesurer les sentiments provoqués chez Klein par les progrès énormes et instantanés que Poincaré fit sur une route où eux, Klein et ses élèves, n'avaient avancé que pas à pas? Plus on saisit cette situation, plus on doit admirer l'attitude irréprochable de Klein.

Ni Klein, ni Poincaré n'aboutirent à cette époque. Il y avait des lacunes sérieuses dans leur raisonnements, beaucoup plus sérieuses chez Klein que chez Poincaré. Entre autres le principe de continuité donna lieu à de graves objections. Ni la régularité topologique des variétés M et M′ ni le principe même n'était assuré. Un quart de siècle doit s'écouler avant que les connaissances acquises ne soient consolidées et que les fondements ne soient soumis à une révision critique. Hilbert cite l'uniformisation dans sa liste fameuse de problèmes. En 1907 Kœbe résout le problème, suivi par Poincaré lui-même. La surface de revêtement, dispositif déjà proposé par Schwarz et essayé par Poincaré en 1883, paraît être l'accès véritable à la théorie.

Je ne poursuivrai pas l'histoire des fonctions automorphes. En revanche, je vais signaler trois conséquences de ces recherches, qui peuvent être appréciées par tout mathématicien, même par ceux qui ne s'intéresseraient guère aux fonctions automorphes :

1° La construction du domaine fondamental d'un groupe discontinu, qualifié de hardie par Klein, et extraordinaire à une époque où l'on n'était pas accoutumé à des méthodes directes et non analytiques.

2° La découverte de la connexion qui existe entre les transformations réelles linéaires et rationnelles d'une variable complexe et celles de la Géométrie non euclidienne, c'est-à-dire du modèle de Poincaré de la Géométrie non euclidienne.

3° Le principe de continuité et la notion de variété topologique ont attiré l'attention de Brouwer, qui a su alors créer par sa démonstration de l'invariance du domaine les méthodes indispensables et fondamentales dont la Topologie s'est servie depuis lors jusqu'aujourd'hui.

CONFÉRENCE DE M. L. SCHWARTZ

A LA HAYE.

L'œuvre de Poincaré : Équations différentielles de la Physique.

Poincaré a fait d'importants travaux en Physique proprement dite : polarisation de la lumière par diffraction, théorie de Lorentz, ondes hertziennes, etc. Nous ne parlerons ici que de ses travaux de Mathématiques appliquées à la Physique, et spécialement de trois Mémoires très importants :

1° *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathéma-*

tique (*American Journal of Mathematics*, 1890); ce Mémoire contient la méthode du balayage pour la solution du problème de Dirichlet.

2° *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1894); ce Mémoire étudie l'équation des membranes vibrantes, et trouve toutes les valeurs propres.

3° *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta Mathematica*, 1896).

Ces trois Mémoires se trouvent dans le tome IX des *Œuvres* de Poincaré.

Le problème de Dirichlet. — Ce problème a été un des problèmes centraux de la Physique mathématique, et dans une grande mesure il le reste encore, mais pour des cas plus généraux qu'initialement.

Prenons le cas le plus simple, où ce problème consiste à trouver une fonction U harmonique dans un domaine Ω borné de l'espace euclidien, ayant des valeurs limites continues données sur le contour S de Ω.

La première solution, donnée par Riemann (1851), était fausse. Elle consistait à prendre pour U la fonction minimisant l'intégrale $\iint\cdots\int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i}\right)^2 dx$, parmi toutes les fonctions dérivables ayant au contour S les valeurs prescrites. Or s'il est vrai que cette intégrale a bien une borne inférieure puisqu'elle est > 0, rien ne dit que cette borne soit réalisée pour une fonction U. Quand en 1869 Weierstrass éleva cette objection à la démonstration de Riemann, ce fut un véritable choc dans le monde mathématique, et devant l'impossibilité où l'on se trouva d' « arranger » cette démonstration de façon qu'elle devînt rigoureuse, force fut bien d'en trouver d'autres. Les premières solutions correctes furent celle de Neumann, valable seulement pour un contour convexe (1877) et celle de Schwarz (1869) (méthode alternée, développée dans le cas de deux dimensions, valable dans une dimension quelconque mais avec de difficiles ajustements; cette méthode permet de résoudre le problème pour un domaine Ω réunion de deux domaines où la solution est connue). La solution de Poincaré, donnée dans le Mémoire noté 1°, est beaucoup plus générale que les précédentes, et d'une très grande originalité. Exposons le principe de cette solution, basée sur la méthode dite du balayage. Si la valeur donnée sur le contour S est assez régulière, elle peut se prolonger en une fonction deux fois continûment différentiable dans tout l'espace, qu'on pourra toujours supposer nulle en dehors d'un ensemble compact; ce prolongement est alors un potentiel U^ρ d'une couche de densité continue ρ, qu'on peut toujours supposer $\geqq 0$, en la décomposant au besoin en différence de deux couches $\geqq 0$; dans le langage moderne, U^ρ est surharmonique (le cas où la valeur au contour est seulement continue se ramène au cas particulier traité par un passage à la limite).

En quoi consiste le balayage? Soit μ une distribution de masses $\geqq 0$ dans un domaine ω borné de frontière régulière s. Balayer μ sur s c'est trouver une nouvelle distribution $\nu \geqq 0$ portée par s telle que le potentiel U^ν soit égal au potentiel U^μ dans le complémentaire de ω, et majoré par U^μ dans ω. Ce problème est à peu près équivalent au problème de Dirichlet. Supposons par exemple qu'on puisse balayer sur la frontière S la portion μ_Ω de la masse μ de densité ρ portée par Ω, sans toucher aux masses extérieures à Ω; la nouvelle distribution ν, portée par $\complement\Omega$, aura un potentiel U^ν harmonique dans Ω, et égal à U^μ dans $\complement\Omega$; s'il est possible de montrer que U est une fonction continue, on aura $U^\mu = U^\nu$ sur S, et U^ν résoudra le problème de Dirichlet pour Ω. Mais évidemment on ne sait pas effectuer un tel balayage pour Ω et c'est précisément ce qu'on va tâcher de faire. Si ω est une boule ayant pour frontière une sphère s, on sait résoudre le problème de Dirichlet et celui du balayage; le noyau de Poisson $K(m, p)$, $m \in \omega$, $p \in s$, donne la densité superficielle de la distribution balayée sur s de la masse-unité au point m de ω. On va alors recouvrir Ω par une suite de boules $B_1, B_2, \ldots, B_p, \ldots$, et appeler $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$, cette suite parcourue de telle manière que chaque boule B_k soit nommée une infinité de fois : $B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots$. On opérera alors les balayages suivants : $\mu_0 = \mu = \rho$; μ_1 s'obtient en balayant sur s_1 la portion de μ_0 portée par ω_1 sans toucher à la portion extérieure à $\omega_1, \ldots, \mu_n$ s'obtient en balayant sur s_n la portion de μ_{n-1} portée par ω_n, sans toucher à la portion extérieure à ω_n. Il est bon de remarquer que chaque opération détruit partiellement la précédente : si par exemple ω_{n-1} et ω_n ont une intersection non vide, le $n^{\text{ième}}$ balayage envoie toutes les masses portées par ω_n sur la frontière s_n, et aucune portion de s_n ne s'en trouvera démunie, de sorte que la portion de s_n située dans ω_{n-1} contiendra des masses, alors que la $(n-1)^{\text{ième}}$ opération l'en avait débarrassée. Ainsi chaque fonction U^{μ_n} est surharmonique, harmonique dans une région qui contient ω_n, mais qui ne va pas en grandissant. Cependant on voit aisément que la masse située dans une partie compacte de Ω va en décroissant et tend vers zéro, et c'est là l'essentiel; la limite U sera harmonique mais limite de fonctions qui ne le sont jamais partout. Plus précisément la suite U^{μ_n} est décroissante, donc a une limite U pour $n \to \infty$; comme dans toute boule B_k il y a une infinité de fonctions U^{μ_n} qui sont harmoniques, U est harmonique dans B_k, donc dans Ω. Au fond la méthode employée ressemble singulièrement à une méthode alternée, permettant de passer d'une boule à un domaine quelconque réunion de boules ; si Ω est une réunion de deux boules B_1, B_2, la suite des ω_n est $B_1, B_2, B_1, B_2, \ldots$, et nous retombons sur la méthode de Schwarz.

La fonction U résoudra alors le problème de Dirichlet pour la donnée U^ρ au contour, si l'on peut démontrer qu'elle est continue au contour, puisqu'on a $U = U^\rho$ en dehors de Ω. Pour vérifier cette continuité en un point $a \in S$, supposons qu'il existe un domaine $\Omega' \supset \Omega$, de frontière S' contenant le point a de S, et supposons que pour Ω' le problème de Dirichlet, résolu par exemple par la même méthode du balayage, aboutisse pour la donnée initiale U^ρ (qui, rappelons-le, est supposée définie dans tout l'espace), à une solution U', continue en $a \in S'$. On a les inégalités $U^\rho \geqq U^{\mu_n} \geqq U'$ d'où $U^\rho \geqq U \geqq U'$; lorsque $x \in \Omega$ tend vers a, U^ρ et U' ont par hypothèse la même limite, donc aussi U. Or le domaine complémentaire d'un demi-cône de révolution donne lieu à une discussion possible pour la continuité de U', d'où l'on déduit que si, au voisinage de $a \in S$, il existe un demi-cône de révolution entièrement extérieur à Ω, la fonction U est bien continue en a, a est régulier pour le problème de Dirichlet comme on dit aujourd'hui. On voit pour la première fois intervenir une discussion aussi fine sur le contour. Néanmoins ce n'est encore là que scrupule d'analyste ; quoique le cas traité ne couvre pas le cas général, Poincaré ne soupçonne pas qu'il puisse y avoir des points irréguliers, c'est Lebesgue qui le montrera, et saura en tirer parti. On peut quand même dire que les notions modernes de points réguliers et irréguliers, le fait que $a \in S$ est irrégulier si $\complement\Omega$ est « effilé » en a, tirent leur origine de la discussion de Poincaré. Naturellement ces méthodes modernes permettent de poser le problème de Dirichlet en des termes que Poincaré n'eût pas imaginés, puisque Ω est un ensemble ouvert arbitraire de l'espace euclidien, de frontière (fermée) S quelconque.

Mais revenons sur le balayage lui-même. Un point est tout à fait remarquable. Poincaré a balayé, par un procédé alterné, la portion μ_Ω de μ portée par Ω, sur la frontière S, il obtient U, mais ne s'occupe pas du tout de la masse ν limite des μ_n, et dont U est le potentiel U^ν. Il est donc dans une certaine mesure passé à côté du balayage proprement dit! C'est DE LA VALLÉE-POUSSIN qui le premier a eu l'idée d'examiner ce que devenaient les masses à la suite de ces balayages successifs. Voici ce qu'il dit dans son Mémoire de 1931 sur l'extension de la méthode du balayage de POINCARÉ et le problème de DIRICHLET (*Annales de l'Institut Henri Poincaré*) : « Il semble bien cependant que l'illustre mathématicien n'ait pas attaché à sa méthode l'importance qu'elle méritait, et qu'il n'en ait pas reconnu la puissance. Il ne s'occupe en effet que des potentiels et néglige les masses. Ni lui, ni ses successeurs ne se sont demandés ce que deviennent les masses transportées par le balayage. » On sait tout le parti que DE LA VALLÉE-POUSSIN et, à sa suite, les théoriciens modernes du potentiel, ont tiré de cette considération des masses. La technique de l'espace de HILBERT et le théorème de projection sont venus fournir le moyen d'avoir le balayage d'un seul coup pour Ω, et par là même de résoudre le problème de DIRICHLET, sans passer par l'intermédiaire des sphères, d'un procédé alterné et d'un passage à la limite. La mesure ν, obtenue en balayant sur S la portion μ_Ω de μ portée par Ω sans toucher au reste des masses, est la distribution portée par $\complement\Omega$ dont la distance à μ est minima, au sens de la « norme énergie ». Il faut cependant reconnaître que si cette méthode est absolument directe, elle utilise le procédé transcendant qu'est le théorème de projection dans l'espace de HILBERT, qui, pour évident qu'il soit devenu aujourd'hui, n'utilise pas moins lui aussi une suite minimisante, c'est-à-dire un passage à la limite. Mais les méthodes de l'espace de HILBERT ne servent pas qu'au balayage! HILBERT en 1900 a montré qu'elles permettaient de rendre rigoureuse la méthode initiale de RIEMANN condamnée par WEIERSTRASS, et actuellement, dans les équations elliptiques d'ordre supérieur, comme dans les problèmes aux limites les plus généraux, pour les équations hyperboliques, c'est cette méthode de RIEMANN qui donne les meilleurs résultats.

Il ne faudrait pas terminer cette analyse de la méthode du balayage sans dire quelques mots du Mémoire de 1896, noté 3° au début. POINCARÉ ne donne pas ici une nouvelle méthode. Il est obligé de supposer antérieurement démontré le théorème d'existence. Il montre alors que la série de NEUMANN, qui avait servi à ce mathématicien pour démontrer le principe de DIRICHLET dans le cas d'un contour convexe, converge nécessairement et résout le problème pour un contour régulier simplement connexe quelconque. On voit là que POINCARÉ, mathématicien mais aussi physicien, n'hésite pas à consacrer tout un Mémoire à indiquer une méthode de calcul. C'est d'ailleurs dans ce Mémoire qu'il introduit d'une façon systématique la notion de valeurs propres, dont nous allons parler maintenant.

Les valeurs propres et l'équation des membranes vibrantes. — Nous examinerons les travaux de Poincaré sur les valeurs propres plus rapidement. L'équation des membranes vibrantes est $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$. Si l'on recherche pour u une solution stationnaire, de la forme $u = U(x, y)\cos\omega t$, U doit satisfaire à l'équation elliptique $\Delta U + \lambda u = 0$, $\lambda = \frac{\omega^2}{v^2}$; de plus on impose en général à u, donc à U, certaines conditions aux limites; nous prendrons le cas de la membrane à bord fixe, donc $U = 0$ au bord. Les valeurs possibles de λ sont les valeurs propres du problème; les fréquences correspondantes $N = \frac{\omega}{2\pi}$ sont les fréquences propres de la membrane, fréquences dites du son fondamental (pour la plus petite) et de ses harmoniques. La nature physique du problème montre *a priori* l'existence de cette suite de valeurs propres. D'autre part le paramètre λ a lui aussi une origine physique. La recherche de ces valeurs propres a suscité de nombreux travaux. C'est Schwarz qui a trouvé la première (la plus petite) en 1885; Picard a trouvé la seconde en 1893 (« trouvé » au sens mathématique : montré l'existence). Poincaré, dans son Mémoire noté 2° au début, montre l'existence de toute la suite discrète de ces valeurs propres. Il cherche pour cela à résoudre l'équation $\Delta U + \lambda U + f = 0$, avec valeurs de U nulles au contour. On cherche à développer U suivant les puissances de λ, $U = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n$, et pour trouver chaque U_n on a à résoudre un problème de Dirichlet. Une majoration simple des U_n montre alors que cette série est convergente, et résout le problème qu'il se pose, si $|\lambda|$ est assez petit. Mais ensuite, en multipliant la solution trouvée par un polynome en λ à coefficients indéterminés, il montre qu'on peut choisir le degré et les coefficients de ce polynome de façon à rendre la série convergente pour n'importe quelle valeur de λ donnée à l'avance. Ainsi s'introduit une fonction méromorphe de la variable complexe λ, dont les pôles (avec leurs ordres de multiplicité) donneront les valeurs propres cherchées. Ceci fait en toute rigueur, l'auteur donne divers développements non rigoureux de nature heuristique : les valeurs propres pour d'autres conditions au contour en particulier. D'autre part il ne parvient pas à montrer que les fonctions propres forment un « système complet » de fonctions orthogonales.

Dans le Mémoire des *Acta* (noté 3°), la question des valeurs propres se présente de façon entièrement différente. Il n'y a aucune raison physique de les introduire. Le paramètre λ, qui plus tard fera fortune, est ici assez artificiel. Il est introduit par Poincaré uniquement pour pouvoir résoudre à la fois les problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur, en faisant $\lambda = -1$ dans le premier et $\lambda = +1$ dans le deuxième. D'ailleurs Poincaré ne parvient pas à montrer l'existence de ces valeurs propres dans le problème qu'il s'est posé. Il se contente de suggérer leur existence et le moyen de les obtenir. Il montre alors comment ce résultat, s'il est vrai, permet de montrer pourquoi la série de Neumann est convergente; et il démontre de façon entièrement rigoureuse la convergence de cette série de Neumann (en supposant démontré par ailleurs le principe de Dirichlet) sans se servir de ses conjectures sur les valeurs propres. Il a manqué de peu les découvertes qui seront faites quelques années plus tard par un autre, Fredholm (1903) : noyaux itérés, déterminant de Fredholm, fonction holomorphe entière de λ dont les zéros donnent les valeurs propres, développements en séries de fonctions propres, etc. Du moins a-t-il accueilli la découverte de Fredholm avec l'enthousiasme qu'elle méritait, et a-t-il publié de nombreux articles sur les équations de Fredholm. Il est aussi permis de penser que les recherches qu'il a faites sur les valeurs propres des membranes vibrantes, recherches couronnées de succès, et celles moins fructueuses qu'il fit ensuite à propos de la série de Neumann, ont été pour beaucoup dans la découverte de Fredholm et toute la théorie ultérieure des spectres des opérateurs complètement continus.

CONFÉRENCE DE M. J. LÉVY

A LA HAYE.

Poincaré et la Mécanique céleste.

Depuis qu'en 1909, G. Darwin, remettant à Henri Poincaré la médaille d'or de la Société Royale Astronomique de Londres, analysait son œuvre astronomique, celle-ci a fait l'objet de plusieurs exposés détaillés, notamment celui de von Zeipel, qu'on trouve dans les *Acta mathematica* de 1921, et celui de J. Chazy, récemment paru dans le *Bulletin astronomique*, en 1951.

Dans un autre esprit que celui de ces exposés, je vais ici considérer moins l'aspect technique que l'aspect historique de l'œuvre, tentant de situer les travaux de POINCARÉ, d'examiner les conditions dans lesquelles ils ont été effectués et les conséquences qu'on a su en tirer.

Ces travaux se groupent autour de trois questions fondamentales : figures d'équilibre d'une masse fluide, théorie des marées, théorie des mouvements des corps célestes.

En 1881, POINCARÉ est chargé du cours de Mécanique à la Sorbonne. Enseignant la Mécanique des fluides, il constate les imprécisions et les imperfections de la théorie des masses fluides en rotation. En 1885, il publie le résultat de ses recherches dans un Mémoire des *Acta mathematica* devenu célèbre; le problème qu'il pose et résout est le suivant : quelles sont les figures d'équilibre relatif que peut affecter une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent conformément à la loi de NEWTON et qui est animée autour d'un certain axe d'un mouvement de rotation uniforme, quelles sont les conditions de stabilité de cet équilibre? On sait la façon magistrale dont il conduit son analyse : les auteurs précédents avaient recherché des solutions isolées du problème; lui, par continuité, parvient jusqu'à l'ultime figure qui soit d'un seul tenant, celle qu'il a appelée piriforme. Le sujet a été suffisamment vulgarisé pour qu'il soit inutile d'insister, mais il convient de souligner les difficultés auxquelles s'est heurtée la recherehe de l'évolution ultérieure du fluide, au-delà de la figure piriforme. POINCARÉ croyait primitivement à la stabilité de celle-ci; mais cette figure limite ne se prête pas à l'application du principe général de l'échange des stabilités, ainsi que SCHWARZSCHILD le constate dix ans plus tard. POINCARÉ fait alors le plan des calculs détaillés qu'il y aurait lieu d'exécuter, DARWIN se charge de ces calculs et conclut à la stabilité, en 1902. Mais en 1905, LIAPOUNOFF, par une voie différente, obtient un résultat opposé. En 1915, J. JEANS reprend le calcul de DARWIN, prolonge ses développements, des termes négligés sont retrouvés, le résultat de LIAPOUNOFF est confirmé. Donc la figure piriforme est instable; elle évolue par une scission en deux masses distinctes au moins, dont on sait que l'orbite relative est hyperbolique par les travaux de E. CARTAN (1924) et H. JEFFREYS (1947). On voit comme il peut être malaisé de combler une brèche lorsqu'il en existe dans l'œuvre de POINCARÉ.

En 1892, appelé à la chaire de Mécanique céleste, POINCARÉ est amené à s'intéresser au problème des marées. Le traitement mathématique des observations par l'analyse harmonique, introduit par Lord KELVIN et mis au point par DARWIN, ne laissait guère à désirer. Mais pour le problème général des marées, c'est-à-dire la recherche de la forme de l'onde-marée sur toute la surface d'un océan, aucune solution n'était proposée. LAPLACE s'était placé dans des conditions élémentaires non susceptibles de généralisation, ses successeurs également. La théorie que POINCARÉ a établie permet assez simplement de concevoir la solution d'ensemble du problème. Mais la complication de la forme des continents et de la surface intérieure des bassins océaniques est dans la nature des choses; la construction effective de la solution générale était inabordable jusqu'à présent; il n'est pas certain qu'il en soit encore ainsi, maintenant que l'on dispose du secours des calculatrices électroniques. Il y a lieu de noter que la méthode de POINCARÉ, qui date de 1896, repose sur la résolution d'une équation qui n'est autre que l'équation de FREDHOLM; les premières recherches de celui-ci ne paraissent que quelques années plus tard.

Les travaux que je viens de citer, sur les masses fluides en rotation et sur les marées, appellent une observation. L'article des *Acta* est de 1885; le sujet est traité dans toute son étendue; les méthodes sont exposées avant d'être employées; le texte est d'une lecture aisée. Aussi non seulement les résultats obtenus sont exploités, mais en outre les procédés nouveaux, que POINCARÉ introduit profusément ici comme dans tous ses écrits, se diffusent. J'en cite un; les petits mouvements des figures d'équilibre sont étudiés de la façon suivante : le fluide est solidifié, soumis à une déformation homogène, et le problème est ramené à la recherche d'une fonction harmonique satisfaisant à certaines conditions aux limites dans le petit volume balayé au cours de la déformation. On sait que les problèmes pratiques les plus divers ont depuis été résolus par cette méthode.

L'article fondamental sur les marées paraît dix années plus tard. Il est trop dense pour que les non-spécialistes s'y attardent; aussi la théorie des équations intégrales qui y aurait trouvé sa source naturelle va se constituer de façon indépendante. D'autre part la théorie complète des marées ne sera jamais mise au point par POINCARÉ; le Tome III des *Leçons de Mécanique céleste* est en fait constitué par des notes de cours mises en ordre. Il ne semble pas non plus que POINCARÉ ait jamais eu le loisir de traiter l'ensemble des problèmes simples dont la réunion aurait permis l'application, sinon au problème général, du moins à des cas concrets. Il est vrai que différentes contributions ont été apportées au sujet, notamment par l'Amiral FICHOT qui l'a par ailleurs exposé de façon tout à fait remarquable en 1938 dans un Mémoire où l'on ira désormais plus volontiers puiser que dans l'Ouvrage original. Mais c'est l'effort de plusieurs générations de chercheurs qui est nécessaire lorsque Poincaré limite le sien à l'établissement des principes d'une théorie.

Peut-être y a-t-il lieu de regretter que dès cette époque les charges de plus en plus lourdes qu'il accepte avec conscience ne lui accordent plus le temps de parfaire ses œuvres. C'est aux innombrables académies, associations, conseils et comités qui ont sollicité la faveur de l'accueillir qu'il donne une part du meilleur de lui-même. Il se dépense à des tâches qui ne sont pas à sa mesure. C'est ainsi que, président de la Commission chargée d'organiser la révision de l'arc de méridien de Quito, il fera lui-même, de 1900 à 1905, tous les rapports sur le sujet. En 1900, il discute des économies pouvant être réalisées sur l'achat des mules de l'expédition; en 1902, des mesures à prendre pour remédier à la destruction systématique des signaux géodésiques par les Indiens; en 1905, de la reproduction par planches coloriées des insectes recueillis par l'expédition.

Or en 1905, il possède tous les éléments physiques et cinématiques de la théorie de la relativité; mieux, il prépare alors un cours sur les limites de la loi de Newton (cours inédit, mais dont le texte, recuelli, a été publié en 1953 dans le *Bulletin astronomique*); dans ce cours se trouvent exposés à peu d'intervalle : et les principales divergences entre l'observation et la loi de Newton, et les formules de Lorentz, et ses propres travaux sur la dynamique de l'électron. N'est-il pas permis de penser que si la synthèse n'en a pas été faite, c'est que ce rapprochement ne s'est jamais matérialisé sur sa table de travail, encombrée par les lourds rapports sur les opérations géodésiques de l'Équateur?

Encore s'agit-il là d'une activité secondaire pour lui, certes, mais scientifique. Poincaré en avait beaucoup d'autres. Sa notoriété, et l'attrait que les choses du ciel exercent sur les foules, lui attirait continuellement les journalistes à court de copie. C'est ainsi qu'en 1910 l'année avait été exceptionnellement pluvieuse. On ne pouvait pas encore incriminer les explosions nucléaires, on ne pouvait plus, comme à la fin du XVIII^e siècle, s'en prendre aux déboisements intensifs, aussi la presse invoqua les comètes de l'année. Après, mais après seulement, on s'inquiéta auprès de lui de l'exactitude de cette hypothèse. Poincaré dut la combattre à diverses reprises, employant des arguments à la portée du public, comme celui d'après lequel la tradition rattache à l'apparition des comètes l'abondance du bon vin plutôt que celle de l'eau.

En cette même année 1910, il professe un cours sur les hypothèses cosmogoniques, mine de trésors à peine prospectée; les hypothèses sont périmées, mais la parure que Poincaré leur a donnée en les présentant a gardé tout son éclat. Le théorème du viriel, que Jeans y a trouvé, est un des fondements de la dynamique stellaire. Je rappelle aussi qu'on y rencontre un magistral exposé de la théorie cinétique des gaz.

Dans les travaux de Poincaré sur les mouvements des corps célestes, le sujet qui domine est le problème des trois corps, problème demeuré au premier plan de ses préoccupations durant toute sa carrière. Le premier article où il l'étudie date de juillet 1883 et concerne les orbites périodiques. A la veille de sa mort, il énonce la proposition connue sous le nom de « dernier théorème de Poincaré » dont l'objet est encore d'établir l'existence d'une classe de solutions périodiques; (la justification de ce théorème, que Poincaré pressentait n'avoir plus le temps d'effectuer, est due à G. Birkhoff).

Lorsqu'en 1885 le Roi de Suède Oscar II institue un concours internationa où le problème des n corps est proposé, Poincaré y voit l'occasion de préciser ses recherches. Il se trouve ainsi, d'ailleurs pour la seule fois de son existence, devant la nécessité de présenter, en un temps limité, un travail s'achevant par des conclusions définies. Ces circonstances contribuent à la perfection du Mémoire élaboré, intitulé *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. Ce Mémoire, qui emporta le prix, est non seulement le chef-d'œuvre de Poincaré, mais un des sommets de la pensée mathématique de tous les temps.

Les équations différentielles du problème des trois corps, inaccessibles à une résolution formelle, étaient abordées depuis Lagrange au moyen de développements en série de natures diverses ; l'expérience avait conseillé la recherche de développements purement trigonométriques par rapport au temps, ou plutôt des premiers termes de ces développements. D'autre part en 1878 Hill avait obtenu une solution périodique dans un cas très particulier du problème des trois corps. Poincaré comprit que c'est par l'intermédiaire des solutions périodiques, pour lesquelles le problème de la convergence ne se pose pas, que la convergence éventuelle du développement général pouvait être étudiée. On sait qu'il y parvint et conclut à la divergence, ou plus exactement à l'impossibilité de la convergence uniforme dans un domaine si petit soit-il de l'espace des conditions initiales. Mais en chemin, il avait découvert l'existence de trois classes de solutions périodiques, imaginé la théorie des exposants caractéristiques, introduit pour leur recherche la notion nouvelle d'équation aux variations, découvert l'existence des solutions asymptotiques, créé la notion et la théorie des invariants intégraux, posé la première pierre de la théorie ergodique, sans compter d'autres résultats essentiels, comme la preuve de la non-existence d'intégrale analytique uniforme autre que les intégrales connues, ou encore l'extension du théorème de CAUCHY relatif aux équations différentielles, extension d'après laquelle la solution est fonction holomorphe non seulement de la variable indépendante mais encore des paramètres, c'est-à-dire, pour les problèmes de dynamique, des conditions initiales.

(En ce qui concerne les invariants intégraux, il s'agit bien d'une création, et non d'une extension de l'invariant de volume de LIOUVILLE-BOLTZMANN, ou alors il faut considérer dans le même esprit que la théorie des déterminants est une extension des travaux de VIETE, qui savait résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues au moyen de l'algèbre symbolique.)

Lorsque POINCARÉ enseignera la Mécanique céleste, il intensifiera ses recherches, qui n'avaient pas cessé. Ses résultats seront désormais groupés dans les trois tomes des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (et accessoirement dans les deux premiers de ses *Leçons de Mécanique céleste*). On y trouve la généralisation de certains résultats du Mémoire couronné qui ne s'appliquaient qu'au problème restreint des trois corps (une des masses est nulle, le mouvement relatif des deux autres est circulaire et uniforme), l'établissement de l'existence de solutions doublement asymptotiques. On y trouve aussi différentes transformations des équations du problème au moyen de variables canoniques nouvelles et une discussion critique des méthodes d'intégration en usage. Les *Méthodes nouvelles* sont d'une exploration difficile; le texte reste clair, mais la cohérence manque, les notations changent fréquemment, les notions sont dispersées, conditions qui ont retardé et retardent encore l'exploitation des richesses que l'Ouvrage contient. Mais cette exploitation est en cours; par les résultats déjà dégagés de ces recherches, on pourra apprécier leur portée.

Le problème des trois corps a deux aspects : l'un est relatif à la possibilité de prévoir le mouvement des planètes, c'est-à-dire d'effectuer le calcul des éphémérides; l'autre est théorique, il concerne la stabilité du système solaire. Les fondateurs de la Mécanique céleste s'inquiétaient de ces deux aspects; le célèbre théorème sur l'invariabilité des grands axes est contemporain de la mise en équation du problème par LAGRANGE, et n'a pas peu contribué à la gloire de LAPLACE. Bien que ce théorème ait été l'objet de diverses extensions, il n'y s'agissait jamais que de constater, dans les premiers termes des développements des grands axes des orbites, l'absence de termes séculaires. Aucune conclusion définitive ne pouvait être attendue de cette méthode, la seule dont on disposait. A la fin du XIX[e] siècle, deux événements remettaient la stabilité du système solaire en question. Dans un développement assez poussé, un terme séculaire mixte était découvert (par un calcul qu'un travail tout récent a fait reconnaître erroné, sans d'ailleurs que la conclusion qualitative soit modifiée). On pouvait encore espérer que c'était par la nature du procédé de développement choisi qu'on introduisait ce terme séculaire, et que des calculs conduits dans un autre esprit permettraient de l'éviter. Peu après, en établissant la divergence des séries de la Mécanique céleste construites avec le temps comme variable indépendante, POINCARÉ ruinait cet espoir. L'allure finale du mouvement ne pouvait être abordée que par une voie toute différente. Les découvertes successives de nouvelles multiplicités de solutions périodiques et asymptotiques ont jalonné la carrière de POINCARÉ; elles lui ont permis d'accumuler un matériel considérable auquel sont dus tous les progrès modernes réalisés dans l'étude du problème.

Dès 1912, Karl SUNDMAN avait trouvé la variable indépendante qu'il convient de substituer au temps pour régulariser le système, c'est-à-dire permettre le calcul des inconnues et du temps sous la forme de fonctions holomorphes. On a pu dire que le problème des trois corps était résolu; en fait, la convergence des séries, par ailleurs de construction difficilement concevable pour une application pratique, est si lente qu'il ne saurait être question de les utiliser.

A l'aide de cette variable régularisante et de la théorie des invariants intégraux, J. CHAZY a démontré que l'ensemble des trajectoires issues des points d'un certain volume de l'espace à 12 dimensions des coordonnées et des vitesses présente la stabilité à la POISSON, les éléments redevenant ainsi une infinité de fois très voisins des éléments initiaux; toutes les autres trajectoires possèdent la propriété de réversibilité, c'est-à-dire que le mouvement relatif de deux quelconques des corps est de la même nature pour les valeurs du temps infiniment grandes de l'un ou l'autre signe. A l'aide de ces propriétés et de l'étude des points singuliers du système, on obtient une classification et une localisation relative de toutes les trajectoires possibles dans le problème des trois corps. Cette analyse, outre qu'elle n'a pas d'équivalent parmi celles qu'on a pu faire au sujet d'autres systèmes différentiels d'ordre élevé, conduira très vraisemblablement à une conclusion précise quant à la stabilité du système solaire. La principale lacune à combler est peut-être dès maintenant à la portée des spécialistes de la théorie ergodique.

Il n'est pas inutile de préciser que le problème en jeu est purement théorique : il concerne l'éventuelle stabilité des solutions du problème des trois corps lorsque les masses sont ponctuelles et offrent des conditions initiales qu'on rencontre chez les corps du système solaire. On ne peut plus penser aujourd'hui que les problèmes cosmogoniques puissent se traiter en faisant abstraction de leurs aspects physiques, lesquels nous sont d'ailleurs partiellement inconnus. L'intérêt capital attaché à un problème théorique qui a suscité des efforts aussi grandioses n'en est pas moins évident.

De 1884 à sa mort, par près de 100 Articles et Ouvrages couvrant 5000 pages de texte, POINCARÉ a consacré une importante fraction de son activité à la Mécanique céleste et à l'Astronomie. C'est par cette part de son œuvre qu'il a reçu du grand public l'hommage d'une popularité universelle, telle qu'aucun savant n'en a connue depuis. C'est aussi dans ce domaine qu'il a fait preuve du plus profond de son génie. Pourtant, aujourd'hui, il est possible de faire un cours d'Astronomie ou d'écrire un traité sur le calcul des orbites sans même mentionner son nom. Ses travaux ne sont pas incorporés aux notions classiques qui forment le bagage du praticien. Ils le seront un jour. La Mécanique céleste est demeurée à l'état empirique de ses débuts. En traitant les problèmes dans toute leur généralité, POINCARÉ a ouvert la seule voie possible au progrès.

CONFÉRENCE DE M. E. W. BETH

A LA HAYE.

Poincaré et la Philosophie.

Lorsque Louis COUTURAT prononça, en 1904, son verdict sur la philosophie des mathématiques de KANT, ses auditeurs avaient bien des raisons de se rappeler que ce fut le centenaire de la *mort* de KANT qui présenta l'occasion de son discours. Le fait que nous célébrons aujourd'hui le centenaire de la *naissance* de Henri POINCARÉ souligne fort heureusement la vitalité et l'actualité de son œuvre, y compris sa philosophie. Ce caractère vivant de la philosophie de POINCARÉ, d'autre part, nous permet et nous oblige même de la considérer de façon critique, et non pas sous un angle purement historique et rétrospectif.

Il est utile de distinguer dans l'œuvre philosophique de POINCARÉ trois éléments, à savoir :

1° philosophie générale, morale et sociale;
2° philosophie des sciences de la nature;
3° philosophie des mathématiques.

La première partie, bien que caractéristique du penseur et importante à bien des points de vue, demanderait cependant pour être discutée que nous sortions du cadre imposé à cette célébration. Dans la deuxième partie, la pensée de POINCARÉ se rattache à celle de bon nombre de ses contemporains — DUHEM, MACH, PEARSON et autres — en sorte qu'il ne serait pas juste de la présenter séparément. D'ailleurs, les vues générales défendues par ces penseurs ont fortement influencé le développement des sciences de la nature — on sait que POINCARÉ partage avec EINSTEIN l'honneur de la découverte de la théorie spéciale de la relativité — et elles ont obtenu aujourd'hui une acceptation quasi universelle.

Il ne reste donc que la philosophie des mathématiques de POINCARÉ que je me propose de discuter un peu plus à fond et que je voudrais confronter à la pensée mathématique moderne dans son ensemble et plus particulièrement aux conceptions actuelles au sujet des fondements des mathématiques. Les grandes tendances dans ce dernier domaine peuvent être caractérisées par trois termes : 1° abstraction; 2° axiomatisation et 3° formalisation [1]. Je veux décrire ces trois tendances et discuter l'attitude de POINCARÉ par rapport à chacune.

1° La tendance abstraite consiste à ce qu'on fasse abstraction des représentations intuitives qui se rattachent de façon traditionnelle à des concepts tels que nombre, somme, point, droite, etc. Cette tendance se manifeste déjà dans la création de la Géométrie analytique par FERMAT et DESCARTES; elle s'impose, toutefois, si l'on accepte la tendance axiomatique et les méthodes dont l'intro-

[1] On me reprochera peut-être de ne pas mentionner, dans ce contexte, l'intuitionisme de l'école de BROUWER. Or, il ressort de la thèse de BROUWER (1907) que mon célèbre compatriote fut sans doute stimulé par les idées de POINCARÉ mais qu'il ne les accepta guère sans réserves; autant que je sache, POINCARÉ n'a jamais publié ses opinions concernant les vues de BROUWER. L'idée d'une révision intégrale des mathématiques qui amena BROUWER, en 1918, à construire une mathématique purement intuitioniste à côté des mathématiques classiques ne se trouve pas chez POINCARÉ qui se limita toujours à combattre certaines conceptions, selon lui erronées, concernant les fondements des mathématiques classiques.

duction résulte de son acception. Mentionnons en particulier la méthode des modèles qui fut appliquée par POINCARÉ dès 1882 dans un célèbre Mémoire sur la *Théorie des groupes fuchsiens*.

2° La tendance axiomatique consiste à ce qu'on fasse un effort pour effectuer une énumération complète de toutes les présuppositions qui sont à la base d'une théorie mathématique donnée pour établir leur non-contradiction et leur indépendance mutuelle. Cette tendance s'est introduite à la suite des recherches sur les géométries euclidienne et non euclidiennes et des efforts pour fonder l'analyse infinitésimale sur une base solide. Elle s'est accentuée en vertu de l'avènement de la tendance abstraite.

3° La tendance formaliste n'est, en somme, qu'une conséquence inéluctable des tendances abstraite et axiomatique. Si, dans nos déductions, nous ne devons plus nous faire guider par nos intuitions, il faut bien que nous sachions exactement quelles déductions seront admises; également, une énumération complète des axiomes ne sert à rien si elle n'est pas doublée d'une énumération des règles de déduction.

En effet, imaginons que deux mathématiciens M et N soient d'accord sur un système d'axiomes A pour la géométrie absolue, l'ensemble des théorèmes communs aux géométries euclidienne et non euclidiennes; supposons que M n'admette que les règles de déduction conformes à l'usage établi, tandis que N admet une règle de déduction supplémentaire permettant de déduire de l'axiome A_1 en tant que prémisse le postulat des parallèles en tant que conclusion. Alors, N pourra déduire en partant de A tous les théorèmes de la géométrie euclidienne.

Cet exemple est, peut-être, assez trivial; mais il se présente, de fait, des cas analogues mais plus subtils. En effet, soit A un système d'axiomes pour l'Arithmétique. Alors, il peut arriver que N admette une règle de déduction qui corresponde au raisonnement par récurrence, tandis que M se refuse à admettre ce raisonnement à titre de méthode autonome. Il se demande alors, si peut-être ce type de raisonnement se réduit aux axiomes et règles de déduction qui sont admis par M; et cette question ne saurait être entamée tant que nous ne disposons pas d'une énumération complète des règles de déduction qui sont admises par M. Mais il est connu qu'une telle énumération n'est guère possible tant que le langage de la théorie en question n'est pas formalisé.

4° Je n'ai pas encore mentionné la tendance logiciste qui ne se rattache point aussi étroitement au développement autonome des mathématiques mais qui dérive en partie de l'influence de certaines conceptions philosophiques. D'autre part, elle est en pleine harmonie avec les tendances abstraite et axiomatique et elle se sert volontiers de la formalisation comme instrument de travail.

Il s'agira maintenant de caractériser l'attitude de Poincaré par rapport aux tendances que je viens de décrire. Or, on serait tenté de dire simplement que Poincaré s'est opposé à toutes ces tendances. Il serait sans doute facile de trouver dans ses œuvres des textes qui paraissent confirmer une telle interprétation, et il est patent que, en France, son influence s'est surtout manifestée dans ce sens.

Pourtant, il me semble que cette interprétation ne peut pas être acceptée comme définitive. En effet, elle est injuste, et par rapport à Poincaré lui-même, et par rapport au développement ultérieur des différentes tendances. Il sera utile de mentionner les travaux relevant de Poincaré par ordre chronologique.

1894 : *Sur la nature du raisonnement mathématique* (*R. M. M.*, vol. 2; reproduit dans *La Science et l'Hypothèse*, Paris, 1902).

1905-1906 : *Les mathématiques et la logique* (*R. M. M.*, vol. 13 et 14; reproduit, avec des changements, dans *Science et Méthode*, Paris, 1908).

1906 : *A propos de la logistique* (*R. M. M.*, vol. 14).

1908 : *Les derniers efforts des logisticiens* (dans *Science et Méthode*).

1909 : *La logique de l'infini* (*R. M. M.*, vol. 17, reproduit dans *Dernières pensées*, Paris, 1913).

1912 : *Les mathématiques et la logique* (dans *Dernières pensées*).

Déjà dans son article de 1894, Poincaré défend le caractère synthétique du raisonnement par récurrence, qui implique l'impossibilité de se passer, en Mathématiques, de tout appel à des données d'ordre intuitif. Dans ses polémiques ultérieures avec Couturat et Russel, qui étaient l'un et l'autre des partisans du logicisme, ce point est toujours appuyé et il paraît que nous trouvons là, en effet, le point faible dans tout effort pour établir les mathématiques d'une façon purement logique. Il serait, bien entendu, prématuré de dénier pour cette raison toute valeur aux recherches de l'école logiciste et je ne crois pas que Poincaré lui-même ait jamais pensé qu'une telle conclusion serait justifiée.

Je crois que la situation telle qu'elle se présente aujourd'hui peut être décrite de la manière suivante. On peut établir d'une façon purement logique une grande partie de l'Analyse élémentaire, y compris l'Arithmétique, à condition d'admettre, à côté de certains postulats logiques, un certain nombre de postulats, dont le caractère logique est douteux, à savoir : (1) un axiome de l'infini, qui consiste à admettre l'existence d'un nombre infini d'éléments individuels; (2) des axiomes concernant l'existence de certaines classes, qui ne peuvent être définies qu'au moyen de définititions imprédicatives; les définitions de ce genre se caractérisent par le fait qu'elles font intervenir des opérations infinies sur un domaine de variation qui contient l'entité définie. Pour démontrer certains théorèmes de l'analyse supérieure, il faut que l'on fasse en outre appel à (3) l'axiome du choix.

Si l'on accepte les axiomes (1) et (2), on peut justifier l'application et la définition par récurrence.

Il se demande alors si l'on peut justifier l'acceptation des axiomes (1) et (2). Et à cette question on ne peut répondre qu'avec bien des réserves, à cause de certaines difficultés qui en partie ont déjà été signalées par Poincaré. L'admission des définitions imprédicatives présente un certain risque, étant donné que ce sont des définitions de ce genre qui ont donné lieu aux fameux paradoxes de la logique et de la théorie des ensembles. Il est vrai que Russel et Zermelo et les successeurs de ces deux savants ont tracé certaines zones de sécurité, mais le seul fait qu'on sait comment éviter les paradoxes connus ne constitue pas une garantie solide contre la découverte de paradoxes nouveaux.

Demandons-nous comment on pourrait trouver une telle garantie. A première vue, se présentent les possibilités suivantes :

1° Il se pourrait que l'existence des classes spéciales dont on a besoin s'avère évidente. Cependant si l'existence de ces classes était évidente, on n'aurait pas besoin de définitions imprédicatives pour les définir.

2° On peut essayer de démontrer la non-contradiction des axiomes (1) et (2). Poincaré a déjà remarqué qu'une telle démonstration demanderait probablement un appel à la méthode du raisonnement (et de la définition) par récurrence, et présenterait donc un cercle vicieux. En outre, Gödel (1931) a démontré qu'une telle démonstration demande de toute façon un appel à des présuppositions plus fortes même que celles qui sont représentées par les axiomes (1) et (2). D'autre part, une contradiction dans un système formalisé présente un problème beaucoup plus sérieux qu'un paradoxe dans un système non formel, puisqu'elle ne peut pas être supprimée par un simple appel au sens commun ou à l'intuition.

3° On peut essayer de remplacer les définitions imprédicatives par des définitions prédicatives. Mais d'après des résultats de recherches récentes de Mostowski et de Hao Wang, qui se rattachent au théorème cité de Gödel, il y a certaines définitions imprédicatives qui ne peuvent pas être remplacées par des définitions prédicatives.

Il paraît donc qu'aucune des possibilités indiquées n'ouvre une issue, en sorte que l'édifice des Mathématiques pures construit conformément aux idées de l'école logiciste de Frege, Russel et Couturat reste dépourvu d'un fondement solide (la même conclusion s'applique à une construction des Mathématiques pures partant de la théorie générale des ensembles selon Cantor et Zermelo). Cette conclusion n'offre-t-elle pas une justification complète des idées de Poincaré, interprétées comme un rejet des tendances abstraite, axiomatique et formelle et notamment des constructions logicistes et ensemblistes?

Je crois que non. En effet, la construction logiciste, en dépit de l'absence d'une garantie absolue de son bien-fondé, reste debout et présente une unification fort imposante des Mathématiques pures contemporaines dans leur ensemble; cette unification présuppose certaines conceptions fondamentales dont la valeur ne serait pas affectée même par la découverte de nouveaux paradoxes.

En outre, la tendance logiciste ne constitue, comme nous l'avons montré, qu'une version radicale d'une certaine fusion des tendances abstraite, axiomatique et formaliste. Même l'effondrement total du logicisme ne constituerait donc pas un échec de ces tendances, qui de ce fait ne résultent que de certaines tendances immanentes au développement moderne des mathématiques pures.

Des résultats comme celui de Gödel ne seraient pas possibles si l'on n'avait pas effectué une formalisation des théories déductives auxquelles ces résultats se rapportent. Il serait d'ailleurs incorrect de n'attribuer à de tels résultats qu'une portée purement négative : tout au contraire, ces résultats révèlent certaines propriétés profondes des structures déductives qu'on n'aurait guère découvertes par une voie différente. A titre d'exemple, je cite les recherches de Church, Rosser, Post, Marhow et autres sur les problèmes insolubles et les théories non décidables et, dans une direction opposée, les résultats positifs de

Tarski concernant le problème de décision pour certaines théories mathématiques.

Aussi il me paraît injuste d'interpréter les idées de Poincaré sur les fondements des mathématiques exclusivement, comme il arrive trop souvent, dans un sens négatif, comme une série de tentatives pour réfuter les tendances abstraite, formaliste, logiciste et ensembliste. A mon avis, il est plutôt juste de dire que Poincaré a prévu certaines complications auxquelles le développement de ces tendances devait ultérieurement donner lieu; ce qu'il a voulu réfuter, ce sont certaines conceptions trop simplistes et certaines espérances exagérées. Mais il ne paraît pas que la critique de Poincaré ait atteint ce qui est essentiel dans la logique et la recherche des fondements contemporaines; et je ne crois pas que Poincaré ait jamais voulu atteindre cet élément essentiel qui n'est au fond que l'idée même d'une science mathématique pure.

ALLOCUTION DE M. J.-M. GARNIER,

AMBASSADEUR DE FRANCE POUR LA CLÔTURE DE LA JOURNÉE INTERNATIONALE HENRI POINCARÉ A LA HAYE.

Monsieur le Président,
Messieurs,

Il m'a été particulièrement agréable de me trouver associé à l'hommage que vous venez de rendre à notre illustre compatriote Henri Poincaré en lui consacrant cette journée commémorative.

La meilleure tradition des Pays-Bas apparaît dans votre geste : celle de l'universalité de l'esprit humain et de la Science qui ne connaît pas de frontières, celle d'un pays libre et hospitalier dont le climat intellectuel a permis la maturation des génies de Descartes et de Spinoza.

Il n'est pas de langage qui plus que celui des mathématiques permette à l'élite scientifique du monde entier de se mieux comprendre, afin de progresser d'un même pas dans les chemins ardus de la Science. Aussi bien n'est-il pas surprenant que de grands mathématiciens aient été aussi de grands penseurs.

Henri Poincaré a, après beaucoup d'autres, enrichi le domaine qui vous appartient. Je ne me risquerai pas, Messieurs, à la moindre incursion dans la partie purement mathématique de son œuvre. Sur ce terrain, les experts que vous êtes possèdent assez d'éléments d'appréciation, sans qu'il soit besoin de m'y aventurer.

Mais il est un ouvrage d'Henri Poincaré qui s'adresse à un public plus large que l'élite des mathématiciens que vous représentez; les grandes idées qu'il contient font de leur auteur un des maîtres de la pensée française contemporaine. J'ai trouvé pour ma part dans *La Science et l'Hypothèse* de grandes leçons et une philosophie optimiste de laquelle notre époque peut tirer profit. De même que les théories scientifiques émises depuis des siècles présentent, dans le cadre de l'histoire de la pensée scientifique, un caractère éphémère qui amènerait un observateur superficiel à proclamer une fois de plus la faillite de la Science, de même les grandes constructions politiques et économiques de notre époque n'ont pas toujours un destin positif. Cette constatation pourrait nous conduire à un funeste immobilisme en incitant les hommes de bonne volonté à « demeurer sous la tente ». Or Henri Poincaré est là pour nous donner une grande leçon de courage : conservant une confiance inébranlable dans la Science, il affirme que, de chaque théorie qui passe, quelque chose subsiste, qui entre dans l'acquis des connaissances humaines. C'est ce message d'Henri Poincaré qu'il me plaît de rappeler car il peut, à mon avis, valablement s'appliquer à la vie politique contemporaine. Tous les efforts de synthèse ont leur valeur : ils ne permettent pas seulement de mieux mettre en lumière tel ou tel rapport entre les faits, mais aussi de mieux pénétrer la réalité des choses. Et les gains ainsi obtenus sont un acquis permanent pour la pensée humaine, donc pour l'action future.

Je vous remercie, Messieurs, d'avoir tenu à reconnaître la grande contribution d'Henri Poincaré au patrimoine commun de la Science en commémorant aujourd'hui le 100^e anniversaire de sa naissance.

Permettez-moi, en terminant, de vous inviter à clore cette journée dans les salons de l'Ambassade de France où j'aurai tout à l'heure le grand plaisir de vous accueillir.

C. — AUTRES MANIFESTATIONS A L'ÉTRANGER.

Le Comité a été heureux d'apprendre que, en dehors des articles de presse ou de revues, plusieurs pays étrangers ont marqué le 100e anniversaire de la naissance de Henri POINCARÉ par une cérémonie particulière. La République de l'Équateur, l'Ile Maurice, l'U. R. S. S., le Vénézuéla et la Yougoslavie sont du nombre.

La première en date de ces cérémonies paraît avoir été celle de Caracas où l'Académie des Sciences physiques mathématiques et naturelles a tenu le 29 avril 1954, le jour même du 100e anniversaire de la naissance de Henri POINCARÉ, une séance spéciale au cours de laquelle ont été présentés quelques volumes de Henri POINCARÉ, des photographies, la médaille de PRUDHOMME et une lettre autographe de Henri POINCARÉ.

M. F. J. DUARTE, Membre de l'Académie des Sciences a fait ensuite une conférence sur *La vie et l'œuvre de Henri Poincaré* à laquelle assistait son Excellence M. Pierre ARNAL, Ambassadeur de France au Vénézuéla.

A l'Ile Maurice, M. Pierre SORNAY, Ingénieur chimiste, a fait à la radio une causerie d'une vingtaine de minutes sous le titre *Henri Poincaré et son œuvre*.

En U. R. S. S., c'est l'Académie de Moscou qui a fêté le centenaire de la naissance de Henri POINCARÉ.

En Yougoslavie l'Institut de Mathématiques près l'Académie des Sciences de Serbie a consacré sa séance ordinaire du 22 juin à la commémoration du centenaire de la naissance de Henri POINCARÉ. M. KASANIN, directeur de cet Institut, et le Professeur SALTYKOV, de l'Université de Belgrade et Membre de l'Académie ont fait l'un et l'autre une conférence.

La République de l'Équateur n'a pas oublié que le nom de Henri POINCARÉ est attaché dans une certaine mesure aux travaux de la Mission géodésique française qui a effectué, de 1901 à 1905, une nouvelle mesure de l'arc de méridien de Quito. De la part de M. Pierre RICARD, Vice-Président du Conseil National du Patronat Français, son Excellence M. Pierre DENIS, Ambassadeur de France en Équateur, a remis à M. J. M. VELASCO IBARRA, Président de la République Constitutionnelle de l'Équateur, quelques souvenirs de Henri POINCARÉ, en particulier le tome VIII des *Œuvres* qui contient quatre rapports présentés par Henri POINCARÉ à l'Académie des Sciences pour montrer d'abord l'intérêt scientifique et politique du projet de révision de l'arc de méridien de Quito en 1900, et pour tenir ensuite l'Académie au courant du développement des opérations. Henri POINCARÉ avait été nommé, en effet, rapporteur de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Équateur, et il n'a pas cessé d'y porter un très vif intérêt. C'est sans doute pour préparer un de ces rapports qu'il avait noté de sa main la chronologie détaillée des travaux effectués et des difficultés rencontrées sur une feuille volante qui a été retrouvée dans ses papiers, et dont une copie photographique a pu être remise aussi à M. le Président J. M. VELASCO IBARRA.

D. — AUTRES MANIFESTATIONS EN FRANCE.

A l'Institut Henri Poincaré à Paris, s'est tenu du 18 au 27 octobre 1954, un *Colloque Henri Poincaré*, organisé par la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, avec l'appui de la Direction Générale des Relations culturelles et du Centre National de la Recherche Scientifique. De nombreux savants étrangers étaient venus à Paris à cette occasion. Nous nous bornerons à reproduire ici par ordre alphabétique la liste des 17 conférenciers qui ont presque tous donné deux conférences :

M. Enrico BOMPIANI, Professeur à l'Instituto matematico Universita, Rome :

— *Sur les théories unitaires de la Relativité.*

— *Sur l'instabilité de certaines substitutions.*

M. J. L. DOOB, Professeur à l'Université de l'Illinois :

— Deux conférences sur : *Approche probabiliste du problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles paraboliques, et des problèmes aux limites qui s'y rattachent.*

M. Lars GÅRDING, Professeur à l'Universite de Lund :

— *Sur les intégrales d'énergie pour les équations hyperboliques.*

M. Lucien GODEAUX, Professeur à l'Université de Liège :

— *Théorie des involutions appartenant à une surface algébrique et applications.*

M. HARISH-CHANDRA, Assistant-Professeur à Columbia University, New-York :

— *The connection between the Cartan subgroups of a semisimple Lie group and its irreducible unitary representations* (en anglais).

Square-integrable representations of semisimple Lie groups (en anglais).

M. F. E. P. HIRZEBRUCH, Professeur à l'Institute for adv. Study, Princeton :

— *On the characteristic cohomology classes of differentiable manifolds* (en anglais).

— *The Theorem of Riemann-Roch. Applications to special classes of algebraic manifolds* (en anglais).

M. E. R. KOLCHIN, Professeur à Columbia University, New-York :

— Deux conférences sur : *Corps différentiels et variétés de groupe.*

M. George W. MACKEY, Professeur à Harvard University :

— Deux conférences sur : *Les représentations de dimension infinie des extensions des groupes.*

M. Saunders MAC LANE, Professeur à l'Université de Chicago :

— *Constructions simpliciales acycliques.*

— *Comparaison des constructions homotopiques.*

M. Tadasi NAKAYAMA, Professeur à Nagoya University :

— *Structure of Algebras with vanishing n-Cohomology Groups* (en anglais).

— *Cohomology of Frobenius Algebras* (en anglais).

M. Georges DE RHAM, Professeur à l'Université de Lausanne :

— *Solution élémentaire relative à l'opérateur* $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

M. Luis A. SANTALO, Professeur à l'Université de Buenos-Aires :

— *Sur quelques problèmes de géométrie intégrale.*

— *Géométrie différentielle affine et corps convexes.*

M. Benjamino SEGRE, Professeur à l'Istituto Alta Matematica, Rome :

— *Aspects géométriques et arithmétiques de la théorie des spineurs.*

— *Questions de réalité liées à la théorie des algèbres.*

M. Francesco SEVERI, Professeur à l'Istituto Alta Matematica :

— *Problèmes anciens et problèmes nouveaux dans la géométrie énumérative.*

— *La théorie générale des correspondances entre variétés algébriques.*

M. John L. SYNGE, Professeur au Dublin Institute for advanced Studies :

— Deux conférences sur : *La Géométrie élémentaire de l'espace fonctionnel avec des applications à la Physique classique.*

M. J. H. C. WHITEHEAD, Professeur à l'Université d'Oxford :

— Deux conférences (en anglais) sur : *S-Theory.*

M. Kentaro YANO, Professeur à l'Université de Tokyo :

— Deux conférences sur : *Les groupes de transformations dans les espaces de Riemann et dans les espaces à connexion affine.*

Après l'armement français, l'industrie hydroélectrique a voulu également honorer la mémoire de Henri Poincaré. La *Compagnie Nationale du Rhône* a décidé en effet de donner le nom de Henri Poincaré à la Centrale de Châteauneuf du Rhône (aménagement de Montélimar).

Aussi en liaison avec le Comité du Centenaire et l'Association des Ingénieurs des Ponts et Chaussées et des Mines, la Compagnie Nationale du Rhône a-t-elle convié un grand nombre de personnalités de la Science et de l'Industrie à une séance qui a eu lieu le vendredi 17 décembre 1954 à la Salle d'Iéna. Au cours de cette séance l'influence de Henri Poincaré sur les techniques de l'ingénieur, particulièrement aux points de vue hydraulique et électrique, a été traitée par trois conférenciers,

M. Gaston Julia, Membre de l'Institut, Président du Comité du Centenaire, présidait la séance. Après avoir dit quelques mots pour se féliciter de cette nouvelle manifestation destinée à honorer Henri Poincaré et à montrer la portée pratique de certaines parties de son œuvre, il a donné successivement la parole aux trois conférenciers.

M. l'Ingénieur général du Génie Maritime Barrillon, Membre de l'Institut, constatant que les travaux de Henri Poincaré étaient insuffisamment connus et exploités dans le monde des ingénieurs, a cherché à en dégager les causes. Une représentation graphique, une sorte de visualisation, ainsi que des tables pour les applications, faciliteraient grandement la pénétration des travaux des mathématiciens, et leur application à la résolution des problèmes qui se posent aux ingénieurs.

M. Ailleret, Directeur des études et recherches à l'Électricité de France a constaté que le « temps de réponse » des électriciens, en ce qui concerne les travaux de Henri Poincaré, avait été beaucoup plus court que chez les hydrauliciens ou les hydrodynamiciens. La formation que Henri Poincaré a reçue à l'École des Mines, les relations amicales qu'il a continué à entretenir avec ceux de ses camarades qui avaient embrassé des carrières d'ingénieurs sont probablement cause de l'orientation de certains de ses travaux. Pour l'Électricité, Henri Poincaré par ses Ouvrages sur la théorie de Maxwell a certainement fait beaucoup pour le progrès et le développement de l'Électrotechnique.

M. l'Ingénieur en chef des Mines Gibrat, Professeur à l'École Nationale supérieure des Mines, parlant de l'étude des stations marémotrices, a tracé un historique des explications successives qui ont été données du phénomène des marées. Il en a rappelé les anomalies, et il a souligné la complexité du problème que Henri Poincaré est arrivé à résoudre d'une manière complète. Mais à l'époque ou Henri Poincaré commençait, et poursuivait son étude des marées, la connaissance que l'on avait du phénomène, malgré son côté un peu empirique, était suffisante pour répondre aux nécessités des navigateurs ou des ports. C'est donc par pure curiosité de l'esprit, par besoin d'expliquer par une théorie rationnelle ce que nous apprend l'expérience, que Henri Poincaré a travaillé pendant plusieurs années. Il ne se doutait pas alors que sa théorie des marées deviendrait le livre de chevet des ingénieurs chargés de l'étude des stations marémotrices. Ceux-ci, sans elle, ne pourraient mener leur tâche à bien; les perturbations que la présence même de ces stations introduiront dans le régime des marées, ne peuvent être prévues que par l'application d'une théorie complète.

Puis Monsieur Bollaert, Président de la Compagnie Nationale du Rhône, annonçant officiellement la décision du Conseil d'Administration de donner le nom de Henri Poincaré à la Centrale de Châteauneuf du Rhône, a justifié cette désignation en rappelant, par des citations prises dans les œuvres de Henri Poincaré, le rôle que celui-ci attribuait à l'expérience dans le développement de nos connaissances, et la place qu'il reconnaissait à l'Industrie.

A l'issue de cette séance, la Compagnie Nationale du Rhône a fort aimablement reçu, dans les salons d'Iéna, les personnalités présentes et celles qui, retenues par leurs occupations, n'avaient pu assister à la première partie de cette manifestation.

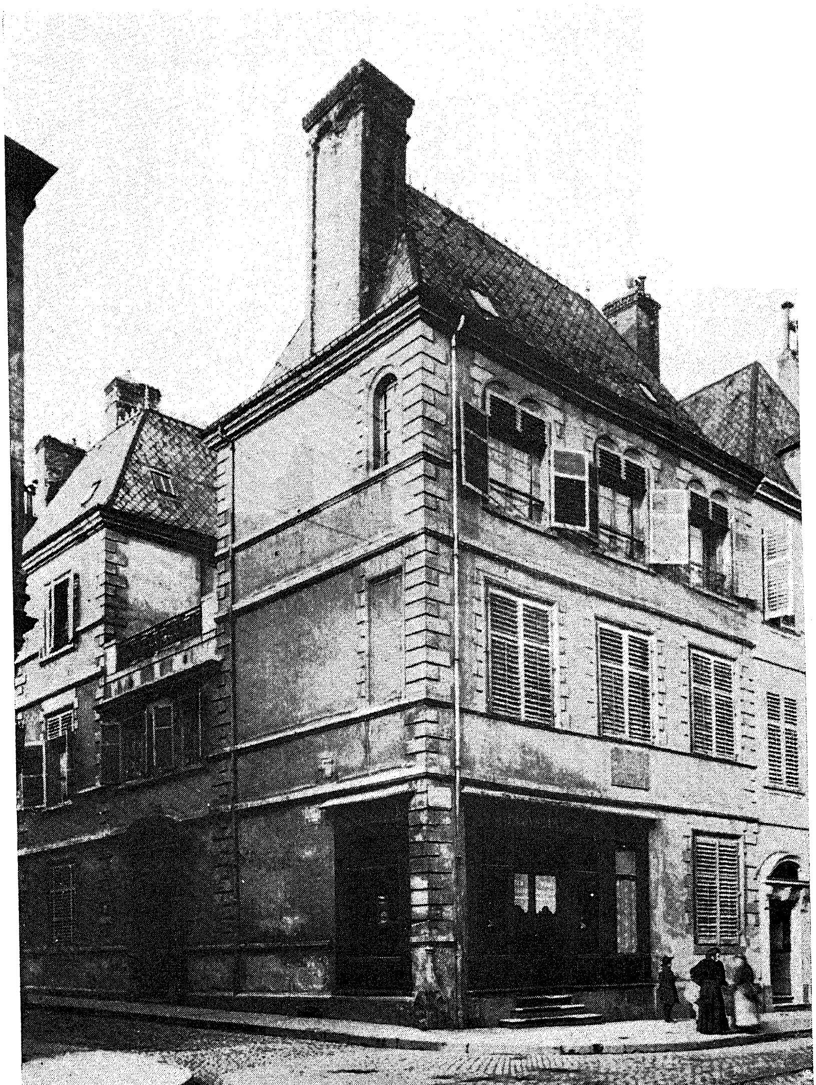
SIXIÈME PARTIE

PHOTOGRAPHIES ET DOCUMENTS.

On trouvera ci-après les reproductions d'un certain nombre de photographies et de documents, qui ont été classés, autant que faire se pouvait, par ordre chronologique.

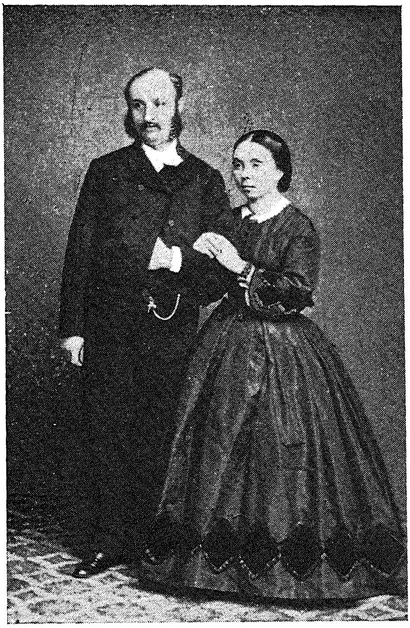
Les photographies se rapportent à l'enfance et à l'adolescence de Henri Poincaré, à sa vie intime, et comprennent aussi les derniers instantanés qui ont pu être pris de lui.

Les documents proviennent des papiers de famille, sauf quelques pièces tirées des archives de l'École Polytechnique. Ils comprennent des carnets de notes, des cahiers de cours ou des carnets de voyage, des lettres de nomination, des manuscrits de mémoires, articles, discours, des lettres autographes de Henri Poincaré, ainsi que deux lettres autographes de Fuchs relatives aux fonctions fuchsiennes. On y trouvera aussi le rapport présenté au Roi Oscar II de Suède et de Norvège par la Commission chargée d'attribuer le prix que celui-ci avait fondé pour son 60e anniversaire. Il s'agit de la traduction française, calligraphiée par un secrétaire, telle qu'elle a été envoyée à l'époque à Henri Poincaré par le Ministre de Suède à Paris.



LA MAISON NATALE DE HENRI POINCARÉ (1854)
[à l'angle de la rue Ville-Vieille et de la rue de Guise (autrefois rue Saint-Pierre), à Nancy].

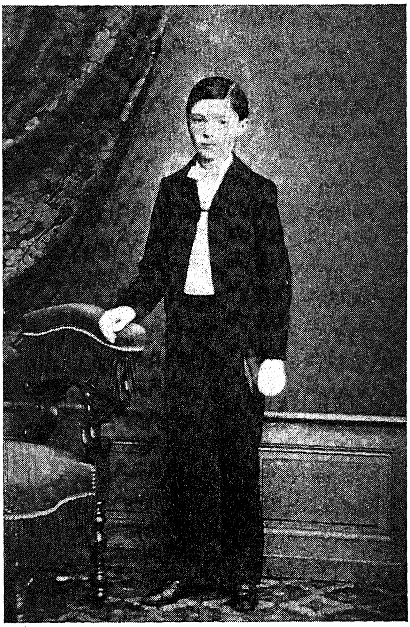
LA PORTE D'ENTRÉE DE LA MAISON NATALE (1854)
[Sur la rue de Guise (autrefois rue Saint-Pierre)].



Les parents de Henri Poincare.

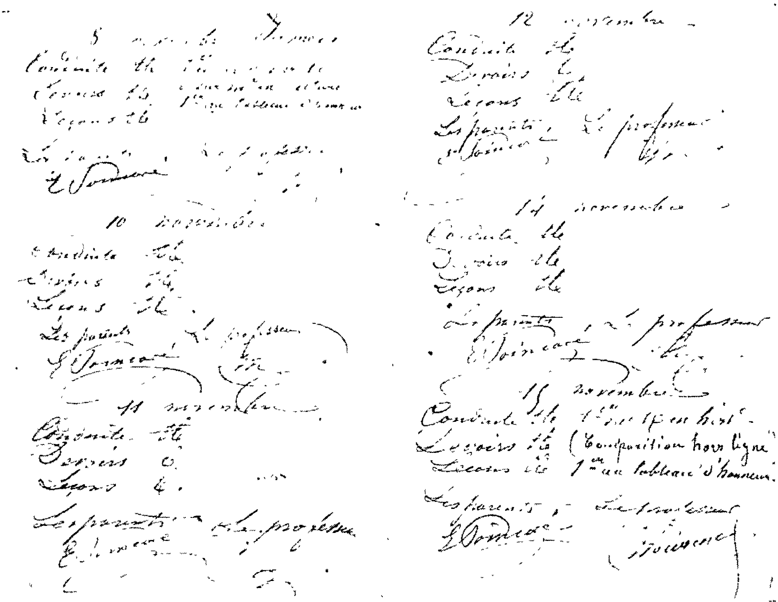
Henri Poincaré et sa sœur Aline.

Henri Poincaré à 7 ans.



Henri Poincaré premier communiant.

L'ENFANCE DE HENRI POINCARÉ (1854-1865)



10 novembre
Conduite TB
Devoirs TB
Leçons TB
Les parents Le professeur
E Poincaré

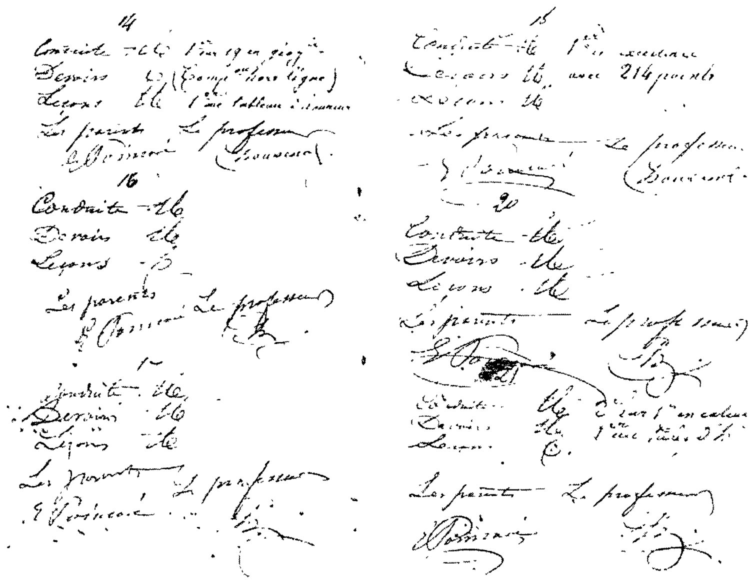
11 novembre
Conduite TB
Devoirs 0
Leçons 4
Les parents Le professeur

12 novembre
Conduite TB
Devoirs TB
Leçons TB
Les parents Le professeur
E Poincaré

14 novembre
Conduite TB
Devoirs TB
Leçons TB
Les parents Le professeur
E Poincaré

15 novembre
Conduite TB 1er sur 18 en hist.
Devoirs TB (Composition hors ligne)
Leçons TB 1er au tableau d'honneur.
Les parents Le professeur
E Poincaré Jouvenel

Du 8 au 15 novembre 1862.



14
Conduite TB 1er sur 19 en géog.
Devoirs TB (Comp. hors ligne)
Leçons TB 1er au tableau d'honneur
Les parents Le professeur
E Poincaré Jouvenel

16
Conduite TB
Devoirs TB
Leçons B
Les parents Le professeur
E Poincaré

17
Conduite TB
Devoirs TB
Leçons TB
Les parents Le professeur
E Poincaré

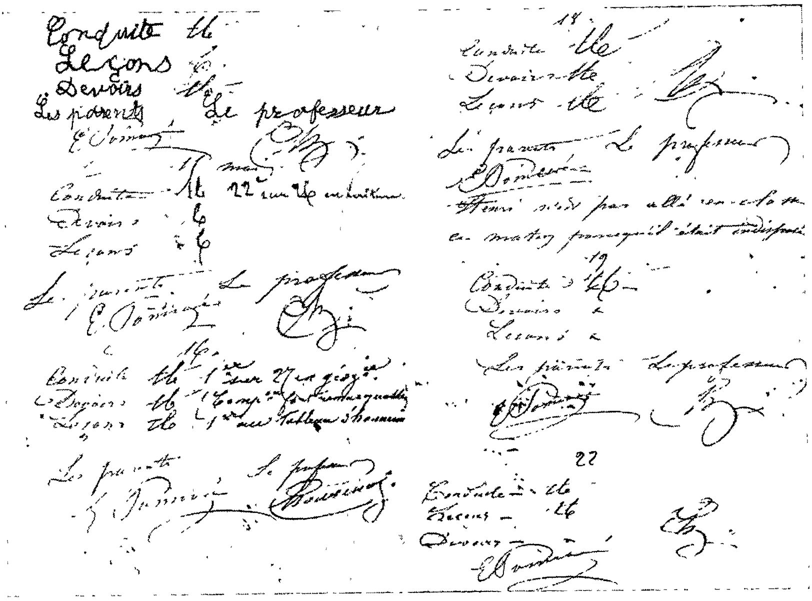
18
Conduite TB 1er excellence
Devoirs TB avec 214 points
Leçons TB
Les parents Le professeur
E Poincaré Jouvenel

20
Conduite TB
Devoirs TB
Leçons TB
Les parents Le professeur
E Poincaré

21
Conduite TB 1er sur 1 en calcul
Devoirs TB 1er au tab. d'h.
Leçons B
Les parents Le professeur
E Poincaré

Du 14 au 21 mars 1863.

NOTES OBTENUES PAR HENRI POINCARÉ EN CLASSE DE NEUVIÈME (1862-1863).


14
Conduite tb
Leçons b
Devoirs tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré

Conduite tb
Devoirs tb
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré
Henri n'est pas allé en classe ce matin parce qu'il était indisposé

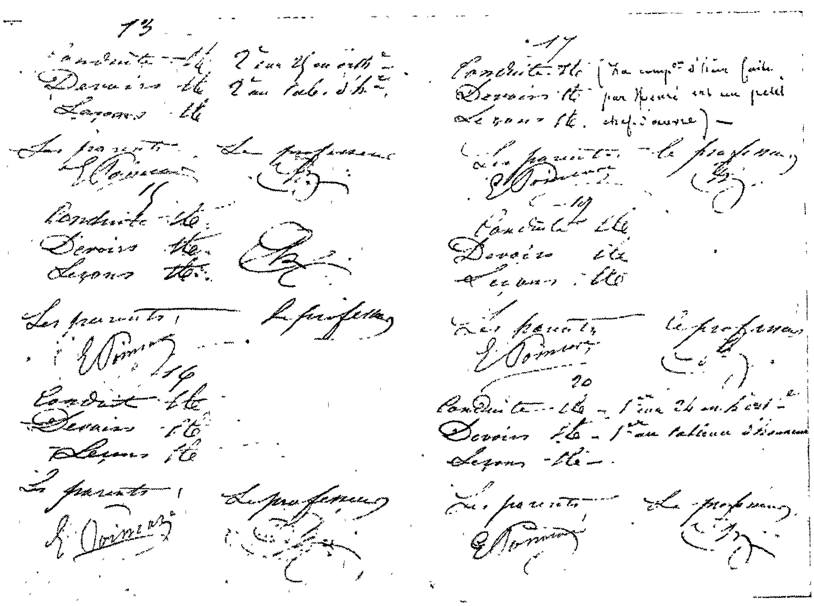
17 mai
Conduite tb 22e sur 46 en lecture
Devoirs b
Leçons b
Les parents Le professeur
E. Poincaré

19
Conduite tb
Devoirs b
Leçons b
Les parents Le professeur
E. Poincaré

18
Conduite tb 1er sur 27 en géogr.
Devoirs tb 1er Compon. remarquable
Leçons tb 1er au Tableau d'honneur
Les parents Le professeur
E. Poincaré

22
Conduite tb
Leçons tb
Devoirs
E. Poincaré

Du 14 *au* 22 *mai* 1863.


13
Conduite tb 2e sur 45 en orth.
Devoirs tb 2e au tab. d'hr.
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré

17
Conduite tb (La compon d'hier faite par Henri est un petit chef-d'œuvre) —
Devoirs tb
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré

15
Conduite tb
Devoirs tb
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré

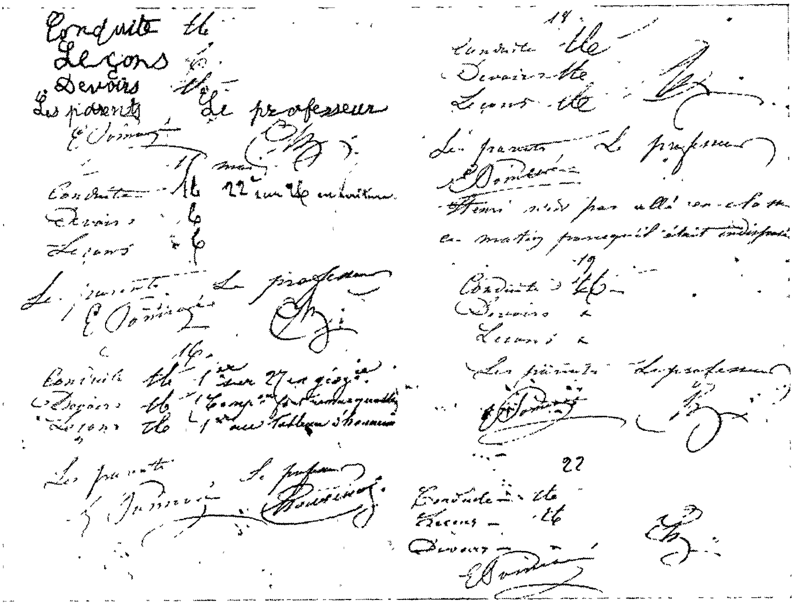
19
Conduite tb
Devoirs tb
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré

16
Conduite tb
Devoirs tb
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré

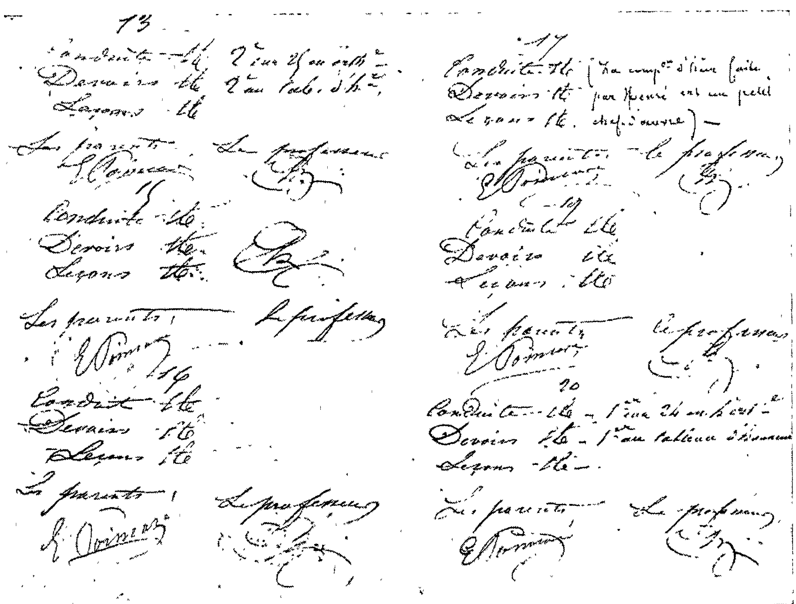
20
Conduite tb — 1er sur 24 en hist.
Devoirs tb — 1er au tableau d'honneur
Leçons tb —
Les parents Le professeur
E. Poincaré

Du 13 *au* 20 *juin* 1863.

NOTES OBTENUES PAR HENRI POINCARÉ EN CLASSE DE NEUVIÈME (1863).


Conduite tb
Leçons tb
Devoirs tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré
15 mai
Conduite tb 22e sur 46 en histoire
Devoirs b
Leçons b
Les parents Le professeur
E. Poincaré
16
Conduite tb 1er sur 27 en géographie
Devoirs tb 1re comp.on pour l'écriture
Leçons tb 1er au Tableau d'honneur
Les parents Le professeur
E. Poincaré
18
Conduite tb
Devoirs tb
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré
Henri n'est pas allé en classe ce matin parce qu'il était indisposé
19
Conduite tb
Devoirs b
Leçons b
Les parents Le professeur
E. Poincaré
22
Conduite tb
Leçons tb
Devoirs
E. Poincaré

Du 14 *au* 22 *mai* 1863.


13
Conduite tb 2e sur 24 en écriture
Devoirs tb 2e au tab. d'hr
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré
15
Conduite tb
Devoirs tb
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré
16
Conduite tb
Devoirs tb
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré
17
Conduite tb (La compon d'hist. faite par Henri est un petit chef-d'œuvre)
Devoirs tb
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré
19
Conduite tb
Devoirs tb
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré
20
Conduite tb 1er sur 24 en écriture
Devoirs tb 1er au tableau d'honneur
Leçons tb
Les parents Le professeur
E. Poincaré

Du 13 *au* 20 *juin* 1863.

NOTES OBTENUES PAR HENRI POINCARÉ EN CLASSE DE NEUVIÈME (1863).

École Normale
Supérieure

Le Ministre Secrétaire d'État au département de l'Instruction publique

Vu les dispositions du règlement du 7 Décembre 1850, pour l'admission à l'École Normale Supérieure

Vu les procès-verbaux de la Commission chargée de l'examen et du classement définitif des candidats admis aux épreuves orales pour l'année 1873

Arrête :

Sont nommés Élèves de l'École Normale Supérieure dans la Section des Sciences les jeunes gens dont les noms suivent.

MM. Poincaré
Jules Henri

Fait à Paris, le 11 Août 1873

Signé : [illegible]

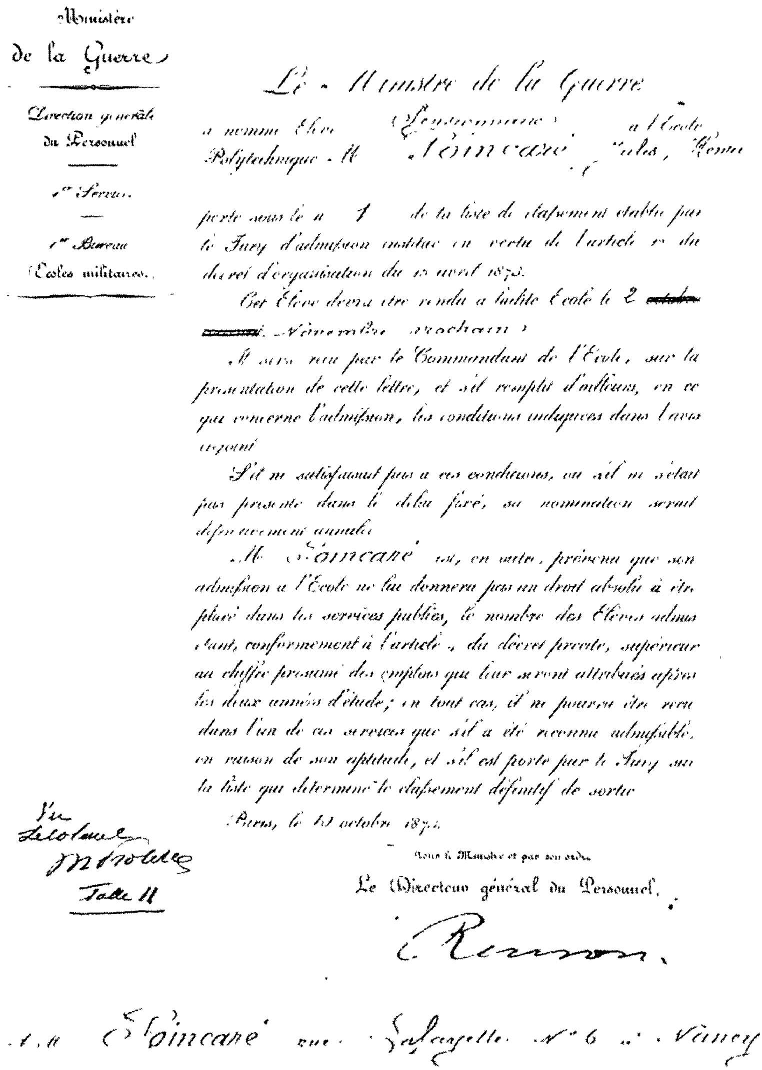
Pour ampliation
~~Le Conseiller d'État, Secrétaire Général~~
Le Directeur de l'enseignement supérieur
Signé : du Mesnil

INSTRUCTION PU…
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Pour extrait conforme,
Le Directeur de l'École,
Ern. Bersot

ARRÊTÉ NOMMANT HENRI POINCARÉ ÉLÈVE
A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1873).

(Reçu 5e à l'École Normale, Henri Poincaré a opté pour l'École Polytechnique où il était reçu 1er).



Ministère de la Guerre

Direction générale du Personnel

1er Service.

1er Bureau (Écoles militaires).

Le Ministre de la Guerre

a nommé Élève (pensionnaire) à l'École Polytechnique M. Poincaré Jules, Henri

porté sous le n° 1 de la liste de classement établie par le Jury d'admission institué en vertu de l'article 10 du décret d'organisation du 15 avril 1873.

Cet Élève devra être rendu à ladite École le 2 ~~octobre~~ Novembre prochain.

Il sera reçu par le Commandant de l'École, sur la présentation de cette lettre, et s'il remplit d'ailleurs, en ce qui concerne l'admission, les conditions indiquées dans l'avis ci-joint.

S'il ne satisfaisait pas à ces conditions, ou s'il ne s'était pas présenté dans le délai fixé, sa nomination serait définitivement annulée.

M. Poincaré est, en outre, prévenu que son admission à l'École ne lui donnera pas un droit absolu à être placé dans les services publics, le nombre des Élèves admis étant, conformément à l'article 2 du décret précité, supérieur au chiffre présumé des emplois qui leur seront attribués après les deux années d'étude; en tout cas, il ne pourra être reçu dans l'un de ces services que s'il a été reconnu admissible, en raison de son aptitude, et s'il est porté par le Jury sur la liste qui détermine le classement définitif de sortie.

Paris, le 13 octobre 1873.

Vu Le Colonel [illegible] Folio 11

Pour le Ministre et par son ordre.

Le Directeur général du Personnel,

C. Renson.

M. Poincaré rue Lafayette N° 6 à Nancy

LETTRE DE NOMINATION DE HENRI POINCARÉ
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1873).

École Polytechnique.

Concours d'admission en 1873.

Ville d'examen. Nancy

N° du Certificat d'admissibilité. 255

M. Poincarré. Jules, Henri.

Désignation des Épreuves	Numéros de mérite attribués aux examens oraux	Coefficient d'importance attribué à chaque division des examens oraux	Produits de M par m	Numéros de mérite attribués aux compositions écrites	Coefficient d'importance attribué à chaque composition écrite	Produits de N par n	Somme des produits P et p	Observations. Répéter dans cette colonne en regard de l'épreuve à laquelle le chiffre se rapporte toute moyenne d'examens oraux ou tout numéro de composition écrite qui descend au-dessous de 5
	M.	m	P.	N.	n	p.	S.	
Examens oraux. Algèbre, Géom. analytique (T)	20	52	1040					
Arithmétique, Géom. et Trigonométrie ( )	20	50	1000					
Physique et Chimie (D)	19	40	760					
Langue Allemande	18	8	144					
			2944				2944	
Compositions écrites. Composition mathématique				20	15	300		
Composition de Géométrie descriptive				14	13	182		
Résolution de triangle. Calcul logarithmique				17	5	85		
Composition Française				14	14	196		
Dessin				12	12	144		
Lavis				1	4	4		1.
Immunité de 50 points attribuée aux Bacheliers ès-lettres						50	961	
							3905	

NOTES OBTENUES PAR HENRI POINCARÉ A L'EXAMEN D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1873).

(Le classement des douze premiers était le suivant :

1er	Poincaré	3 905 points
2e	Belleville	3 651 »
3e	Appel	3 568 »
4e	Corps	3 501 »
5e	Ruault	3 481 »
6e	Morand	3 479 »
7e	Debray	3 464 points
8e	Messier	3 399 »
9e	Jacotot	3 376 »
10e	Bonnefoy	3 370 »
11e	Picquet	3 368 »
12e	Petitdidier	3 365 »

Appel reçu premier à l'École Normale Supérieure et Picquet devaient démissionner avant d'entrer à l'École Polytechnique.)

Paris, lundi, midi.

Je suis entré hier à l'école et je n'ai pas encore eu une minute de repos, à cause de toutes les corvées qui incombent à ma nouvelle dignité de major. Heureusement je pense que cela n'est que le premier jour que cela durera comme cela. J'ai couché ce soir à l'École et je crois que je pourrai m'habituer à mon casert. Je me suis promené hier en X dans Paris et j'ai fait faire mon portrait. Maman t'enverra ma binette sous peu. Tu sais que Muerge n'a rien obtenu, ni Marguet, ni Tournaire, ni les camarades. Le Barré. Appell est entré à l'École Normale. A demain plus amples détails, je t'embrasse,

Henri

PREMIÈRE LETTRE DE HENRI POINCARÉ A SON PÈRE APRÈS SON ENTRÉE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1873).

Ma chère maman,

Voici le gigon demandé sur le gigon Laguerre. Une fois Hermite était malade et Laguerre nous faisant l'amphi nous fit une certaine question. Mais comme il écrit très mal à la planche, je n'avais pas pu prendre de notes. Je ne m'en occupai plus pendant quelques jours; mais un jour un cocon vint me demander un gigon d'explique sur ce sujet. Je lui répondis que je n'avais pas pris de notes mais que j'allais lui reconstituer la démonstration de Laguerre. Je la reconstituai donc ou crus la reconstituer, ayant cependant des inquiétudes sur un certain L qui était la seule note que j'avais prise et que je n'avais pu introduire dans ma démonstration. Le soir on appelle le cocon en colle et Halphen lui demande justement cette question. Le cocon donne ma démonstration. Le colleur lui demande si elle est de lui. Le cocon arrive alors me trouver, me demande si elle est de moi, puis retourne le dire à Halphen qui répond que ça ne l'étonne pas. Halphen le dit à La-

UNE LETTRE DE HENRI POINCARÉ A SES PARENTS
PENDANT SA PREMIÈRE ANNÉE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1874).

guerre qui me fait appeler, me dit que ma démonstra-
tion est beaucoup plus simple que la sienne et qu'on
pourrait l'y substituer dans les feuilles que tu don-
nes, je suppose, du nom pompeux d'attributs de l'É-
cole Polytechnique. Je vais alors trouver Dinet pour
lui dire de faire cette substitution; à partir de ce
moment-là mes souvenirs se troublent; je sais
seulement que Laguerre m'a fait appeler une seconde
fois; mais je ne sais plus pourquoi. Je croyais pour-
tant qu'on avait mis ma démonstration dans les feuilles.
Si mon livre n'était pas dans un tel désordre je pour-
rais le consulter par moi-même; je vais néanmoins
faire une tentative...... — La tentative a été cou-
ronnée d'un succès éclatant, quoique j'aie fait bien
des efforts infructueux et à travers les difficultés
les plus considérables. La démonstration y est. Je ne
comprends plus alors très bien ce que tu entends par les
Archives. Je suis en train de faire un autre effort pour
simplifier la théorie du pendule elliptique exposée
par Résal. Il n'y a plus qu'un facteur 2 qui est gê-
nant; mais je le finirai par faire disparaître. Je ne sais
pas trop si je n'en ferai pas encore un autre; parce que
la salle 17 a fait une expérience éclatante sur le pendule
que je voudrais expliquer. Elle voulait démontrer la rotation
de la terre; elle n'a pas réussi parce que le pendule n'était
pas bien construit et s'est elliptisé tout seul.

SUITE DE LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

École Polytechnique.
2e Division

Classement général de fin d'année.

M. Poincaré

Cours.	Indication des épreuves diverses subies par l'Élève sur les matières de chaque cours	Numéros de mérite obtenus dans chaque nature d'épreuve	Coefficient d'influence relatif à chaque nature d'épreuve	Nombre de points obtenus dans chaque nature d'épreuve	Nombre total de points obtenus pour chaque nature d'épreuve	Observations
Analyse	Interrogation particulière	19	15	285	585	
	Interrogation générale	20	15	300		
Mécanique	Interrogations particulières	19.50	18		351	
	Travaux graphiques		8			
Géométrie descriptive	Interrogations particulières	17.60	10	176	494	
	Interrogation générale	19	10	190		
	Travaux graphiques	12.80	10	128		
Physique	Interrogations particulières	18.33	15		274.95	
Chimie	Interrogations particulières	18.25	10	182.50	459.15	
	Interrogation générale	20	10	200		
	Manipulations	15.33	5	76.65		
Stéréotomie	Interrogation particulière	18.33	15	274.95	382.95	
	Travaux graphiques	13.50	8	108		
Littérature française	Composition	16	12		192	
Langue allemande	Interrogations particulières	19	5	95	190	
	Interrogation générale	19	5	95		
Dessin		11.80	10		118	
Lavis		16.25	3		48,75	
					2095,80	
Examens de fin d'année	Analyse	20	30		600	
	Mécanique	18	30		540	
	Géométrie descriptive	16.50	20		330	
	Physique	19	25		475	
	Chimie	19	20		380	
	Stéréotomie	10	25		250	
				Total	5670,80	

NOTES OBTENUES PAR HENRI POINCARÉ
PENDANT SA PREMIÈRE ANNÉE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1873-1874)

École Polytechnique
2e Division
1874-75

Classement général de fin d'année.

M. Poincaré

Cours	Indication des épreuves passées par l'Élève sur les matières de chaque cours	Numéros de mérite obtenus dans chaque nature d'épreuve	Coefficients d'influence relatif à chaque nature d'épreuve	Nombre de points obtenus pour chaque nature d'épreuve	Nombre total de points obtenus pour chaque nature d'épreuve	Observations.
Somme du nombre de points obtenus par l'Élève en 2e Division					2825,40	
Analyse	Interrogations particulières	18.40	20	368	940,50	
	Interrogations générales	20	20	400		
	Compositions	17.25	10	172.50		
Mécanique	Interrogations particulières	19	30	570	893,75	
	Travaux graphiques	12.25	15	183.75		
	Compositions	14	10	140		
Astronomie	Interrogations particulières	17.75	15	266.25	710,25	
	Interrogations générales	20	15	300		
	Exercices	18	8	144		
Physique	Interrogations particulières	18.60	15	279	579	[illegible]
	Interrogations générales	20	15	300		
	Manipulations		8			
Chimie	Interrogations particulières	19	22	418	586	
	Manipulations	14	12	168		
Architecture	Travaux graphiques et lavis	14.09	17	239.53	628,03	
	Croquis et notes	14	14	196		
	Concours	13.75	14	192.50		
Art Militaire et Topographie	Travaux graphiques	10.67	10	.....	106.70	
Littérature française	Compositions	15.50	20	.....	310	
Langue allemande	Interrogations particulières	17	6	102	306	
	Interrogations générales	17	6			
	Compositions	17	6			
Dessin		9.90	18	.....	178.20	
		9.67			38.68	
					8112.51	[illegible]
Examens de fin d'année	Analyse	20	40	.....	800	
	Mécanique	19	50	.....	950	
	Astronomie	19.50	30	.....	585	
	Physique	20	30	.....	600	
	Chimie	20	38	.....	760	
				Total	11807.51	

NOTES OBTENUES PAR HENRI POINCARÉ
PENDANT SA SECONDE ANNÉE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1874-1875).

École Polytechnique

1874-75

Classement général de fin d'année.

1^ère^ Division. — 2^e^ année d'études.

Liste, par ordre de mérite, des Élèves déclarés admissibles dans les services publics.

Rang sur la liste générale par ordre de mérite	Noms	Nombre de points obtenus	Désignation du service public dans lequel est classé chaque Élève	Rang de l'Élève sur la liste du service dans lequel il est classé	Observations
1	Bonnefoy	11967	Min	1^er^	[illegible] 73
2	Poincaré	11307	Min	2^e^	
3	Petitdidier	11411	Min	3^e^ et dernier	
4	Rebière	11130	P.C	1^er^	
5	Monestier	11147	P.C	2^e^	
6	Lemasset	11115	P.C	3^e^	
7	Cadart Gustave	11070	P.C	4^e^	
8	Mourard	11044	P.C	5^e^	
9	Widmer	11026	P.C	6^e^	
10	Debray	11002	P.C	7^e^	
11	Belleville Gérald	10999	P.C	8^e^	
12	Pinot	10995	P.C	9^e^	
13	Drouaux	10933	P.C	10^e^	
14	Perret	10849	G mar.	1^er^	
15	Ruis	10825	P.C	11^e^	
16	Sampité	10820	P.C	12^e^	
17	Colson Léon	10799	P.C	13^e^	
18	Tavernier	10778	P.C	14^e^	
19	Herpin	10776	P.C	15^e^	16
20	Trépied	10756	P.C	16^e^	
21	Bürger	10697	P.C	17^e^	
22	Flère Alphonse	10663	P.C	18^e^ et dernier	
23	Raysselance	10613	G mar.	2^e^ et dernier	
24	Renaud	10589	Hy.	1^er^	
25	Revel	10574	Hy.	2^e^ et dernier	
26	Girardon	10537	A.	1^er^	
27	Carvallo	10530	Tab.	1^er^	
28	Vieille	10503	P.S	1^er^	
29	Elliot	10485	Tab.	2^e^ et dernier	
30	Jacotot	10462	P.S	2^e^	
31	Meunier	10465	P.S	3^e^	
32	Bruley	10399	P.S	4^e^	
33	Desortiaux	10395	P.S	5^e^	
34	Maissin	10386	P.S	6^e^ et dernier	
35	de Boisseson	10374	»		N'a pas obtenu un service de son choix
36	Petitpierre	10270	G	1^er^	

LISTE DE CLASSEMENT DE LA PROMOTION 1873
A LA SORTIE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1875).

Vers l'âge de 18 ans.

Élève à l'École Polytechnique.

Élève à l'École Polytechnique.

Ingénieur des Mines à Vesoul.

HENRI POINCARÉ JEUNE HOMME (1872-1879).

MINISTÈRE
DES TRAVAUX PUBLICS

Division
du Personnel

1er Bureau

École
des
Mines

Élève Ingénieur

Versailles le 29 octobre 1875

Monsieur, j'ai l'honneur de vous annoncer que par suite du travail du Jury de l'École Polytechnique, le Président de la République vous a, sur ma proposition et par décret du 19 octobre 1875, nommé Élève-Ingénieur des Mines.

Je ne doute pas que vous ne soyez jaloux de réaliser les espérances qu'ont données vos premiers succès et j'attends de vous une constante application au travail et une conduite honorable.

Vous serez admis à l'École des Mines en qualité d'Élève-Ingénieur de troisième classe, et vous en recevrez le traitement à dater du 1er Novembre prochain. Je vous invite à vous présenter avant cette époque, à Mr le Directeur et à Mr l'Inspecteur de l'École Boulevard St Michel n° 60 pour recevoir les instructions nécessaires.

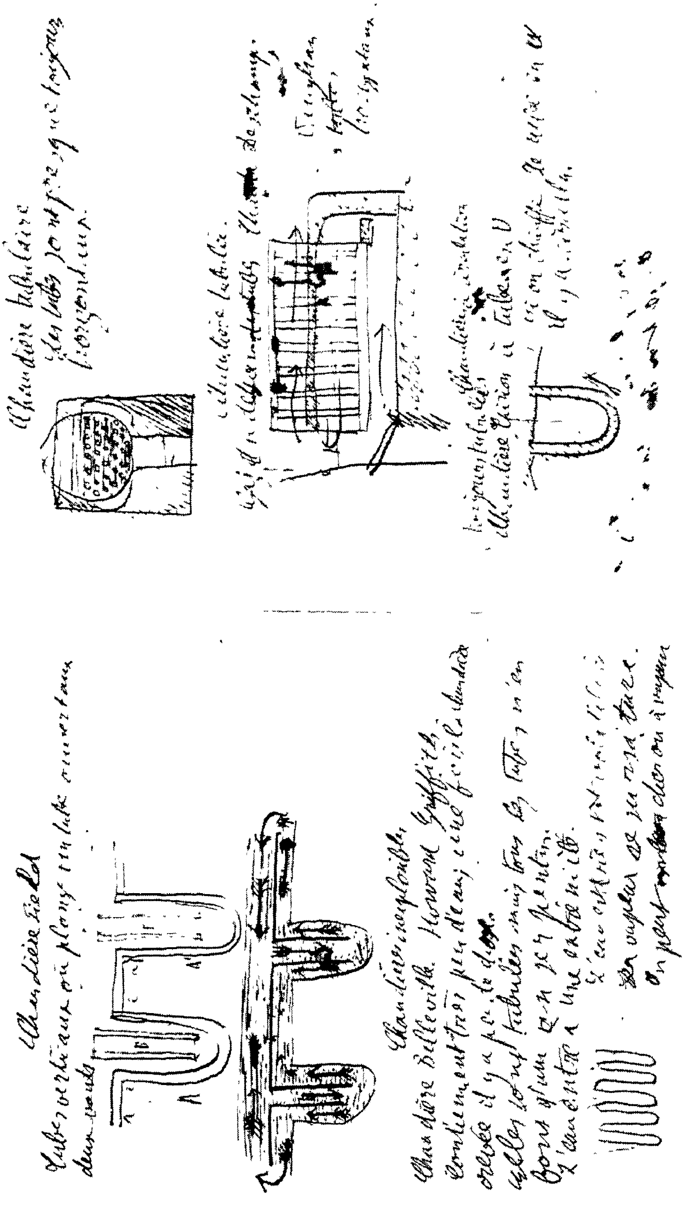
Recevez, Monsieur, l'assurance de ma considération.

Le Ministre des Travaux Publics,

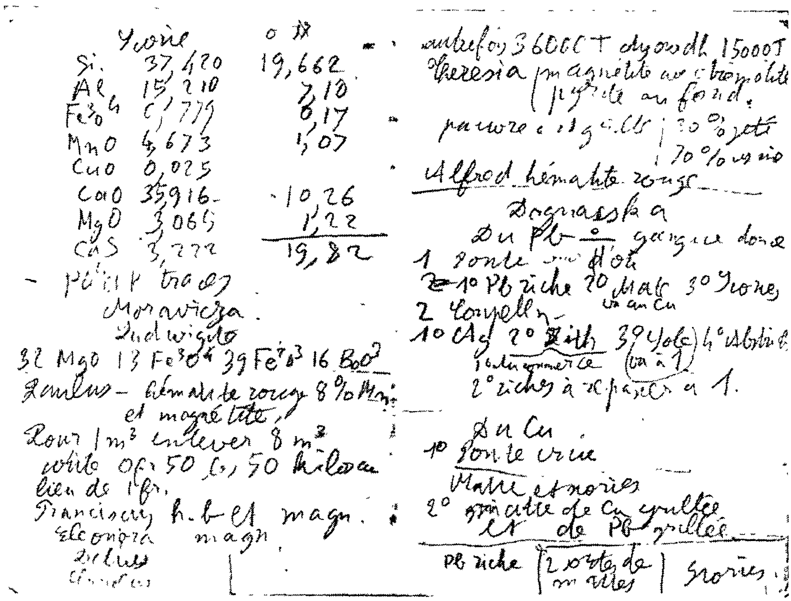
E. Caillaux

A Mr Poincaré, Élève Ingénieur des Mines.

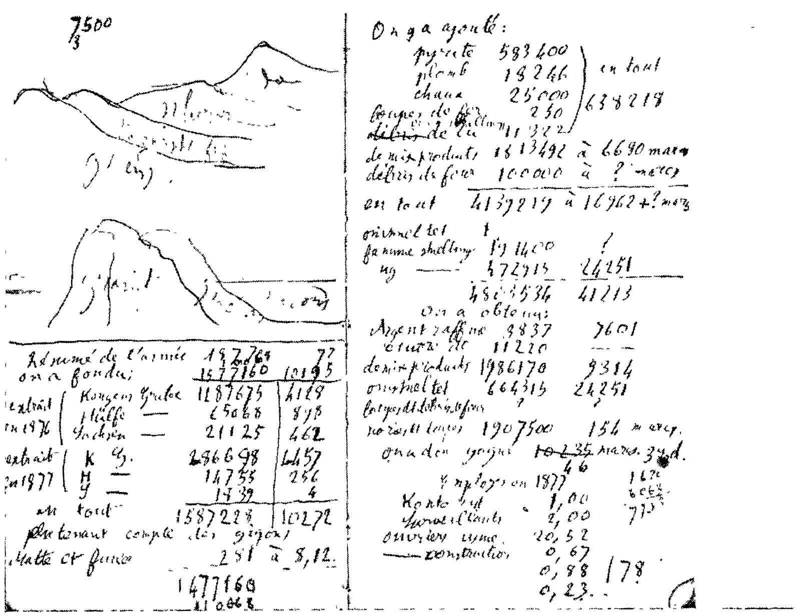
LETTRE NOMMANT HENRI POINCARÉ
ÉLÈVE INGÉNIEUR A L'ÉCOLE DES MINES (1875).



DEUX PAGES D'UN CAHIER DE COURS DE HENRI POINCARÉ
A L'ÉCOLE DES MINES (1876-1877).

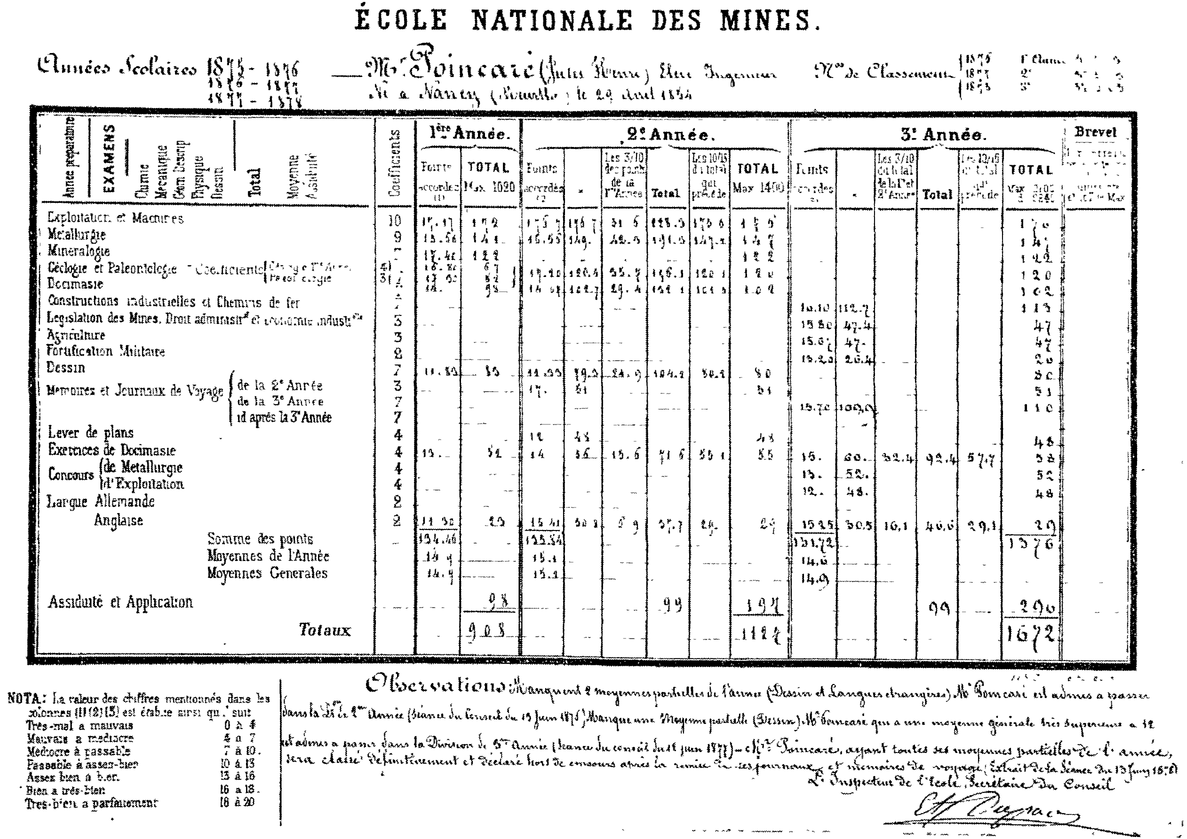


Voyage en Hongrie 1877.



Voyage en Norvège 1878.

PAGES DES CARNETS DES NOTES PRISES PAR HENRI POINCARÉ
AU COURS DE VOYAGES D'ÉTUDES (1877-1878).



ÉCOLE NATIONALE DES MINES.

Années Scolaires 1875 - 1876, 1876 - 1877, 1877 - 1878 — Mr Poincaré (Jules Henri) Élève Ingénieur — Né à Nancy (Meurthe) le 29 Avril 1854 — Nos de Classement 1876 1re Année, 1877 2e, 1878 3e

EXAMENS	Coefficients	1re Année Points accordés (1)	1re Année TOTAL Max. 1020	2e Année Points accordés (2)	×	Les 3/10 des points de la 1re Année	Total	Les 10/13 du total qui précède	TOTAL Max 1400	3e Année Points accordés (3)	×	Les 3/10 du total de la 1re et 2e Année	Total	Les 12/15 du total qui précède	TOTAL Max 2102	Brevet
Exploitation et Machines	10	17.17	172	17.57	175.7	51.6	225.3	175.6	175						170	
Métallurgie	9	15.56	141	16.55	149.	42.5	191.5	147.2	147						141	
Minéralogie	7	17.41	122						122						122	
Géologie et Paléontologie — Coefficients (Géologie 1re Année, Paléontologie)	4, 3	16.86, 17.65	67, 52	17.15	120.5	35.7	156.1	120.1	120						120	
Docimasie	7	14.	98	14.51	101.7	29.4	131.1	101.5	102						102	
Constructions industrielles et Chemins de fer	7									16.10	112.7				113	
Législation des Mines, Droit administrf et économie industlle	3									15.80	47.4				47	
Agriculture	3									15.67	47.				47	
Fortification Militaire	2									13.20	26.4				26	
Dessin	7	11.35	35	11.35	79.5	24.9	104.4	80.4	80						80	
Mémoires et Journaux de Voyage de la 2e Année	3			17.	51				51						51	
de la 3e Année	7									15.72	110.0				110	
id après la 3e Année	7															
Lever de plans	4			12	48				48						48	
Exercices de Docimasie	4	13.	52	14	56	15.6	71.6	55.1	55	15.	60.	32.4	92.4	57.7	58	
Concours de Métallurgie	4									13.	52.				52	
Concours d'Exploitation	4									12.	48.				48	
Langue Allemande	2															
Anglaise	2	11.50	23	15.41	30.8	6.9	37.7	29.	29	15.25	30.5	16.1	46.6	29.1	29	
Somme des points		134.46		135.34						131.72					1376	
Moyennes de l'Année		14.9		15.4						14.6						
Moyennes Générales		14.9		15.2						14.9						
Assiduité et Application			98				99		197				99		296	
Totaux			903						1124						1672	

NOTA: La valeur des chiffres mentionnés dans les colonnes (1)(2)(3) est établie ainsi qu'il suit

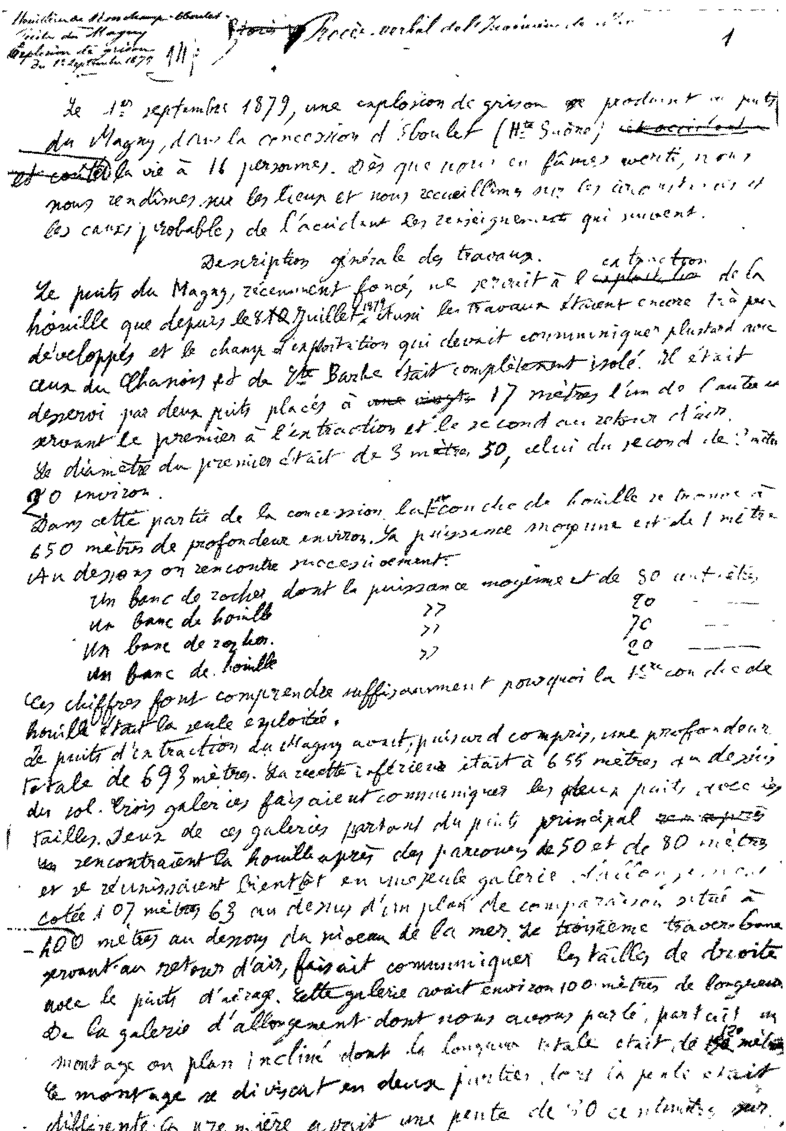
Très-mal à mauvais	0 à 4
Mauvais à médiocre	4 à 7
Médiocre à passable	7 à 10.
Passable à assez-bien	10 à 13
Assez bien à bien	13 à 16
Bien à très-bien	16 à 18.
Très-bien à parfaitement	18 à 20

Observations: Manquent 2 moyennes partielles de l'année (Dessin et Langues étrangères). Mr Poincaré est admis à passer dans la Dn de 2me Année (séance du Conseil du 15 Juin 1876). Manque une Moyenne partielle (Dessin). Mr Poincaré qui a une moyenne générale très supérieure à 12 est admis à passer dans la Division de 3me Année (séance du conseil du 18 juin 1877) — Mr Poincaré, ayant toutes ses moyennes partielles de l'année, sera classé définitivement et déclaré hors de concours après la remise de ses journaux et mémoires de voyage (Extrait de la Séance du 13 Juin 1878)

L'Inspecteur de l'École Secrétaire du Conseil

[illegible]

RELEVÉ DES NOTES OBTENUES PAR HENRI POINCARÉ PENDANT SES TROIS ANNÉES D'ÉTUDES A L'ÉCOLE DES MINES (1876-1878).


Houillère de Ronchamp-Éboulet
Puits du Magny
Explosion de grisou
du 1er septembre 1879

Procès-verbal de l'Ingénieur 1

Le 1er septembre 1879, une explosion de grisou se produisit au puits du Magny, dans la concession d'Éboulet (Hte Saône), ~~et coûta~~ la vie à 16 personnes. Dès que nous en fûmes avertis, nous nous rendîmes sur les lieux et nous recueillîmes sur les circonstances et les causes probables de l'accident les renseignements qui suivent.

Description générale des travaux.

Le puits du Magny, récemment foncé, ne servait à l'extraction de la houille que depuis le 8 juillet 1879. Aussi les travaux étaient encore très peu développés et le champ d'exploitation qui devait communiquer plus tard avec ceux du Chanois et de Ste Barbe était complètement isolé. Il était desservi par deux puits placés à ~~vingt~~ 17 mètres l'un de l'autre servant le premier à l'extraction et le second au retour d'air. Le diamètre du premier était de 3 mètres 50, celui du second de 2 mètres 80 environ.

Dans cette partie de la concession la 1re couche de houille se trouve à 650 mètres de profondeur environ. La puissance moyenne est de 1 mètre.

Au dessous on rencontre successivement :

Un banc de rocher dont la puissance moyenne est de 50 centimètres
Un banc de houille " 90 —
Un banc de rocher " 70 —
Un banc de houille " 20 —

Ces chiffres font comprendre suffisamment pourquoi la 1re couche de houille était la seule exploitée.

Le puits d'extraction du Magny avait, puisard compris, une profondeur totale de 693 mètres. La recette inférieure était à 655 mètres au dessous du sol. Trois galeries faisaient communiquer les deux puits avec les tailles. Deux de ces galeries partant du puits principal rencontraient la houille après des parcours de 50 et de 80 mètres et se réunissaient bientôt en une seule galerie d'allongement cotée 107 mètres 63 au dessus d'un plan de comparaison situé à 400 mètres au dessous du niveau de la mer. Le troisième travers-banc servant au retour d'air, faisait communiquer les tailles de droite avec le puits d'aérage. Cette galerie avait environ 100 mètres de longueur. De la galerie d'allongement dont nous avons parlé, partait un montage en plan incliné dont la longueur totale était de 120 mètres. Le montage se divisait en deux parties, dont la pente était différente : la première avait une pente de 50 centimètres par

UN RAPPORT DE HENRI POINCARÉ, INGÉNIEUR DES MINES (1879).

Première page d'un compte rendu d'enquête sur un accident survenu dans une mine de son arrondissement quand il était à Vesoul.)

Il monta alors pour une raison quelconque en haut du montage [illegible] Perroz; il accrocha sa lampe à un boisage à côté de celle de ce mineur et en redescendant il prit par erreur la lampe de Perroz laquelle [illegible] qui était percée d'un coup de pic. Le soufflard qui avait été [illegible] quelques jours auparavant. Le soufflard avait dégagé du gaz, l'explosion se produisit.

La Société avait fait tout ce qui était humainement possible pour prévenir l'accident. La catastrophe a été causée par la maladresse de l'ouvrier qui a payé de sa vie un moment d'inattention. Cet homme n'était pas un mauvais ouvrier et on n'avait jamais eu à se plaindre de lui, mais de pareilles imprudences sont souvent commises par les meilleurs mineurs.

Les victimes

Les malheureuses victimes de cet accident sont

Félix Victor	40	ans qui laisse une femme et 4 enfants
Pautot Victor	29	ans — — une femme et 3 enfants
Pautot Émile	19	célibataire
Pautot Auguste	38	qui laisse une femme et 6 enfants
Flam Auguste	40	— — — une femme et 5 enfants
Bergot Delphin	20	célibataire
Luxeuil Joseph	37	qui laisse une femme et 1 enfant
Ambert Auguste	27	— — — une femme et 4 — —
Donzey Émile	39	— — — une — — — 7 — —
Germain Émile	24	qui laisse un père et une mère dont il était le soutien
Ulmeiler Louis	18	célibataire.
Aubry Joseph	45	qui laisse une femme et 4 enfants
Dubois Émile	18	célibataire.
Didier Émile	24	qui laisse une femme et 1 enfant
Perroz Émile	17	célibataire.
Janroy Eugène	16	célibataire, est mort à l'hôpital des suites de ses blessures.

Il y a donc en tout 9 veuves et ~~[illegible]~~ 35 orphelins dont le plus âgé a 17 ans et dont 6 seulement ont plus de 12 ans.

La Société a fait immédiatement distribuer 40 francs à chaque famille et elle est disposée à faire de nouveaux sacrifices. La Caisse de Secours assure à chaque veuve une pension de 25 francs par mois et à chaque orphelin une pension de 8 francs par mois. Toutefois ces secours [illegible] de la Cie seront peut-être insuffisants pour soulager tant de misère.

Vesoul le 20 septembre 1879.
L'Ingénieur des Mines,
Poincaré

DERNIÈRE PAGE DU RAPPORT PRÉCÉDENT.

SÉANCE DU 24 NOVE 1879

Mémoire sur les Formes Quadratiques
et sur les fonctions doublement périodiques
par H Poincaré

1° Expression des fonctions doublement périodiques
à l'aide d'intégrales définies

1er cas Les deux périodes sont α et $i\beta$; et α et β sont essentiellement réels et positifs.

Considérons l'expression

$$H = \sum_{n=-(N+1)}^{n=N} \sum_{m=-(M+1)}^{m=M} \frac{1}{x - \frac{2m+1}{2}\alpha - \frac{2n+1}{2} i\beta}$$

Nous supposerons qu'on ait choisi x de telle façon que sa partie réelle soit comprise entre $-\frac{\alpha}{2}$ et $+\frac{\alpha}{2}$ et qu'on l'on donne à m et à n toutes les valeurs entières respectivement comprises entre $-(M+1)$ et $+M$ et entre $-(N+1)$ et $+N$.
On voit que quand on fait tendre M, puis N vers l'infini, l'expression H tend vers une limite qui est une fonction $Z_1(x)$ admettant la période α.
Nous écrirons pour abréger:

$$\frac{2m+1}{2} = \mu \qquad \frac{2n+1}{2} = \nu$$

Quand μ est positif, la partie réelle de $x - \alpha\mu - i\beta\nu$ est négative elle est positive au contraire quand μ est négatif.
Dans le premier cas on a:

$$\frac{1}{x - \alpha\mu - i\beta\nu} = -\int_0^\infty e^{z(x-\alpha\mu-i\beta\nu)}\,dz$$

Dans le second cas on a:

$$\frac{1}{x - \alpha\mu - i\beta\nu} = \int_0^\infty e^{-z(x-\alpha\mu-i\beta\nu)}\,dz$$

De ces formules on conclut

$$H = \int_0^\infty \left(e^{-zx} - e^{zx}\right) \Sigma_\mu e^{-\alpha\mu z} \Sigma_\nu e^{-i\beta\nu z}\,dz$$

Dans cette expression μ peut prendre les valeurs
$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots \ldots \frac{2M+1}{2}$
et ν peut prendre les valeurs:

MANUSCRIT D'UNE NOTE DE HENRI POINCARÉ A L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1879).

(Avant cette Note Henri Poincaré avait présenté à l'Académie une première Note le 11 août 1879.)

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION PUBLIQUE
ET DES BEAUX-ARTS

DIRECTION
DE L'ENSEIGNEMENT

BUREAU

Le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts,

ARRÊTE :

ART. 1

M. Poincaré, docteur ès sciences, est chargé du cours de calcul différentiel et intégral à la Faculté des sciences de Caen, en remplacement de M. Girault admis à la retraite sur sa demande.

M. Poincaré, recevra en cette qualité, un traitement annuel de cinq mille cinq cents francs, à dater du 1er Xbre 1879.

ART. 2

M. le Recteur de l'Académie de Caen est chargé de l'exécution du présent arrêté.

Fait à Paris, le 1er Xbre 1879.

Signé : Jules Ferry.

Pour ampliation :
Le Directeur de l'Enseignement supérieur,
Signé : Albert Dumont.

Pour copie conforme
Le Secrétaire de l'Académie

[illegible]

ARRÊTÉ NOMMANT HENRI POINCARÉ CHARGÉ DE COURS
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN (1879).

Le 29 mai 1880 Henri POINCARÉ, jeune professeur encore inconnu, écrit au Professeur FUCHS de Göttingen qui avait peut-être le double de son âge, une lettre dans laquelle il soulève quelques objections sur un Mémoire que celui-ci venait de publier au *Journal de Crelle*. Il termine sa lettre ainsi : « Je dois vous avouer, Monsieur, que ces réflexions m'ont inspiré quelques doutes sur la généralité du résultat que vous annoncez, et j'ai pris la liberté de vous écrire, dans l'espérance que vous n'aurez pas de peine à les éclaircir ».

Le 5 juin 1880, FUCHS lui répond par la lettre suivante :

Heidelberg 5 Juni 1880

Geehrtester Herr College!

Da ich aus Ihrem geschätzten Briefe ersehe, dass Sie deutsche Abhandlungen mit so tiefem Verständniss zu lesen in der Lage sind, so erlaube ich mir bei der Beantwortung Ihres Briefes mich auch dieser Sprache zu bedienen, weil ich hoffen darf, mich auf diese Weise klarer ausdrücken zu können.

Empfangen Sie, geehrtester Herr, vor allen Dingen meinen besten Dank nicht nur für das Interesse, welches Sie die Güte haben meiner jüngsten Arbeit entgegenzubringen, sondern auch dafür, dass Sie mich durch Ihren Brief darauf aufmerksam gemacht haben, dass der Satz I p. 161 meiner Abhandlung nicht mit genügender Präcision ausgesprochen ist.

Wenn Sie in der That das Resumé vergleichen, welches ich vor dem Erscheinen meiner Arbeit im Borchardtschen Journal von

läufig mache, lässt – gleichgültig ob eine endliche oder eine unendliche Anzahl mal – so erhält ζ von z abhängige Werthe, so lange die Umläufe nicht so beschaffen sind, dass dadurch f(z) und φ(z) identisch, dass heisst für jeden Werth von z unendlich werden.

Die Werthe von ζ für welche nicht f(z) und φ(z) identisch unendlich werden, erfüllen in der ζ Ebene eine einfach zusammenhangende Fläche, welche ich mit S bezeichnen will. Diese Fläche bedeckt die ζ Ebene nur einfach und an ihrer Begrenzung liegen diejenigen Werthe von ζ für welche f(z) und φ(z) identisch unendlich werden. Innerhalb der Fläche S ist z überall eine meromorphe Function von ζ. Dieser ist der Sinn des Satzes I p. 161, und ein Weiteres brauche ich für die Anwendung, welche ich von demselben mache, nicht.

Ich hoffe, dass Ihnen diese Worte zur Aufklärung über den Sinn, welchen

BAPTÊME DES FONCTIONS FUCHSIENNES (1880).

meinen Resultaten in den „Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen" Februar 1880 p 170–176 gegeben habe, so werden Sie daselbst p. 173 finden, dass ich dort denselben Satz in der Weise ausgedrückt habe, dass unter den über die Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen gemachten Voraussetzungen durch die Gleichung

$$(H) \quad \zeta = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

z als eindeutige Function von ζ definirt werde.

Gestatten Sie mir nun mit wenigen Worten auf die Bedeutung des Satzes einzugehen.

Aus den Entwickelungen meiner Arbeit in Borchardt's Journal p. 158–160 ergiebt sich Folgendes. Berechnet man für jeden Werth von z die zugehörigen Werthe von ζ, indem man z alle möglichen …

…ch dem Satze I p. 161 beilege, genügen werden, um so mehr als ich aus Ihrem Briefe ersehe, dass Sie sich der Ergründung der vorliegenden analytischen Frage bereits mit so grossem Scharfsinn gewidmet haben.

Genehmigen Sie, hochgeehrter Herr, die Versicherung meiner ausgezeichnetsten Hochachtung. L. Fuchs

Le 12 juin 1880, Henri Poincaré répond à Fuchs en faisant de nouvelles objections et en présentant de nouveaux développements, et il lui demande dans les termes reproduits ci-après, l'autorisation de donner le nom de « fuchsiennes » aux nouvelles fonctions qu'il étudiait.

« Dans le cas où ces points singuliers ne sont qu'au nombre de deux, je trouve que la fonction que vous avez définie jouit de propriétés fort remarquables, et, comme j'ai l'intention de publier les résultats que j'ai obtenus, je vous demanderai la permission de lui donner le nom de fonction fuchsienne, puisque c'est vous qui l'avez découverte ».

BAPTÊME DES FONCTIONS FUCHSIENNES (*fin*).

Sur les Fonctions Fuchsiennes
par H. Poincaré.
Première note. 14 février 1881

Le but que je me propose dans le travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, est de rechercher s'il n'existe pas des fonctions uniformes, analogues aux fonctions elliptiques, et permettant d'intégrer diverses équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Je suis arrivé à démontrer qu'il existe une classe très étendue de fonctions qui satisfont à ces conditions et auxquelles j'ai donné le nom de fonctions fuchsiennes, en l'honneur de M. Fuchs dont les travaux ~~m'ont été fort utiles~~ m'ont servi très utilement dans ces recherches.

Voici quelles sont les notations dont je vais faire usage. Si z est la variable indépendante représentée par un point dans un plan. Si j'appelle K_1 l'opération qui consiste à changer z en $f_1(z)$, K_2 celle qui consiste à changer z en $f_2(z)$; j'écrirai habituellement :

$$z K_1 = f_1(z) \qquad z K_2 = f_2(z) \qquad z K_1 K_2 = f_2[f_1(z)]$$

J'appelle cercle fondamental le cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon 1, groupe hyperbolique le groupe des opérations qui consistent à changer z en

$$\frac{az+b}{cz+d} \qquad (a, b, c, d \text{ sont des constantes})$$

et qui n'altèrent pas le cercle fondamental; groupe discontinu tout groupe qui ne contient pas d'opération infinitésimale, c'est-à-dire d'opération changeant z en une ~~opération~~ quantité infiniment voisine de z; groupe fuchsien tout groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique.

J'appelle fonction fuchsienne toute fonction uniforme de z qui n'est pas altérée par les opérations d'un groupe fuchsien.

Un premier problème ~~que j'ai eu à~~ se présentait d'abord : former tous les groupes fuchsiens. J'y suis arrivé à l'aide de considérations empruntées à la géométrie non euclidienne, considérations sur lesquelles je n'insisterai pas ici. J'ai fait voir que la surface du cercle fondamental peut se décomposer (et cela d'une infinité de manières) en une infinité de polygones curvilignes dont les côtés sont des arcs de cercle appartenant à des circonférences qui coupent orthogonalement le cercle fondamental. ~~De plus si R_0 et R_i sont deux polygones de ces polygones~~ l'on a, quel que soit l'indice i,

$$R_i = R_0 . K_i$$

K_i étant une opération du groupe hyperbolique.

Il est clair que les différentes opérations K_i forment un groupe discontinu contenu dans

Henri Poincaré et sa fiancée.

Quelques années plus tard.

HENRI POINCARÉ FONDE UN FOYER.
(Le 20 avril 1881, Henri POINCARÉ a épousé Mlle Louise POULAIN d'
arrière petite-fille de Étienne GEOFFROY SAINT-HILAIRE.)

Heidelberg 4 mars 1882

Monsieur et cher collègue,

A votre mémoire: „sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires de 17 Décembre 1881" inséré dans les „Mathematische Annalen", M. F. Klein a ajouté à la fin une note d.d. 30 Décembre 1881, dans laquelle il ose de vous donner une leçon à la manière de maître d'école à cause que vous avez donné mon nom aux fonctions dont il est question dans votre mémoire. Je pourrais passer sous silence les remarques malignes de M. Klein aussi bien que j'en ai fait souvent à l'égard de M. Klein, depuis qu'il a pris mes travaux pour point de départ de ses études analytiques, sans m'en donner jamais quelque témoignage de sa sympathie. En effet j'aurais passé sous silence ces remarques de M. Klein, comme elles le méritent, d'autant plus qu'elles se censurent par elles même. Mais dans sa note il a aussi osé de faire une assertion qui répugne à la vérité. Il dit, que je n'aie publié en aucun lieu un mémoire concernant

APRÈS UNE NOTE DU PROFESSEUR KLEIN
LE PROFESSEUR FUCHS RÉAGIT VIGOUREUSEMENT (1882).

(Lettre en français écrite à la suite d'une Note de KLEIN qui critiquait les désignations données par Henri POINCARÉ aux nouvelles fonctions, et mettait en cause le Professeur FUCHS.)

les fonctions qui se reproduisent par des substitutions linéaires. C'est pourquoi je crois le devoir à la dignité de la science, et aussi à vous, Monsieur, de témoigner publiquement, que l'assertion de M. Klein n'est pas vraie. et pour cela je vais publier une note dont je me fais l'honneur de vous envoyer ci-joint une copie textuelle.

S'il vous le trouvez convenable de faire insérer une traduction française de ma note dans un journal mathématique de Paris, j'y consentirais de bon coeur et je vous en saurais beaucoup de grâces.

Je prends avec plaisir cette occasion de vous témoigner, Monsieur, mon plus vif intérêt pour vos belles recherches dont j'étais heureux de pouvoir voir le développement successif dès son origine.

Agréez, Monsieur, l'assurance de mes sentiments de haute estime et d'affection.

L. Fuchs

FIN DE LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

Corr. zu senden an Herrn: Mr. H. Poincaré. Maître de Confé-
rences à la Faculté des Sciences. Paris. rue Gay-
Lussac 66.

Correcturen zugleich an Klein, vergl. Manuscript.

N.B. für den Setzer! Zusammenkommen die Zeilen nicht sperren!

Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent
par des Substitutions Linéaires.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein)

Par

H. Poincaré à Paris.

„Vous avez récemment (dernièrement) bien voulu
faire insérer aux Mathematische Annalen*
mon travail sur les fonctions uniformes
qui se reproduisent par des substitutions linéaires,
et vous l'avez fait suivre d'une note où vous
exposez les raisons qui vous font trouver peu
convenables les noms que j'ai donnés à ces
transcendantes. Permettez-moi de vous
adresser quelques lignes pour défendre
mes dénominations, que je n'ai pas choisies
au hasard.

*t. XIX, p. 553–564 u) Herrn Poincaré's.

Derselben gegenüber habe ich genöthigt mich auf eine Bemer-
kung zu beschränken, dass ich für meinen Theil nach
wie vor an der Auffassung festhalte, der ich auf
p. 564 des 19ten Annalenbandes Ausdruck gegeben habe.
Dabei will ich nicht unterlassen, ausdrücklich auf
die Note aufmerksam zu machen, mit welcher Hr.
Fuchs neuerdings dem fraglichen bezüglichen Passus
meiner Auseinandersetzung entgegengetreten ist
(cf. Göttinger Nachrichten vom 1. März 1882).

Düsseldorf, [illegible] April 1882. F. Klein.

LETTRE DE HENRI POINCARÉ
POUR JUSTIFIER LES DÉSIGNATIONS QU'IL AVAIT CHOISIES (1882).
(*Voir* note page suivante.)

Si j'ai cru devoir donner aux fonctions
nouvelles le nom de M. Fuchs, ce n'est pas
que je méconnaisse la valeur des travaux de
M. Schwarz et des vôtres, je suis le premier au
contraire, à en apprécier la haute importance.
Mais il ne m'était pas possible d'oublier les
découvertes si remarquables que le savant professeur
de Heidelberg a publiées dans le Journal de
Crelle. Elles sont le fondement de la théorie
des équations linéaires et, sans elles, je n'aurais
pu aborder l'étude de mes transcendantes qui
se lient si directement à cette théorie. Dans ses premiers
travaux, M. Fuchs se place, il est vrai, à un point de
vue un peu différent du mien et ne se préoccupe
ni de la discontinuité des groupes, ni de l'uniformité
des fonctions. Mais M. Schwarz, dans ses mémoires
des tomes 70 et 74 du Journal de Crelle, ne s'en
préoccupe pas non plus, il en dit quelques mots
dans un cas très particulier, dans le mémoire du
tome 75 que j'ai cité dans ma note. C'est là
seulement qu'il se trouve « auf dem Gebiete der
fonctions fuchsiennes. » Dans vos belles recherches
[illegible] à peu [illegible] de liaison, cette façon d'envisager
[illegible] diffère [illegible] peu [illegible] mais tous

SUITE DE LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

(Lettre adressée au Professeur KLEIN pour les lecteurs des *Mathematische Annalen*, et publiée par KLEIN dans cette revue. On remarque les annotations de la main de KLEIN, destinées à l'éditeur, et le renvoi ajouté au bas de la première page.)

avoir plutôt en vue alors l'étude des fonctions elliptiques que celle des équations linéaires. Quant à M. Fuchs, dans ses mémoires des tomes 83 et 89 du Journal de Crelle, il s'est élevé à un point de vue nouveau et a mis en lumière le lien étroit qui unit la théorie des équations différentielles à celle de certaines fonctions uniformes. Ce fut la lecture de ces mémoires qui devint le point de départ de mes recherches.

En ce qui concerne les fonctions kleinéennes, j'aurais cru commettre une injustice, si je leur avais donné un autre nom que le vôtre. C'est M. Schottky qui a découvert la figure qui faisait l'objet de votre lettre, mais c'est vous qui avez « ihre principielle Wichtigkeit betont », comme vous dites à la fin de votre savant travail « Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich ».

Quant à ce que vous dites de Riemann, je ne puis qu'y souscrire pleinement. C'était un de ces génies qui renouvellent si bien la face de la science qu'ils impriment leur cachet, non seulement sur les œuvres de leurs élèves immédiats, mais sur celles de tous leurs successeurs pendant une longue suite d'années. Riemann a créé une théorie nouvelle des fonctions, et il sera toujours possible d'y retrouver le germe de tout ce qui s'est fait et se fera après lui en analyse mathématique....

~~Veuillez agréer, Monsieur, avec mes excuses pour la longueur de ma lettre, l'expression de ma considération la plus distinguée~~

Poincaré

Paris, le 30 Mars 1882.

FIN DE LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

Sur les Groupes kleinéens
par H. Poincaré à Paris

§ 1 Substitutions imaginaires.

Dans un mémoire antérieur, j'ai étudié les groupes discontinus formés par des substitutions linéaires à coëfficients réels. Dans le présent travail, j'ai l'intention d'exposer quelques résultats relatifs aux groupes de substitutions linéaires à coëfficients imaginaires. Ces substitutions se classent naturellement en quatre catégories, comme on va le voir.

Soit

$$\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$$

une substitution quelconque, ~~si l'on a~~ où je suppose toujours:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Si on a:

$$(\alpha+\delta)^2 = 4$$

la substitution peut se mettre sous la forme:

$$\left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a} + k\right)$$

a et k étant des constantes. On dit alors qu'elle est parabolique.

Si on a:

$$\cancel{(\alpha+\delta)^2 \text{ réel positif et } 4} \quad (\alpha+\delta)^2 \gtrless 4$$

la substitution peut se mettre sous la forme:

$$\left(\frac{z-a}{z-b}, k\frac{z-a}{z-b}\right)$$

a, b, k étant des constantes.

Si ~~est~~

$$(\alpha+\delta)^2 \text{ réel positif et } > 4$$

K est réel positif et la substitution est hyperbolique

Si

$$(\alpha+\delta)^2 \text{ réel positif et } < 4 \text{ ou négatif}$$

K est imaginaire et a pour module 1; la substitution est elliptique

Si enfin $(\alpha+\delta)^2$ est imaginaire ou négatif, K est également imaginaire ou négatif et la substitution est loxodromique

PREMIÈRE PAGE DU MÉMOIRE SUR LES GROUPES KLEINÉENS (1883).

Donc tout type fuchsien contient une équation fuchsienne

C. Q. F. D.

Copier dans l'ordre suivant

§ 8 Premier aperçu de la méthode de continuité

§ 9 Deuxième lemme

§ 10 Types symétriques.

§ 11 Généralisation du théorème précédent

§ 12 Polygones limites

Note 1

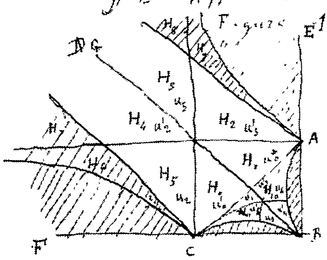
§ 13 Polygones réduits

Suite du § 13

§ 14 Méthode de continuité.

~~figure~~

§ 15 Application particulière



Nous allons donner des principes qui précèdent une application particulière. Nous choisirons pour cela le cas le plus simple qui puisse se présenter, c'est à dire le 1er exemple du § 12, en supposant que K_0 n'a que 6 côtés. C'est le cas du paraboloïde (1 bis) du § 12. Cet exemple facilitera l'intelligence de ce qui précède.

Dans le cas qui nous occupe, la multiplicité M_1 est représentée comme on l'a vu par le paraboloïde (1 bis). Voyons ce que devient la multiplicité M

L'équation fuchsienne engendrée par K_0 admet 4 points singuliers

E DU MÉMOIRE SUR LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES (1883).

(avec figure dessinée de la main de Henri POINCARÉ).

Figure 2

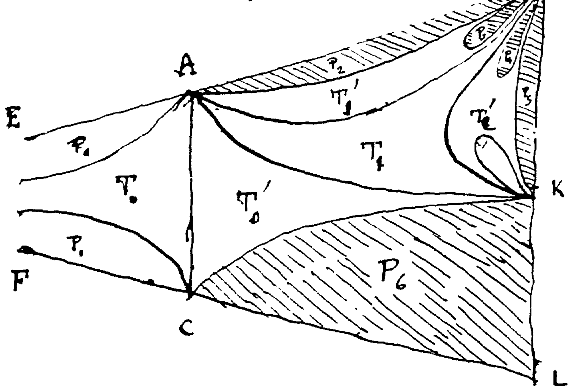


Figure 3

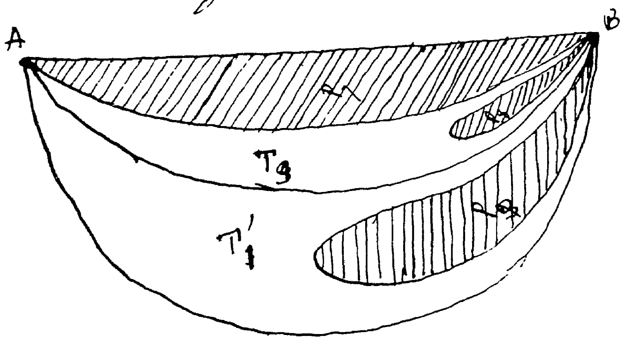
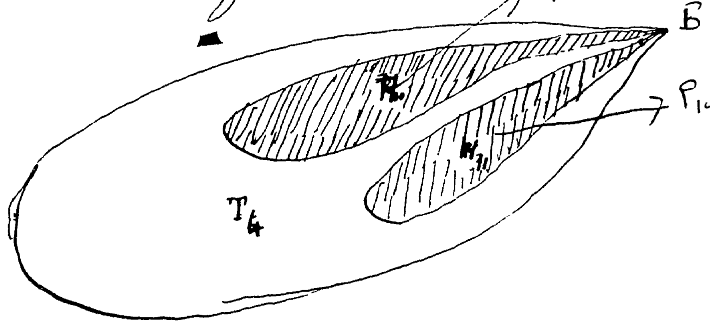


Figure 4



PAGE DE FIGURES DU MÉMOIRE
SUR LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES (1883).
(de la main de Henri POINCARÉ.)

que les symétries auxquelles nous conduit l'équation approximative (5) — subsisteraient encore si on la remplaçait par l'équation exacte de la surface S.

Cette surface a donc rigoureusement deux plans de symétrie si n est impair, et trois si n est pair.

Parmi les surfaces S, nous distinguerons la surface Σ_3 qui correspond au coefficient de stabilité G_3. Quelle est son intersection avec l'ellipsoïde dont elle dérive? Pour avoir cette courbe il suffit d'écrire que ζ est nul, ou que

$$M'_{03} = 0 \qquad N'_{03} = 0$$

ce qui donne:

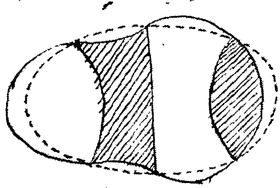
$$\mu = 0 \qquad \nu = 0 \qquad \cancel{\nu = \pm\sqrt{\frac{2(b^2+c^2) - \sqrt{4b^4 - 7b^2c^2 \dots}}{5}}}$$

$$\nu = \pm\sqrt{\frac{2(b^2+c^2) - \sqrt{4b^4 - 7b^2c^2 + 4c^4}}{5}}$$

Cette intersection se compose donc de l'ellipse principale, section de l'ellipsoïde par le plan des yz et de deux lignes de courbure de cet ellipsoïde, cela n'est vrai, bien entendu, qu'approximativement et en négligeant le carré de ε.

La figure 1 représente en projection sur l'un des deux plans de symétrie la surface Σ_3 et l'ellipsoïde dont elle dérive

figure 1



Le contour apparent de l'ellipsoïde est représenté en trait pointillé, le contour apparent de Σ_3 et l'intersection des deux surfaces en trait plein. On a couvert de hachures la portion de la surface Σ_3 qui est vue à travers l'ellipsoïde.

On voit d'après cette figure comment on passe de l'ellipsoïde de Jacobi à la surface Σ_3. ~~La~~ La plus grande portion de la matière semble se rapprocher de la forme sphérique, tandis que la plus petite portion de cette même matière sort de l'ellipsoïde par l'extrémité du grand axe, comme si elle voulait se séparer de la masse principale. Qu'on me pardonne d'employer un langage aussi dépourvu de précision mathématique.

UNE PAGE DU MANUSCRIT SUR L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION (1885).

Les fumistes devant venir la semaine prochaine
Laurentine demande quelles cheminées il faut
ramoner

Chez moi 11 h

Fil Sorbonne pour demander adresse Boussinesq
inconnu.

Visite Jordan

Eh bien j'ai vu Hermite hier à la noce, il m'a dit
je vous confirme ce que vous a dit Darboux. Or ce que
m'a dit Darboux, c'est qu'Hermite votera pour vous
qu'il parlera pour vous au Comité Secret, mais que cela lui
est très pénible et qu'il désire que vous n'alliez pas le voir
Vous êtes venu d'après la lettre de Daubrée, mais nous
lui avions plutôt dit que ce n'était pas la peine.
Jordan m'a appris également qu'il était expert et
n'avait plus de service dans les mines

Visite Daubrée

Vous avez bien fait de venir. Ces messieurs m'avaient d'abord
dit que ce n'était pas la peine, puis Darboux a couru
après moi, pour me dire que tout bien réfléchi ....
Allez voir Jurien, c'est un brave homme qui promet sa
voix à tort et à travers. Il travaille beaucoup en ce
moment à cause du duc d'Aumale. Serez vous
encore ici lundi. Je n'ai rien entendu de Mannheim.

Visite Maurice Lévy

Ah vous voilà déjà en visite. Je pense que vous n'avez
pas de concurrent, mais si Mannheim se présentait, il
y a une telle différence d'âge entre vous que je ne sais
pas ce que je ferais. Je ne dis pas que je voterais pour lui
mais je ne dis pas que je voterais pour vous. Je verrais

HENRI POINCARÉ CANDIDAT A L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1886).

(Extraits d'une lettre dans laquelle Henri POINCARÉ raconte à sa femme ses visites de candidature.)

ce qui se passe. J'ai voté pour Laguerre bien que je
trouvasse que la section sacrifiait un peu Mannheim
Lippmann sorti ainsi que Wolf.
Passé ce matin faire part mort père de Mercadier
à la Porte 4 h
Debray sorti.

Visite Picard

Eh bien vous voilà candidat, je pense qu'ayant
pour vous l'unanimité de la section vous êtes à peu
près sûr de votre affaire. Est-ce que vous venez de voir
M Hermite — Non, il n'était pas chez lui — Je lui dirai
que vous êtes venu pour le voir et que vous reviendrez
Qui avez vous vu en dehors de la section, de la mienne
Duchartre m'a dit qu'il voterait pour la section, oui
c'est un homme des plus droit; M Wolf l'avez vous vu
Non. il doit être pour Mannheim — et Troost —
Non, Halphen m'a dit qu'il devait être pour Mannheim
— Non, non M Hermite le décidera à voter pour
vous et Lippmann — Non sorti — Oh lui quoique
israélite il sera pour vous, c'est un esprit juste —
Enfin bonne chance.
Bertrand retourné à la campagne; laissé
carte; allé Institut, nommé annuaire

Visite Résal

Eh bien vous venez pour une candidature, Ecole
Polytechnique; répétiteur titulaire — Oui — Je
voterai pour vous — J'ai aussi une autre
candidature — Pour l'Institut? — Oui je sais
que vous ne voterez pas pour moi — Si Mannheim,

SUITE DE LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

Traduction.

Procès-verbal, dressé par devant S. M. le Roi au palais de Stockholm, le 20 Janvier 1889, en présence de S. Exc. M. le Comte Ehrensvärd, Ministre des Affaires Étrangères, M. G. Wennerberg, Ministre des Cultes et de l'Instruction publique, M. R. O. Schjött, Ministre Norvégien et de M. G. Mittag-Leffler, professeur à l'université de Stockholm.

§ 1. La commission, nommée par S. M. le Roi, en date du 25 Novembre 1884, pour examiner des mémoires, ayant concouru pour le prix en mathématiques offert par Sa Majesté, et composée de M. Carl Weierstrass, professeur à l'université de Berlin, M. Charles Hermite, professeur à la Sorbonne à Paris, et M. Gösta Mittag-Leffler, professeur à l'université de Stockholm, ayant terminé ses travaux, le rapport de la commission fut soumis au Roi.

Il ressort de ce rapport que la commission a été de l'opinion unanime,

que le mémoire qui est intitulé: sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique avec la devise "Nunquam præscriptos transibunt sidera fines," est l'œuvre profonde et originale d'un génie mathématique

PROCÈS-VERBAL ÉTABLI PAR LE JURY D'ATTRIBUTION DU PRIX DÉCERNÉ PAR LE ROI OSCAR II DE SUÈDE ET DE NORVÈGE (1889).

dont la place est marquée parmi les grands géomètres du siècle. Les plus importantes et les plus difficiles questions, comme la stabilité du système du monde, l'expression analytique des coordonnées des planètes par des séries de sinus et de cosinus des multiples du temps, puis l'étude, on ne peut plus remarquable, des mouvements asymptotiques, la découverte de formes de mouvements, où les distances des corps restant comprises entre des limites fixes, on ne peut cependant exprimer leurs coordonnées par des séries trigonométriques, d'autres sujets encore que nous n'indiquons point, sont traités par des méthodes qui ouvrent, il n'est que juste de le dire, une époque nouvelle dans la mécanique céleste. Les notions analytiques inconnues de Lagrange et de Laplace, qui n'ont été acquises que de notre temps, ont un rôle essentiel dans ces questions si difficiles où le talent de l'auteur se montre dans tout son éclat. Une fois de plus se trouve ainsi confirmée cette observation, que les plus grands progrès en astronomie, en physique et les découvertes qui étendent le domaine des mathématiques abstractes, se produisent simultanément, comme si elles étaient appelées à se seconder en concourant à un même but,

et que la commission de même a été

unanime dont l'opinion,

que l'auteur du mémoire qui porte pour titre

Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques et a pour devise

' Nous devons l'unique science,
Que l'homme puisse conquérir,
Aux chercheurs dont la patience
En a laissé les fruits mûrir. '

a montré un talent mathématique de premier ordre,

et que son mémoire est extrêmement digne de l'attention des géomètres.

§ 2. S. M. le Roi daigna décerner

le prix offert par Sa Majesté et composé d'une médaille en or evaluée à environ 1000 frcs, ainsi que la somme 2.500 couronnes à l'auteur du mémoire, muni de l'épigraphe "Nunquam praescriptos transibunt sidera fines" et

un exemplaire de la médaille à l'effigie de Sa Majesté et portant l'inscription 'in sui memoriam' à l'auteur du mémoire portant l'épigraphe:

" Nous devons l'unique science,
Que l'homme puisse conquérir,
Aux chercheurs dont la patience
En a laissé les fruits mûrir

SUITE DU PROCÈS-VERBAL PRECEDENT.

§ 3 S. M. le Roi ayant en suite ouvert les bulletins accompagnant les dit mémoires, il a été constaté que le bulletin à l'épigraphe: "Nunquam praescriptos transibunt sidera fines" portait le nom "M. H. Poincaré, Paris,"

et celui à l'épigraphe:

"Nous devons l'unique science,
Que l'homme puisse conquérir
Aux chercheurs dont la patience
En a laissé les fruits mûrir"

le nom de "Paul Appell, Paris."

Ainsi passé:

Au Château de Stockholm le 20 Janvier 1889.

Oscar.

Alb. Ehrensvärd — G. Wennerberg.
P. O. Schjött — G. Mittag-Leffler

Otto Printzsköld.

FIN DU PROCÈS-VERBAL PRÉCÉDENT.

Il est impossible d'étudier les œuvres des grands mathématiciens, et même celles des petits sans remarquer et sans distinguer deux tendances opposées, ou plutôt deux sortes ~~matières~~ d'esprits entièrement différents. Les uns sont avant tout préoccupés de la logique à lire leurs ouvrages on est tenté de croire ~~et semblent travailler en avant~~ qu'ils n'ont avancé que pas à pas, avec la méthode d'un Vauban qui pousse ses travaux d'approche contre une place forte sans rien ~~laiss~~ abandonner au hasard. Les autres se laissent guider par l'intuition et font du premier coup des conquêtes rapides, mais quelquefois précaires, ainsi que de hardis cavaliers d'avant-garde.

Ce n'est pas la matière qu'ils traitent qui leur impose l'une ou l'autre méthode. Si on dit ~~les appelle~~ souvent des premiers qu'ils sont des analystes et si on appelle les autres géomètres, cela n'empêche pas que les uns restent analystes, même quand ils font de la géométrie, tandis que les autres sont encore des géomètres, même en s'occupant d'analyse pure. C'est la nature ~~l'essence~~ même de leur esprit qui les fait logiciens ou intuitifs, et ils ne peuvent la dépouiller quand ils abordent un sujet nouveau.

Ce n'est pas non plus l'éducation qui a développé en eux l'une des deux tendances et qui a étouffé l'autre. On naît mathématicien, on ne le devient pas et il semble aussi qu'on naît géomètre, ou qu'on naît analyste.

Je voudrais citer des exemples et certes ils ne manquent pas; mais pour accentuer le contraste, je voudrais commencer par un exemple extrême; pardon, si je suis obligé de l'aller chercher auprès de deux mathématiciens vivants.

M. Méray veut démontrer qu'une équation binôme a toujours une racine. S'il est une vérité que nous croyons connaître par intuition directe c'est bien celle-là. Qui doutera qu'un angle peut toujours être partagé en un nombre quelconque de parties égales? M. Méray n'en juge pas ainsi; pour à ses yeux, cette proposition n'est nullement évidente et pour la démontrer, il lui faut plusieurs pages.

[Voyez au contraire M. Klein, il étudie une des questions les plus abstraites de la théorie des fonctions, il s'agit de savoir si sur une surface de Riemann donnée il existe toujours une fonction admettant des singularités données par exemple deux points singuliers logarithmiques avec des résidus égaux et de signe contraire. Que fait le célèbre géomètre allemand? Il remplace ~~suppose~~ sa surface de Riemann par une surface métallique dont la conductibilité électrique varie suivant certaines lois

MANUSCRIT DE LA CONFÉRENCE SUR LE RÔLE
DE L'INTUITION ET DE LA LOGIQUE EN MATHÉMATIQUES FAITE A PARIS (19(

les utilitaristes ne comprendront jamais, c'est la puissance des impondérables, c'est la force de l'idée. C'est ~~par~~ grâce à elle, ~~que~~ par exemple, que l'héritier d'un grand nom se sent ~~exalté~~ soutenu par ~~la~~ ~~mémoire~~ les hauts faits ~~exploits~~ de ses ancêtres; s'il est soldat, il sera fier ~~des exploits~~ de ses aïeux guerriers, mais il le sera aussi ~~des savoir que seront~~ de ceux qui se ~~illustrés~~ distinguèrent dans la diplomatie et cette double fierté sera une partie de son courage.

Eh bien, nous aussi nous avons notre noblesse; nous aussi nous sommes une famille illustre et ~~tout ce qui a contribué à l'illustrer~~ toutes ses gloires, si diverses qu'elles soient, contribuent à exalter l'âme de chacun de nous, à la rendre plus forte et plus confiante.

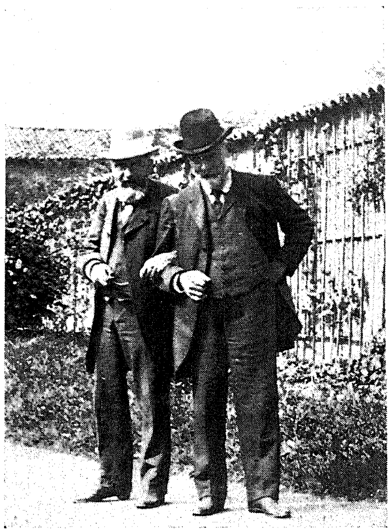
Ceux qui combattent pour la patrie, comme ceux qui combattent pour la vérité puisent à ce patrimoine commun comme à une source vivifiante et réconfortante. Ce patrimoine, nous devons donc chercher à l'accroître dans toutes ses parties; ce qui amoindrirait l'une d'elles amoindrirait les toutes et nous amoindrirait tous. C'est ~~là~~ cette solidarité d'honneur le véritable esprit de corps qui ne consiste pas, comme ~~le~~ on le croit quelquefois, à soutenir partout nos camarades, mais à nous efforcer toujours de nous rendre dignes d'eux.

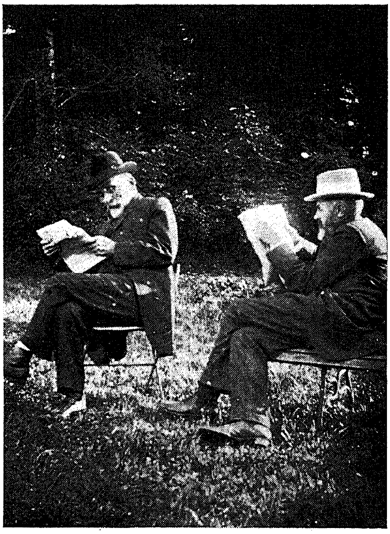
L'usage veut que chaque président ~~vienne à son tour vous parler d'une des branches de notre famille commune~~ chacun choisissant celle qu'il connaît le mieux et je suis naturellement amené à vous rappeler le souvenir des savants sortis de l'École. ~~Tout effrayé que je sois de l'étendue de ma tâche car ces grands hommes furent nombreux~~; tout intimidé que

UNE PAGE DU MANUSCRIT DU DISCOURS SUR LA PART DES POLYTECHNICIENS DANS L'ŒUVRE SCIENTIFIQUE DU XIX^e SIÈCLE (1903).

(Allocution prononcée par Henri Poincaré en présidant la 36e Assemblée générale de la Société de secours des anciens élèves de l'École Polytechnique.)

A Longuyon en 1905
(assis avec à sa droite une sœur et un frère de sa mère et à sa gauche sa cousine germaine Mme Albin HALLER et sa femme).





Henri Poincaré et Albin Haller.

HENRI POINCARÉ EN VACANCES EN LORRAINE

Pour la question qui nous touche le plus, celle de l'immortalité, il restait désespéré et celui qui avait dit

Bleus ou noirs, tous aimés, tous beaux
Ouverts à quelque immense aurore
De l'autre côté des tombeaux
Les yeux qu'on ferme voient encore

[illegible] « bientôt viendra le temps où je ne penserai plus »

En ce qui concerne Dieu, l'antropomorphisme lui faisait horreur; donner à Dieu une âme d'homme, c'est lui donner une âme responsable, c'est l'accuser de tout le mal qu'il y a dans l'univers. Mais le poète ne peut être qu'anthropomorphiste car il lui faut des images; de là entre le poète et le philosophe, une lutte [illegible]. Dieu, écrivait-il, c'est ce qui me manque à moi pour le comprendre. Mais il cherchait Dieu.

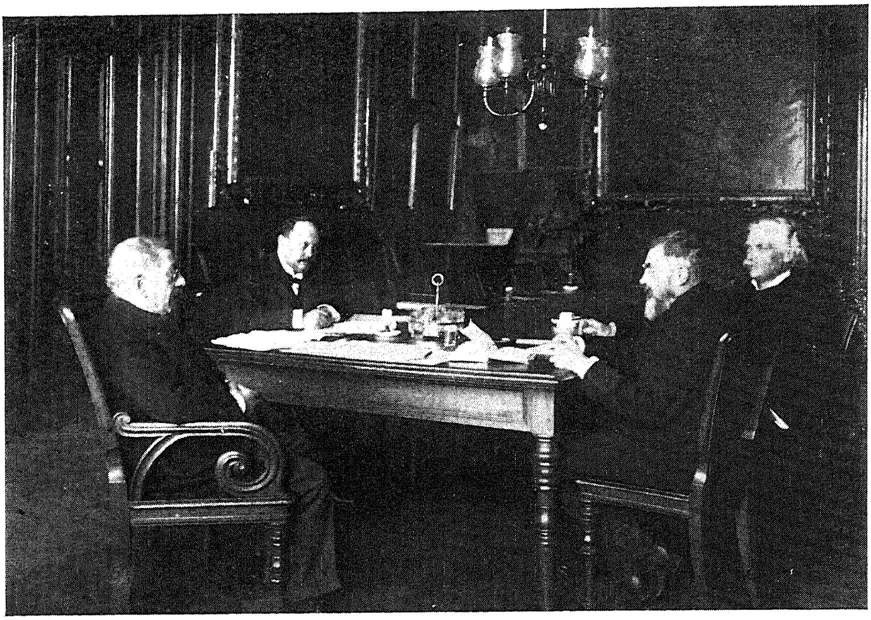
Et sous l'infini qui l'accable
Prosterné désespérément
Il songe au silence alarmant
De l'Univers inexplicable
Le front lourd, le cœur dépouillé
Plus triste d'en savoir plus ample
Sur les marches du dernier temple
Il plane encore agenouillé

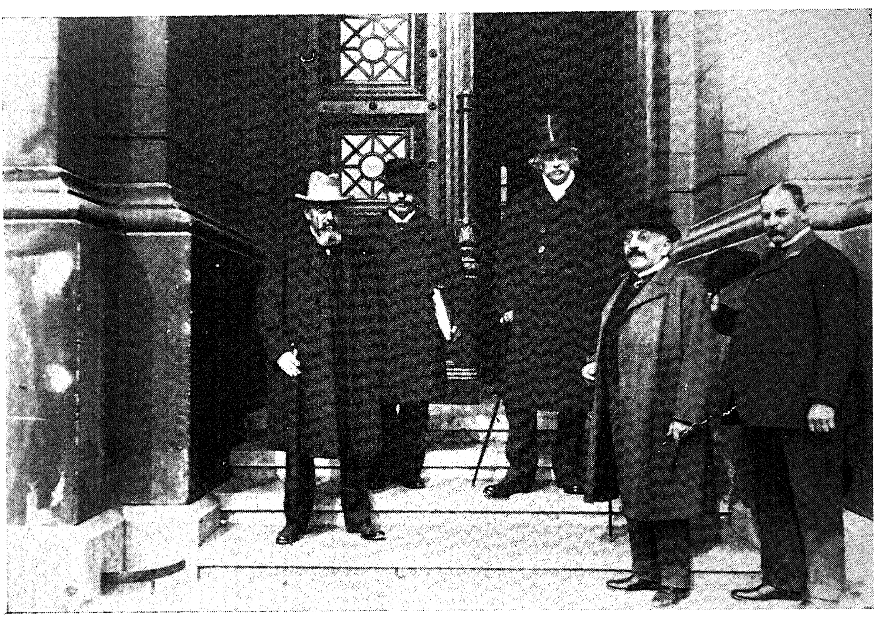
Comme l'a dit Pascal, chercher Dieu, c'est déjà l'avoir trouvé. Aussi quand la mère de Sully, toute inquiète, demandait à Gaston Paris « Dites-moi, affirmez-moi que dans son livre il n'y a rien contre Dieu », il pouvait en conscience lui répondre « Madame je vous jure qu'il n'y a pas un mot, pas une pensée qui soit impie et que cette poésie bien loin de se détourner de Dieu, le cherche constamment par le plus sincère et le plus religieux des efforts »

Pascal est pour nous un problème et il est peu de penseurs que ce problème n'ait préoccupés; doit-on se surprendre qu'il n'ait attiré pas le poète philosophe qui vivait avec les [illegible] de la [illegible]. Dès 1862, il écrivait dans son journal intime

Pascal, je t'admire, tu es mieux, je te pénètre comme si je pensais en toi; [illegible] profonde, profonde comme la nuit, comme elle pleine de lueurs, lointaines. Sois mon maître, adopte-moi, je souffre infiniment, je gravite autour de la vérité, je

UNE PAGE DU MANUSCRIT DU DISCOURS DE RÉCEPTION
A L'ACADÉMIE FRANÇAISE (1909).





HENRI POINCARÉ A BUDAPEST EN 1910.

(Henri POINCARÉ désigné comme rapporteur de la Commission d'attribution du prix, Bolyai, siège à Budapest avec MM. Jules KÖNIG président, Gustave RADOS et Gösta MITTAG-LEFFLER le 18 octobre 1910.)

SILHOUETTE DE HENRI POINCARÉ SUR LA PLAGE PENDANT L'ÉTÉ 1911.

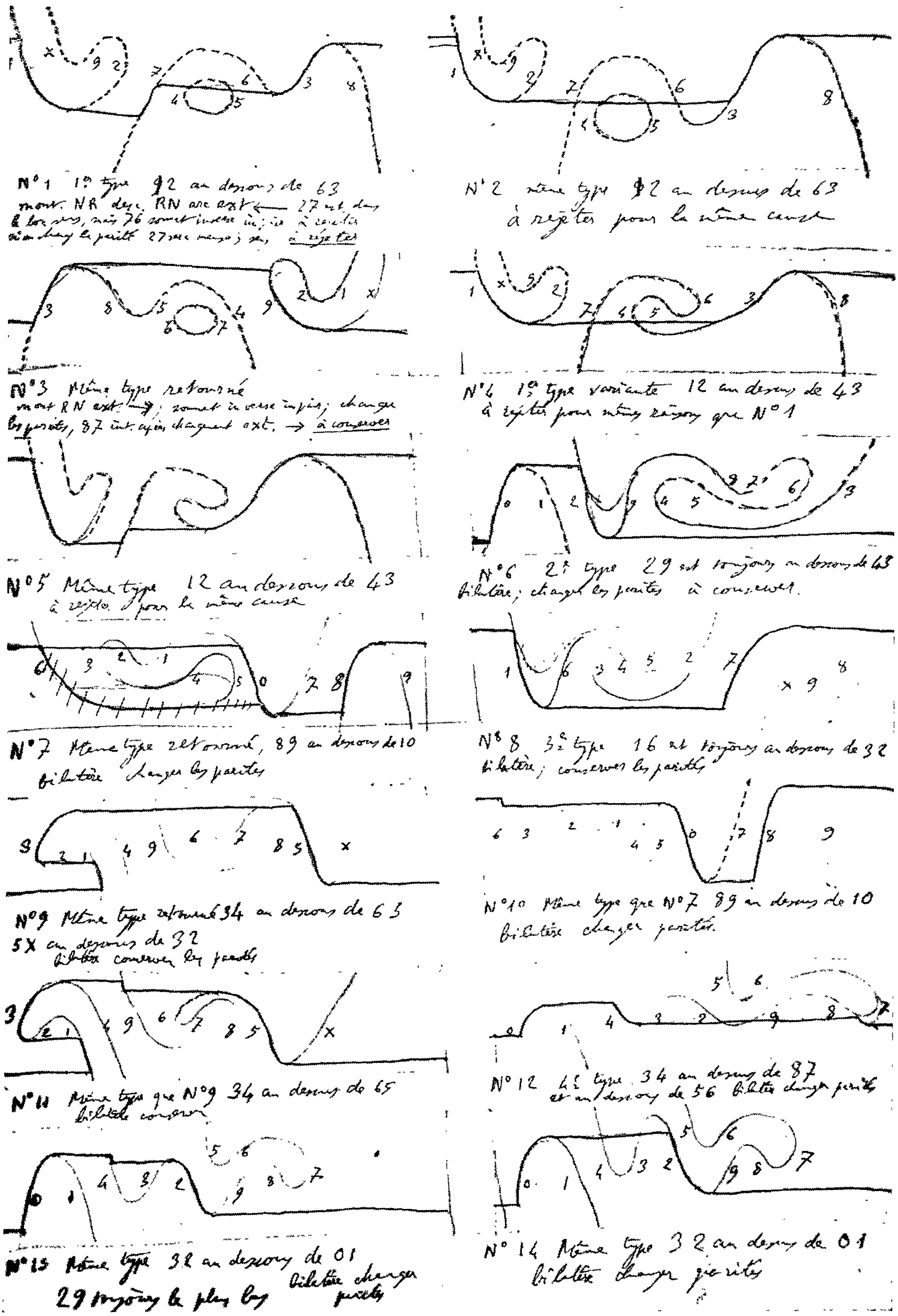
Mon cher ami,

Je vous ai parlé, lors de votre dernière visite, d'un travail qui me retient depuis deux ans. Je ne suis pas plus avancé et je me décide à l'abandonner provisoirement pour lui donner le temps de mûrir. Cela irait bien, si ~~cela~~ j'étais sûr de pouvoir le reprendre; à mon âge, je ne puis en répondre; et les résultats obtenus, susceptibles de mettre les chercheurs sur une voie nouvelle et inexplorée, me paraissent trop pleins de promesses malgré les déceptions qu'ils m'ont données pour que je me résigne à les sacrifier. Dans ces conditions, trouveriez-vous convenable de publier un mémoire inachevé où j'exposerais le but que j'ai poursuivi, le problème que je me suis proposé, et les résultats des efforts que j'ai faits pour le résoudre? Cela serait un peu insolite, mais cela serait peut-être utile. Ce qui m'embarrasse, c'est que je serai obligé de mettre beaucoup de figures, justement parce que je n'ai pu arriver à une règle générale, mais que j'ai seulement accumulé les solutions particulières. Dites-moi, je vous prie, ce que vous pensez de cette question et ce que vous me conseillez.

Votre ami dévoué,

Poincaré

LETTRE DE HENRI POINCARÉ A G. B. GUCCIA PUBLIÉE
DANS LES « RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO » (1911).



FIGURES D'UNE PREMIÈRE RÉDACTION DU MÉMOIRE « SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE » ANNONCÉ DANS LA LETTRE PRÉCÉDENTE (1911).

(A défaut d'une solution générale Henri POINCARÉ avait entrepris l'étude systématique de solutions particulières.)

La logique de l'Infini

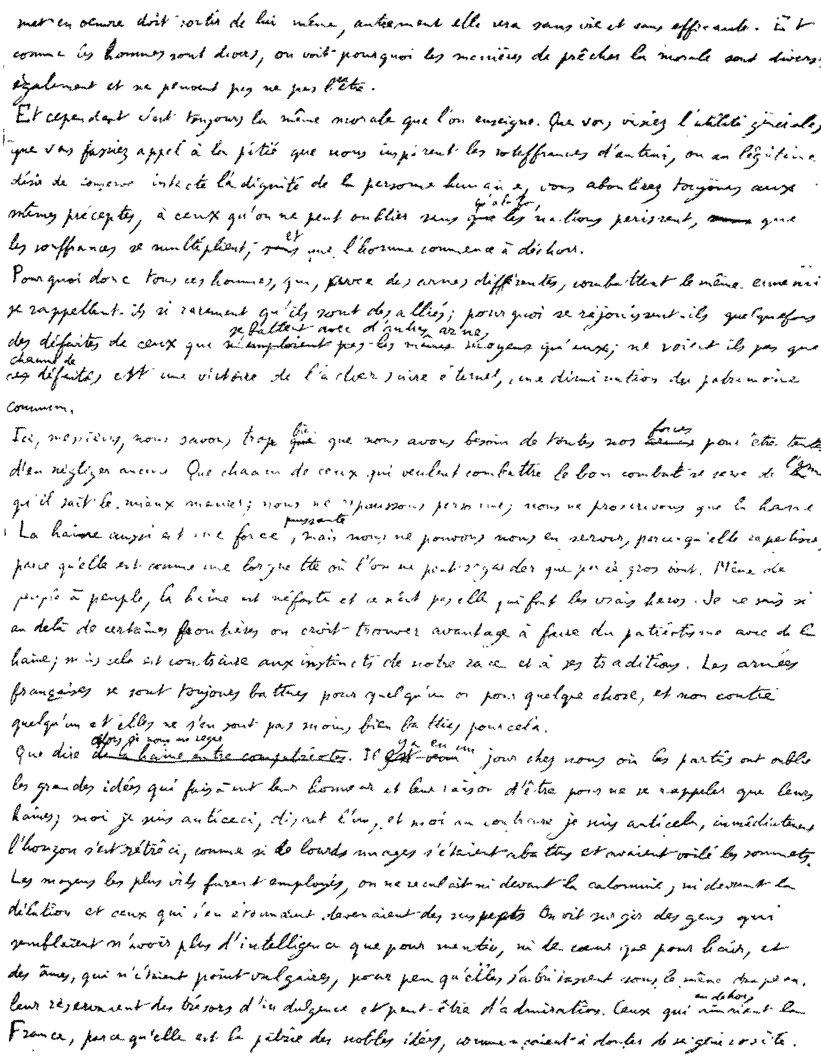
Il y a quelques années, j'avais eu l'occasion d'exposer mes idées sur la logique de l'infini, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] pour [illegible] [illegible] [illegible] comme [illegible] [illegible] [illegible] de raisonnements dont divers mathématiciens [illegible] [illegible] avaient cru pouvoir se servir. Ces mathématiciens naturellement ont répliqué; ces mathématiciens ne croyaient pas s'être trompés, ils croyaient avoir eu le droit de faire ce qu'ils avaient fait. La discussion s'éternisa non pas que l'on découvrît [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], mais parce qu'on tournait toujours dans le même cercle, chacun répétait ce qu'il venait de dire, sans paraître avoir entendu ce que l'adversaire avait dit. Bien chaque instant on annonçait une nouvelle démonstration du principe contesté pour [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] objection mais cette démonstration c'était toujours la même, à peine maquillée. On n'est donc arrivé à aucune conclusion; si je vous disais que j'en ai été étonné je vous donnerais une triste idée de ma pénétration psychologique.

~~Dans toutes les~~ Dans ces conditions, convient-il de répéter une fois de plus les mêmes arguments auxquels je pourrais peut-être donner une forme nouvelle, mais auxquels je ne pourrais rien changer dans le fond, puisqu'il ne semble qu'on n'a pas même essayé de les réfuter. Il me semble préférable de rechercher quelle peut être l'origine de cette différence de mentalité qui engendre de telles divergences de vue. Je vous ai dit que ~~la~~ ces divergences ~~sont~~ irréductibles ne m'avaient pas étonné que je les avais prévues dès la première heure, mais cela ne nous dispense pas d'en chercher l'explication; on peut prévoir un fait à la suite d'expériences répétées et être pourtant très embarrassé pour l'expliquer.

Cherchons donc à étudier la psychologie des deux écoles adverses, à un point de vue purement objectif, comme si nous étions nous-mêmes placés en dehors de ces écoles, comme [illegible] [illegible] [illegible] une guerre [illegible] [illegible] [illegible], nous constaterons d'abord qu'il y a chez les mathématiciens deux tendances opposées dans la façon d'envisager l'infini. Pour les uns, l'infini dérive du fini, il y a un infini parce qu'il y a une infinité de ~~[illegible]~~ choses finies possibles; pour les autres l'infini préexiste au fini; le fini s'obtient en découpant un petit morceau dans l'infini.

Un théorème doit pouvoir être vérifié, mais comme nous ~~ne pouvons~~ sommes nous-mêmes finis, nous ne pouvons opérer que sur des objets finis; lors donc même que la notion d'infini joue un rôle dans l'énoncé du théorème, il faut que dans la vérification il n'en soit plus question, sans quoi cette vérification serait impossible. Je prendrai comme exemples des théorèmes comme ceux-ci; la suite des nombres premiers est illimitée, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, etc; chacun d'eux peut se traduire par des égalités ou des inégalités où ne figurent que des nombres finis. Un théorème particulier de

MANUSCRIT DE LA CONFÉRENCE SUR LA LOGIQUE DE L'INFINI
FAITE A LONDRES LE 3 MAI 1912.


mise en œuvre doit sortir de lui-même, autrement elle sera sans vie et sans efficacité. Et comme les hommes sont divers, on voit pourquoi les manières de prêcher la morale sont diverses également et ne peuvent pas ne pas l'être.

Et cependant c'est toujours la même morale que l'on enseigne. Que vous visiez l'utilité générale, que vous fassiez appel à la pitié que nous inspirent les souffrances d'autrui, ou au légitime désir de conserver intacte la dignité de la personne humaine, vous aboutissez toujours aux mêmes préceptes, à ceux qu'on ne peut oublier sans que les nations périssent, que les souffrances se multiplient, et que l'homme commence à déchoir.

Pourquoi donc tous ces hommes, qui, par des armes différentes, combattent le même ennemi se rappellent-ils si rarement qu'ils sont des alliés; pourquoi se réjouissent-ils quelquefois des défaites de ceux qui se battent avec d'autres armes ~~n'emploient pas les mêmes moyens~~ qu'eux; ne voient-ils pas que chacune de ces défaites est une victoire de l'adversaire éternel, une diminution du patrimoine commun.

Ici, messieurs, nous savons trop bien que nous avons besoin de toutes nos forces pour être tentés d'en négliger aucune. Que chacun de ceux qui veulent combattre le bon combat se serve de l'arme qu'il sait le mieux manier; nous ne repoussons personne; nous ne proscrivons que la haine. La haine aussi est une force, puissante, mais nous ne pouvons nous en servir, parce qu'elle rapetisse, parce qu'elle est comme une lorgnette où l'on ne peut regarder que par le gros bout. Même de peuple à peuple, la haine est néfaste et ce n'est pas elle qui fait les vrais héros. Je ne sais si au delà de certaines frontières on croit trouver avantage à faire du patriotisme avec de la haine; mais cela est contraire aux instincts de notre race et à ses traditions. Les armées françaises se sont toujours battues pour quelqu'un ou pour quelque chose, et non contre quelqu'un et elles ne s'en sont pas moins bien battues pour cela.

Que dire alors de la haine entre compatriotes. Il y a eu un jour chez nous où les partis ont oublié les grandes idées qui faisaient leur honneur et leur raison d'être pour ne se rappeler que leurs haines; moi je suis anticeci, disait l'un, et moi au contraire je suis anticela, immédiatement l'horizon s'est rétréci, comme si de lourds nuages s'étaient abattus et avaient voilé les sommets. Les moyens les plus vils furent employés, on ne reculait ni devant la calomnie, ni devant la délation et ceux qui s'en étonnaient devenaient des suspects. On vit surgir des gens qui semblaient n'avoir plus d'intelligence que pour mentir, ni de cœur que pour haïr, et des âmes, qui n'étaient point vulgaires, pour peu qu'elles s'abritassent sous le même drapeau, leur réservaient des trésors d'indulgence et peut-être d'admiration. Ceux qui au dehors aimaient la France, parce qu'elle est la patrie des nobles idées, commençaient à douter de sa générosité.

DEUX PAGES DU MANUSCRIT DE LA CONFÉRENCE FAITE A LA SÉANCE INAUGURALE DE LA LIGUE D'ENSEIGNEMENT MORAL LE 26 JUIN 1912.

(C'est la dernière fois que Henri POINCARÉ ait parlé en public.)

Et en face de tant de haines opposées, on en était à souhaiter la défaite de l'une qui ~~aurait~~ était le triomphe des autres.

Voilà ce que fait la haine, voilà ce que nous ne voulons pas, rapprochons-nous, apprenons à nous connaître et par là à nous estimer; ne pensons qu'à notre idéal commun. Comment y atteindre. Ce ne peut être en imposant à tous des moyens uniformes; cela est irréalisable et cela n'est pas à désirer; l'uniformité c'est la mort, c'est la porte close à tout progrès, et puis surtout l'uniformité c'est la contrainte.

Les âmes sont diverses, il y en a qui sont rebelles, qu'un mot seul peut toucher et que tout le reste laisse indifférentes. Je ne puis savoir si ce mot décisif, ce n'est pas celui que vous allez dire et je vous interdirais de le prononcer.

Mais alors, vous voyez le danger, ces hommes qui n'auront pas reçu la même éducation sont appelés à se heurter dans la vie, sous ces chocs répétés, leurs âmes ne vont-elles pas évoluer, se modifier, l'œuvre de leurs éducateurs est-elle assez solide pour y résister ? Pas toujours; ils ne resteront pas ce qu'ils ont été, peut-être changeront-ils de foi. Et alors les idées nouvelles qu'ils adopteront vont être précisément celles que leurs maîtres anciens leur représentaient comme la négation même de la morale; cette habitude d'esprit ne pourra se perdre en un jour. ~~Leurs~~ En même temps leurs nouveaux amis ne leur apprendront pas seulement à rejeter ce qu'ils ont adoré, mais à le mépriser. Ils ne conserveront pas pour ~~leur foi ancienne~~ les idées généreuses dont leurs âmes ont été bercées, ce souvenir attendri qui survit à la foi. Tout leur passé va s'écrouler, et ~~la morale~~ leur idéal moral ~~sera~~ risquera d'être entraîné dans cette ruine. Tous les fruits de leur première éducation seront perdus, et il sera trop vieux pour en recevoir une seconde.

Le danger serait évité et pour le moins atténué, si nous apprenions à ne parler qu'avec respect des efforts sincères que d'autres font à côté de nous, ~~si nous rendions justice à toutes les tentatives généreuses~~ Ce respect nous serait facile, si nous nous connaissions mieux."

Et c'est là l'objet de notre association, ~~quand elle n'aurait d'autre~~ ~~en nous~~ la fête d'aujourd'hui, les discours que vous venez d'entendre ~~nous prouvons~~ qu'il est possible d'avoir une foi ardente et de rendre justice à la foi d'autrui, et que, sous des uniformes divers, nous ne sommes pour ainsi dire que les divers corps ~~de l'~~ d'une même armée qui combattent ~~pour la même cause~~ côte à côte.

26 Juin 1912

FIN DU MANUSCRIT PRÉCÉDENT

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse

1

Fonctions Modulaires et Fonctions Fuchsiennes

par H. Poincaré

N° 1. — Séries φ à indice négatif

Les fonctions modulaires ne sont qu'un cas particulier des fonctions fuchsiennes, le groupe fuchsien correspondant est celui des substitutions $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Le cercle fondamental se réduit à une droite, axe des quantités réelles, de telle façon que les fonctions n'existent qu'au dessus de cet axe.

Il est clair que les propriétés générales des fonctions fuchsiennes s'appliquent aux fonctions modulaires; je me suis déjà occupé de cette application dans un mémoire intitulé Sur les Invariants Arithmétiques inséré au tome 129 du Journal de Crelle, mais j'ai laissé dans l'ombre un certain nombre de points sur lesquels je voudrais revenir.

Dans les renvois qui vont suivre la lettre A se rapportera au mémoire sur les fonctions fuchsiennes Acta Mathematica tome 1 et la lettre C au mémoire sur les invariants arithmétiques que je viens de citer.

Rappelons d'abord les principes fondamentaux en quelques mots.

1° Une fonction fuchsienne est une fonction de z, méromorphe dans tout l'intérieur du cercle fondamental (ici pour tout point situé au dessus de l'axe des quantités réelles, cet axe étant exclus) et satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad f(z) = f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$$

2° Une fonction thétafuchsienne est une fonction de z, méromorphe à l'intérieur du cercle fondamental et satisfaisant à la condition

$$(2) \qquad \Theta\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = \Theta(z)(\gamma z+\delta)^{2m}$$

(la fonction est alors d'ordre m)

On peut avoir avantage à mettre une fonction thétafuchsienne sous la forme homogène. Posons $z = \frac{\xi}{\eta}$ et

$$\Theta(\xi, \eta) = \eta^{-2m}\Theta\left(\frac{\xi}{\eta}\right)$$

$\Theta(\xi, \eta)$ sera une fonction homogène de degré $-2m$ en ξ et η et la relation (2) deviendra:

$$(2\,bis) \qquad \Theta(\alpha\xi+\beta\eta, \gamma\xi+\delta\eta) = \Theta(\xi, \eta)$$

Pour revenir d'ailleurs de la forme homogène à la forme ordinaire, il suffit de faire $\xi = z$, $\eta = 1$.

3° Une fonction thétafuchsienne s'exprime facilement à l'aide des fonctions fuchsiennes; donnons en particulier cette expression dans le cas des fonctions modulaires. Dans ce cas, le polygone fuchsien est un quadrilatère formé de deux triangles égaux (au point de vue

DERNIER MÉMOIRE PUBLIÉ DE HENRI POINCARÉ (1912).

(Ce Mémoire a été publié dans les *Annales de la faculté des Sciences de Toulouse* après la mort de Henri POINCARÉ.)

7 juillet 1912

Mon cher Collègue,

Vous m'avez demandé hier si j'avais un mémoire qu'on pourrait insérer aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Je vous envoie aujourd'hui quelque chose qui pourrait peut être vous convenir (sous pli séparé, recommandé)

Votre bien dévoué Collègue,

Poincaré

DERNIÈRE LETTRE ÉCRITE PAR HENRI POINCARÉ (1912).

Le 7 juillet 1912, le jour même où il entrait à la clinique dans laquelle il devait succomber dix jours plus tard à une embolie, Henri POINCARÉ mettait lui-même à la poste la lettre ci-dessus, et le Mémoire qui précède, à l'adresse de M. COSSERAT, Directeur de l'Observatoire de Toulouse.)

我々は、二個の量が同じ第三の量に等しく、然もこの二個は互に等しくない、とは信じることが出來ない。かういふ譯で我々は、AはBと、BはCと異るのであるが、我々の感官が不完全な爲にそれらを識別することを得なかつたのであると、自然と假定するやうになるのである。

數學的連續の創造　第一段階　これ迄は事實を説明するのにAとBとの間に少數の離れ離れになつたままの項を挿入するといふだけでも充分であらう。此度は、若し我々の感官の缺陷を補ふ爲に何か器械を使つたら、例へば我々が顯微鏡を使用するとしたらば、どういふことになるだらうか。さつきのAとBとのやうに互に識別出來なかつた項は今や我々には判然と區別出來るものとして見える。併し區別出來るやうになつたAとBとの間にAからもBからも區別出來ないやうな新たな項Dが挿入される。最も完備した方法を用ゐた所で、我々の實驗から得る生のままの結果にはいつでも必ず物理的連續の特徴がそれと離すことの出來ない矛盾を伴つて現はれて來る。

我々がそれを免れるには、既に識別された項の間に新たな項を止め度なく挿入することによるより他はないし、この操作は際限なく繼續すべきである。丁度、望遠鏡が天の河を一つ一つの星にほぐしてしまふやうに、物理的連續を離れ離れの要素に分解するに足りるだけの力のある或る器械を表象しない限りはこの操作は停止すべきだとは考へられない。併し我々はそれを形象に訴へて考へることは

UNE PAGE D'UNE RÉÉDITION DE LA TRADUCTION JAPONAISE DE « LA SCIENCE ET L'HYPOTHÈSE » (1950).

UN ASPECT DE L'EXPOSITION HENRI POINCARÉ
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1954).

ERRATA

Page 177, 9ᵉ ligne, *au lieu de* ouvert, *lire* tracé.
» 178, 1ʳᵉ » *supprimer* de (4ᵉ mot).
» » 12ᵉ » *au lieu de* les, *lire* des.
» 179, 11ᵉ » *au lieu de* ici, *lire* sur ce point.
» 181, 3ᵉ » *ajouter* à *entre* et *et* un.
» » 22ᵉ » *au lieu de* accordés, *lire* raccordés.
» 185, 6ᵉ » *au lieu de* progessif, *lire* progressif.
» » 11ᵉ » *au lieu de* ou, *lire* et.
» » 18ᵉ » *au lieu de* des, *lire* du.
» » 19ᵉ » *au lieu de* vraisemblables, *lire* vraisemblable.
» » 31ᵉ » *au lieu de* de, *lire* du.
» 186, 6ᵉ » *au lieu de* les débats, *lire* le débat.
» 187, 1ʳᵉ » *au lieu de* un moment cinétique, *lire* une quantité de mouvement.
» » 13ᵉ » *supprimer la virgule entre* mais *et* si.
» 188, 6ᵉ » *remplacer la ligne par la suivante* : euclidien et la Mécanique ondulatoire le déterminisme et l'explication mécanique.
» 189, 1ʳᵉ » *au lieu de* application, *lire* explication.
» » 17ᵉ » *au lieu de* Je crains bien, *lire* On peut craindre.
» » 25ᵉ » *au lieu de* constance, *lire* constante.
» » 28ᵉ » *au lieu de* arts, *lire* Arts.
» » 30ᵉ » *au lieu de* du moment cinétique, *lire* de la quantité de mouvement.
» 190, 21ᵉ » *au lieu de* appuyait, *lire* appuyaient.
» » 23ᵉ et 24ᵉ lignes, *au lieu de* , chose grave, n'est plus à la mode, *lire* ne nous touche plus beaucoup.
» 191, 19ᵉ ligne, *au lieu de* spatiotemporelle, *lire* spatio-temporelle.
» » 20ᵉ » *au lieu de* spatiotemporelles, *lire* spatio-temporelles.
» 193, 34ᵉ » *supprimer* Le mathématisme. —
» » 35ᵉ » *après* efficience, *ajouter* physique.
» 198, 16ᵉ » *au lieu de* néonominalistes, *lire* néo-nominalistes.
» 201, 18ᵉ » *supprimer*, disons.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
147833 Quai des Grands-Augustins, 55

Dépôt légal, Imprimeur, 1955, n° 1049
Dépôt légal, Éditeur, 1955, n° 631.

Achevé d'imprimer le 14 octobre 1955.

Date Due
