

LES LIMITES DE LA LOI DE NEWTON

D'après un cours professé par
Henri POINCARÉ.

INTRODUCTION.

Les pages qui suivent sont la mise au point du cours professé par Poincaré à la Faculté des Sciences de Paris dans l'hiver 1906-1907, mise au point faite à partir des notes de Henri Vergne, professeur à l'École Centrale, décédé en 1943. Poincaré a occupé seize ans, de la mort de Tisserand en 1896, à la sienne en 1912, la chaire d'Astronomie mathématique et Mécanique céleste de la Sorbonne; Vergne a été plusieurs hivers son auditeur, et notamment a fait lui-même du cours de l'année 1910-1911 une mise au point qui, revue par Poincaré, a été publiée, et est illustrée sous le nom de Leçons sur les hypothèses cosmogoniques.

Connaissant l'assiduité de Vergne, et sachant qu'il s'était intéressé à des questions voisines, je lui ai demandé communication des notes qu'il avait prises au cours sur les limites de la loi de Newton, quand en 1925 j'ai rédigé mon livre : La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste. Vergne m'a fait alors don de ses notes, et j'apprécie aujourd'hui toute la valeur de ce don, qui nous permet de publier la présente mise au point.

Sur ce sujet, comme sur tant d'autres, on peut affirmer que Poincaré pouvait mieux que quiconque en 1906 faire une étude d'ensemble, c'est-à-dire marquer les limites de la loi de Newton, critiquer les différentes tentatives proposées jusqu'alors pour expliquer cette loi, pour la rattacher à des phénomènes plus généraux, pour donner à son expression un caractère moins brutal. Poincaré a étudié, dès 1905, et en particulier dans un chapitre de ce cours, les formules de Lorentz et les idées qui quinze années après sont devenues la théorie de la Relativité générale. Mais la loi de Newton reste une approximation très poussée de la réalité et, pour connaître les limites de la théorie de la Relativité, il reste capital d'étudier les limites de la loi de Newton.

Le travail de mise au point de ce cours était délicat; il a été fait, je crois, avec toute la fidélité qu'on pouvait désirer, par M^{lle} Marguerite Chopinet, astronome à l'Observatoire de Bordeaux; j'ai moi-même revu son manuscrit. Si des lecteurs s'intéressent aux idées qui y sont contenues, et dont beaucoup assurément offrent matière à de nouveaux développements, leur reconnaissance devra aller à Henri Vergne et à M^{lle} Chopinet.

Bull. astron. (Tome XVII. — Fasc. 2).

9

M. Danjon a accueilli cette mise au point dans le Bulletin Astronomique, où l'on peut rappeler que, de la fondation en 1884 à sa mort, en vingt-neuf années, Poincaré n'a pas publié moins de trente-quatre Mémoires ou Articles, sur un total, sa vie durant, de 491 publications scientifiques.

JEAN CHAZY.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

But de la Mécanique céleste. — Quel est le but de la Mécanique céleste ? D'abord prévoir les positions des astres pour les astronomes et les navigateurs. Pour cela une prévision à brève échéance suffirait, ce qui nécessiterait seulement la connaissance des termes à courte période et la modification empirique des constantes, de temps en temps : le calcul des inégalités séculaires serait inutile.

Mais le but final de la Mécanique céleste est de résoudre cette grande question de savoir si la loi de Newton explique à elle seule tous les phénomènes astronomiques.

Autrefois, les physiciens croyaient que la simplicité d'une loi était la garantie de son exactitude : il n'en est rien (*exemple* : la loi de Mariotte). Il est en effet évident que la loi de Newton a des limites ; sinon les actions intermoléculaires seraient proportionnelles aux masses seules, c'est-à-dire que deux corps de masses m et m' mis en présence donneraient toujours lieu au même phénomène, quels que soient ces corps : la qualité n'interviendrait pas, et il n'y aurait pas de Chimie. De même la loi de capillarité de Laplace suppose que l'attraction aux petites distances n'obéit pas à la loi de Newton.

Inapplicable dans le cas des petites distances, la loi de Newton ne doit pas être rigoureuse aux très grandes distances. C'est la recherche des limites d'application de cette loi qui constitue un des buts essentiels de la Mécanique céleste.

Voici comment se présente le problème : Étant donnée la précision actuelle des observations, peut-on mettre en évidence une dérogation à la loi de Newton ? La réponse à cette question ne peut être que provisoire, puisque les observations gagnent constamment en précision. D'ailleurs, même s'il n'y avait pas progrès, l'accumulation des documents fournirait des données de plus en plus précises. En effet les termes à très longue période ont une grande amplitude : les variations, au bout de peu d'années, seront faibles, mais s'accumuleront, et les coefficients de ces termes séculaires seront de mieux en mieux déterminés. Il faut donc comparer des observations nombreuses à des calculs présentant une précision du même ordre, au moins, que celle des observations.

Erreurs. — Supposons que l'erreur d'observation soit inférieure à α , que le calcul donne une erreur plus petite que β , et que la comparaison directe des phénomènes observés avec la loi de Newton montre un écart γ . Si l'on a : $\gamma > \alpha + \beta$, peut-on, pour autant, attaquer la loi de Newton ? Examinons les données α et β .

Si l'erreur d'observation α est toujours petite, positive ou négative, il n'y a rien à dire. Si elle est toujours de même sens, il existe certainement des erreurs systématiques, connues ou non. D'autre part, l'application de la méthode des moindres carrés nécessite l'attribution de poids aux observations, ce qui est un peu arbitraire. Pour trouver, par exemple, telle ou telle valeur de la parallaxe du Soleil, il sera facile d'attribuer un poids plus ou moins grand à certaines observations.

L'erreur β n'est pas mieux déterminée. En effet, le nombre des termes à calculer est très grand; on peut en oublier quelques-uns (Delaunay a ainsi commis dans la théorie du mouvement de la Lune des omissions très difficiles à retrouver). De plus, il y a des termes à longue période : un terme d'ordre très élevé, que l'on a cru pouvoir négliger, peut produire une grave perturbation par suite d'un petit diviseur. En général on dit : je néglige les termes du 5^e ordre, par exemple, et l'on oublie de dire : je chercherai une limite pour la valeur des termes négligés; d'où incertitude sur β .

Enfin, on a pu partir de données inexactes : les éléments et les masses des planètes peuvent être entachés d'erreur. Or ces éléments réagissent sur toutes les théories. Pour étudier le mouvement de Mercure, on peut faire disparaître les discordances en modifiant la masse de Vénus : la théorie de Mercure devient exacte, mais celle de la Terre devient fautive, ainsi que celles de toutes les planètes; il faudra alors modifier la masse de la Terre et tous les éléments. Autrement dit, les théories de toutes les planètes ne sont pas indépendantes. D'autres constantes interviennent également : l'obliquité de l'écliptique, la parallaxe du Soleil, la vitesse de la lumière, etc. Toutes ces constantes sont solidaires.

Supposons que, réellement, on ait : $\gamma > \alpha + \beta$. La loi de Newton est-elle fautive ? Peut-être pas : il peut exister des masses invisibles ou inconnues, la découverte de Neptune l'a prouvé. Nous ne pouvons donc faire aucune réponse ferme à la question posée.

Les constantes n'étant pas indépendantes les unes des autres, une révision complète des données est un travail immense. Il a été fait par Laplace, repris par Le Verrier, puis par Newcomb.

Principales divergences entre la loi de Newton et l'observation.

— Où doit se porter principalement notre attention ? Excluons d'abord les petites planètes, connues depuis trop peu de temps, et dont les éléments sont incertains (mais plus tard Hécube pourra fournir un excellent contrôle). Regardons les grosses planètes, et surtout les planètes inférieures

à cause de leurs passages sur le Soleil. On a reconnu des divergences pour le périhélie de Mercure, pour celui de Mars et pour le nœud de Vénus.

La faible amplitude des perturbations périodiques ne peut pas donner grande indication; les perturbations séculaires sont plus précieuses. Saturne et Jupiter ont des mouvements assez réguliers (peut-être y a-t'il une légère irrégularité pour le périhélie de Saturne ?)

La Lune donne un très bon contrôle, car ses perturbations sont importantes. Bien que la théorie de la Lune soit assez récente, on constate des divergences dans les termes séculaires : l'accélération séculaire est trop grande par rapport à la théorie.

Il y a enfin les comètes; certaines, périodiques et connues depuis peu de temps, présentent des divergences énormes : la comète d'Encke, notamment, a une accélération beaucoup plus grande que l'accélération prévue.

Diverses explications de ces divergences. — Nous étudierons les vérifications de la loi de Newton; il restera trois inégalités vraiment inexplicables :

- 1° Le mouvement du périhélie de Mercure;
- 2° L'accélération séculaire de la Lune;
- 3° L'accélération irrégulière de la comète d'Encke.

Les hypothèses qui tentent d'expliquer ces inégalités sont de deux sortes : les hypothèses newtoniennes et les hypothèses extra-newtoniennes.

Dans les hypothèses newtoniennes, la loi d'attraction reste la loi de Newton, mais on suppose l'existence de masses nouvelles, ou l'on modifie la valeur ou la répartition de masses dont l'existence est connue.

Comme hypothèses extra-newtoniennes, citons les suivantes : Dans le mouvement de Mercure, la loi de Hall suppose que l'attraction au lieu d'être en $r^{-\frac{1}{2}}$ est en $r^{-\frac{1}{n}}$, avec $n = 2,000\ 000\ 15$. On a proposé d'expliquer le mouvement de la Lune par les marées, qui retarderaient la rotation de la Terre par frottement et d'expliquer l'accélération de la comète d'Encke par un milieu résistant, dont l'action serait sensible sur la faible masse de la comète.

Si l'on s'écarte de la loi de Newton, quelles sont les dérogations les plus vraisemblables? Il y a deux sortes de dérogations possibles : 1° On peut supposer qu'outre la loi de Newton, interviennent d'autres lois de forces; 2° On suppose que s'exerce seulement une attraction, mais qui varie autrement que le quotient $r^{-\frac{1}{2}}$.

Le milieu résistant est un exemple du premier cas, le retard dû aux frottements des marées aussi; mais les marées océaniques ne sont pas suffisantes, l'intérieur de la Terre serait un fluide visqueux qui produirait aussi des frottements. Une autre force analogue est l'action de Maxwell-

Bartholi : la lumière doit exercer une pression, c'est-à-dire une répulsion, qui expliquerait l'existence des queues de comètes et qui pourrait agir aussi sur le mouvement du noyau.

Nous avons, d'autre part, les hypothèses du second cas. La loi de Newton a pour expression : $f \frac{mm'}{r^2}$, f étant une constante absolue. D'abord on peut introduire l'hypothèse de Hall. Mais, en outre, cette loi dépend des masses. Si l'on mesure la masse de Jupiter par des méthodes différentes, on trouve des valeurs différentes. On peut supposer que f n'est pas une constante absolue, et varie suivant que Jupiter attire la Terre, une petite planète, etc. ce serait d'ailleurs peu vraisemblable.

Laplace a recherché aussi si l'attraction ne pourrait pas être absorbée par les masses; l'attraction, en un point P extérieur à la Terre, d'un point matériel placé au centre serait moindre que l'attraction en P d'un point de même masse, placé à la surface de la Terre et à la même distance de P.

Enfin, la propagation de l'attraction est-elle instantanée? Laplace a démontré qu'elle est au moins 6 000 000 de fois plus rapide que la propagation de la lumière. Tisserand et d'autres se sont demandé encore si l'on ne pourrait pas expliquer le mouvement de Mercure en supposant que les corps s'attirent selon la loi électrodynamique de Weber, qui fait intervenir la vitesse des corps considérés.

On a encore l'hypothèse de Lesage, qui explique l'attraction par des chocs de corpuscules animés de vitesses très grandes et dirigées dans tous les sens. Un corps isolé reçoit des chocs de tous les côtés, donc est en équilibre; mais deux corps voisins se forment mutuellement écran l'un pour l'autre. Alors l'attraction n'a pas, comme les corpuscules, une vitesse infinie. La question a été reprise récemment par Darwin.

Enfin cette question pourrait se rattacher aussi à la dynamique de l'électron : les rayons cathodiques, les rayons β du radium sont animés de très grandes vitesses. On peut se demander quelle influence cette dynamique pourrait avoir sur les mouvements célestes. Il est probable que, là aussi, la propagation ne serait pas instantanée; on obtiendrait quelque chose d'analogue à la loi de Weber.

Méthode de comparaison de la théorie et des observations. — Pour vérifier l'exactitude de la loi de Newton, il faut comparer les coordonnées calculées et les coordonnées observées, et la comparaison doit porter sur l'ensemble des observations.

Désignons par S le Soleil, T la Terre, P la planète (*fig. 1*). Représentons les coordonnées géocentriques de la planète par Δ , l , b (distance Terre-planète, longitude et latitude géocentriques), les coordonnées héliocentriques de la Terre par r' , L' , λ' , qui sont aussi les coordonnées géocentriques du Soleil et enfin les coordonnées héliocentriques de la planète

par r, L, λ . Introduisons aussi la longitude dans l'orbite. Sur la sphère céleste, on a : $L = AQ, \lambda = PQ$, et la longitude dans l'orbite (*fig. 2*) est :

$$v = A\Omega + \Omega P$$

Les coordonnées héliocentriques de la planète dépendent de ses éléments : $a, e, i, \Omega, \varpi, nt + \varepsilon$ (a , demi-grand axe; e , excentricité; i , inclinaison; Ω , longitude du nœud ascendant; ϖ , longitude du périhélie; $nt + \varepsilon$, longitude moyenne).

Il est facile de calculer les coordonnées héliocentriques et la quantité v en fonction des six éléments.

S'il n'y a pas de perturbations, les cinq premiers éléments sont cons-

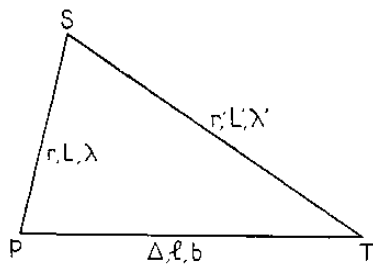


Fig. 1.

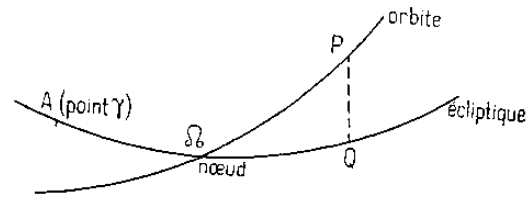


Fig. 2.

tants, le sixième est fonction linéaire du temps, et l'orbite est képlérienne; mais les perturbations amènent à considérer l'orbite osculatrice à un instant t , qui est l'orbite képlérienne que suivrait la planète si les forces perturbatrices disparaissaient soudain à cet instant. Les coordonnées troublées sont liées aux éléments osculateurs par les mêmes relations qui lient les coordonnées képlériennes aux éléments képlériens.

Les dérivées des éléments par rapport au temps ne seront pas nulles, mais très petites; nous aurons, par exemple :

$$\frac{de}{dt} = \sum \mu A,$$

où μ sera une des masses troublantes, évaluée en prenant la masse du Soleil pour unité, et A une fonction des coordonnées des planètes troublée et troublante, c'est-à-dire dépendant des éléments osculateurs de ces deux planètes et du temps. Dans A , on peut remplacer les éléments osculateurs par les éléments képlériens initiaux, puisqu'ils sont multipliés par μ , qui est petit. A ne dépend plus que du temps; il est de la forme :

$$A = A_0 + \sum A_i \cos ht.$$

Intégrons, il vient :

$$(1) \quad e = e_0 + \underbrace{\sum \mu A_0 t}_{\text{termes séculaires}} + \underbrace{\sum \sum \mu A_i \frac{\sin ht}{h}}_{\text{termes périodiques}}$$

la double somme qui se trouve dans les termes périodiques se rapporte, d'une part aux μ , d'autre part aux A_i .

Les termes périodiques sont généralement très petits, puisqu'ils contiennent μ en facteur, et resteront toujours très petits; les termes séculaires, variant toujours dans le même sens, peuvent, au bout d'un temps assez long, donner aux éléments une variation importante.

Quant aux coordonnées géocentriques (données par l'observation), elles dépendent des coordonnées héliocentriques de la planète et de la Terre, c'est-à-dire des douze éléments osculateurs de la planète et de la Terre. L'ascension droite de la planète sera :

$$z = f(a, a', e, e', \dots),$$

a, e, \dots , éléments osculateurs de la planète P;

a', e', \dots , éléments osculateurs de la Terre.

Remplaçons ces éléments par leurs valeurs; d'après (1), nous aurons :

$$(2) \quad z = f(a_0, a'_0, e_0, \dots) + \underbrace{\frac{df}{da} \sum \mu D_a}_A + \underbrace{\frac{df}{de} \sum \mu D_e + \dots}_B,$$

$\sum \mu D_e$ désignant l'ensemble des perturbations calculées dans la formule (1), que l'on peut mettre sous la forme :

$$e = e_0 + \sum \mu D_e,$$

L'ascension droite calculée z sera donc une fonction, d'une part, des éléments initiaux a_0, a'_0, e_0, \dots , d'autre part, des masses μ :

$$z = F(a_0, a'_0, \dots, \mu, \dots).$$

Entre z calculé et z observé, nous trouvons une différence δz ; elle peut provenir de ce que les éléments et les masses sont erronés. Il convient de leur apporter des corrections $\delta a_0, \delta a'_0, \dots, \delta \mu$; on devra avoir :

$$\delta z = \frac{\partial F}{\partial a_0} \delta a_0 + \frac{\partial F}{\partial a'_0} \delta a'_0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \mu} \delta \mu + \dots;$$

a_0 figure dans les termes A et dans les termes B de la formule (2). Mais on peut négliger les corrections provenant des termes B, qui sont multipliées par μ , car $\mu \delta a_0$ est du second ordre. On peut donc écrire :

$$(3) \quad \delta z = \frac{\partial f}{\partial a_0} \delta a_0 + \frac{\partial f}{\partial a'_0} \delta a'_0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \mu} \delta \mu + \dots;$$

les δ ne portent que sur a_0, a'_0, e_0, \dots , c'est-à-dire seulement sur les éléments de la planète étudiée et de la Terre; par contre, ils portent sur les masses de toutes les planètes troublantes.

Si les données de l'observation étaient rigoureuses, il suffirait de choisir autant d'équations (3) que d'inconnues; d'où $\delta a_0, \dots, \delta \mu, \dots$. Mais les observations ne sont pas infiniment précises; il faudra donc prendre beaucoup plus d'équations et appliquer la méthode des moindres carrés. Outre les erreurs accidentelles, il y a des erreurs systématiques qui augmenteraient le nombre des inconnues dans les équations (3).

Une révision d'ensemble est donc indispensable, on peut cependant se borner à l'étude de Mercure, Vénus, la Terre et Mars. En effet, les équations (3) contiennent, concernant Jupiter et Saturne, les seules variations de leurs masses. Celles-ci étant bien connues à cause de leurs satellites, on peut négliger les termes correspondants. On se bornera donc à considérer les planètes inférieures.

CHAPITRE II.

TRAVAUX DE LE VERRIER ⁽¹⁾.

Résultats déduits des observations du Soleil. — Le Verrier a traité séparément les observations du Soleil et celles des planètes. Il se sert des premières pour déterminer les éléments de la Terre. Ceci fait, dans l'étude des planètes, les éléments a_0', e'_0, \dots seront des constantes; $\delta a'_0, \delta e'_0, \dots$ seront nuls.

Avec les observations du Soleil, Le Verrier s'est surtout attaché à la détermination de l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire de l'angle ω que fait l'écliptique avec l'équateur. Cet angle est variable par suite des variations du plan de l'équateur, c'est-à-dire de la précession et de la nutation, et des variations du plan de l'écliptique, par suite des perturbations dues aux planètes. La précession ne fait pas varier l'obliquité, puisqu'elle est seulement un déplacement du point γ sur l'écliptique; la nutation est un mouvement purement périodique. Pour les variations du plan de l'écliptique, on trouve des termes périodiques, très petits vis-à-vis de ceux de la nutation, et un terme séculaire. La théorie donne :

$$(1) \quad -\frac{d\omega}{dt} = 0''.4757 + 0''.005\nu + 0''.289\nu' + 0''.0008\nu'' + 0''.160\nu'' + 0''.013\nu''$$

si l'on pose :

$$\mu + \delta\mu = \mu(1 + \nu);$$

ainsi $\delta\mu$ est la correction à la masse provisoire μ de la planète, ν est

⁽¹⁾ *Annales de l'Observatoire de Paris*, Mémoires, t. II, IV et V.

la correction relative correspondant à Mercure, ν' correspond à Vénus, ν'' à Mars, etc.

Il n'y a pas de terme en ν''' correspondant à la Terre, puisque la Terre ne se trouble pas elle-même.

Les corrections relatives ν^{IV} et ν^V correspondant à Jupiter et Saturne, sont très petites, car ces deux planètes ont des satellites; leurs deux masses sont connues avec exactitude, et nous pouvons négliger les deux derniers termes.

En discutant des observations nombreuses, depuis 1755 jusqu'à 1846, Le Verrier obtient pour l'obliquité ω une série de valeurs. Portant les valeurs de ω en fonction du temps, on peut représenter la fonction $\omega = f(t)$ par une droite dont la pente sera :

$$(2) \quad \frac{d\omega}{dt} = - 0,4576.$$

Par comparaison des expressions (1) et (2), il vient l'équation de condition :

$$(3) \quad 28,9\nu' + 0,8\nu'' + 0,5\nu + 1,81 = 0,$$

où figure principalement la masse de Vénus; ν' sera ainsi bien déterminé

Résultats déduits des observations des planètes. — Pour Mercure et Vénus, nous avons des observations méridiennes et des observations de passages : ces dernières sont très précieuses. En effet, le mouvement relatif de Mercure par rapport au Soleil sur la sphère céleste est beaucoup plus lent que le mouvement diurne : l'observation est donc plus aisée; on n'a pas à tenir compte de la réfraction; de plus, les erreurs instrumentales sont éliminées. Le Soleil, servant de repère, est observé en même temps que l'astre. En outre, les premières observations de passages au XVIII^e siècle, sont antérieures aux observations méridiennes utilisables qui remontent seulement à Bradley. Malheureusement, les passages sont rares et leurs observations ne fournissent pas toutes les données, la planète étant toujours au voisinage de l'un de ses nœuds.

Quels renseignements peut-on déduire de l'observation d'un passage ?

Si L, λ sont, par rapport à la Terre, les longitude et latitude du centre de la planète Mercure par exemple, si L', λ' sont les longitude et latitude du centre du Soleil, et si c est la différence de leurs diamètres apparents (*fig. 3*), on a, à l'instant d'un contact, l'équation :

$$c^2 = (L - L')^2 + (\lambda - \lambda')^2.$$

Les quatre quantités L, λ, L', λ' et la différence c sont des fonctions du temps connues par la théorie provisoire, soit :

$$c^2 = F(t).$$

Si la théorie était exacte, on constaterait que les deux dernières équations sont vérifiées à l'instant du contact, ce qui ne sera pas, en général.

L' et λ' sont fixes, puisque les éléments de la Terre ont été déterminés précédemment; mais il y aura lieu d'attribuer à c , L , λ et à l'instant t du contact des corrections satisfaisant aux relations :

$$c \delta c = (L - L') \delta L + (\lambda - \lambda') \delta \lambda,$$

$$(c + \delta c)^2 = F(t) + \frac{\partial F}{\partial t} \delta t,$$

d'où des équations entre δc , δL , $\delta \lambda$, δt .

Observons le passage du disque de la planète Mercure sur le disque du Soleil (*fig. 4*), c'est le mouvement d'un point devant un cercle fixe. En

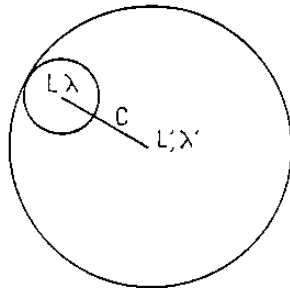


Fig. 3.

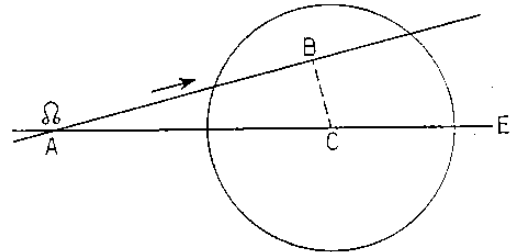


Fig. 4.

prenant la moyenne entre les époques d'entrée et de sortie, nous avons le moment où la planète est en B, c'est-à-dire le moment où les longitudes du Soleil et de Mercure sont égales, car l'inclinaison est très petite.

A ce moment, la planète a pour longitude dans l'orbite :

$$v = L'.$$

La longitude L' du Soleil étant connue, v est connu et, par comparaison avec la théorie, nous aurons la correction δv . En outre, la durée totale du passage dépend de l'inclinaison et de la longitude du nœud; mais AC est très petit, la seule correction sera $\delta \Omega$.

Occupons-nous de δv ; on sait que

$$v = f(nt + \varepsilon, e, \varpi),$$

d'où :

$$(4) \quad \delta v = A(t \delta n + \delta \varepsilon) + B \delta e + C \delta \varpi,$$

A, B, C, désignant les dérivées partielles de v par rapport aux trois variables.

Pour Mercure, les passages ont lieu en mai et en novembre. Le Verrier considère tous les passages compris entre 1697 et 1848 et il constate que,

tandis que les passages de novembre ne donnent que de faibles corrections δv , les passages de mai mettent en évidence des divergences importantes et de même sens pour les cinq passages considérés.

Nous pouvons représenter les δv par une fonction linéaire :

$$\delta v = \alpha + \beta t;$$

de plus, posons :

$$\begin{aligned} \delta e &= \delta e_0 + t \delta e', \\ \delta \varpi &= \delta \varpi_0 + t \delta \varpi'. \end{aligned}$$

Portons dans la relation (4), et identifions :

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha = A \delta \varepsilon + B \delta e_0 + C \delta \varpi_0, \\ \beta = A \delta n + B \delta e' + C \delta \varpi'. \end{cases}$$

Aux passages de novembre et de mai correspondent deux systèmes d'équations (5) : on constate qu'en novembre, les quantités α et β sont petites et qu'en mai, ces quantités sont grandes.

L'excentricité e et la longitude du périhélie ϖ ne subissent dans l'intervalle de deux siècles que de petites variations; considérons-les comme constantes dans les coefficients. De même, $nt + \varepsilon$ diffère peu de la longitude du nœud; donc A, B, C sont sensiblement les mêmes pour tous les passages de novembre et les mêmes pour tous les passages de mai. Entre les deuxièmes équations (5), correspondant aux passages de mai et de novembre, éliminons δn . Il vient l'équation :

$$(6) \quad \delta \varpi' + 2^{\circ}72 \delta e' = 0^{\circ}383.$$

D'autre part, en modifiant les masses, peut-on rendre compte des divergences $\delta \varpi'$ et $\delta e'$ et rétablir ainsi la concordance ?

Le Verrier a calculé les $\delta e'$ et $\delta \varpi'$ qui résulteraient d'une correction des masses, et il a trouvé les formules :

$$\begin{aligned} \delta e' &= 0^{\circ}03 \nu' + 0^{\circ}01 \nu'', \\ \delta \varpi' &= 2^{\circ}80 \nu' + 0^{\circ}84 \nu''. \end{aligned}$$

Substituant dans (6), et multipliant par 100, il obtient, en secondes

$$288 \nu' + 87 \nu'' = 38,3.$$

Mais l'étude de l'obliquité de l'écliptique avait conduit plus haut à l'équation (3)

$$28^{\circ}9 \nu' + 0^{\circ}8 \nu'' + 0^{\circ}5 \nu + 1^{\circ}81 = 0.$$

Les deux équations ainsi formées en ν' sont incompatibles, et Le Verrier conclut qu'il est impossible d'expliquer l'avance du périhélie de Mercure par une modification de la masse de Vénus.

CHAPITRE III.

TRAVAUX DE NEWCOMB (1).

Méthode suivie dans les comparaisons. — Newcomb a discuté 62 000 observations, 40 000 pour le Soleil, 5 500 pour Mercure, 12 000 pour Vénus, 4 000 pour Mars, s'étendant de 1750 à 1892; il les a comparées aux tables théoriques de Le Verrier dans lesquelles il avait uniformisé les masses. En effet, Le Verrier avait changé certaines valeurs des masses pour avoir un meilleur accord avec une théorie nouvelle. Après avoir formé toutes les équations de condition, Newcomb a pu en réduire le nombre en remplaçant toutes celles d'une semaine par une seule; il lui en restait alors 11 000 pour le Soleil, 4 000 pour Mercure, etc.

Quelles sont les inconnues? D'abord les corrections à apporter aux masses de Mercure et de Vénus, mais pas à celle de Mars dont on a découvert, depuis Le Verrier, deux satellites, ni à la masse de la Terre qui se déduit de la parallaxe solaire. Ce sont encore les corrections à apporter aux éléments des planètes, des constantes inconnues à ajouter aux ascensions droites et aux déclinaisons par suite d'une erreur possible sur la position actuelle de l'équinoxe. Enfin, les déclinaisons sont affectées de l'erreur de la réfraction, qui est toujours la même puisque toutes les observations sont faites dans le zodiaque, c'est-à-dire à peu près à la même hauteur.

Newcomb traite les variations séculaires des éléments comme des variables indépendantes. Par exemple nous aurons :

$$\delta e = \delta e_0 + t \delta e',$$

où δe_0 et $\delta e'$ sont deux inconnues, alors que Le Verrier n'en avait qu'une seule, δe . Les masses ne seront pas déterminées par les perturbations séculaires, mais uniquement par les perturbations périodiques.

Tandis que, les éléments de la Terre étant fixés une fois pour toutes, Le Verrier établit les théories des autres planètes, Newcomb conserve, dans ses théories planétaires, les éléments de la Terre comme indéterminés. Il espérait obtenir ainsi des valeurs des corrections des éléments de la Terre meilleures que celles que Le Verrier avait tirées des observations solaires. Or, malgré les saisons et les climats différents, les observations du Soleil des divers observatoires ont été assez concordantes, et Newcomb a été déçu par ce résultat. En outre, les observations des passages étant plus rigoureuses que les observations méridiennes, Newcomb a été tenté d'accorder aux premières un poids considérable.

(1) *The Elements of the four inner Planets and the fundamental Constants of Astronomy*, Supplement to the American Ephemeris and Nautical Almanac for 1897, Washington, 1895.

Il considère deux solutions :

La solution A, où n'interviennent pas les passages, mais seulement les observations méridiennes;

La solution B, où il se sert de toutes les observations, mais en donnant aux passages un poids très grand.

Erreurs systématiques. — Comparons les ascensions droites du Soleil données par le calcul et l'observation. Nous avons la relation :

$$(1) \quad \delta z = c + x \cos g + y \sin g,$$

où c désigne l'erreur commise sur la longitude moyenne du Soleil, à laquelle s'ajoute l'équation personnelle de l'observateur, où g désigne l'anomalie moyenne du Soleil, et l'on a : $x = -2e\delta\omega$, où $\delta\omega$ est l'erreur sur la longitude du périhélie; et $y = 2\delta e$, où δe est l'erreur sur l'excentricité.

Mais il y a des erreurs systématiques dépendant de la saison de l'observation, dont la période est un an, comme celle de $\sin g$ et $\cos g$. Il sera donc impossible, dans les équations (1), de séparer ces erreurs des véritables corrections de l'excentricité et du périhélie. C'est pour cette raison que Newcomb ne pensait pas obtenir de bonnes déterminations des corrections des éléments de la Terre avec les seules observations du Soleil.

Pour les observations des planètes, il y a également des erreurs systématiques; nous pourrions les éliminer, leur période, c'est-à-dire celle du Soleil, étant différente de celles des perturbations périodiques. Par exemple, pour déterminer la masse de Vénus, les perturbations considérées auront une période égale à la révolution synodique de Vénus.

Théorie de la Terre. — Les éléments de la Terre sont déterminés par Le Verrier à partir des observations solaires et, par Newcomb, à partir des observations planétaires. Voici les valeurs qui en découlent pour la correction de l'excentricité :

Observations solaires.....	+0,10
» de Mercure.....	+0,48
» Vénus.....	+0,06
» Mars.....	-0,83

Les valeurs trouvées sont très différentes les unes des autres, et Newcomb remarque que les différentes observations solaires donnent des résultats beaucoup plus concordants entre eux que les observations planétaires entre elles.

Il adopte comme correction de e : $-0,12$, ce qui est tout à fait arbitraire.

Théorie de Mercure. — Pour Mercure, comparons les deux solutions A et B, indiquées précédemment.

Pour l'excentricité terrestre, nous avons comme corrections :

$$A, +0^{\circ}040; \quad B, +0^{\circ}504;$$

pour l'excentricité de Mercure :

$$A, -0^{\circ}361; \quad B, +1^{\circ}228;$$

pour la longitude du périhélie de Mercure :

$$A, +5^{\circ}209; \quad B, +2^{\circ}689.$$

En ce qui concerne les variations des éléments, nous avons les corrections suivantes : pour la dérivée de l'excentricité de la Terre :

$$A, -0^{\circ}472; \quad B, +0^{\circ}316;$$

pour la dérivée $\frac{d\pi}{dt}$ de la longitude du périhélie de Mercure :

$$A, -9^{\circ}540; \quad B, -1^{\circ}008;$$

pour la dérivée $\frac{de}{dt}$ de l'excentricité de Mercure :

$$A, -1^{\circ}398; \quad B, +1^{\circ}184.$$

Nous constatons qu'il n'y a aucune concordance et qu'en faisant varier les poids attribués à ces observations, nous pourrions obtenir pour ainsi dire n'importe quel résultat désiré. Mais ces corrections sont très petites.

La valeur de l'obliquité de l'écliptique ω , demi-différence des hauteurs du Soleil en été et en hiver, variera de même suivant les tables de réfraction adoptées. Heureusement, ce qui est intéressant, ce n'est pas tant ω mais $\frac{d\omega}{dt}$.

Quoiqu'il en soit, Newcomb tire de ses équations des valeurs probables des corrections à apporter aux éléments et aux masses.

Détermination des masses. — Newcomb détermine la masse de Jupiter par différentes méthodes, il obtient, la masse du Soleil étant prise pour unité :

1° Par ses satellites.....	$m^{-1} = 1047,82$
2° Par la comète de Faye.....	1047,79
3° Par la petite planète Thémis.....	1047,54
4° Par la petite planète Polymnie.....	1047,34
5° Par Saturne.....	1047,38
6° Par la comète de Winnecke.....	1047,17

et il adopte finalement la valeur

$$m^{-1} = 1047,35.$$

La masse de Mars est bien connue depuis la découverte de ses deux satellites. La masse de Vénus se déduit de la principale variation périodique de la Terre. En ce qui concerne la masse de Mercure, Le Verrier avait admis la valeur $\frac{1}{3\,000\,000}$; Newcomb déduit la même masse des inégalités de la longitude de Vénus et trouve $\frac{1}{7\,210\,000}$ (solution B), puis $\frac{1}{7\,943\,000}$; à partir des perturbations de la comète d'Encke et de celle de Winnecke, on trouve respectivement $\frac{1}{5\,848\,000}$ et $\frac{1}{5\,012\,000}$, ces nombres présentant une grande incertitude. Finalement, Newcomb adopte la valeur $\frac{1}{7\,500\,000}$.

La masse de la Terre ne peut être déduite des observations de Vénus, à cause des erreurs systématiques importantes dues aux phases de cette planète, et dont la période est la révolution synodique de Vénus. Mais la masse de la Terre est liée à la parallaxe du Soleil; en effet, la troisième loi de Képler donne la relation :

$$n^2 a^3 = kM,$$

M désignant la masse du Soleil, a le rayon de l'orbite terrestre et n le moyen mouvement de la Terre.

De même, nous avons :

$$n'^2 a'^3 = kM'$$

si M' est la masse de la Terre, et si n' et a' sont relatifs à un satellite de la Terre.

D'où :

$$\frac{M'}{M} = \frac{n'^2 a'^3}{n^2 a^3}.$$

Nous prendrons un satellite fictif dont le rayon de l'orbite serait le rayon terrestre; l'attraction serait g , qui est facilement mesurable et g devrait faire équilibre à la force centrifuge :

$$g = n'^2 a'.$$

Donc

$$\frac{M'}{M} = \frac{g}{n^2 a} \left(\frac{a'}{a} \right)^3.$$

Or n est bien connu par le mouvement du Soleil; (g aussi, compte tenu de l'aplatissement et a' également, comme égal au rayon de la Terre). Il reste $\frac{a'}{a}$ qui est la parallaxe du Soleil.

Détermination de la parallaxe solaire. — Pour déterminer la parallaxe du Soleil, nous avons les observations des petites planètes, d'Éros en particulier, qui n'était pas découverte à l'époque de Newcomb et les observations des passages de Vénus. Nous avons aussi des procédés physiques : la vitesse de la lumière étant connue par l'expérience de Fizeau et Foucault ou par la méthode de Römer, on mesure la constante d'aberration; la comparaison donnera la distance Terre-Soleil en kilomètres, c'est-à-dire la parallaxe. Newcomb prend pour vitesse de la lumière : 299 860 km ± 30, valeur confirmée à Nice par des expériences récentes. La constante d'aberration est égale à 20,4 ou 20,5; cette incertitude introduit une erreur de 0,1, qui est importante.

On peut encore calculer la parallaxe à partir de l'inégalité lunaire de la Terre. C'est le point G (*fig. 5*) centre de gravité du système Terre-Lune, qui tourne autour du Soleil et obéit à la loi de Newton.

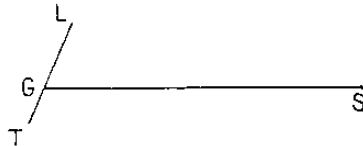


Fig. 5.

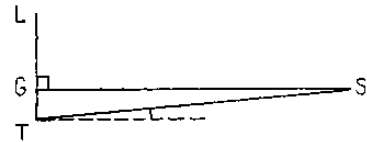


Fig. 6.

La Terre et la Lune décrivent deux ellipses autour de G. Le mouvement de G autour de S est à peu près képlérien; le mouvement de T autour de G l'est aussi. Il en résulte une petite inégalité dans la longitude de la Terre, qui a pour période la révolution sidérale de la Lune. Quand l'angle G est droit (*fig. 6*), on peut mesurer l'angle \widehat{LTS} et en déduire $\frac{TG}{GS}$. Or, on a :

$$\frac{TG}{TL} = \frac{\mu}{1 + \mu},$$

si μ est le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre, et

$$\frac{TG}{GS} = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{TL}{GS}.$$

Si r est le rayon de la Terre, on a :

$$\frac{r}{GS} = \varpi, \quad \text{parallaxe du Soleil,}$$

$$\frac{r}{TL} = \varpi', \quad \text{parallaxe de la Lune.}$$

D'où :

$$\frac{TG}{GS} = \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{\varpi}{\varpi'}.$$

La valeur de la parallaxe lunaire est bien connue. Pour déterminer μ nous avons les valeurs des constantes de la précession et de la nutation; ces deux constantes dépendent de μ et de $\frac{C-A}{C}$ si A et C sont les moments d'inertie principaux de la Terre. On trouve pour $\frac{1}{\mu}$ des valeurs comprises entre 81,35 et 81,91; d'où la valeur de ϖ .

Un autre procédé de détermination de la parallaxe ϖ utilise l'inégalité parallactique de la Lune. Considérons les différentes inégalités lunaires. Les unes contiennent le facteur

$$\frac{M}{M'} \left(\frac{a'}{a} \right)^3 = \left(\frac{n}{n'} \right)^2,$$

où n et n' sont connus; et où M, a , n se rapportent à la Terre et M' , a' , n' se rapportent à la Lune.

D'autres contiennent le facteur

$$\frac{M}{M'} \left(\frac{a'}{a} \right)^4 = \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \frac{a'}{a};$$

$\frac{a'}{a}$ est précisément $\frac{\varpi}{\varpi'}$; ϖ étant connu, ces dernières inégalités donneront ϖ' .

Comparons tous ces résultats :

1° Valeur de ϖ rendant le mieux compte de l'inégalité du nœud de Vénus :

$$8759 \pm 0,010;$$

2° Valeur de ϖ déduite des observations de Mars :

$$8750 \pm 0,020;$$

3° Valeur de ϖ déduite des déterminations de la constante d'aberration :

$$\begin{aligned} 8793 \pm 0,0046 & \text{ (Pulkowo),} \\ 8786 \pm 0,0056 & \text{ (autres observatoires);} \end{aligned}$$

4° Valeur de ϖ déduite des observations des passages de Vénus :

$$\begin{aligned} 8794 \pm 0,018 & \text{ (méthode de Halley),} \\ 8757 \pm 0,023 & \text{ (méthode photographique);} \end{aligned}$$

5° Valeur de ϖ déduite de l'inégalité parallactique de la Lune :

$$8794 \pm 0,007;$$

6° Valeur de ϖ déduite de l'inégalité lunaire de la Terre :

$$87825 \pm 0,030.$$

On adopte finalement la valeur

$$\varpi = 8780.$$

Divergences importantes entre la théorie et l'observation. — Nous connaissons maintenant les masses des différentes planètes et tous leurs éléments, ce qui nous permet de calculer les valeurs théoriques des variations séculaires des éléments, et de les comparer aux valeurs déduites des observations. Nous obtenons les différences suivantes (par siècle) :

Mercure.....	}	$\delta e'$	$-0,88 \pm 0,50$
		$e \delta \varpi'$	$+8,48 \pm 0,43$
Vénus.....		$\sin i \delta \theta'$	$+0,60 \pm 0,17$
Mars.....		$e \delta \varpi'$	$+0,75 \pm 0,35$

($\delta e'$, $\delta \varpi'$, ... signifiant la différence entre l'observation et la théorie pour $e' = \frac{de}{dt}$, ...).

Pour tous les autres éléments, les différences observation-théorie sont plus petites que l'erreur probable. Ajoutons que, pour e' , Newcomb pense que l'erreur probable n'est pas estimée assez grande du fait de l'indétermination de la masse de Mercure.

Conclusion. — Dans l'état actuel de la Science, il est impossible de constater une divergence entre la théorie et l'observation, en ce qui concerne les variations périodiques des éléments des planètes.

Mais en ce qui concerne les variations séculaires de ces éléments, il y a désaccord :

- Certainement pour la périhélie de Mercure;
- Probablement pour le nœud de Vénus;
- Peut-être pour la périhélie de Mars.

CHAPITRE IV.

DIFFÉRENTES EXPLICATIONS DES DÉSACCORDS ENTRE LA THÉORIE ET L'OBSERVATION.

Nous allons tout d'abord établir quelques résultats que nous utiliserons par la suite.

Inégalités séculaires des périhélies et des noeuds planétaires. — *Loi d'attraction différente de la loi de Newton.* — Considérons le mouvement d'un point attiré par un centre fixe suivant une loi différente de celle de Newton.

En partant de l'aphélie A, le rayon vecteur va décroître jusqu'au périhélie P (*fig. 7*); cette partie de l'orbite étant connue, tout le reste s'en

déduira par symétrie. Dans le cas d'une force newtonienne, l'angle \widehat{ASP} est égal à π ; dans tous les autres cas, il y aura déplacement du périhélie avec une vitesse constante. L'angle des rayons vecteurs de deux périhélies consécutifs sera 2θ , au lieu de 2π ; le mouvement du périhélie par révolution sera $2\theta - 2\pi$, et il n'y aura pas de variation séculaire des autres éléments.

Examinons ceci de plus près : soient r la distance du point considéré au Soleil et F la force d'attraction, F étant une fonction donnée de r ; soit n le moyen mouvement.

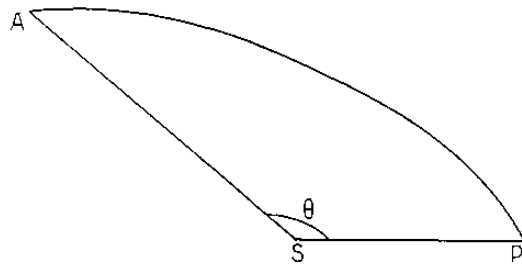


Fig. 7.

Pour une orbite circulaire, la constante des aires est na^2 ; la vitesse angulaire à un instant donné sera $\frac{na^2}{r^2}$ et la force centrifuge

$$\frac{n^2 a^4}{r^4} r = \frac{n^2 a^4}{r^3}.$$

Nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \text{force centrifuge} - \text{attraction,} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{n^2 a^4}{r^3} - F. \end{aligned}$$

L'équation est satisfaite pour :

$$r = a, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad F = n^2 a.$$

Pour une orbite peu excentrique, posons :

$$r = a + \delta r;$$

nous aurons :

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} = \text{développement de} \left(\frac{n^2 a^4}{r^3} - F \right)$$

suivant les puissances de δr , et approximativement :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta r}{dt^2} &= \delta r \left(-\frac{3n^2 a^4}{r^4} \right)_{r=a} - F' \delta r, \\ (1) \quad \frac{d^2 \delta r}{dt^2} &= -\delta r (3n^2 + F'). \end{aligned}$$

Posons :

$$3n^2 + F' = k^2,$$

il vient :

$$\delta r = A \cos kt;$$

$\frac{2\pi}{n}$ est la révolution sidérale et $\frac{2\pi}{k}$ représente le temps écoulé entre deux passages consécutifs au périhélie.

Loi de force $F = \frac{K}{r^\nu}$. — K et ν sont des constantes; nous aurons :

$$F' = -\nu \frac{K}{r^{\nu+1}} = -\nu \frac{F}{r},$$

qui, pour r voisin de a devient :

$$F' = -\nu \frac{F}{a}.$$

On a d'ailleurs :

$$n^2 = \frac{F}{a}, \quad \text{donc} \quad F' = -\nu n^2.$$

L'équation (1) devient :

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} = -\delta r(3 - \nu)n^2,$$

donc :

$$k^2 = n^2(3 - \nu).$$

Le temps qui s'écoulera entre deux passages à deux périhélies consécutifs, sera :

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{n\sqrt{3-\nu}},$$

d'où l'angle :

$$\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3-\nu}}.$$

Dans le cas de la force newtonienne, $\nu = 2$, $\theta = \pi$.

Dans le cas d'une attraction proportionnelle à la distance, $\nu = -1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; la trajectoire est une ellipse ayant le Soleil pour centre, elle a deux aphélie et deux périhélie.

Dans la formule

$$\delta r = A \cos kt,$$

kt équivaut à l'anomalie moyenne, c'est-à-dire est la différence entre la longitude de l'astre et celle du périhélie. Nous avons ainsi :

$$kt = nt - \varpi$$

et le mouvement du périhélie est donné par la formule :

$$\frac{d\varpi}{dt} = n - h = n(1 - \sqrt{3 - \nu}),$$

- Pour $\nu = 2$, ce mouvement est nul;
- Pour $\nu > 2$, il est positif, c'est-à-dire direct;
- Pour $\nu < 2$, il est négatif, c'est-à-dire rétrograde.

Notons que l'hypothèse d'une force centrale ne produira aucun mouvement séculaire du nœud, l'orbite restant toujours plane.

Couches sphériques et homogènes. — Considérons l'effet de couches sphériques et homogènes, centrées sur le Soleil.

1° Si elles sont toutes situées à l'intérieur de l'orbite, la loi de Newton reste valable; le mouvement du périhélie sera nul.

2° Si ces couches sont extérieures à l'orbite, leur action en un point intérieur étant nulle, le périhélie sera encore fixe.

3° Dans le cas d'une couche sphérique coupant l'orbite considérée, nous aurons : une attraction proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$ par le Soleil et une attraction proportionnelle à r par la couche (Faye). La force résultante diminuera moins vite avec la distance qu'une force newtonienne et nous aurons un mouvement rétrograde du périhélie.

Anneau circulaire et homogène. — Considérons maintenant l'existence d'un anneau circulaire et homogène, centré sur le Soleil.

Supposons qu'il soit situé dans le plan de l'orbite de la planète. Le mouvement du périhélie est direct ou rétrograde, selon que l'attraction décroît plus vite ou moins vite que l'attraction newtonienne (1).

Soient S le Soleil, SP la distance périhélie de la planète étudiée, SA la distance aphélie portées sur un rayon vecteur dans le même sens (fig. 8).

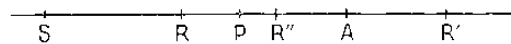


Fig. 8.

L'anneau circulaire considéré peut présenter trois positions relatives : il peut être intérieur à l'orbite de la planète, être extérieur à cette orbite, ou s'enchevêtrer avec elle. Dans les trois cas, $F(r)$ désignant la valeur algébrique de l'attraction de l'anneau à la distance r , il faut comparer les différences :

$$\delta = F(SA) - F(SP), \quad \delta_v = \frac{1}{SA^2} - \frac{1}{SP^2},$$

dont la seconde est négative.

(1) CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. 1, 1928, Paris, Gauthier-Villars, où est donnée la valeur principale de l'avance du périhélie de la planète étudiée, quand l'orbite de cette planète tend à devenir circulaire.

Si l'anneau est intérieur et coupe le rayon en R, les valeurs F(SA) et F(SP) sont négatives et l'on constate que l'on a $\delta < \delta_0$; donc le mouvement du périhélie de la planète est direct, ce périhélie a une avance positive.

Si l'anneau est extérieur à l'orbite de la planète et passe au point R', F(SA) et F(SP) sont positifs et l'on constate que l'on a de même $\delta < \delta_0$; le périhélie a de même une avance positive.

Enfin, dans le troisième cas, si l'anneau et l'orbite de la planète s'enchevêtrent, l'anneau passe en R'' et l'on a : F(SA) > 0, F(SP) < 0; d'où $\delta > 0$ et $\delta - \delta_0 > 0$. Donc, dans ce troisième cas, le mouvement du périhélie de la planète est rétrograde.

Donc, le mouvement du périhélie de la planète est direct si l'anneau est tout entier intérieur ou tout entier extérieur à l'orbite de Mercure et le mouvement est rétrograde si l'anneau s'enchevêtre avec l'orbite de Mercure.

Supposons maintenant que le plan de l'anneau soit légèrement incliné sur le plan de l'orbite et prenons comme plan xOy le plan de l'anneau. Nous aurons :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

V étant le potentiel, il est fonction de r et de z ; or z est très petit. Pour $z=0$, nous devons avoir :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (\text{par raison de symétrie}).$$

La formule de Mac Laurin donne :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z} = z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -m^2 z,$$

avec

$$-m^2 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_{\substack{z=0 \\ r=a}}.$$

Alors :

$$z = A \sin mt;$$

les nœuds sont atteints pour $z = 0$, c'est-à-dire pour mt multiple de π , et le nœud ascendant pour mt multiple de 2π . L'intervalle de temps entre deux passages consécutifs au nœud ascendant est $\frac{2\pi}{m}$.

De même que le mouvement du périhélie pour une révolution était $n-k$, le mouvement du nœud pour une révolution sera $n-m$.

D'autre part, nous avons :

$$F = - \frac{\partial V}{\partial r},$$

donc :

$$(2) \quad \begin{cases} k^2 = -\frac{3}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}, & \text{car } k^2 = \frac{3F}{r} - F', \\ m^2 = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \\ n^2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}, & \text{car } n^2 r = F. \end{cases}$$

1° Si l'anneau est tout entier intérieur ou extérieur à l'orbite de la planète, elle ne circule pas à l'intérieur des masses : le potentiel V satisfait à l'équation de Laplace :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Posons :

$$x = r \cos \omega, \quad y = r \sin \omega.$$

V ne dépend pas de ω ; $\frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2}$ est nul, et ΔV se réduit à :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

De la dernière relation et des équations (2), on déduit :

$$(3) \quad k^2 + m^2 = 2n^2;$$

donc les trois carrés k^2 , n^2 , m^2 sont en progression arithmétique.

Or, l'équation (3) peut s'écrire :

$$k^2 - n^2 = n^2 - m^2$$

ou :

$$(k + n)(k - n) = (n - m)(n + m),$$

ou encore :

$$k - n = \frac{n + m}{k + n} (n - m).$$

Comme k , m , n sont presque égaux, nous aurons sensiblement :

$$(k - n) + (m - n) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\varpi}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} = 0;$$

donc les mouvements séculaires du périhélie et du nœud sont égaux et opposés.

2° Si l'anneau est à une distance moyenne du Soleil égale à celle de la planète, nous n'aurons plus l'équation de Laplace, mais celle de Poisson :

$$\Delta V = -4\mu\pi,$$

où μ est la densité positive des masses. Nous n'aurons plus entre k^2 , m^2 , n^2 une égalité, mais l'inégalité

$$k^2 + m^2 > 2n^2,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{d\varpi}{dt} + \frac{d\delta_b}{dt} < 0;$$

la somme algébrique des mouvements séculaires du périhélie et du nœud est négative.

Ces relations s'appliquent au mouvement du nœud ascendant sur le plan de l'anneau. Quand on rapporte les mouvements au plan de l'écliptique, le mouvement du nœud pourra être direct, si l'anneau est plus incliné sur l'écliptique que sur le plan de l'orbite de la planète.

Si, au lieu d'un anneau, nous avons une planète, son effet moyen, selon le théorème de Gauss, serait le même que si l'on considérait un anneau continu constitué par l'orbite de cette planète, la matière étant répartie sur chaque arc proportionnellement au temps mis par la planète à le parcourir. L'orbite étant très peu excentrique, les conclusions trouvées pour l'anneau circulaire restent valables.

Diverses explications des désaccords. — *1^{re} hypothèse : Non-sphéricité du Soleil.* — Supposons le Soleil aplati; soit φ le rapport de la force centrifuge équatoriale à l'attraction. Nous avons sensiblement :

$$\frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{93\,800}.$$

Clairaut limite l'aplatissement à

$$e_1 < \frac{5}{4} \varphi,$$

ce qui est insuffisant pour causer une perturbation sensible dans le mouvement des planètes. Il faudrait avoir $e_1 = \frac{1}{1900}$ environ pour que l'influence du bourrelet équatorial du Soleil suffise à expliquer l'avance du périhélie de Mercure. Bien que le rayon du Soleil soit difficilement mesurable, la différence des rayons polaire et équatorial est assez bien connue, les erreurs systématiques sur ces deux grandeurs étant les mêmes. Cet aplatissement est très petit et ne peut en aucun cas justifier le désaccord de $40''$ pour Mercure. D'ailleurs, il produirait également un mouvement du nœud. Cette première hypothèse est donc à rejeter.

2^e hypothèse : Masse de la couronne solaire. — Pour les mêmes raisons, on ne peut attribuer l'avance du périhélie de Mercure à la matière de la couronne solaire. Celle-ci serait à peu près sphérique, plus aplatie à

certaines époques qu'à d'autres; mais il semble que le plan de l'équateur resterait un plan de symétrie. Nous aurions encore un mouvement du nœud : à moins que la couronne solaire n'admette comme plan de symétrie le plan de l'orbite de Mercure.

3^e hypothèse : anneau ou planète intramercurielle. — Quelle serait l'influence d'un tel anneau ? Calculons la valeur du potentiel V dû à l'anneau. Soient m la masse et ρ le rayon de l'anneau considéré et un point matériel attiré M , à la distance du centre r . Le potentiel de l'anneau en M sera le même que si la masse entière était concentrée en un point situé à une distance du centre δ , que nous allons déterminer.

Soient $r - \rho$ et $r + \rho$ les distances minimum et maximum du point attiré M au centre de l'anneau (*fig. 9*).

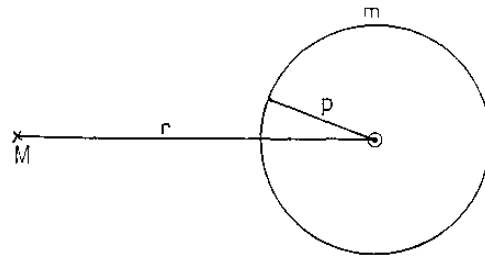


Fig. 9.

Prenons la moyenne arithmético-géométrique de ces deux distances, nous aurons δ .

Supposons ρ très petit devant r :

1 ^{re} moyenne arithmétique.....	r
1 ^{re} " géométrique.....	$\sqrt{r^2 - \rho^2} \approx r - \frac{\rho^2}{2r}$
2 ^e moyenne arithmétique.....	$r - \frac{\rho^2}{4r}$
2 ^e " géométrique.....	$r - \frac{\rho^2}{4r}$

Ces deux moyennes sont égales à ce degré d'approximation; donc nous prenons :

$$\delta = r - \frac{\rho^2}{4r}.$$

Nous déduisons, m désignant la masse de l'anneau :

$$V = \frac{m}{\delta} = \frac{m}{r} + \frac{\rho^2 m}{4r^3},$$

et en valeur absolue, si l'on ajoute la force correspondante à l'attraction solaire :

$$F = \frac{M + m}{r^2} + \frac{3m\rho^2}{4r^4}.$$

Égalons à 1 la masse du Soleil M ou, ce qui revient au même, la somme M + m; nous avons :

$$F = \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{3m\rho^2}{4r^2} \right) \sim \frac{1}{r^2} e^{\frac{3m\rho^2}{4r^2}}.$$

Tout se passera comme si nous avions une loi d'attraction de la forme $F = \frac{A}{r^\nu}$ où A est constant et où l'on a $\nu = -\frac{rF'}{F}$; soit ici :

$$\nu = 2 + \frac{3}{2} m \frac{\rho^2}{r^2}.$$

Nous avons vu précédemment qu'avec la loi $F = \frac{A}{r^\nu}$ le mouvement du périhélie est donné par l'équation :

$$\frac{d\varpi}{dt} = n(1 - \sqrt{3 - \nu}),$$

ou, si nous posons $\nu = 2 + \Delta$, et que nous négligeons Δ^2 :

$$\frac{d\varpi}{dt} = n \frac{\Delta}{2}.$$

$\frac{d\varpi}{dt}$ varierait comme le moyen mouvement n, si Δ était constant. Ici nous aurons :

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{3n}{4} \frac{m\rho^2}{r^2};$$

la masse à attribuer à l'anneau sera d'autant plus grande que ρ sera plus petit. Pour ρ égal à deux rayons solaires, il faudrait $m = \frac{1}{4000}$: une masse de l'ordre de celle de Saturne ne nous échapperait pas. Quand ρ croît, la masse décroît; mais alors la loi précédente n'est plus valable, car nous avons supposé ρ petit devant r.

On trouverait que la masse à attribuer à l'anneau est :

En masses de Mercure.	En rayon de Mercure.
0,15	pour $\rho = 0,8$
0,37	0,7
0,77	0,6
.....
6,0	0,3

La première pensée de Le Verrier, après sa découverte de l'avance du périhélie de Mercure, fut d'attribuer cette avance à une planète intra-mercurielle, observée soi-disant par le Docteur Lescarbault. Mais une telle planète n'a jamais été aperçue pendant les éclipses totales. Il semble

donc qu'il faille revenir à l'hypothèse de l'anneau; pourtant il existe quelques objections.

Si l'anneau était dans le plan de l'écliptique, il devrait donner un mouvement du nœud; il faudrait donc admettre que le plan de l'anneau est celui de l'orbite de Mercure, à très peu près: il expliquerait alors le mouvement du nœud de Vénus.

Mais Newcomb considère qu'un anneau ayant une telle inclinaison ne pourrait subsister; les éléments osculateurs de cet anneau subirait des perturbations qui tendraient à l'écartier du plan de l'orbite de Mercure.

4^e hypothèse : *la lumière zodiacale*. — L'effet de la lumière zodiacale, qui s'étend bien au-delà de l'orbite de Mercure, serait assimilable à l'effet d'un ensemble d'anneaux: la partie située entre l'aphélie et le périhélie de Mercure serait nuisible, puisqu'elle produirait un mouvement rétrograde; l'autre partie serait utile. Mais on retrouve les mêmes objections que pour l'anneau intra-mercuriel.

5^e hypothèse : *anneau situé entre Mercure et Vénus*. — Supposons maintenant qu'il existe un anneau situé entre les orbites de Mercure et de Vénus. Puisque le mouvement du nœud de Vénus est direct, il faut supposer que l'anneau est plus incliné sur l'écliptique que sur l'orbite de Vénus; d'autre part, puisque le nœud de Mercure ne se déplace pas, son inclinaison sur l'orbite de Mercure doit être faible.

Newcomb trouve pour cet anneau les éléments suivants :

Masse totale, $m^{-1} = 37\ 000\ 000$, donc invisible;

Distance moyenne au Soleil, 0,48;

Inclinaison sur l'écliptique, 7°,5.

Mais il ne s'arrête pas à cette hypothèse, car un tel anneau ne produirait aucun déplacement du périhélie de Mars. Pourtant, ce dernier désaccord pourrait être dû à l'influence des petites planètes. Mais ont-elles une masse totale suffisante ?

Quand les grandeurs croissent en progression arithmétique, le nombre des planètes correspondantes croît en progression géométrique. Supposons que cette loi se continue indéfiniment; tout dépend de la raison de la progression. Supposons-la égale à 3: la masse totale aura une influence négligeable sur le périhélie de Mars. D'autre part, on constate que la raison 3 est beaucoup trop grande, une raison égale à 2,5 conduisant déjà à un éclat total infini dans la zone des orbites des astéroïdes.

6^e hypothèse : *loi de Hall*. — Finalement, Newcomb examine la loi de Hall. Nous avons vu que si l'on a une loi de $\frac{1}{r^2}$ avec $\nu = 2 + \Delta$, il en résulte un mouvement du périhélie égal à $\frac{n\Delta}{2}$. Hall choisit :

$$\nu = 2,000\ 000\ 157\ 4,$$

ce qui donne les avances suivantes des périhélies (par siècle) :

Mercure.....	42,34	Terre.....	10,20
Vénus.....	16,58	Mars.....	5,42

Mais il n'y a anomalie que pour Mercure et Mars. Or l'observation donne, non pas l'avance $\delta\omega$, mais le produit $e\delta\omega$, et l'excentricité e est beaucoup plus grande pour Mercure et Mars que pour Vénus et la Terre. Comparons les valeurs de $e\delta\omega$ (par siècle) :

Mercure.....	8,70	Terre.....	0,17
Vénus.....	0,11	Mars.....	0,51

ainsi $e\delta\omega$ est très petit pour Vénus et la Terre, donc difficilement décelable par l'observation.

L'anneau aurait donné pour $e\delta\omega$ les valeurs suivantes :

Mercure.....	8,38	Terre.....	0,025
Vénus.....	0,031	Mars.....	0,031

$e\delta\omega$ est négligeable, non seulement pour Vénus et la Terre, mais aussi pour Mars, ce qui est regrettable.

Newcomb préfère à l'hypothèse de l'anneau l'hypothèse de Hall. Pourtant celle-ci n'explique pas le mouvement du nœud de Vénus; pour expliquer ce dernier désaccord, il modifie la masse de la Terre.

Mais la loi de Hall est-elle compatible avec le mouvement de la Lune? Newcomb compare les observations aux tables de Hansen et trouve comme différences :

Pour le périhélie.....	+1,56	Pour le nœud.....	-2,86.
------------------------	-------	-------------------	--------

Si la loi de Hall explique le mouvement du périhélie, elle n'explique pas celui du nœud; mais on a constaté que la nouvelle théorie de la Lune de Brown ne met en évidence pour le nœud qu'une avance de $0'',1$ par an. Il faudrait alors modifier l'exposant ν et les avances de Mercure et de Mars ne concorderaient plus avec les valeurs observées.

7^e hypothèse : lois de forces extra-newtoniennes. — Supposons une loi de la forme

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^4};$$

le mouvement du périhélie ne sera plus proportionnel à n , mais à $\frac{n}{r}$ ou $\frac{n}{r^2}$; et si aucune anomalie n'apparaît pour la Lune, *a fortiori*, Mercure ne subira aucune perturbation.

Une loi de la forme $\frac{e^{-\alpha r}}{r^2}$, considérée par Laplace, donnerait un mouvement du périhélie proportionnel à nr ; il serait alors possible d'avoir

un effet nul pour la Lune et satisfaisant pour Mercure; mais Mars, Jupiter et Saturne subiraient de grandes perturbations incompatibles avec les données de l'observation.

Conclusion. — Aucune de ces hypothèses ne rend compte des phénomènes observés d'une manière satisfaisante. Il faudrait donc revenir à l'hypothèse d'un anneau circulant entre Mercure et Vénus et admettre que Mars est perturbé par un autre anneau ou par les petites planètes.

On pourrait aussi admettre trois explications franchement différentes :

- 1° Pour Mars, les perturbations dues aux petites planètes;
- 2° Pour Vénus, une modification de la masse de la Terre;
- 3° Pour Mercure, un anneau centré sur le Soleil, dont le rayon serait environ le demi-grand axe de l'orbite de Mercure, et qui serait situé dans son plan.

CHAPITRE V.

ACCÉLÉRATION SÉCULAIRE DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

Irrégularités dans la longitude de la Lune. — On a constaté, à la fin du XVIII^e siècle, que les données des observations anciennes nécessitaient l'introduction, dans la théorie de la Lune, d'une accélération séculaire évaluée alors à 12". La longitude de la Lune serait :

$$A + nt + st^2 + \dots,$$

avec $s = 12''$, et si t est compté en siècles.

Laplace a montré que cette accélération était due aux variations de l'excentricité terrestre : il a calculé sa valeur et trouvé 12"; mais il a fait une erreur de calcul. Cette valeur théorique a été admise pendant cinquante ans. Puis, Adams calcula la vraie valeur 6". Si l'on admet que l'observation met en évidence une accélération séculaire de 12", il reste à expliquer les 6" d'excédent.

Voyons ce que donne la théorie : Hansen a le premier établi des tables de la Lune très précises; mais, d'une part, il avait pris pour valeur de l'accélération séculaire 12" au lieu de 6"; d'autre part, parmi les perturbations, il existe deux termes dus à l'action de Vénus, que Hansen suppose égaux à :

$$\begin{aligned} V_1 &= + 15^{\circ}34 \sin(-L - 16T + 18V + 33^{\circ}26'), \\ V_2 &= + 21^{\circ}47 \sin(8V - 13T + 4^{\circ}44'), \end{aligned}$$

où L est la longitude de la Lune, T la longitude de la Terre et V la longitude de Vénus.

V_1 a une période de 273 ans, et V_2 une période de 239 ans. Une révision

de la théorie a confirmé la valeur du coefficient du terme V_1 , mais a montré que le terme en V_2 est très petit. Au lieu de $21''{,}47$, on trouve environ $0''{,}5$ comme coefficient de ce terme.

La théorie de Delaunay et celle de Brown, qui vient d'être terminée, concordent assez bien avec la théorie de Hansen; les différences sont faibles.

Résultats déduits des observations. — Il s'agit de comparer la théorie avec les observations; de quelles données disposons-nous ?

1° Les éclipses anciennes, rapportées par les historiens. La zone de totalité étant très étroite, ces indications seraient précieuses; malheureusement les récits en sont très douteux, Newcomb les laisse de côté.

2° Les observations antiques faites par des astronomes (—687 à —134) rapportées par Ptolémée dans l'*Almageste* : ces observations montrent une correction de $-18'$ environ à apporter aux tables de Hansen.

3° Les éclipses des Arabes (829 à 1004), qui fournissent des données plus précises, car les Arabes observaient une hauteur d'étoile au moment de l'éclipse, ce qui donnait l'heure. La correction serait de $-4'$ environ.

4° Les observations faites à la lunette astronomique, mais sans chronomètre, de 1620 à 1650, et celles de 1639 à 1680, où l'on commençait à se servir de pendules. De 1680 à 1720, on a de bonnes observations et, à partir de 1720, des observations méridiennes. Entre 1750 et 1850, les tables de Hansen étaient en complet accord avec les observations; mais, depuis 1850, cette concordance a cessé. Si l'on corrige la longitude de $6''$ et que l'on donne à V_2 sa nouvelle valeur, on améliore la concordance avant 1750, mais le désaccord subsiste après cette date.

Portons en ordonnée les différences entre les moyennes annuelles d'observation et la moyenne donnée par les tables de Hansen. Nous obtenons une courbe ayant l'aspect suivant (*fig. 10*) :

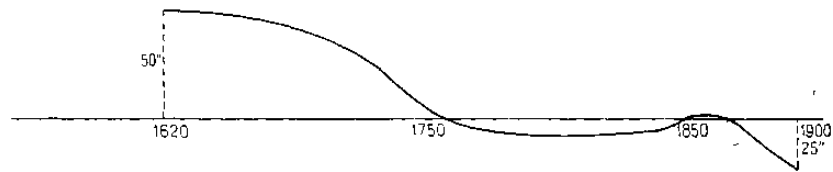


Fig. 10.

Mais si nous supprimons le terme en V_2 qui est beaucoup trop grand nous avons la nouvelle courbe (*fig. 11*) :

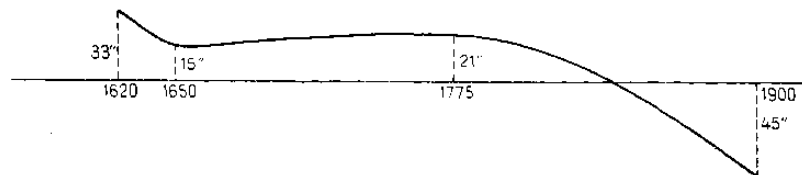


Fig. 11.

Les tables de Hansen ne concordent plus du tout avec les données de l'observation: on constate que changer l'époque dans la longitude ne diminuerait pas les divergences.

Newcomb (1) obtient la meilleure représentation des observations anciennes et modernes en supprimant V_2 , d'une part, et en ajoutant une correction à la longitude, d'autre part :

$$- 1^{\circ}.14 - 29^{\circ}.17 T - 3^{\circ}.76 T^2.$$

Il ajoute, de plus, un terme empirique dont la période est 273 ans, comme celle de l'inégalité due à Vénus :

$$- 15^{\circ}.5 \cos A, \quad \text{avec } A = -L - 16T + 18V.$$

Nous avons alors la courbe ci-dessous (fig. 12) :

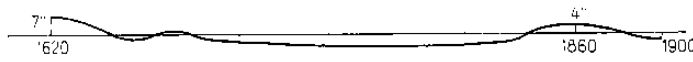


Fig. 12.

La correction δs de l'accélération séculaire peut aussi se déduire de l'observation des anciennes éclipses. Ptolémée parle de quatre éclipses, des années -687 , -381 , -189 , $+134$; les Arabes rapportent celles de $+850$, $+927$, $+986$. Pour ces éclipses, le terme périodique de Newcomb compte peu, tandis que δs est prépondérant. Les éclipses de Ptolémée donnent pour moyenne : $8^{\circ}.3$; celles des Arabes : $5^{\circ}.3$; la moyenne générale serait : $7^{\circ}.43$, nombre assez voisin de l'accélération théorique : $6''$.

Travaux de Cowell (2). — Depuis, Cowell a repris la question et cherché à représenter les observations en ajoutant deux ou trois termes empiriques à longues périodes à l'expression de la longitude de la Lune. Ceci ne constitue pas un grand progrès, car il est évident qu'avec quelques indéterminées, on pourra faire tendre l'erreur vers zéro.

De plus, Cowell s'est proposé de comparer les termes à courtes périodes aux coefficients théoriques; il emploie pour cela l'analyse harmonique de préférence à la méthode des moindres carrés, à cause du grand nombre des inconnues. Supposons que nous ayons :

$$F = \sum A \cos zt:$$

F étant donné par l'observation, il faut calculer A. Multiplions par $\cos \beta t$, il vient :

$$F \cos \beta t = \sum A \cos zt \cos \beta t = \sum \frac{A}{2} \cos (z \pm \beta) t.$$

(1) *Astronomical Papers*, vol. IX, part. I, 1912, Washington, p. 29.

(2) *Monthly Notices*, t. 64, 65, 66; divers articles.

Intégrons de 0 à T :

$$\int_0^T F \cos \beta t dt = \left[\sum \frac{A}{2} \frac{\sin(\alpha \pm \beta) t}{\alpha \pm \beta} \right]_0^T.$$

$\sin(\alpha \pm \beta)t$ est inférieur ou égal à 1. Divisons par T qui est très grand : les termes du second membre restent très petits, sauf celui pour lequel $\alpha = \beta$, et qui doit être remplacé par T. D'où :

$$\int_0^T F \cos \beta t dt = \frac{A_0}{2} T + \text{une quantité petite.}$$

Si T est assez grand, nous obtenons A_0 .

Supposons que nous ayons deux termes dont les périodes soient peu différentes; $\alpha - \beta$ est très petit et $(\alpha - \beta)T$ sera une quantité finie; le terme correspondant ne disparaîtra pas et il en résultera une erreur sur A_0 . De plus, les observations ne sont pas également distribuées dans le temps : à la nouvelle lune, on ne peut pas observer. Il faudra donc retrancher de la somme \sum les termes correspondants aux nouvelles lunes successives, c'est-à-dire aux époques t_0 , soit

$$\sum \sum \frac{A}{2} \cos(\alpha \pm \beta) t_0.$$

Si $(\alpha \pm \beta)t_0$ prend à peu près toutes les valeurs, la valeur moyenne de $\cos(\alpha \pm \beta)t_0$ sera nulle et ce terme sera négligeable. Mais il n'en est pas toujours ainsi. Si l'on a :

$$\alpha t = \beta t + mD,$$

où D est la différence des longitudes du Soleil et de la Lune, à la nouvelle lune, on aura :

$$D = 0, \quad \alpha_0 t = \beta_0 t \quad \text{et} \quad \cos(\alpha - \beta) t_0 = 1;$$

on ne pourra pas négliger le terme correctif.

D'autre part, soit g l'anomalie moyenne de la Lune; dans le calcul du coefficient A du terme dont l'argument est g , nous serons gênés par les termes d'arguments $g + D$, $g - D$, $g + 2D$, etc. Cowell s'est rendu compte de cette difficulté, mais il n'a fait que des corrections probablement insuffisantes. De plus, nous aurons des erreurs systématiques de période D, puisqu'elles auront pour cause la phase de la Lune.

De toute cette discussion il faut retenir que les termes à courtes périodes ne donnent pas de divergence sensible.

Voyons maintenant quels renseignements peuvent nous fournir les éclipses anciennes. La zone de totalité étant très étroite, la connaissance

de l'époque et du lieu d'observation d'une éclipse totale est un renseignement précieux.

Supposons un observateur se déplaçant sur le Soleil de manière à toujours regarder la Terre en face : le disque terrestre lui apparaîtra fixe. La trajectoire apparente du centre de la Lune cd , donc la ligne de centralité, sera une droite inclinée de 5° sur l'écliptique, puisque la Lune est au voisinage de l'un de ses nœuds (*fig. 13*). Cet observateur verra, en

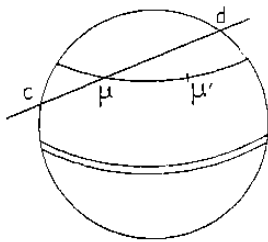


Fig. 13.

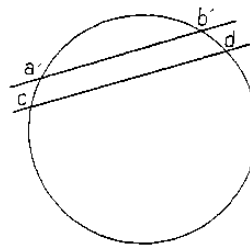


Fig. 14.

même temps, les différents points de la Terre décrivent leurs parallèles, par suite de la rotation de la Terre. Pour qu'il y ait éclipse centrale en un point, il faudra que le parallèle du point considéré vienne couper la ligne cd en ce point au moment du passage de la Lune.

a. S'il y a accélération séculaire, la Lune sera en avance ou en retard; au lieu du point μ , c'est au point μ' que l'on observera l'éclipse centrale : μ et μ' sont sur le même parallèle terrestre. La zone de centralité sera reportée soit à l'Ouest, soit à l'Est du point μ . L'effet d'un retard dans la rotation de la Terre serait identique.

b. S'il y a variation séculaire du nœud de la Lune, la ligne de centralité sera reportée vers le Nord ou vers le Sud, en $a'b'$ (*fig. 14*).

c. Si le mouvement du Soleil est troublé, du fait des variations des différences entre les longitudes du Soleil \odot , de la Lune \ominus et du nœud Ω ,

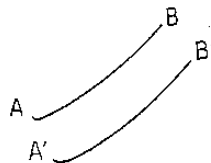


Fig. 15.

les limites de visibilité de l'éclipse seront déplacées. Les points A et B où le Soleil se lève ou se couche au moment de l'éclipse viendront en A' et B' (*fig. 15*). Toutes ces observations nous permettront de vérifier jusqu'à quel point une théorie est exacte.

Cowell a cru pouvoir établir la concordance des observations avec la

théorie en modifiant les accélérations séculaires de la longitude et du nœud de la Lune. La théorie de Brown rendant parfaitement compte des mouvements observés du nœud, il a proposé de modifier l'accélération séculaire de la longitude du Soleil puisque, seules, les différences $\odot - \textcircled{C}$, $\textcircled{C} - \textcircled{\text{Q}}$, $\textcircled{\text{Q}} - \odot$ interviennent.

Nous avons ainsi quatre systèmes :

A, Tables de Hansen : $s = 12''$;

B, système théorique : $s = 6''$;

C, système de Newcomb;

D, système de Cowell; nous appellerons D' le système de Cowell modifié conformément à la théorie de Brown.

Voici dans ces quatre systèmes les accélérations séculaires du Soleil, de la Lune et du nœud :

	A.	B.	C.	D.	D'.
\odot	0	0	0	0	4",1
\textcircled{C}	12"	6"	7",43	6",8	10,9
$\textcircled{\text{Q}}$	6,5	6,5	6,5	2,4	6,5

Voyons comment ces quatre systèmes rendent compte des éclipses anciennes :

1° Éclipse d'Agathoclès : elle ne permet aucune conclusion.

2° Éclipse d'Ennius, à Rome, vers 350 avant J.-C.; elle aurait été totale d'après Hansen, mais les textes sont peu décisifs.

3° Éclipse de Thalès, rapportée par Hérodote, elle aurait eu lieu en —584, le jour d'une bataille en Asie Mineure, mais on ne connaît pas le lieu d'observation.

4° Éclipse de Larissa : Xénophon rapporte que cette ville, effrayée, capitula à la suite d'une éclipse; seules les tables de Hansen permettent de la classer comme totale. Elle dut avoir lieu vers —556, mais à cette époque la guerre entre les Perses et les Mèdes n'était pas commencée !

5° Éclipse du poète Archilochus : mais on ne sait ni quand, ni où il vivait.

6° Éclipse de Thucydide : éclipse annulaire qui permit de voir les étoiles à Athènes; elle est favorable aux systèmes B, D et D'.

7° Éclipses babyloniennes : il y a eu des éclipses en —1062, —1069, —1116, —1123. Celle de —1069 n'a pu être observée à Babylone, celle de —1062 est favorable au système D, celle de —1116 au système C et celle de —1123 au système B; mais on sait mal de quelle éclipse il s'agit.

8° Éclipse d'Utique, rapportée par Tertullien : totale, elle serait favorable à Cowell, mais il est écrit : « Lumine pœne extincto ».

9° Éclipses de Chine : observées entre —708 et —487, elles semblent favorables à B, mais on n'est pas sûr du lieu d'observation.

Tout ceci ne peut donc donner aucune certitude dans un sens ou dans un autre.

Cowell, dans le système D', admet que le Soleil a une accélération de $4''$ et la Lune un excédent d'accélération de $10.9 - 6'' = 4.9$, dont la théorie ne rend pas compte. Il cherche une explication de cet excédent dans un ralentissement de la Terre dû aux marées. Mais l'accélération du Soleil devrait alors être 13 fois plus faible que celle de la Lune. D'autre part, si le ralentissement de la Terre est dû à l'attraction de la Lune sur le bourrelet des mers, il doit y avoir une réaction de la Terre sur la Lune, dont le mouvement doit se ralentir aussi; en effet, la distance de la Terre à la Lune augmentant, d'après la loi des aires, son moyen mouvement doit diminuer. Il y aura à la fois ralentissement de la Terre et ralentissement de la Lune; mais celui de la Terre étant beaucoup plus considérable, on aura encore une accélération apparente pour la Lune. Pour le Soleil, il n'y aurait pas de ralentissement, mais seulement une accélération apparente due au ralentissement de la Terre. Mais ceci nous oblige à décupler le retard de la Terre dû aux marées; et, de ce fait, nous sommes amenés à considérer non seulement les marées océaniques, mais aussi des marées internes du globe terrestre. C'est l'hypothèse de Darwin que nous étudierons plus loin.

Confrontation de l'hypothèse de Newcomb avec la théorie de Mercure. — Newcomb a introduit un terme : $15'' \cos A$, dont l'existence est certaine, mais dont aucune planète ne semble être la cause. Il se demande si l'on ne peut expliquer ce phénomène par une variation irrégulière de la rotation de la Terre. Cette irrégularité devrait également avoir des répercussions sur les mouvements d'autres astres ayant un moyen mouvement assez grand, Mercure et les satellites de Jupiter.

Pour les satellites de Jupiter, on ne constate rien. Quant à Mercure, si l'on considère les observations des passages, nous avons vu que l'on pouvait déterminer une correction pour le mouvement du périhélie, déduite de la correction de la longitude que l'on appelle V pour les passages de novembre, W pour ceux de mai.

Cherchons à exprimer ces grandeurs linéairement en fonction de t :

$$V = \alpha + \beta t, \quad W = \alpha' + \beta' t.$$

Ceci fait, il reste des résidus qui, si l'idée de Newcomb est exacte, doivent correspondre au terme $15'' \cos A$, c'est-à-dire aux variations de la rotation de la Terre. Portons en ordonnée le retard ou l'avance du chronomètre qu'est la Terre; nous obtenons la courbe ci-après (*fig. 16*).

Si nous ajoutons l'erreur probable, nous avons une bande. Avec la Lune, nous aurons une seconde courbe (—.—.—) qui devrait coïncider avec la première. Mais les différences d'amplitude entre ces deux courbes sont trop grandes, et Newcomb semble abandonner son idée.

Cowell a repris la question et cherché à exprimer V et W par des formules du 2^e degré en t :

$$(1) \quad \begin{cases} V = \alpha + \beta t + \gamma t^2, \\ W = \alpha' + \beta' t + \gamma' t^2, \end{cases}$$

où les $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sont différents de ceux de Newcomb; V ou W est la différence entre les longitudes du Soleil et de Mercure. Nous trouvons (1) :

$$(2) \quad V = 1''.487 \delta\lambda - 0''.487 \delta\varpi - 1''.137 \delta e - 1''.01 \delta\lambda' + 1''.19 e' \delta\varpi' + 1''.58 \delta e',$$

λ et λ' désignant les longitudes moyennes de Mercure et du Soleil;

$$(2 \text{ bis}) \quad W = 0''.716 \delta\lambda + 0''.284 \delta\varpi + 0''.896 \delta e - 0''.97 \delta\lambda' - 1''.11 e' \delta\varpi' - 1''.62 \delta e',$$

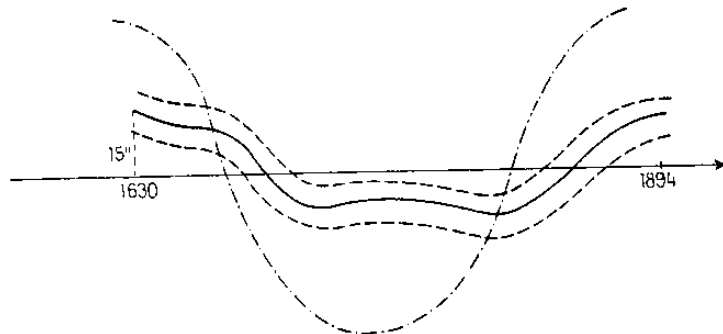


Fig. 16.

le coefficient de $\delta\lambda$ dans V est double de celui de $\delta\lambda$ dans W; en effet, ce coefficient est égal à :

$$1 + k \cos g + k_1 \cos 2g + \dots, \quad \text{avec } k = 0,409.$$

Or, en novembre, la planète est près du périhélie; g est voisin de zéro, et le coefficient de $\delta\lambda$ voisin de $1 + k \sim 1,4$; en mai, la planète est près de l'aphélie, g est voisin de π , et le coefficient de $\delta\lambda$ voisin de $1 - k \sim 0,6$.

Nous pouvons évaluer les expressions (1) et (2); les termes en t^2 ne proviendront que de $\delta\lambda$ et $\delta\lambda'$. Si $\delta\lambda$ contient un terme εt^2 et $\delta\lambda'$ un terme $\varepsilon' t^2$, nous aurons :

$$\begin{aligned} 1,487\varepsilon - 1,01\varepsilon' &= \gamma, \\ 0,716\varepsilon - 0,97\varepsilon' &= \gamma'. \end{aligned}$$

Or, on trouve :

$$\gamma = -3''.30, \quad \gamma' = -2''.81;$$

d'où :

$$\varepsilon = -0''.50, \quad \varepsilon' = +2''.53,$$

c'est-à-dire :

$$\delta\lambda = -0''.50 T^2, \quad \delta\lambda' = +2''.53 T^2.$$

(1) *Monthly Notices*, t. 66, p. 40.

Si nous supposons $\varepsilon = 0$, donc si nous annulons l'accélération séculaire de la longitude de Mercure, les passages de novembre et de mai donnent respectivement :

$$\delta\lambda' = + 3,27 T^2, \quad \delta\lambda' = + 2,90 T^2;$$

d'où une moyenne pondérée :

$$\delta\lambda' = + 3,17 T^2,$$

ce qui paraît confirmer la théorie de Cowell donnant 4,1 pour l'accélération séculaire du Soleil.

Mais Cowell supposait que cette accélération était due seulement au ralentissement de la rotation de la Terre; alors cet effet devrait aussi se faire sentir sur Mercure, ce qui est incompatible avec les résultats. Il faut donc rejeter cette hypothèse et, si l'on admet une accélération solaire de 4'', chercher une autre explication.

Hypothèse d'une planète intramercurielle de Saint-Blancat ⁽¹⁾.

— Peut-on expliquer le terme : $15'' \cos A$ par une planète inconnue ? De Saint-Blancat choisit une planète intramercurielle dont la période est 27 jours, comme celle de la Lune.

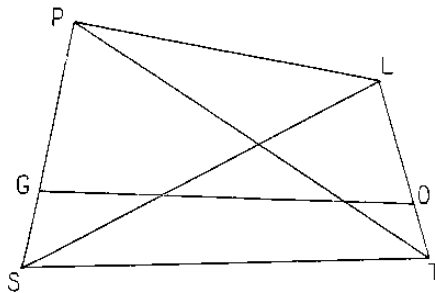


Fig. 17.

Soient m_0, m, m', m'' les masses de la Terre T, de la Lune L, du Soleil S et de la planète P; soient encore O le centre de gravité du système Terre-Lune et G celui du système Soleil-Planète (fig. 17).

Posons :

$$\begin{aligned} PS = r'', \quad PL = \delta'', \quad PT = \delta''_0, \quad TJ = r, \\ TS = \delta''_0, \quad LS = \delta', \quad OG = r'. \end{aligned}$$

Le potentiel total est :

$$U = \frac{mm_0}{r} + \frac{m'm''}{r''} + \frac{mm'}{\delta'} + \frac{m_0 m''}{\delta''_0} + \frac{mm''}{\delta''} + \frac{m_0 m'}{\delta'_0}.$$

⁽¹⁾ *Action d'une masse intramercurielle sur la longitude de la Lune*, Paris, 1907.

Pour mettre les équations sous la forme canonique, nous rapporterons la Planète au Soleil, la Lune à la Terre, le point O au point G. Dans U, mettons à part les deux premiers termes et posons :

$$U = \frac{mm_0}{r} + \frac{m' m''}{r''} + W.$$

Si, dans W, nous faisons $r'' = 0$, il vient :

$$U_0 = \frac{mm_0}{r} + \frac{m' m''}{r''} + W_0;$$

W_0 ne dépend pas des coordonnées de la planète, $\frac{m' m''}{r''}$ en dépend seul.

Si le potentiel se réduisait à U_0 , on aurait : d'une part, le mouvement

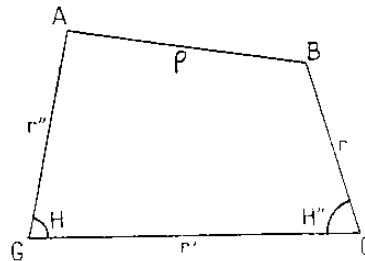


Fig. 18.

képlérien de la planète P autour du Soleil S, résultant du terme $\frac{m' m''}{r''}$; d'autre part, le mouvement de la Lune obéissant à la théorie ordinaire, puisque W_0 ne contient pas r'' . Nous pouvons appliquer la méthode de la variation des constantes en prenant comme première approximation U_0 , ce qui donnera le mouvement théorique ordinaire de la Lune; puis nous prendrons pour fonction perturbatrice la différence $W - W_0$.

Posons :

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 + r''^2 + 2r' r'' \cos H + 2r'' r \cos H' + 2r r' \cos H'',$$

H désignant l'angle des deux rayons r' et r'' ; H' celui des rayons r'' et r ; H'' celui des rayons r et r' . Que représente ρ ? Soit GA un vecteur équipollent à SP et OB un vecteur équipollent à TL : ρ est la longueur du vecteur AB (fig. 18).

En effet, le vecteur AB est égal à la somme

$$\vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GO} + \vec{OB};$$

Si $AG = r''$ a pour composantes x'', y'', z'' ,

si $GO = r'$ a pour composantes x', y', z' ,

si $OB = r$ a pour composantes x, y, z ,

l'on a :

$$AB^2 = \sum (x'' + x' + x)^2,$$

Se rapportant aux trois composantes. D'où :

$$AB^2 = r'^2 + r'^2 + r'^2 + 2r' r'' \cos H + 2r'' r \cos H' + 2r r' \cos H'' = \varphi^2,$$

r et r'' étant petits vis-à-vis de r' , nous pouvons développer $\frac{1}{\varphi}$ sous la forme :

$$(3) \quad \frac{1}{\varphi} = \sum \frac{r^n r'^{2n''}}{r'^{2n'}} P_{nn''}$$

$P_{nn''}$ étant une fonction de H, H', H'' ; c'est une généralisation des polynomes de Legendre. Les nombres n, n', n'' ne sont pas indépendants; pour que l'expression (3) soit homogène, il faut avoir :

$$n' = n + n'' + 1.$$

Calculons la quantité $\frac{1}{\delta''}$, donnée d'abord par la relation :

$$\delta''^2 = S \left(x' + \frac{m_0}{m + m_0} x - \frac{m'}{m' + m''} x'' \right)^2.$$

Nous obtiendrons $\frac{1}{\delta''}$ en changeant dans l'expression de $\frac{1}{\varphi}$: r en $\frac{m_0}{m + m_0} r$, r'' en $\frac{-m' r''}{m' + m''}$.

De même, pour avoir $\frac{1}{\delta''}$, il faut changer, dans l'expression de $\frac{1}{\varphi}$, r en $\frac{m_0}{m + m_0} r$ et r'' en $\frac{m''}{m' + m''} r''$.

Et l'on peut également calculer $\frac{1}{\delta''}$ et $\frac{1}{\delta''}$.

W se trouve ainsi développé sous la forme :

$$W = \sum \frac{r^n r'^{2n''}}{r'^{2n'}} P_{nn''} A_{nn''},$$

W_0 n'est autre que W dans lequel on supprime tous les termes en r'' ; donc $W - W_0$ est égal au développement de W dans lequel on conserve seulement les termes qui dépendent de r'' :

$$(4) \quad W - W_0 = \sum \frac{r^n r'^{2n''}}{r'^{2n'}} P_{nn''} A_{nn''};$$

$A_{nn''}$ est une fonction des masses facile à calculer, soit :

$$A_{nn''} = (-1)^n m m' m_0 m'' \left[\frac{m_0^{n-1} + (-1)^n m^{n-1}}{(m + m_0)^n} \right] \left[\frac{m'^{n''-1} + (-1)^{n''} m''^{n''-1}}{(m' + m'')^{n''}} \right].$$

Ne gardons que les termes dépendant de r'' . D'abord, tous les termes

où n est nul doivent être rejetés, car ils ne dépendent pas des coordonnées de la Lune; ils ne feront donc pas partie de la fonction perturbatrice. De même, les termes où n'' est nul, car ils font partie à la fois de W et de W_0 et disparaissent dans la différence $W - W_0$.

Les termes où $n = 1$ disparaissent aussi, car $A_{nn''} = 0$, de même ceux où $n'' = 1$ pour la même raison.

Si $n'' = n = 2$, comme m est très petit vis-à-vis de m_0 , et m'' vis-à-vis de m' , les deux expressions entre crochets se réduisent à $\frac{1}{m_0}$ et $\frac{1}{m}$ et nous avons :

$$A_{nn''} = mm''.$$

Le terme principal de (4) sera :

$$\frac{r^2 r''^2}{r'^5} P_{22} A_{22};$$

P_{22} dépend de H, H', H'' , mais dans une première approximation on peut supposer les excentricités et les inclinaisons nulles. Alors on a :

$$H = L' - L'', \quad H' = L'' - L, \quad H'' = L - L'',$$

où L', L'', L sont les longitudes de la Terre, de la planète, de la Lune.

Il résulte pour la longitude de la Lune une inégalité provenant du terme de la fonction perturbatrice :

$$\frac{3}{8} m'' a^2 n'^2 [1,875] \left(\frac{a''}{a'}\right)^2 \cos(2L - 2L''),$$

où n' est le moyen mouvement de la Terre, et a, a', a'' les demi-grands axes des orbites de la Lune, de la Terre et de la planète.

Nous pouvons supposer que $2L - 2L''$ a pour période 273 ans et calculer la valeur de m'' , qui explique le terme de Newcomb. De Saint-Blancat trouve qu'il suffit d'une masse égale à $\frac{1}{12}$ de celle de Mercure,

évaluée par Newcomb à $\frac{1}{7\,500\,000}$. On aurait $a'' = 0,178$.

Il faut remarquer que la rotation du Soleil ayant une durée moyenne de 27 jours environ, nous pouvons supposer une dissymétrie du Soleil, nous aurions pour a'' le rayon solaire, ce qui nécessiterait une masse m'' égale à quatre fois celle de la Terre. Ceci est peu probable, mais non impossible.

On pourrait encore admettre que l'accélération séculaire de la Lune, qui paraît très réellement exister, soit une inégalité à très longue période; peut-on l'attribuer à un satellite dont la durée de révolution serait encore

plus voisine de celle de la Lune que la planète de Saint-Blancat, et qui donnerait ainsi une période bien supérieure à 273 ans pour cette inégalité ? Nous aurions alors, outre les termes périodiques, une accélération séculaire $\frac{Cp^2t^2}{2}$, avec :

$$p = \frac{2\pi}{273} \quad \text{et} \quad \frac{Cp^2}{2} = 6''.$$

On trouve qu'il faudrait que l'astre perturbateur ait une masse 16 fois plus faible que celle de la planète de Saint-Blancat.

Théorie de Darwin (1). — Il n'est pas absolument certain que l'accélération séculaire théorique de la Lune, due aux variations de l'excentricité terrestre, n'explique pas les différences qui existent entre la théorie et les observations. Les plus grands écarts sont ceux des éclipses anciennes; or, nous avons vu le peu de foi qu'il faut leur accorder. Quoiqu'il en soit, on a proposé comme explication de ces différences, le retard de la rotation de la Terre, dû aux frottements des marées; ce retard est certain : il est exigé par le principe de la conservation de l'énergie. Mais quelle en est l'importance ? D'après Hough, de l'Observatoire du Cap, il faudrait environ vingt ans pour que l'effet du frottement réduise les mouvements dans le rapport de 1 à $\frac{1}{e}$. Si nous adoptons ce chiffre, nous voyons qu'au bout de 2 000 ans le retard relatif produit serait $\frac{1}{6} \cdot 10^{-12}$, tandis qu'il devrait être $1 \cdot 10^{-7}$.

Néanmoins, Darwin n'abandonne pas son hypothèse, il fait intervenir le noyau terrestre qu'il suppose liquide et visqueux, tandis que Lord Kelvin le suppose solide. Le noyau est alors déformable sous l'influence luni-solaire; s'il était parfaitement élastique, il n'y aurait pas de frottement, donc pas de retard. Si, au contraire, les matières qui constituent le noyau sont visqueuses, il y a dégagement de chaleur, donc perte d'énergie. Darwin étudie le cas d'un corps de très faible viscosité, soit 1000 fois celle de la poix, puis d'un corps de grande viscosité, seconde hypothèse qui semble inadmissible.

Si la Lune exerce une action et que cette action produise un retard dans la rotation de la Terre, inversement la Terre agira sur le mouvement de la Lune.

Soit T la Terre, que nous supposerons déformée par la Lune L. S'il n'y avait pas de viscosité, le grand axe serait dirigé suivant TL, il n'y

(1) *Darwin Scientific Papers*, vol. II, *Tidal friction and Cosmogony*, 1908, Cambridge.

aurait pas de retard (*fig. 19*). Mais s'il y a viscosité, le grand axe de l'ellipsoïde, auquel nous assimilons la Terre, sera incliné sur TL (*fig. 20*). La résultante de l'attraction de la Lune aura un moment non nul par rapport à T.

Inversement, la résultante de l'action de la Terre sur la Lune n'est plus centrale : la Terre ainsi déformée perturbe le mouvement de la Lune.

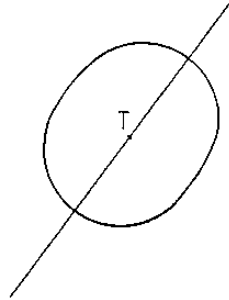


Fig. 19.

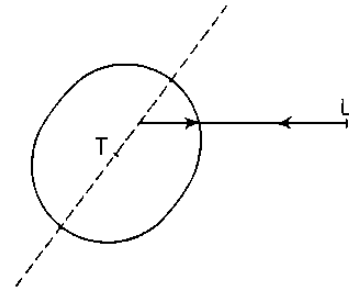


Fig. 20.

a. Excentricité et inclinaison nulles. — Soit ω le moyen mouvement de la Lune et a la distance TL. La troisième loi de Kepler donne : où la

$$\omega^2 a^3 = \text{const.},$$

constante des aires, c'est-à-dire le moment de la quantité de mouvement, pour la Lune, est :

$$\sqrt{p} = \sqrt{a(1 - e^2)};$$

e est très petit et restera très petit.

Nous appellerons : m la masse de la Lune, x son moment de rotation, M la masse de la Terre, k la constante de Gauss.

Nous avons :

$$x = a^2 \omega m \quad \text{et} \quad kM = \omega^2 a^3,$$

donc :

$$x^3 \omega = a^6 \omega^4 m^3 = k^2 M^2 m^3.$$

Soient y le moment de rotation de la Terre, n sa vitesse de rotation, J son moment d'inertie

$$y = nJ.$$

Nous choisirons nos unités de façon que l'on ait :

$$k^2 M^2 m^3 = 1, \quad J = 1;$$

nous avons alors :

$$x^3 \omega = 1, \quad y = n.$$

L'énergie totale est :

$$\frac{Y}{2} = J \frac{u^2}{2} - \frac{kMm}{2a} = J \frac{v^2}{2} - \frac{k^2 m^3 M^2}{2x^2},$$

relation de la forme :

$$Y = v^2 - \frac{1}{x^2}.$$

L'équation des aires est :

$$x + y = h;$$

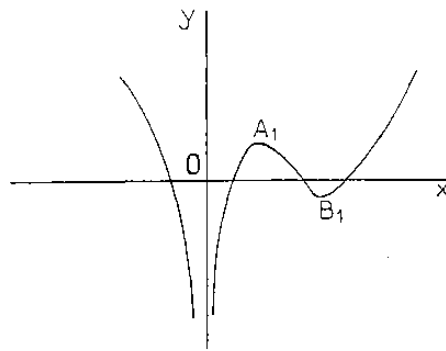


Fig. 21.

h va rester constant, mais l'énergie Y va diminuer par suite des frottements. Nous avons ainsi la relation :

$$Y = (h - x)^2 - \frac{1}{x^2},$$

représentée ci-contre (fig. 21).

La courbe présente un maximum A_1 et un minimum B_1 satisfaisant aux conditions :

$$dx + dy = 0,$$

$$dY = 2y dy + 2 \frac{dx}{x^3} = 0.$$

Éliminons dx et dy ; il vient :

$$x^3 y = 1 \quad \text{ou} \quad y = \omega.$$

Ainsi, lorsque l'énergie $\frac{Y}{2}$ est maximum ou minimum, la vitesse angulaire de rotation de la Terre est égale à la vitesse angulaire de révolution de la Lune.

Construisons, d'autre part, la droite $x + y = h$, et la courbe $x^3 y = 1$, que Darwin nomme courbe de rigidité, parce que, si le point représentatif x, y est sur cette courbe, la durée de rotation de la Terre égale la

durée de révolution de la Lune, et l'ensemble Terre-Lune tourne d'un seul bloc à la façon d'un corps solide (*fig. 22*). La droite coupe la courbe de rigidité en deux points A et B correspondant aux points A_1 et B_1 . Nous avons vu que Y doit diminuer. Si, à l'instant initial, le point x, y se trouve entre A_1 et B_1 , il restera sur cet arc en se dirigeant vers B_1 ; x va donc en augmentant, c'est-à-dire que a augmente, la Lune s'éloigne de la Terre, ω diminue, y aussi, mais la rotation de la Terre y diminue moins que la durée de révolution de la Lune ω .

Actuellement, pour le système Terre-Lune, on a les valeurs numériques suivantes :

$$x = 3,2, \quad y = 0,8, \quad h = 4;$$

le point représentatif se trouve en P; il se déplace lentement vers B qui représente l'état final. Nous pouvons considérer que le système Terre-

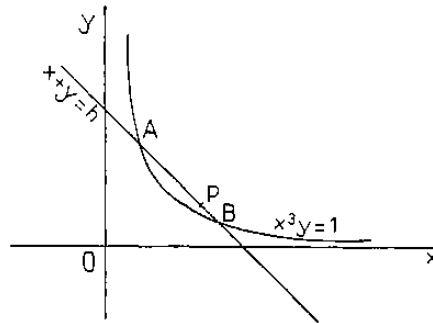


Fig. 22.

Lune est parti de l'état initial représenté par A; le mois égalait alors le jour; leur durée commune était de 5 h 36 m; nous avons $x = 0,7, y = 3,3$; l'aplatissement de la Terre était $\frac{1}{12}$ environ, la distance de la Lune à la Terre était 2 rayons terrestres. Telle est, d'après Darwin, l'origine de la Lune se détachant de la Terre.

Puis, le point x, y se déplaçant vers B, le rapport des durées du mois et du jour est passé par un maximum de 29 et tend à nouveau vers l'unité. Au point B, le mois sera à nouveau égal au jour, leur durée commune étant environ 55 jours actuels; on aura :

$$x = 4 - \frac{1}{64}, \quad y = \frac{1}{64}.$$

Ces données peuvent-elles rendre compte de l'accélération séculaire de la Lune ? Nous avons :

$$dx + dy = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \frac{x}{y} = -4 \frac{dx}{x},$$

puisque l'on a

$$\frac{x}{y} = \frac{3,2}{0,8}.$$

Nous avons, d'autre part :

$$3 \frac{dx}{x} + \frac{d\omega}{\omega} = 0,$$

donc

$$\frac{dy}{y} = \frac{4}{3} \frac{d\omega}{\omega}.$$

L'accélération relative du mouvement de la Terre est $\frac{dy}{y}$. Si le mouvement de la Lune ne subissait aucune altération, il en résulterait une accélération apparente $\omega \frac{dy}{y}$; mais elle subit un retard réel $d\omega$. L'effet total est donc :

$$\omega \frac{dy}{y} - d\omega = \omega \left(\frac{dy}{y} - \frac{d\omega}{\omega} \right) = \frac{\omega}{4} \frac{dy}{y},$$

ce qui diminue des $\frac{3}{4}$ de sa valeur l'accélération apparente. On ne trouverait pour le Soleil et les planètes aucun retard réel, mais une accélération apparente $\omega' \frac{dy}{y}$, ω' étant le moyen mouvement du Soleil ou d'une planète.

Admettons que la Lune ait une accélération de $5''$, inexplicable par la théorie. On aura :

$$\frac{\omega}{4} \frac{dy}{y} = 5'',$$

et pour le Soleil :

$$\omega' \frac{dy}{y} = 5'' \times 4 \times \frac{\omega'}{\omega} = 17.5,$$

et non pas $4''$, comme le supposait Cowell. Pour Mercure, on aurait une accélération de $6''$, donc quatre fois plus grande que celle du Soleil. Or nous avons vu que Cowell trouve pour Mercure :

$$\delta\lambda = -0.50,$$

et pour le Soleil :

$$\delta\lambda' = +2.53,$$

ce qui est tout à fait incompatible avec les résultats déduits de la théorie de Darwin.

b. Excentricité et inclinaison non nulles. — Jusqu'à présent, nous avons supposé l'excentricité nulle; ne la négligeons plus. Darwin arrive aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -K(y - \omega), \\ \frac{dx}{dt} &= K(y - \omega), \\ \frac{1}{e} \frac{de}{dt} &= \frac{K}{2x}(11y - 18\omega); \end{aligned}$$

K est un coefficient numérique positif qui dépend de la viscosité.

$\frac{de}{dt}$ est proportionnel à e ; donc si e est initialement petit, il le restera. La configuration $e = 0$ est une configuration d'équilibre; l'important est de savoir si cette solution est stable ou instable. La troisième des équations précédentes est de la forme :

$$\frac{de}{dt} = M e,$$

la solution $e = 0$ sera stable ou instable, suivant que M , c'est-à-dire $11 y - 18 \omega$ sera négatif ou positif.

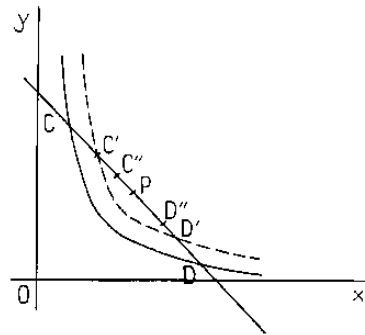


Fig. 23.

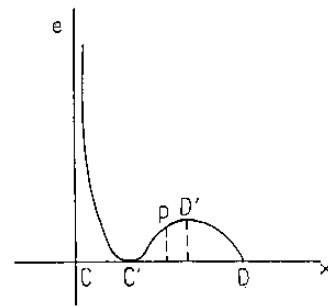


Fig. 24.

Donc on est amené à construire la seconde courbe :

$$11y' = 18\omega = \frac{18}{x^3}, \quad x^3 y' = \frac{18}{11},$$

tracée en pointillé (*fig. 23*); tant que le point représentatif est situé entre C et C', la solution $e = 0$ est stable. Mais à partir de C', cette solution devient instable et, l'excentricité ayant cessé d'être nulle par suite d'une perturbation quelconque, croît jusqu'en D', puis décroît à nouveau jusqu'en D où elle s'annule.

La courbe représentative de l'excentricité se composerait de la portion de droite cC' et du morceau de courbe C'D'D (*fig. 24*). Ceci explique l'origine de l'excentricité lunaire et n'implique nullement qu'à l'origine l'excentricité était différente de zéro ; le frottement des marées a pu faire naître une excentricité qui n'existait pas initialement.

Les marées que la Terre pourrait soulever sur la Lune exerceraient de même une influence sur la rotation de la Lune; et c'est à l'action de ces marées qu'est due l'égalité actuelle de la durée de rotation et de la durée de révolution de la Lune.

Passons maintenant à l'étude de l'inclinaison. Nous prendrons comme plan de référence le plan invariable **II**, c'est-à-dire le plan du maximum

des aires. Soient i l'inclinaison du plan de l'orbite lunaire O sur le plan du maximum des aires et j celle de ce plan sur l'équateur E (fig. 25).

Darwin trouve les équations

$$\frac{dj}{dt} = \frac{k}{2y} (i + j) (1 - 2\omega),$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{ky}{2x} (i + j).$$

Les trois plans considérés se coupent suivant une même droite, par rapport à laquelle le moment de rotation est nul; si i et j sont petits, l'équation des aires s'écrit approximativement :

$$x + y = h \quad \text{et} \quad jy = ix.$$

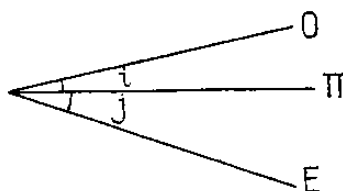


Fig. 25.

Ajoutons les deux équations différentielles qui précèdent; il vient :

$$\frac{d(i+j)}{dt} = \frac{k}{2} \left(1 - 2\frac{\omega}{y} - \frac{y}{x} \right) (i+j) = \frac{k}{2} \left(\frac{x^3y - x^2y^2 - 2}{x^3y} \right) (i+j).$$

La condition de stabilité de la solution $i + j = 0$ est :

$$x^3y - x^2y^2 - 2 < 0.$$

On est amené à déterminer sur la droite antérieure $x + y = h$ les points C'', D'' où s'annule la quantité $x^3y - x^2y^2 - 2$. Le point représentatif sera sur la figure entre C et C''. Puis la solution devient instable en C'' et D''. Si donc nous partons d'un état initial où l'inclinaison $i + j$ est nulle, l'inclinaison restera nulle au début, puis, lorsque le point représentatif sera arrivé en C'', si elle cesse d'être nulle par suite d'une perturbation quelconque, elle augmentera jusqu'en D''; ensuite elle diminuera jusqu'en D où elle s'annulera à nouveau. Le frottement des marées a pu faire naître une inclinaison du plan de l'orbite sur l'équateur, inclinaison qui n'existait pas initialement.

c. *Durée probable de l'évolution.* — Considérons la Lune et la Terre déformée; nous avons vu que, du fait de la viscosité de la Terre, son grand axe fait avec la direction Terre-Lune un angle ε (fig. 26). Quand cet angle

est nul ou égal à 90° , l'effet est nul. Le maximum a lieu pour un angle intermédiaire.

L'action perturbatrice est proportionnelle à $E \sin 2\varepsilon$, si le corps est purement visqueux et non élastique, on démontre que

$$E = \cos 2\varepsilon.$$

L'action perturbatrice sera donc proportionnelle à

$$\sin 2\varepsilon \cos 2\varepsilon = \frac{\sin 4\varepsilon}{2},$$

qui est maximum pour

$$4\varepsilon = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon = 22^\circ 5'.$$

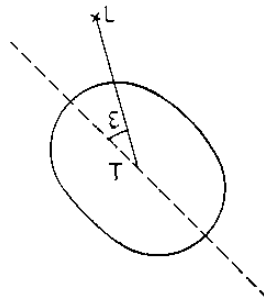


Fig. 26.

A ce maximum de l'action perturbatrice correspond un minimum de temps nécessaire à l'évolution du système Terre-Lune, que Darwin évalue à 54 millions d'années. Mais l'accélération séculaire de la Lune devrait être non pas $6''$, mais $2'15''$; pour la ramener à sa valeur observée, il faudrait multiplier par 30 ce chiffre de 50 millions d'années.

Darwin envisage aussi la quantité de chaleur produite par les frottements. On peut supposer que la chaleur interne du globe est ainsi entretenue. Connaissant le degré géothermique, on peut déterminer la quantité de chaleur que perd la Terre par rayonnement, et calculer le temps nécessaire pour que le frottement suffise à échauffer la Terre : Darwin trouve 3 milliards d'années.

Remarques. — 1° Il faudrait aussi considérer les marées solaires, mais leur effet est beaucoup moins important que celui des marées lunaires.

2° On pourrait encore considérer le fait que la Terre est un aimant et la Lune aussi probablement; toutes deux sont des corps conducteurs. Quand des aimants se meuvent au voisinage de conducteurs, des courants de Foucault prennent naissance, qui jouent le rôle de freins; il y aurait donc encore ralentissement de la rotation de la Terre.

3° Supposons les corps célestes réduits à des points, et qu'il n'existe aucun milieu résistant; il n'y aura pas de perte d'énergie : le principe de Carnot ne trouvera pas son application. Mais les corps célestes ne sont pas des points matériels, et les différentes parties ne peuvent réagir les unes sur les autres sans perte d'énergie. De même, si les phénomènes physiques étaient indépendants de la position respective des astres, il n'y aurait pas non plus de perte d'énergie.

Tout ceci se traduit de la même façon : conservation de la constante des aires, puisque les forces sont uniquement intérieures, et diminution de l'énergie selon le principe de Carnot.

CHAPITRE VI.

COMÈTE D'ENCKE.

La comète d'Encke a une durée de révolution de 3 ans, 3; elle est intéressante à un double point de vue :

1° Elle s'approche très près de l'orbite de Mercure, ce qui permettrait une détermination de la masse de cette planète;

2° Elle a une accélération séculaire inexplicable. Encke, le premier, a essayé d'expliquer cette accélération par l'effet d'une résistance de milieu. La force vive diminuant, il y aurait diminution du grand axe de l'orbite, donc accélération du mouvement de la comète. Cette hypothèse expliquait très bien les apparitions de la comète de 1819 à 1858; puis, à partir de 1858, on crut constater que l'accélération était nulle, ceci par suite d'une erreur de calcul; en fait, de 1858 à 1871, il y a eu réellement accélération décroissante. Puis de 1871 à 1895, cette accélération est redevenue constante, mais beaucoup plus faible qu'auparavant.

Soient v la vitesse de la comète, r son rayon vecteur.

Encke admet une force résistante de la forme $\frac{k_1 r^m}{r^n}$, où k , m , n sont des constantes; et il adopte :

$$m = n = 2.$$

La question a été reprise (1) par Backlund, qui trouve pour l'inégalité de l'anomalie moyenne :

$$K\tau^2 + \nu \cos 2u + \dots,$$

où τ est le temps compté en prenant comme unité la période de révo-

(1) *Bull. Astron.*, t. XI, 1894, p. 473. *Mém. Ac. Imp. des Sciences de Saint-Pétersbourg.*

Bull. astron. (Tome XVII. — Fasc. 2).

lution de la comète et où u est égal à $2mf$, f désignant l'anomalie vraie. Backlund trouve que l'on a

$$K = \frac{P_{m,n}}{\left(\alpha \frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{m+2n-1}{2}}} = \frac{M}{G^{\frac{m+2n-1}{2}}},$$

où G est la constante des aires.

Par suite des perturbations planétaires et de la résistance du milieu, G varie. Posons :

$$K = K_0(1 - \gamma), \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{m + 2n - 1}{2} \frac{\Delta G}{G}.$$

Dans ces conditions, Backlund étudie les dernières apparitions, de 1871 à 1891, qu'il divise en deux périodes, de 1871 à 1881 et de 1881 à 1891. Pour la première période, il trouve $K_0 = 43''$; pour la seconde, $K_0 = 39''$. D'où provient cette différence ?

On peut faire trois hypothèses :

1° K_0 a réellement varié ou, ce qui revient au même, la résistance du milieu a varié;

2° K_0 est resté constant, mais γ n'étant pas nul, la différence est égale à $K - K_0$. Or, si avec Encke, on prend $m = n = 2$, on trouve pour $K - K_0$ environ $2''$, ce qui n'est que la moitié de la différence trouvée;

3° K_0 est resté constant, mais la différence $K - K_0$ trouvée peut résulter de la valeur erronée de la masse de Mercure. En choisissant cette masse, on peut représenter les observations de 1871 à 1891 avec une même valeur de K_0 ; on trouve :

$$\gamma = 0, \quad K_0 = 40'',$$

et pour l'inverse de la masse de Mercure :

$$\frac{1}{m} = 9\,745\,000.$$

Backlund a repris les observations depuis 1819 jusqu'à 1858. En faisant $\gamma = 0$, il trouve :

$$K_0 = 61'' \quad \text{et} \quad \frac{1}{m} = 9\,647\,000,$$

la même masse pour ainsi dire. Il admet donc cette valeur de la masse de Mercure, et suppose que l'accélération a varié de $61''$ jusqu'à $40''$. Ceci exige, d'après Backlund :

$$0 < 2n + m - 1 < 1,$$

avec une erreur relative probable de $\frac{1}{4}$.

La diminution de l'excentricité nécessite $m + n > 2$.

De plus, m doit évidemment être positif. n serait alors négatif, c'est-à-dire que la densité du milieu croîtrait proportionnellement à une puissance positive de la distance au Soleil, ce qui semble improbable.

Influence d'un milieu résistant. — Considérons un astre circulant dans un milieu résistant; la résistance est directement opposée à la vitesse v ; elle est fonction de v et de la densité du milieu, que nous supposons elle-même fonction de la seule distance au Soleil, r . Cette force perturbatrice étant tangentielle, il n'y a pas de variation du plan de l'orbite, donc Ω et i sont constants.

Soient F le Soleil et F' le second foyer, soit w l'anomalie vraie (*fig. 27*).

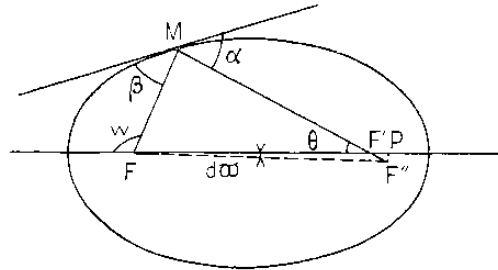


Fig. 27.

La direction de la vitesse n'est pas modifiée, mais seulement sa grandeur. L'astre décrira à l'instant $t + dt$ une ellipse tangente en M à la première. F est fixe, F' se déplacera et viendra en F'' sur MF' , puisque les angles α et β doivent rester égaux. Nous avons :

$$MF + MF' = 2a, \quad MF + MF'' = 2(a + da),$$

donc :

$$F'F'' = 2da.$$

Projetons F'' en P sur FF' :

$$F'P = F'F'' \cos \theta = 2da \cos \theta.$$

Mais on a :

$$F'P = FF'' \cos d\omega - FF' = FF'' - FF'$$

en négligeant $d\omega^2$; d'où

$$F'P = d(2ae) = 2d(ae)$$

et

$$(1) \quad d(ae) = da \cos \theta,$$

au second ordre près.

Quant à $F''P$ il est égal d'abord à $F'F'' \sin \theta$, et d'autre part dépend de la longitude du périhélie

$$F''P = FF'' \sin d\omega.$$

Or on a :

$$FF'' \neq FF' = 2ae,$$

d'où l'égalité :

$$F'F'' \sin \theta = 2ae \, d\omega.$$

De plus, nous avons l'équation des forces vives :

$$v^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

où $\frac{mv^2}{2}$ est l'énergie cinétique, $-\frac{m}{r}$ l'énergie potentielle d'attraction du Soleil, et $-\frac{m}{2a}$ la constante des forces vives.

Le travail de la force perturbatrice est l'accroissement de cette constante, soit $\frac{m}{2} \frac{da}{a^2}$. Si $\frac{m}{2} R$ est la résistance du milieu, son travail est $\frac{m}{2} Rv \, dt$ et l'on a l'égalité :

$$\frac{m}{2} \frac{da}{a^2} = \frac{m}{2} Rv \, dt,$$

qui donnera à chaque instant la dérivée $\frac{da}{dt}$, négative parce que le produit Rv a une valeur algébrique négative.

En premier lieu le périhélie n'aura pas de variation séculaire. En effet, la vitesse v et la résistance R étant les mêmes en deux points symétriques par rapport au grand axe, on a pendant une révolution de l'astre :

$$\delta\omega = 0.$$

D'après la dernière équation la variation du grand axe est :

$$\delta a = \int a^2 Rv \, dt,$$

et l'on déduit, d'après l'égalité (1) :

$$\delta(ae) = \int a^2 Rv \cos \theta \, dt.$$

Au périhélie, on a :

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad d(ae) = da;$$

donc au premier ordre $a(1-e)$ est constant.

À l'aphélie, on a : $\theta = \pi$ et $a(1+e)$ est approximativement constant.

Le paramètre p et l'équation de l'ellipse sont :

$$p = a(1 - e^2), \quad r = \frac{P}{1 + e \cos \omega}.$$

L'équation des forces vives donne :

$$pv^2 = \frac{2P}{r} - \frac{P}{a} = 2(1 + e \cos \omega) - (1 - e^2),$$

soit

$$(2) \quad pv^2 = 1 + e^2 + 2e \cos \omega,$$

équation qui donne la vitesse en fonction de l'anomalie vraie.

Il faut maintenant exprimer θ ; nous avons :

$$FF'' = \text{projection de } FMF' \text{ sur } FF' = (2a - r) \cos \theta - r \cos \omega = 2ae.$$

Or, l'équation des forces vives donne :

$$2a - r = arv^2,$$

donc

$$arv^2 \cos \theta - r \cos \omega = 2ae,$$

et, en multipliant par $\frac{P}{ar}$:

$$pv^2 \cos \theta - (1 - e^2) \cos \omega = 2 \frac{pe}{r} = 2e(1 + e \cos \omega)$$

ou

$$(3) \quad pv^2 \cos \theta = 2e + \cos \omega + e^2 \cos \omega.$$

En combinant les équations (2) et (3), on obtient :

$$(4) \quad pv^2 (\cos \theta - e) = (1 - e^2) (e + \cos \omega).$$

Et l'on tire des expressions de δa et δae :

$$a \delta e = \int a^2 R v (\cos \theta - e) dt.$$

Supposons que l'orbite de l'astre soit presque parabolique, ce qui est le cas des comètes $e \approx 1$.

θ est presque toujours très petit, donc $\cos \theta$ est voisin de 1 et $\cos \theta - e$ sera lui-même très petit; donc δe sera également très petit par rapport à δa . Mais nous avons, en divisant les équations (4) et (2) :

$$\cos \theta - e = \frac{(1 - e^2)(e + \cos \omega)}{1 + e^2 + 2e \cos \omega},$$

qui devient :

$$(5) \quad \cos \theta - e = \frac{1 + \cos \omega}{2 + 2 \cos \omega} (1 - e^2) = \frac{1}{2} (1 - e^2) = \text{const.};$$

d'où, en comparant les expressions de $a \delta e$ et δa :

$$a \delta e = \frac{1 - e^2}{2} \delta a.$$

Ceci suppose la résistance presque nulle à l'aphélie, car à l'aphélie l'équation (5) n'est pas du tout vérifiée. Nous pouvons écrire ainsi :

$$(6) \quad \frac{2 \delta e}{1 - e^2} = \frac{\delta a}{a}.$$

D'autre part, on a :

$$n^2 a^3 = \text{const.} \quad \text{et} \quad 3 \frac{\delta a}{a} + 2 \frac{\delta n}{n} = 0.$$

D'où :

$$\frac{\delta n}{n} = - \frac{3 \delta e}{1 - e^2}.$$

Si δn est positif, c'est-à-dire s'il y a accélération, δe sera négatif, l'excentricité diminuera.

Résistance de milieu $R = K \frac{v^n}{r^n}$. — Supposons la loi de résistance

$$R = K \frac{v^m}{r^n}.$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\delta a = \int R a^2 v dt = a^2 K \int \frac{v^{m+1}}{r^n} dt.$$

Choisissons comme variable l'anomalie vraie w , avec :

$$r^2 \frac{dw}{dt} = \sqrt{p} \quad \text{et} \quad dt = r^2 \frac{dw}{\sqrt{p}}.$$

La dernière équation devient :

$$\delta a = \frac{a^2 K}{\sqrt{p}} \int \frac{v^{m+1}}{r^{n-2}} dw.$$

Remplaçons v et r par leurs expressions en fonction de w :

$$\delta a = \frac{a^2 K}{p^\alpha} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + e^2 + 2e \cos w)^{\frac{m+1}{2}} (1 + e \cos w)^{n-2} dw,$$

avec :

$$\alpha = \frac{m + 2n - 2}{2}.$$

Dans le cas de l'orbite presque parabolique, $e \approx 1$:

$$\delta a = 2^{\frac{m+1}{2}} \frac{a^2}{p^\alpha} K \int_{-\pi}^{+\pi} (1 + \cos w)^{\frac{m+2n-3}{2}} dw.$$

Or l'intégrale est sensiblement constante, donc δa sera proportionnel à $\frac{a^2}{p^\alpha}$, ou encore δn sera proportionnel à $\frac{na}{p^\alpha}$.

Dans le cas de l'orbite presque circulaire e^2 est négligeable, on a $p = a$ et

$$\begin{aligned} \delta a &= 2 \frac{m+1}{2} \frac{K}{a^{2-2}} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 - 2e \cos \omega)^{\frac{m+1}{2}} (1 + e \cos \omega)^{2-2} d\omega \\ &= 2 \frac{m+1}{2} \frac{K}{a^{2-2}} \int_{-\pi}^{+\pi} [1 + e(m+n-1) \cos \omega] d\omega. \end{aligned}$$

Pour avoir δe , il faut multiplier sous le signe d'intégration par

$$\frac{\cos \theta - e}{a} = \frac{e + \cos \omega}{p a v^2} = \frac{1}{a} \frac{e + \cos \omega}{1 + 2e \cos \omega} = \frac{1}{a} (\cos \omega + e - 2e \cos^2 \omega),$$

d'où :

$$\delta e = 2 \frac{m+1}{2} \frac{K}{a^{2-2}} \int_{-\pi}^{+\pi} [1 + e(m+n-1) \cos \omega] [\cos \omega + e - 2e \cos^2 \omega] d\omega.$$

À la limite, pour $e = 0$, il reste :

$$\delta e = 2 \frac{m+1}{2} \frac{K}{a^{2-2}} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \omega d\omega = 0,$$

si l'intégrale est étendue à la circonférence entière.

Il serait facile de pousser plus loin l'approximation : Radau pose $e = 1 - \xi$ où ξ est très petit, mais ceci n'a pas grand intérêt, car les planètes ne subissent pas de résistance de milieu.

Revenons à l'orbite presque parabolique. Pour que nos formules soient valables, il faut que la résistance n'ait pas d'influence à l'aphélie, c'est-à-dire que l'intégrale donnant δa

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos \omega)^{\frac{m+2n-3}{2}} d\omega = 2 \frac{m+2n-3}{2} \int_0^{\pi} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{m+2n-3} d\omega,$$

reste finie. Or à l'aphélie l'on a : $\frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{2}$ et $\cos \frac{\omega}{2}$ s'annule. Si l'exposant $m + 2n - 3$ est positif, il n'y a pas de difficulté; mais s'il est négatif, pour que l'intégrale reste finie, il faut :

$$m + 2n - 3 > -1 \quad \text{ou} \quad m + 2n > 2.$$

Si la dernière inégalité n'est pas vérifiée, les formules ci-dessus ne sont plus valables, c'est-à-dire que les formules approchées ne sont plus exactes à l'aphélie.

Or Backlund pensait que les variations δa , δe ne dépendaient pas du paramètre p : il faudrait donc supposer $\alpha = 0$, c'est-à-dire $m + 2n = 2$; la relation (6) ne serait plus exacte. Or, les données de l'observation prouvent l'exactitude de cette relation : on ne peut donc pas représenter la résistance R par une loi de la forme $K \frac{\rho^m}{r^n}$.

Backlund admet alors qu'on a, non pas un milieu résistant continu, mais un essaim de matière cosmique ayant un mouvement propre. La résistance R sera dirigée suivant la vitesse relative; elle ne serait dirigée suivant la vitesse absolue que si l'anneau était tangent à l'orbite et cet anneau circule autour du Soleil (*fig. 28*). L'effet d'un tel anneau serait

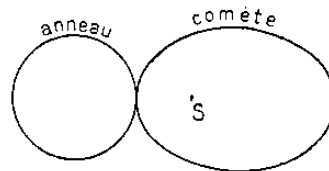


Fig. 28.

localisé près du périhélie, comme les observations semblent le montrer. Mais le périhélie de la comète se déplace sous l'influence de Mercure; la densité de l'essaim varierait d'un périhélie à l'autre, ce qui expliquerait les différences entre 1859 et 1871; mais tout ceci est arbitraire.

En résumé, l'influence d'un milieu résistant est la suivante : Le plan de l'orbite ne varie pas, donc il n'y a pas de variation du nœud, ni de l'inclinaison. La longitude du périhélie ne subit pas de variation séculaire. Le grand axe diminue sensiblement, donc il y a accélération du moyen mouvement n d'après la loi des aires. Enfin, l'excentricité diminue, mais en valeur relative beaucoup moins que le grand axe.

Autres explications de l'accélération de la comète d'Encke. —

1° Bessel supposait que cette accélération était due à des projections issues de la comète. Si une explosion se produit, un projectile est lancé et le noyau de la comète subit une impulsion en sens inverse (*fig. 29*).

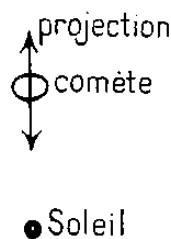


Fig. 29.

Les projectiles seraient lancés dans une direction opposée au Soleil, de façon que la comète soit lancée vers le Soleil.

2° Une autre explication est celle de la pression Maxwell-Bartholi. Il y aurait une pression de la lumière sur les corps très ténus comme les comètes : le Soleil exercerait donc sur eux simultanément une attraction et une répulsion, variant toutes deux suivant la loi de Newton; il en

résulterait simplement une diminution de l'attraction. Mais cette répulsion étant plus forte sur les matières ténues, est plus grande après le périhélie qu'avant, à cause de la dilatation par échauffement.

Si l'action était symétrique par rapport au périhélie, il n'en résulterait de variation ni de e , ni de n , mais seulement du périhélie, comme dans le cas d'une loi ne dépendant que de la distance. Il faut donc supposer une dissymétrie par rapport au grand axe, due à l'échauffement. Alors δa dépend du travail de la force perturbatrice; ce travail sera positif quand la comète s'éloignera du périhélie, et négatif après l'aphélie. De plus, la force étant centrale, \sqrt{p} est constant, donc $a(1-e^2)$ est constant et si a diminue, e diminue aussi. D'autre part, nous n'avons plus de symétrie

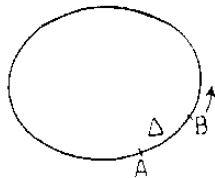


Fig. 30.

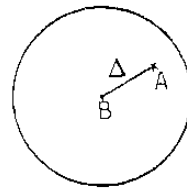


Fig. 31.

par rapport au grand axe, il y aura donc un mouvement du périhélie. Si r et l sont le rayon vecteur et la longitude vraie de la comète, nous avons :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(l - \varpi)}$$

si p ne change pas et si dr et dl sont nuls, il faut que $e \cos(l - \varpi)$ soit constant. Comme e diminue, $|\cos(l - \varpi)|$ doit augmenter, c'est-à-dire que $l - \varpi$ doit se rapprocher soit de zéro, soit de π . Si $l - \varpi < \frac{\pi}{2}$, $l - \varpi$ devra diminuer, donc ϖ augmentera; si $l - \varpi > \frac{\pi}{2}$, au contraire, ϖ diminuera. On pourrait supposer qu'il y a compensation, mais c'est très peu probable.

3° Voici encore une autre explication, due à Charlier. Supposons la comète formée de deux noyaux A et B qui se suivent sur la même orbite (fig. 30) : la seule différence entre les deux est la longitude moyenne de l'époque. A est attiré par B et B est attiré par A . L'action sur A ou sur B est dirigée suivant la tangente, puisque A et B sont proches. C'est donc une résistance : A subira une accélération et B un retard. Si le noyau A est seul observable, on constatera une accélération, si c'est B que l'on observe, c'est un retard qui est mis en évidence.

La fonction perturbatrice est proportionnelle à

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{rr' \cos(\varpi - \varpi')}{r'^3}$$

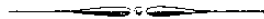
Comme Δ est très petit, la partie complémentaire de la fonction perturbatrice est négligeable devant $\frac{1}{\Delta}$. La force perturbatrice est donc proportionnelle à $\Delta^{\frac{1}{2}}$. Voyons comment varie Δ . De l'aphélie ou périhélie, l'accélération de A est supérieure à celle de B, donc Δ augmente; du périhélie à l'aphélie, c'est le contraire, et Δ diminue. De plus, Δ est proportionnel à la vitesse; tout se passe comme si l'on avait une résistance proportionnelle à $\frac{1}{v^2}$. Ceci est inadmissible, car nous avons vu que l'exposant de v doit être positif.

Mais au lieu du second noyau B, supposons que l'on ait une sphère B à l'intérieur de laquelle se trouve le noyau A, celui-ci étant excentrique (fig. 31). La force est, cette fois-ci, proportionnelle à $AB = \Delta$, c'est-à-dire à v . Cette hypothèse est préférable, mais elle rend mal compte de la relation qui lie δa et δe , et qui donne $m + 2n > 2$.

Charlier a calculé la masse de cette atmosphère excentrique B en supposant que la distance AB soit $2'$. Dans ce cas, l'inverse de la masse serait $2,57 \cdot 10^{12}$, c'est-à-dire $\frac{1}{10\ 000\ 000}$ de la masse de la Terre. Ce serait la première fois que l'on aurait calculé la masse d'une comète. Mais, depuis 1819, ces deux noyaux ne doivent plus décrire du tout la même orbite. Alors Charlier suppose que cette atmosphère B n'est autre qu'une émission de la comète, qui perdrait peu à peu de la matière dans les espaces célestes.

Mais ceci n'explique pas du tout la régularité du mouvement pendant la période 1819-1858, puis l'irrégularité de 1859 à 1871, et la nouvelle régularité de 1871 à 1891. Ce qui embarrassait Encke, c'était l'irrégularité; ce qui embarrasse Bessel et Charlier, c'est la régularité. Jusqu'à présent, l'hypothèse d'Encke d'un milieu résistant est encore la meilleure; cependant l'hypothèse de Charlier aurait l'avantage d'expliquer le retard présenté par la comète de Brorsen. Elle pourrait aussi expliquer comment une comète peut donner naissance à un essaim d'étoiles filantes; tout ceci, d'ailleurs, paraît dû à la dissociation de la matière cométaire et à sa diffusion dans l'espace.

(à suivre)



LES LIMITES DE LA LOI DE NEWTON

(suite et fin)

D'après un cours professé par
Henri POINCARÉ.

CHAPITRE VII.

ATTRACTION.

Représentons l'attraction mutuelle de deux corps de masses m et m' , à la distance r , par

$$\frac{Kmm'}{r^\nu}$$

D'après la loi de Newton, K est une constante et l'on a : $\nu = 2$. Nous nous sommes déjà demandé si l'on peut supposer rigoureusement : $\nu = 2$, et nous avons reconnu que l'on a certainement :

$$\nu < 2,000\ 000\ 04.$$

Mais peut-on réellement considérer K comme une constante ?

Si, par différents procédés, on détermine la masse d'une planète, trouve-t-on des valeurs identiques ? non. Pour Mercure, les divergences sur les valeurs de la masse sont considérables, mais la masse de cette planète étant faible, l'incertitude peut être grande. Pour Jupiter, les valeurs de l'inverse de la masse varient entre 1047,82 et 1047,17 : l'erreur relative sur cet inverse est voisine de $\frac{1}{1000}$. Doit-on en conclure que le coefficient K varie selon que l'on considère l'attraction par Jupiter de ses satellites ou d'une comète ? C'est tout à fait invraisemblable.

Laplace a recherché dans quelles limites K peut être considéré comme constant. Les observations effectuées sur les mouvements de pendules en fer et en bronze, placés dans les mêmes conditions, ne mettent pas en évidence des durées d'oscillation différentes ; K est bien constant, au moins à $\frac{1}{100\ 000}$ près.

Détermination de K à partir de l'inégalité parallactique de la Lune. — Laplace donne un critérium plus précis, tiré de l'inégalité parallactique de la Lune.

K désignant la constante de Gauss, M et m les masses du Soleil et de la Lune, et δ leur distance (*fig. 32*), le potentiel dû à l'attraction du Soleil est

$$\frac{KMm}{\delta}$$

Comme nous étudions le mouvement relatif de la Lune par rapport à la Terre, il faut ajouter une force fictive qui est le produit de la masse de la Lune par l'accélération de la Terre; cette force fictive dérive du potentiel :

$$-\frac{KMmrr' \cos \varphi}{r'^3}$$

Mais ceci suppose que K a la même valeur pour l'attraction Soleil-

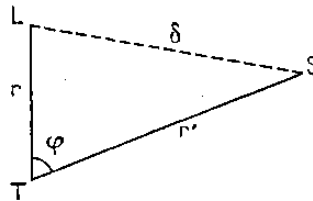


Fig. 32.

Lune et pour l'attraction Soleil-Terre. Supposons les valeurs de K différentes. Soient K et $K' = K(1 + \varepsilon)$. La fonction perturbatrice est alors proportionnelle à :

$$(1) \quad \frac{1}{\delta} - \frac{rr' \cos \varphi}{r'^3} (1 + \varepsilon).$$

Nous cherchons une limite de ε .

Développons $\frac{1}{\delta}$; il vient :

$$\delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi,$$

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r'} (1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{avec } \frac{r}{r'} = \alpha$$

Or on a :

$$1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2 = (1 - \alpha e^{i\varphi})(1 - \alpha e^{-i\varphi})$$

et la formule du binôme donne :

$$(1 - \alpha e^{i\varphi})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \alpha e^{i\varphi} + \frac{3}{8} \alpha^2 e^{2i\varphi} + \frac{5}{16} \alpha^3 e^{3i\varphi} + \dots,$$

$$(1 - \alpha e^{-i\varphi})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \alpha e^{-i\varphi} + \frac{3}{8} \alpha^2 e^{-2i\varphi} + \frac{5}{16} \alpha^3 e^{-3i\varphi} + \dots$$

Les seuls termes qui nous intéressent sont ceux en $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$; leur coefficient est :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}x^3 + \frac{3}{8} \times \frac{5}{16}x^5 + \dots$$

Si l'on néglige les termes en x^5 , ces termes sont :

$$\cos \varphi \left(x + \frac{3}{8}x^3 \right),$$

et le coefficient de $\cos \varphi$ dans l'expression (1) sera :

$$\frac{1}{r'} \left(x + \frac{3}{8}x^3 \right) - (1 + \varepsilon) \frac{rr'}{r'^3}$$

Le seul terme à considérer est donc :

$$\frac{\cos \varphi}{r'} \left[x + \frac{3}{8}x^3 - (1 + \varepsilon)x \right];$$

C'est ce terme qui donne l'inégalité parallactique de la Lune. En effet, négligeons les excentricités et les inclinaisons, nous avons :

$$r = a, \quad r' = a', \quad \varphi = l - l',$$

c'est-à-dire que le terme considéré a pour argument $l - l'$, différence des longitudes de la Lune et du Soleil.

Si l'on suppose $\varepsilon = 0$, il reste :

$$\frac{3}{8} \frac{\cos(l - l')}{a'} x^3,$$

où $\alpha = \frac{a}{a'}$ est le rapport des parallaxes. Si ε n'est pas nul, on commet une erreur relative égale à $\frac{8\varepsilon}{3\alpha^2}$.

Comparons les valeurs de la parallaxe données par ce procédé et par d'autres.

1^o Méthode parallactique :

Observations méridiennes.....	8,802
Occultations.....	8,789
Observations d'un cratère.....	8,767
Moyenne pondérée.....	8,794

2^o Autres procédés : par exemple méthode de la constante de l'aberration : 8,780.

L'incertitude sur la parallaxe est donc de 0,006, mais admettons que l'écart entre deux valeurs peut atteindre 0,04.

Si nous prenons comme valeur de l'erreur 0,04, l'erreur relative sera :

$$\frac{8}{3} \frac{\varepsilon}{\alpha^2} < \frac{1}{200}, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon < \frac{\alpha^2}{200} \times \frac{3}{8}.$$

α est de l'ordre de $\frac{1}{400}$, donc (1)

$$\varepsilon < \frac{1}{50\,000\,000}.$$

Laplace, par le même calcul, avait trouvé $\frac{1}{3\,000\,000}$, parce qu'à l'époque l'incertitude sur la parallaxe était plus grande.

Les attractions Soleil-Lune et Soleil-Terre donnent donc pour K une même valeur à $\frac{1}{50\,000\,000}$ près. Si pour Jupiter il existe des divergences, elles doivent être attribuées aux erreurs d'observations. On pourrait trouver d'autres critères, par exemple les marées; l'attraction de la Lune sur les mers donne la même valeur du coefficient K que l'attraction de la Lune sur les terres, sinon on aurait des marées diurnes énormes.

Détermination de K à partir des perturbations planétaires. — On pourrait se demander si, pour le Soleil qui est très chaud, on a le même coefficient d'attraction K que pour les planètes qui sont froides. Écrivons les équations du mouvement troublé d'une planète quelconque.

Soient m et m' les masses de deux planètes (fig. 33). Posons $K = 1$

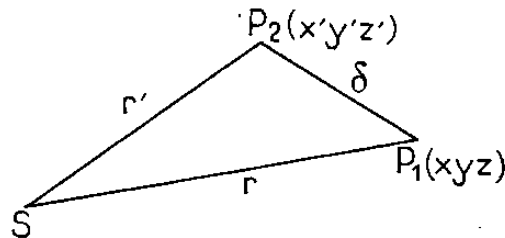


Fig. 33.

pour l'attraction des deux planètes et $K = 1 + \varepsilon$ pour l'attraction Soleil-planète.

Nous avons l'équation :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{(1 + \varepsilon) M x}{r^3} - \frac{m' (x - x')}{\delta^3} - \frac{(1 + \varepsilon) m' x'}{r'^3}.$$

Les deux derniers termes du second membre forment la force perturba-

(1) Il semble que le calcul donne la limite de $\frac{1}{80\,000\,000}$.

trice; le terme $-\frac{m'(x-x')}{\delta^3}$ en est la partie principale, le second terme en est la partie complémentaire. Si l'on négligeait ce terme complémentaire, $\frac{m'}{(1+\varepsilon)M}$ figurerait seul : toutes les masses planétaires nous sembleraient diminuées dans le même rapport. ε ne sera donc mis en évidence que par le terme complémentaire, comme d'ailleurs dans le cas de la Lune. Ce terme donnerait la fonction perturbatrice complémentaire

$$R = -\frac{m'\varepsilon r r' \cos \varphi}{r'^3} = -m'\varepsilon \frac{a'}{a^2} \cos(l-l'),$$

si l'on suppose les excentricités et les inclinaisons négligeables.

Pour le moyen mouvement, on aura :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial l} = -\frac{3m'\varepsilon}{a'^2 a} \sin(l-l') = -\frac{3m'\varepsilon}{a'^2 a} \sin(n-n')t.$$

Intégrons deux fois pour avoir l'inégalité de la longitude. Son coefficient sera :

$$\frac{3m'\varepsilon}{a'^2 a} \frac{1}{(n-n')^2}.$$

Mais on a, d'après la troisième loi de Képler,

$$M = n'^2 a'^3,$$

et l'expression devient :

$$\frac{3m'\varepsilon}{M} \frac{a'}{a} \left(\frac{n'}{n-n'}\right)^2.$$

Nous prendrons comme planète troublante Jupiter et comme planète troublée successivement Mercure, la Terre, Saturne; le coefficient de l'inégalité de la longitude est :

$$\varepsilon \times 4'', \quad \varepsilon \times 20'', \quad \varepsilon \times 800''.$$

ε ne sera donc connu qu'à $\frac{1}{800}$ près. On conserve néanmoins la conviction que le Soleil ne fait pas exception et que son coefficient d'attraction est le même que celui des planètes.

Il reste les comètes pour lesquelles la matière est très ténue. Nous avons vu que les diverses déterminations de l'inverse de la masse de Jupiter sont :

Par ses satellites.....	1047,82
» la comète de Faye.....	1047,79
» Thémis.....	1047,54
» Saturne.....	1047,38
» Polymnie.....	1047,34
» la comète de Winnecke.....	1047,17

Les deux valeurs données par l'étude du mouvement des comètes encadrent les autres; il n'y a donc pas d'inégalité systématique. Cependant, il est à peu près certain que les comètes se comportent autrement que les planètes.

Hypothèse de Laplace. — *a. Généralités.* — Laplace s'est demandé si l'attraction newtonienne pouvait être arrêtée par un écran. Une masse m attire une masse m' suivant la loi $\frac{Kmm'}{r^2}$; si l'on assimile l'attraction à la diffusion de la lumière, on aura la loi :

$$\frac{Kmm'}{r^2} e^{-\alpha l},$$

avec un écran d'épaisseur l , le coefficient d'absorption étant α .

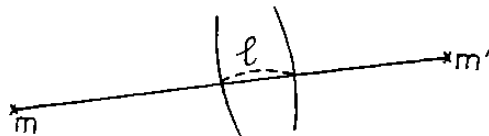


Fig. 34.

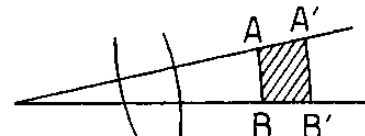


Fig. 35.

Le principe de l'action et de la réaction subsiste. Désignons par f, g, h les composantes de l'attraction. En l'absence de masses, $f dx + g dy + h dz$ est une différentielle exacte et l'équation

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

est vérifiée.

Qu'arrive-t-il si l'on a un écran (fig. 34) ? Avant l'écran, rien n'est changé. Après la traversée de l'écran, l'attraction est affaiblie, mais non déviée, et sur un même rayon vecteur, on a encore la même loi, le coefficient d'attraction K étant remplacé par $K e^{-\alpha l}$.

Considérons alors un petit cône et deux sphères concentriques ayant pour centre le sommet du cône. Cherchons le flux total qui pénètre dans le petit volume hachuré. La force est dirigée suivant le rayon vecteur, c'est-à-dire suivant la hauteur du cône, le flux qui pénètre par les faces latérales est donc nul (fig. 35). Les bases sont entre elles comme les carrés des rayons vecteurs :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Les forces, au contraire, sont en raison inverse des carrés des distances :

$$\frac{F}{F'} = \frac{r'^2}{r^2}.$$

Donc :

$$AB \times F = A'B' \times F'.$$

Le flux de force total qui pénètre dans l'élément de volume est nul. La divergence de la force est nulle, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

La condition solénoïdale de Maxwell subsiste. Mais $f dx + g dy + h dz$ n'est pas une différentielle exacte. D'ailleurs, la condition solénoïdale subsisterait si l'on avait plusieurs points attirants.

b. Cas d'un corps sphérique. — Considérons le cas d'une sphère : elle joue le rôle de corps attirant et de corps absorbant; l'attraction sera par-

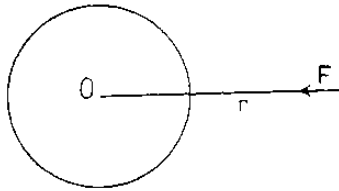


Fig. 36.

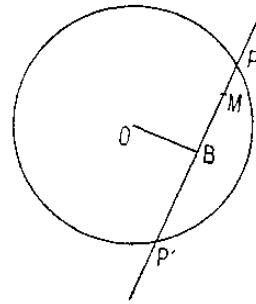


Fig. 37.

tiellement absorbée par la masse même de la sphère : elle se sert à elle-même d'écran.

La résultante de l'attraction de la sphère sur un point extérieur satisfait à la condition de divergence nulle. De plus, la force F est dirigée vers le centre et ne dépend que de la distance r du point au centre de la sphère (fig. 36).

$f dx + g dy + h dz$ est une différentielle exacte, c'est le travail de la force, soit $F dr$. On a donc :

$$f = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad g = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad h = \frac{\partial V}{\partial z},$$

où V ne dépend que de r et satisfait à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Donc, selon un résultat classique, V est proportionnel à $\frac{1}{r}$, puisqu'il doit s'annuler à l'infini : le problème de Dirichlet n'a qu'une solution.

Nous retrouvons la loi de Newton; tout se passe comme si la masse n'était pas la même. L'absorption sera d'autant plus grande que le rayon sera plus grand, donc le coefficient K de la loi de Newton devra être

d'autant plus petit que les masses seront plus grosses. La masse paraît alors diminuée; voyons dans quelle proportion.

L'attraction d'un petit élément dm de la sphère sur un point extérieur sera $\frac{dm}{r^2}$ s'il n'y a pas d'écran et $\frac{e^{-\alpha r} dm}{r^2}$ s'il y a un écran. Tout se passe comme si la densité était divisée par $e^{\alpha r}$.

Une droite coupe la sphère en deux points P et P' (fig. 37). La densité apparente en M est $e^{-\alpha \cdot PM}$, si l'on choisit la densité réelle comme unité.

Posons :

$$OB = x, \quad BM = y, \quad PB = P'B = q;$$

la densité apparente en M est $e^{-\alpha(q-y)}$; la densité apparente moyenne entre P et P' est :

$$\frac{1}{2q} \int_{-q}^{+q} e^{-\alpha(q-y)} dy = \frac{1 - e^{-2\alpha q}}{2\alpha q}.$$

Puisqu'on a $R^2 = q^2 + x^2$, posons :

$$x = R \cos \varphi, \quad q = R \sin \varphi$$

et cherchons la masse totale de la sphère. OB variant de x à $x + dx$, on aura à considérer un petit anneau cylindrique de densité $\frac{1 - e^{-2\alpha q}}{2\alpha q}$, et dont le volume est $2q \times 2\pi x dx$.

La masse totale apparente de la sphère est ainsi :

$$M = \int_0^R 2\pi x \frac{1 - e^{-2\alpha q}}{\alpha} dx = \frac{2\pi R^2}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-2\alpha R \sin \varphi}) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi.$$

D'où, en intégrant par parties le second terme :

$$\begin{aligned} M &= \frac{2\pi R^2}{\alpha} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{2} + \frac{e^{-2\alpha R \sin \varphi}}{2\alpha R} \sin \varphi + \frac{e^{-2\alpha R \sin \varphi}}{4\alpha^2 R^2} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\pi R^2}{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-2\alpha R}}{2\alpha R} + \frac{e^{-2\alpha R} - 1}{4\alpha^2 R^2} \right). \end{aligned}$$

Mais, si l'absorption existe, elle est petite et l'on peut faire un calcul approché. α est très petit, on peut négliger α^2 et l'on trouve pour la densité moyenne :

$$\frac{1 - e^{-2\alpha q}}{2\alpha q} = 1 - \alpha q.$$

Par substitution dans l'expression primitive de la masse M, il vient :

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^R x q (1 - \alpha q) dx = 4\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin^2 \varphi (1 - \alpha R \sin \varphi) d\varphi \\ &= 4\pi R^3 \left(\frac{\sin^3 \varphi}{3} - \alpha R \frac{\sin^4 \varphi}{4} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \left(1 - \frac{3\alpha R}{4} \right). \end{aligned}$$

Le premier terme, correspondant à une absorption nulle, est nécessairement le volume de la sphère. Le second terme donne la correction relative :

$$\frac{\delta M}{M} = -\frac{3}{4} \alpha R.$$

c. Cas de deux sphères en présence. — Considérons maintenant l'attraction de deux sphères : le principe de l'action et de la réaction subsiste. Supposons-les toutes deux absorbantes; soient α et β leurs coefficients d'absorption et R et R' leurs rayons. L'attraction mutuelle à une distance donnée est une fonction $f(\alpha, \beta)$; développons cette fonction en ne conservant que les termes linéaires :

$$f(\alpha, \beta) = f(0, 0) + \alpha \left(\frac{df}{d\alpha} \right)_0 + \beta \left(\frac{df}{d\beta} \right)_0.$$

Or $f(0, 0)$ n'est autre que $\frac{mm'}{r^2}$, avec $K = 1$; $\alpha \left(\frac{df}{d\alpha} \right)_0$ correspond au cas où α serait petit et β nul, c'est : $-\frac{3}{4} \alpha R \frac{mm'}{r^2}$; $\beta \left(\frac{df}{d\beta} \right)_0$ correspond au cas où β serait petit et α nul, c'est : $-\frac{3}{4} \beta R' \frac{mm'}{r^2}$.

L'attraction mutuelle des deux sphères est multipliée par

$$1 - \frac{3}{4} \alpha R - \frac{3}{4} \beta R'.$$

Pour l'attraction Terre-Soleil, nous avons :

$$1 - \frac{3}{4} \alpha R - \frac{3}{4} \beta R'.$$

Si R, R', R'' sont les rayons de la Terre, du Soleil et de la Lune, nous avons pour les attractions Terre-Soleil, Soleil-Lune et Terre-Lune les trois facteurs :

$$1 - \frac{3}{4} \alpha R - \frac{3}{4} \beta R', \quad 1 - \frac{3}{4} \alpha R'' - \frac{3}{4} \beta R', \quad 1 - \frac{3}{4} \alpha (R + R'').$$

en supposant que le coefficient α soit le même pour la Terre et la Lune.

Nous avons vu que les attractions Soleil-Lune et Soleil-Terre ont le même coefficient à $\frac{1}{50\ 000\ 000}$ près; donc :

$$\frac{3}{4} \alpha (R - R'') < \frac{1}{50\ 000\ 000}.$$

Or, on a environ $R = 4R''$, d'où :

$$\frac{9}{16} \alpha R < \frac{1}{50\ 000\ 000} \quad \text{et} \quad 2 \alpha R < \frac{1}{10\ 000\ 000}.$$

Donc, en traversant la Terre, l'attraction n'a pas diminué de $\frac{1}{10\ 000\ 000}$.

De ces résultats, on peut déduire que le coefficient K est le même quand il s'agit du Soleil ou des planètes. Récemment, des expériences terrestres sur le poids d'un même corps à froid, puis à chaud, ont montré que la différence par degré centigrade était sûrement inférieure à 10^{-8} . Pour le Soleil, ceci donnerait au plus 10^{-4} .

Attraction dans les queues cométaires. — *a. Théorie de Roche* ⁽¹⁾. — Toutefois, on peut se demander s'il n'y a pas exception pour les comètes, quant à la valeur du coefficient K. Nous avons vu que les valeurs de la masse de Jupiter déterminées à partir des perturbations de deux comètes encadrent les autres valeurs. Il est donc peu probable qu'il

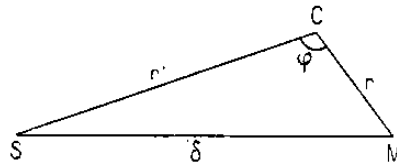


Fig. 38.

ait exception pour les noyaux; mais que peut-on dire des queues de comètes? Newton affirmait que l'attraction seule expliquait la forme des queues: en réalité, ce n'est pas exact.

Roche a étudié la forme de l'atmosphère d'un corps céleste, soumis à l'attraction du Soleil, à celle du corps lui-même et à la force centrifuge.

Soient m la masse de la comète C et m' la masse du Soleil (fig. 38). Le potentiel est :

$$\frac{m}{r} + \frac{m'}{\delta} - \frac{m' r r' \cos \varphi}{r'^3}.$$

La somme des deux derniers termes donne la force perturbatrice.

Puisqu'on étudie le mouvement du point M par rapport à des axes passant par C, le troisième terme est le travail de la force centrifuge appliquée au point M dans le déplacement de ce point, c'est-à-dire par approximation le produit de la force centrifuge en C, $\frac{m'}{r'^2}$ dirigée suivant SC, par la projection sur SC du déplacement du point P soit $-r \cos \varphi$.

Ceci suppose que le coefficient d'attraction de S sur C et sur M est le même, sinon il faut multiplier $-\frac{m' r \cos \varphi}{r'^2}$ par $1 + \varepsilon$.

Pour avoir la forme de l'atmosphère, nous étudierons les surfaces de

(1) *Annales de l'Observatoire de Paris*, Mémoires t. V, 1859, p. 353.

niveau sur lesquelles le potentiel est constant. La force centrifuge dérive du potentiel $\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$. Nous aurons donc :

$$(5) \quad \frac{m}{r'} + \frac{m'}{\delta} - \frac{m' r \cos \varphi}{r'^2} (1 + \varepsilon) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Or on a :

$$\delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi,$$

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r'} \left(1 - 2 \frac{r}{r'} \cos \varphi + \frac{r^2}{r'^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r'} + \frac{rr' \cos \varphi}{r'^3} + \frac{r^2}{r'^3} \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2} + \dots$$

L'équation (5) devient par approximation :

$$\frac{m}{r'} + \frac{m'}{r'} + \frac{m' r^2}{r'^3} \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2} - \frac{m' r \varepsilon \cos \varphi}{r'^2} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Or on a :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r \cos \varphi = y,$$

en prenant CS comme axe des y , et à un instant donné r' est constant. D'où :

$$\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\varepsilon m'}{r^2} y + \frac{m'}{r'^3} \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Telle est l'équation de la surface de l'atmosphère, qui est nécessairement une surface de niveau.

Si ε était nul, cette surface aurait trois plans de symétrie passant par le point C, les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Or il n'en est pas ainsi. L'attraction doit donc être moins grande pour la queue de la comète que pour le noyau : tout se passe comme si la queue était soumise, outre la force newtonienne, à une force répulsive inversement proportionnelle au carré de la distance. Telle est la théorie statique de Roche. Et l'on peut indiquer l'analogie suivante : si l'attraction du Soleil sur les mers n'était pas la même que celle du Soleil sur les terres, on aurait une marée diurne énorme, qui rappellerait la forme de la queue cométaire.

b. Théorie de Bredikhine (1). — Considérons le noyau de la comète, qui décrit une parabole. Au point C, une fraction de la comète se détache, par suite d'une explosion, et est soumise à une force répulsive. Cette particule décrira une hyperbole tangente à la parabole en C et ayant également le Soleil pour foyer (fig. 39). Quelles relations y a-t-il entre l'hyperbole et la parabole ?

(1) *Annales de l'Observatoire de Moscou*, vol. III et suiv., *passim*.

D'abord le paramètre est le même; en effet, la vitesse v au point C est la même; la constante des aires \sqrt{p} est donc la même. De plus l'équation des forces vives donne :

$$\frac{v^2}{2} = \frac{K}{r} - \frac{K}{2a},$$

où $2a$ est le grand axe de l'orbite, et K la constante de Gauss, que nous supposons égale à 1 dans l'attraction Soleil-noyau. Alors K sera négatif dans l'attraction Soleil-particule. On aura, pour le noyau :

$$K = 1, \quad a = \infty \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{2} = \frac{1}{r},$$

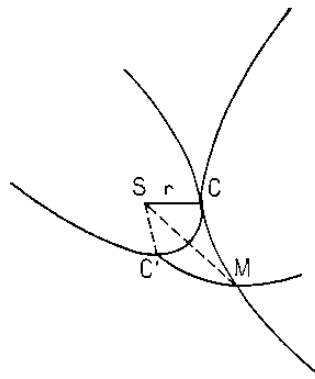


Fig. 39.

et pour la particule :

$$\frac{v^2}{2} = \frac{K}{r} - \frac{K}{2a}.$$

D'où la relation :

$$\frac{K-1}{r} = \frac{K}{2a};$$

il y a donc un rapport constant entre le rayon vecteur SC et l'axe transverse de l'hyperbole. Au bout d'un certain temps, le noyau est venu en C' et la particule en M . Le point C est connu; C' étant donné, nous pouvons déterminer M , donc construire l'hyperbole, car l'aire CSC' est égale à l'aire CSM .

Considérons le point C' comme fixe, et faisons varier le point C . Le point M va décrire un certain lieu, qui est précisément la forme de la queue cométaire, si K est donné. Inversement, si l'on connaît la forme de la queue, on en déduira K ; on trouve ainsi, suivant les comètes, $K = -1, -2, -3, -5$ et même -18 . A partir de $K = -18$, la forme de la queue cométaire varie peu. Mais, suivant les instants des explosions C , on aura des points plus ou moins brillants sur la queue; l'étude de la répartition de ces points conduit jusqu'à $K = -36$.

Telle est la théorie de Bredikhine, qui semble préférable à celle de Roche.

c. *Pression de Maxwell-Bartholi.* — Il reste maintenant à expliquer cette force répulsive dont l'existence est à peu près certaine.

Bessel (1) supposait que le Soleil et la queue cométaire portaient des charges électriques de même signe. Cette théorie n'est pas entièrement abandonnée : il se peut que les rayons ultraviolets électrisent la queue cométaire à son approche du Soleil.

Faye attribuait la répulsion à la chaleur du Soleil, c'est-à-dire à sa lumière. Aujourd'hui on préfère l'hypothèse de l'action de la lumière, la pression de Maxwell-Bartholi, dont l'existence n'est guère douteuse. Cette hypothèse diffère assez peu de celle de Faye, mais les expériences de Faye ne pouvaient pas mettre en évidence une pression aussi faible.

La forme des queues des comètes ne peut s'expliquer que par une

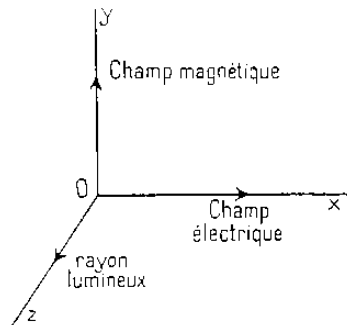


Fig. 40.

force répulsive; tâchons d'expliquer cette force par la pression de Maxwell-Bartholi.

Considérons une onde lumineuse plane se propageant suivant la direction Oz, direction du rayon lumineux. Maxwell fait intervenir l'élasticité du milieu fluide et admet qu'il existe, dans un champ électrique, des pressions et des tensions, et de même dans un champ magnétique. Ces effets se superposent. Si l'on a suivant Ox un champ électrique et suivant Oy un champ magnétique, ces deux champs ont respectivement les actions suivantes :

	Suivant Ox.	Suivant Oy.	Suivant Oz.
Champ électrique.....	Tension	Pression	Pression
» magnétique.....	Pression	Tension	Pression
Résultante.....	0	0	Pression

Il y a donc au total une pression dans le sens du rayon lumineux (fig. 40).

Considérons, d'autre part, la théorie de l'émission : si les corpuscules lumineux frappent une paroi absorbante, ils restent sur cette paroi; s'ils

(1) *Abhandlungen*, t. I.

frappent une paroi réfléchissante, ils rebondissent : donc, dans les deux cas, on a une pression. Tout se passe comme si la théorie de l'émission était exacte : on pourra appliquer à la lumière le théorème de la quantité de mouvement. Un faisceau de lumière solaire venant frapper normalement une paroi entièrement absorbante de 1 m^2 donnera une pression de $0, \text{mg } 6$; si la paroi est entièrement réfléchissante, il faut doubler la pression, ce qui donne $1, \text{mg } 2$. La pression totale est proportionnelle à la section du faisceau. C'est Bartholi qui a reconnu expérimentalement l'existence de la pression prévue par Maxwell.

Si l'on éclaire vivement de la poudre de lycopode répandue dans le vide, on peut former des queues de comètes artificielles : on constate, en effet, une déviation des particules éclairées. L'éclairement solaire variant en raison inverse du carré de la distance, on doit trouver, pour la répulsion de Maxwell-Bartholi, une répulsion variant comme $\frac{1}{r^2}$. Considérons une petite sphérule : l'attraction newtonienne est proportionnelle à la masse, donc au volume; la répulsion de Maxwell est proportionnelle à sa surface. Pour la matière très ténue, la répulsion l'emportera sur l'attraction. Telle serait l'origine des queues de comètes, formées de particules plus petites que $0,^{\mu}24$ d'après Bartholi.

CHAPITRE VIII.

VITESSE DE PROPAGATION DE L'ATTRACTION.

Hypothèse de Laplace. — Étant donnée une planète, il faudra, pour avoir la direction apparente de l'attraction, composer la vitesse d'attraction \bar{V} avec la vitesse de la planète \bar{v} : comme dans un choc qui dépend de la vitesse relative, non de la vitesse absolue, des corps qui se choquent.

Considérons une planète P, décrivant une orbite circulaire autour du Soleil S, de rayon a (*fig. 41*). La direction de l'attraction est PS, et la vitesse de la planète lui est perpendiculaire; la direction apparente de l'attraction sera la résultante de \bar{V} et de $-\bar{v}$; l'attraction est donc déviée d'un angle φ qui a pour tangente $\frac{v}{V}$. La nouvelle attraction \bar{R} a les composantes : $R \cos \varphi$ et $R \sin \varphi$, respectivement sur PS et sur la normale, R désignant la valeur absolue, φ est petit et du premier ordre; donc les composantes de \bar{R} sont R sur PS et $-R \frac{v}{V}$ sur la tangente à l'orbite,

Ainsi l'hypothèse équivaut à introduire une seule force perturbatrice

tangente à l'orbite, de grandeur $-\frac{Rv}{V}$, ou, avec

$$K = 1 \quad \text{et} \quad R = \frac{Mm}{a^2}, \quad \text{on a} \quad -R \frac{v}{V} = -\frac{Mm v}{a^2 V}.$$

Tout se passe comme si la planète éprouvait une résistance de milieu. L'intégrale des forces vives s'écrit

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{Mm}{r} = -\frac{Mm}{2a},$$

où les trois termes sont l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, et la cons-

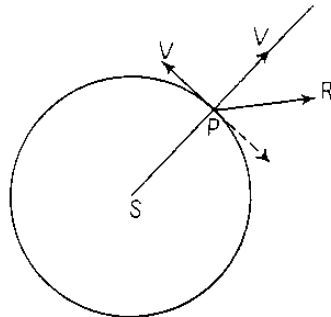


Fig. 41.

tante des forces vives. La différentielle de cette constante, $-\frac{Mm}{2a}$, est égale au travail de la force perturbatrice :

$$\frac{Mm}{2} \frac{da}{a^2} = -\frac{Mm}{a^2} \frac{v^2}{V} dt \quad \text{ou} \quad \frac{da}{dt} = -2 \frac{v^2}{V}.$$

Introduisons le moyen mouvement n par la troisième loi de Képler, soit :

$$n^2 a^3 = \text{const.} \quad \text{et} \quad 3 \frac{da}{a} + 2 \frac{dn}{n} = 0;$$

puis remplaçons une fois v par na ; il vient :

$$\frac{dn}{dt} = 3 \frac{n}{a} \frac{v^2}{V} = 3n^2 \frac{v}{V}.$$

Et l'on déduit, en intégrant deux fois, puisque n est la dérivée de la longitude moyenne l :

$$\delta l = \frac{3}{2} \frac{v}{V} n^2 t^2.$$

On a donc une accélération séculaire dans le mouvement de la planète, selon l'hypothèse d'une résistance de milieu.

Supposons, par exemple que V soit égal à la vitesse de la lumière; $\frac{v}{V}$ est

égal à la constante de l'aberration : $\frac{1}{10\ 000}$; on trouverait pour la Terre au bout d'un an, nt devenant égal à 2π , et en transformant en minutes d'arc :

$$\delta l = \frac{3}{2} \times \frac{1}{10^4} \times 4\pi^2 \times \frac{180 \times 60}{\pi} \sim 20',$$

ce qui est beaucoup trop grand. On pourrait admettre au maximum une accélération de $2''$ par siècle : la vitesse de l'attraction serait donc au moins

$$\frac{20 \times 60}{2} \times 100^2 = 6\ 000\ 000$$

fois plus grande que la vitesse de la lumière; c'est le résultat classique de Laplace.

Hypothèse de Lehmann-Filhès (1). — Supposons qu'une planète soit attirée par le Soleil, non pas dans sa position actuelle, mais dans la

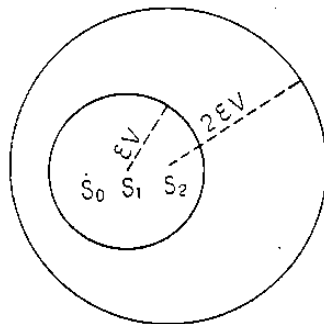


Fig. 42.

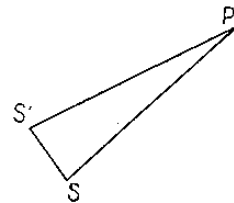


Fig. 43.

position qu'il occupait un instant auparavant. Soient S_0 la position du Soleil à l'instant t , S_1 sa position à l'instant $t-\varepsilon$, S_2 à l'instant $t-2\varepsilon$, etc... (fig. 42).

Les surfaces d'égal attraction à l'instant t sont des sphères non concentriques de centres S_1, S_2, \dots et de rayons respectivement $\varepsilon V, 2\varepsilon V, \dots$, V étant la vitesse de propagation de l'attraction.

L'attraction se fera non dans la direction PS , mais dans la direction PS' , S' étant la position qu'occupait le Soleil à l'instant $t-\tau$ (fig. 43) et l'on a $PS' = \tau \times v$, v désignant la vitesse du Soleil. Or le Soleil se meut d'un mouvement propre vers l'apex. Étudions le mouvement relatif de P par rapport au Soleil. Nous aurons une force réelle et une force fictive :

$$\frac{mM}{PS^2} + \frac{m^2}{PS^2},$$

$\frac{m}{PS^2}$ étant l'accélération du Soleil.

(1) *Astron. Nachr.*, n° 2630, 1884.

Dans la nouvelle hypothèse, la planète P est attirée non par S, mais par S' (fig. 44), donc la force est :

$$\frac{mM}{PS'^2} - \frac{m^2}{P'S^2}$$

La force perturbatrice sera la différence des expressions précédentes et, m étant très petit devant M, on peut négliger les termes en m².

Le Soleil décrit sensiblement une droite, avec la vitesse εV; prenons l'axe des x sur cette droite (fig. 43). Dans la théorie ordinaire, les composantes de l'attraction ont l'expression :

$$X = - \frac{mM(x-x')}{r^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{mM}{r} \right)$$

et les deux expressions analogues Y et Z.

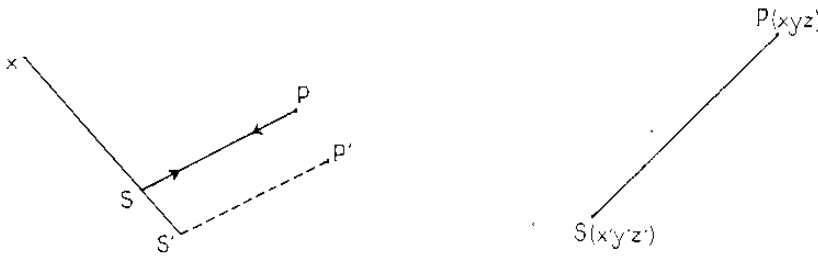


Fig. 44.

Fig. 45.

Dans la théorie nouvelle, les coordonnées du Soleil seront x' + δx', y', z', δy' et δz' étant nuls, puisque la vitesse du Soleil est sur l'axe des x. Les composantes de la force deviennent :

$$X + \delta X = X + \frac{\partial X}{\partial x'} \delta x', \quad Y + \delta Y = Y + \frac{\partial Y}{\partial x'} \delta x', \quad Z + \delta Z = Z + \frac{\partial Z}{\partial x'} \delta x'.$$

D'où

$$\begin{aligned} \delta X &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} \left(\frac{mM}{r^2} \right) \delta x', \\ \delta Y &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x'} \left(\frac{mM}{r^2} \right) \delta x', \\ \delta Z &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x'} \left(\frac{mM}{r^2} \right) \delta x'. \end{aligned}$$

Mais r dépend de x et de x' par la différence x - x' seulement; l'on a :

$$\frac{d}{dx} = - \frac{d}{dx'}$$

et pour les composantes de la force perturbatrice :

$$\delta X = -\delta x' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{mM}{r} \right),$$

$$\delta Y = -\delta x' \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{mM}{r} \right),$$

$$\delta Z = -\delta x' \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{mM}{r} \right).$$

Mais on a, d'autre part :

$$\delta x' = \varepsilon V \tau \quad \text{et} \quad \tau = \frac{r}{V},$$

donc :

$$\delta x' = \varepsilon r.$$

Le travail de la force perturbatrice est :

$$\begin{aligned} \delta X dx + \delta Y dy + \delta Z dz \\ = -\delta x' \left(dx \frac{\partial^2}{\partial x^2} + dy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + dz \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) \left(\frac{mM}{r} \right) &= -\delta x' d \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{mM}{r} \right) \\ &= -\varepsilon m M r d \frac{\frac{1}{r}}{dx}. \end{aligned}$$

D'ailleurs, si l'on a à l'instant considéré $x' = y' = z' = 0$, l'expression

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} = -\frac{x - x'}{r^3},$$

se réduit à

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} = -\frac{x}{r^3},$$

et le travail de la force perturbatrice devient :

$$\varepsilon M m r d \left(\frac{x}{r^3} \right).$$

Nous avons choisi pour axe des x la direction de la vitesse du Soleil. Avec des axes quelconques, on peut décomposer cette vitesse suivant trois axes, et envisager séparément les trois composantes, qui sont petites, du travail de la force perturbatrice. Prenons maintenant le grand axe de l'orbite comme axe des x , le petit axe comme axe des y , et l'axe Oz perpendiculaire.

Les trois composantes du travail de la force perturbatrice seront :

$$\varepsilon m M r d \left(\frac{x}{r^3} \right), \quad \varepsilon' m M r d \left(\frac{y}{r^3} \right), \quad \varepsilon'' m M r d \left(\frac{z}{r^3} \right),$$

εV , $\varepsilon' V$, $\varepsilon'' V$ étant les composantes de la vitesse du Soleil. On a toujours $z = 0$, et la troisième composante est nulle.

Nous étudierons encore la variation séculaire du grand axe osculateur. La différentielle de la constante des forces vives est égale au travail de la force perturbatrice

$$\frac{m M da}{2 a^2} = \varepsilon m M r d\left(\frac{x}{r^3}\right) + \varepsilon' m M r d\left(\frac{y}{r^3}\right).$$

Or l'on a la formule

$$r d\left(\frac{x}{r^3}\right) = d\left(\frac{x}{r^2}\right) - x \frac{dr}{r^3},$$

et une formule analogue en y .

Le premier terme étant une différentielle totale exacte aura une intégrale nulle, celle-ci étant prise tout le long de l'orbite.

Il reste

$$m M \frac{da}{2 a^2} = - m M (\varepsilon x + \varepsilon' y) \frac{dr}{r^3}.$$

Introduisons les formules du mouvement elliptique :

$$\begin{aligned} x &= a \cos u, \\ y &= a \sqrt{1 - e^2} \sin u = a \sin u, \end{aligned}$$

en négligeant e^2 ,

$$r = a(1 - e \cos u).$$

D'où :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} (1 - e \cos u)^{-2} = \frac{1}{a^2} (1 + 2e \cos u),$$

et en différentiant :

$$- 2 \frac{dr}{r^3} = - \frac{2e}{a^2} \sin u du;$$

et

$$\frac{m M da}{2 a^2} = - m M \frac{e}{a} (\varepsilon \sin u \cos u + \varepsilon' \sin^2 u) du,$$

Compte tenu des valeurs des deux intégrales :

$$\int_0^{2\pi} \sin u \cos u du = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 u du = \pi,$$

la variation du grand axe proviendra seulement du terme en ε' , et l'on obtient :

$$da = - \varepsilon' a e du,$$

en remplaçant $\sin^2 u$ par sa valeur moyenne $\frac{1}{2}$. Or, l'on a à peu près :

$$du = n dt \quad \text{et} \quad an = v,$$

d'où :

$$da = - \varepsilon' e v dt.$$

Nous avons trouvé dans l'hypothèse de Laplace :

$$\frac{da}{dt} = -2v \frac{v}{V}$$

et ici nous avons :

$$\frac{da}{dt} = -\varepsilon' e v,$$

où ε' est de l'ordre de $\frac{v}{V}$.

Comparant les deux formules, nous constatons que la perturbation du demi-grand axe sera plus petite, dans le rapport $\frac{e}{2}$, avec l'hypothèse de Lehmann-Filhès qu'avec celle de Laplace.

Nous déduirions ici :

$$\delta t = \frac{3}{4} n^2 t^2 e \varepsilon'.$$

Supposons que ε' soit égal à $\frac{v}{V}$; au lieu de $V = 6\,000\,000\,c$, c désignant la vitesse de la lumière, il faudrait prendre

$$V = 6\,000\,000 \times \frac{e}{2} \times c = 50\,000 \times c,$$

puisque l'excentricité de l'orbite de la Terre est $e = \frac{1}{60}$.

Si, au lieu de la Terre, on considérait Mercure, on trouverait environ $V = 1\,000\,000\,c$. Cette deuxième hypothèse exige donc une vitesse d'attraction un million de fois supérieure à celle de la lumière.

Propagation du potentiel. — On peut encore supposer que c'est le potentiel, et non l'attraction, qui se propage. Les surfaces équipotentielles seront des sphères ayant pour centre les positions successives du Soleil. Supposons qu'aux époques $0, -\varepsilon, -2\varepsilon, -3\varepsilon, \dots$, le Soleil ait occupé les positions $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$. Les sphères centrées sur ces points et de rayons $0, \varepsilon V, 2\varepsilon V, 3\varepsilon V, \dots$ seront à l'instant zéro les surfaces équipotentielles.

Sur les sphères successives, le potentiel sera : $\frac{M}{\varepsilon V}, \frac{M}{2\varepsilon V}, \frac{M}{3\varepsilon V}$, M désignant la masse du Soleil.

Soit W le potentiel, l'attraction a pour composantes

$$\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial z};$$

le potentiel perturbateur est $W - W_0$, W_0 désignant le potentiel dans le cas de la vitesse de propagation infinie. La force perturbatrice est :

$$\frac{\partial(W - W_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(W - W_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(W - W_0)}{\partial z};$$

elle dérive d'un potentiel et son travail est une différentielle exacte. Ainsi, après une révolution d'une planète, ce travail sera nul; il n'y aura donc pas de perturbation séculaire. Seules les perturbations périodiques mettraient en évidence une telle propagation du potentiel. Mais pour être constatée expérimentalement, la vitesse de propagation devrait être relativement très faible, ce qui n'est certainement pas.

CHAPITRE IX.

LOI DE WEBER (1).

D'après l'électrostatique, les molécules électrisées se repoussent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance. Quand on considère l'électrodynamique, la loi n'est plus la même. Weber a proposé une loi qui rend compte aussi bien de la loi de Coulomb en électrostatique que de celle d'Ampère en électrodynamique; il suppose que la répulsion entre deux éléments de courant est :

$$F = f \frac{mm'}{r^2} (1 - \varepsilon r'^2 + 2 \varepsilon r r''),$$

où r est la distance des deux éléments, où r' et r'' sont les dérivées de r par rapport au temps et où ε est égal au quotient $\frac{1}{V^2}$, V désignant la vitesse de la lumière.

Tisserand a pensé que la même loi pouvait être utilisée en Astronomie, la force F étant alors une attraction et V pouvant ne pas être la vitesse de la lumière.

Le travail de la force est Fdr , soit :

$$\frac{F dr}{fmm'} = \frac{dr}{r^2} - \frac{\varepsilon r'^2 dr}{r^2} + 2 \varepsilon \frac{r'' dr}{r}.$$

Or, on peut écrire :

$$r'' dr = r' dr' = d \frac{r'^2}{2}.$$

et

$$\frac{F dr}{fmm'} = \frac{dr}{r^2} + \varepsilon \left(-r'^2 \frac{dr}{r^2} + \frac{dr'^2}{r} \right) = -d \frac{1}{r} + \varepsilon d \frac{r'^2}{r} = -d \left[\frac{1}{r} (1 - \varepsilon r'^2) \right].$$

Donc le travail est une différentielle exacte; la force dérive du potentiel

$$\frac{1}{r} (1 - \varepsilon r'^2).$$

Il y a conservation de l'énergie, et égalité de l'action et de la réaction.

(1) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. IV, p. 499.

Problème des deux corps. — Étudions la loi obtenue. Considérons deux corps de masses m et m' ; posons $m = 1$ et $fm' = K > 0$. Ces deux corps pourront être le Soleil et une planète, ou deux planètes.

La force est centrale, le mouvement est plan, et admet l'intégrale des aires

$$r^2\theta' = C,$$

θ désignant un angle polaire. L'équation des forces vives s'écrit :

$$\frac{r'^2 + r^2\theta'^2}{2} = K \frac{1 - \varepsilon r'^2}{r} - \frac{K}{2a}.$$

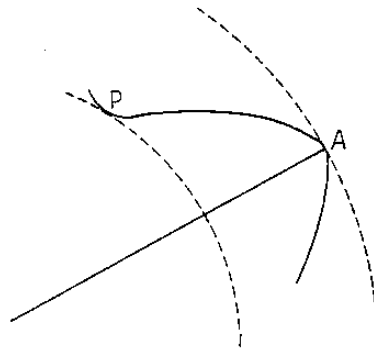


Fig. 46.

En éliminant le temps entre les deux équations, comme dans le mouvement newtonien classique, nous formons l'équation différentielle de la trajectoire :

$$\left(1 + \frac{2K\varepsilon}{r}\right) \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = -\frac{1}{r^2} + \frac{2K}{C^2 r} - \frac{K}{C^2 a}.$$

Cette équation s'intégrerait rigoureusement par les fonctions elliptiques, mais il suffit ici d'une intégration approchée.

Étudions la quadrature qui donne l'angle θ

$$\theta = \int \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{2K\varepsilon}{r}}{-\frac{1}{r^2} + \frac{2K}{C^2 r} - \frac{K}{C^2 a}}} d\frac{1}{r}.$$

On voit que r oscille entre deux limites que l'on détermine en écrivant que le dénominateur de la quantité placée sous le radical reste positif. Donc partant d'un périhélie P, on ira jusqu'à l'aphélie A, et la courbe s'achèvera par symétrie (fig. 46). Tout se passe comme dans le cas d'une force centrale; il n'y aura de variation séculaire que pour la longitude du périhélie.

Désignons par $a(1-e)$ et $a(1+e)$ les distances périhélie et aphélie, et, dans l'intégrale donnant l'angle θ , faisons le changement de variable

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{a(1-e^2)};$$

$\varphi = 0$ correspond à un périhélie, $\varphi = \pi$ à un aphélie. Le dénominateur de la quantité placée sous le radical se réduit à $\frac{e^2 \sin^2 \varphi}{a^2(1-e^2)^2}$. L'angle polaire Θ compris entre les rayons vecteurs de deux périhélies consécutifs est ainsi

$$\Theta = 2 \int_0^\pi \sqrt{1 - \frac{2K\varepsilon(1+e \cos \varphi)}{a(1-e^2)}} d\varphi,$$

ou approximativement

$$\Theta = 2\pi + \frac{2\pi K\varepsilon}{a(1-e^2)}.$$

Donc sur la trajectoire, à chaque révolution, le rayon vecteur du périhélie, au lieu de reprendre sa position initiale, avance de l'angle $\frac{2\pi K\varepsilon}{a(1-e^2)}$.

Pour une valeur convenable de V et de $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cette loi explique bien le mouvement de Mercure, mais pas du tout celui de la Lune.

D'ailleurs, l'avance du périhélie par révolution a même forme que si l'on ajoute à l'attraction newtonienne une attraction variant en raison inverse du cube de la distance. Nous pouvons donner à ε une valeur telle que nous trouvions $38''$ comme avance du périhélie de Mercure et des avances négligeables pour les autres planètes et la Lune. En effet, $\frac{1}{a}$ sera d'autant plus grand que la planète sera plus voisine du Soleil; et pour la Lune $n^2 a^3$ sera petit, alors qu'il sera grand pour les planètes.

Si l'on prend pour V la vitesse de la lumière, on trouve pour Mercure :

$$\delta\pi = 14''.5.$$

Pour avoir une avance du périhélie de $38''$ par siècle, il faut supposer : $V = 180\ 000$ km/s. Mais, en modifiant un peu l'hypothèse de Tisserand, on pourrait trouver $38''$ par siècle, en conservant comme valeur de V la vitesse de la lumière.

CHAPITRE X.

HYPOTHÈSE DE LESAGE (1).

Généralités. — Newton avait rencontré, parmi ses contemporains, une grande répugnance à admettre des actions à distance. Pour éviter de telles actions, Lesage (1724-1803) a supposé les espaces interstellaires parcourus

(1) Voir aussi : POINCARÉ, *Science et méthode*, Paris 1908, p. 263.

par des corpuscules très ténus animés de vitesses très grandes et égales. Ceux-ci sont uniformément distribués dans l'espace, et leurs vitesses sont réparties dans toutes les directions. Une sphère isolée ainsi bombardée reste en repos, il en résulte seulement une sorte de pression sur sa surface.

Considérons deux sphères A et B (*fig. 47*). Elles se forment mutuellement écran; B ne recevra plus de chocs dans tous les sens. Les sphères sont

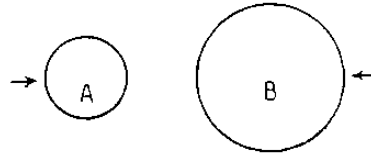


Fig. 47.

comme poussées l'une vers l'autre; il y a donc attraction apparente à distance.

Cette hypothèse va rendre compte de la loi du carré des distances. Considérons le Soleil et la Terre. La pesanteur se faisant sentir dans les mines, les corpuscules passent à travers le sol, mais pas librement, sinon il n'y aurait pas d'attraction. Les corps graves doivent donc être considérés comme formés d'un ensemble d'atomes sphériques, très petits par rapport aux distances qui les séparent, sinon la surface des corps jouerait le rôle d'écran pour l'attraction, ce qui est inadmissible, nous venons de le voir.

Que se passe-t'il au moment d'un choc ? Soit un atome sphérique, et un corpuscule qui le frappe (*fig. 48*). *a* : Si l'atome est poli et élastique, il y a réflexion totale avec la même vitesse; *b* : Si le corps est poli, mais imparfaitement élastique, il n'y a plus égalité entre les angles d'incidence et de réflexion; *c* : Le corps peut être parfaitement inélastique et parfaitement impoli, alors le corpuscule s'arrête au choc; *d* : Le corps est inélas-

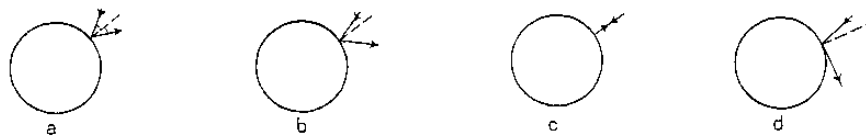


Fig. 48.

tique et parfaitement poli, le corpuscule part suivant la tangente au point de choc.

La première hypothèse est à rejeter, car il n'y aurait pas attraction. En effet, après réflexion, la distribution des vitesses des corpuscules ne sera pas modifiée. Considérons les corpuscules circulant dans un plan passant par le centre de la sphère, et arrivant sur cette sphère à une

certaine distance du centre (*fig. 49*). Les points d'impact sont uniformément distribués, et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence : la distribution des vitesses n'est pas modifiée; cette hypothèse n'explique pas l'attraction. De même, dans la théorie cinétique des gaz, les corps plongés dans les gaz ne s'attirent pas, ils sont seulement soumis à une pression.

Dans l'hypothèse de Lesage, il faut supposer que les corpuscules ne se choquent pas entre eux : ils choquent seulement les atomes; tout se passe comme dans un gaz très raréfié, dans un tube de Crookes. Mais, dans un tube de Crookes, les molécules de gaz se comportent comme des corps polis et élastiques; ici, il faut supposer qu'il y a inélasticité et impoli parfaits. Darwin a montré que la loi du carré des distances n'est qu'appro-

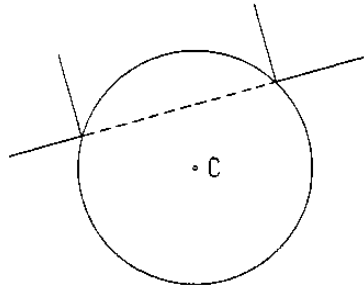


Fig. 49.

chée, et que l'égalité de l'action et de la réaction ne subsiste pas, dans le cas des corps imparfaitement élastiques et polis. Il ne reste donc que l'hypothèse de l'inélasticité et de l'impoli parfaits.

Action des corpuscules sur une sphère. — Soient m la masse d'un corpuscule et n le nombre de corpuscules par unité de volume. La densité du milieu sera :

$$\rho = nm.$$

Cherchons quel est le nombre des corpuscules qui frappent un élément de surface $d\omega$ dans l'unité de temps. Nous supposons que ρ est constant, et que la vitesse v des corpuscules est la même dans toutes les directions. Les extrémités des vecteurs-vitesses autour d'un point O se trouvent sur une sphère de rayon v , et elles sont uniformément réparties.

Considérons un petit cône de sommet O et d'angle solide $d\sigma$. Ce cône découpe sur la sphère une surface $v^2 d\sigma$. Le nombre de corpuscules contenus dans un volume-unité, et ayant une vitesse parallèle à l'axe du cône, sera : $\frac{n d\sigma}{4\pi}$. Leur masse sera :

$$nm \frac{d\sigma}{4\pi} = \rho \frac{d\sigma}{4\pi}.$$

Si tous les corpuscules avaient des vitesses parallèles, il faudrait considérer un petit cylindre de hauteur v et de base $d\omega$ (fig. 50); les corpuscules qui choqueraient $d\omega$ entre les époques zéro et 1 se trouveraient dans un tel cylindre; leur nombre et leur masse totale seraient :

$$nv \, d\omega \cos \theta \quad \text{et} \quad \rho v \, d\omega \cos \theta.$$

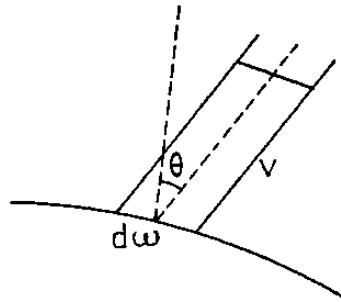


Fig. 50.

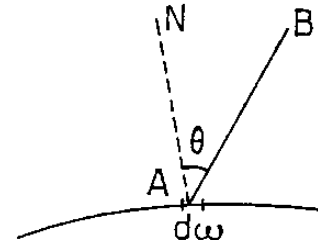


Fig. 51.

Mais les vitesses des corpuscules ne sont pas parallèles.

Considérons ceux dont la vitesse est parallèle à l'axe de notre petit cône et qui frappent $d\omega$ (fig. 51). Il faut remplacer la densité ρ par la densité calculée $\frac{\rho \, d\tau}{4\pi}$; leur masse sera :

$$\frac{\rho \, v \, d\omega \cos \theta}{4\pi} \, d\tau.$$

La projection de la vitesse sur la normale à $d\omega$ est $v \cos \theta$. La quantité de mouvement projetée sur cette normale est :

$$d\omega \frac{\rho \, v^2 \cos^2 \theta}{4\pi} \, d\tau,$$

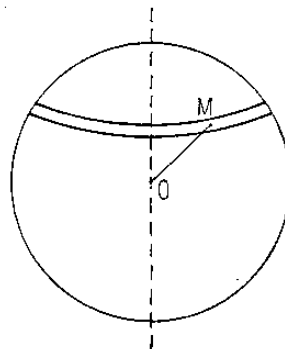


Fig. 52.

et représente la pression exercée sur $d\omega$, car la force est égale à la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps.

Considérons maintenant tous les éléments $d\tau$ tels que l'angle BAN

soit compris entre θ et $\theta + d\theta$ (*fig. 52*); nous avons une petite zone sur la sphère de rayon r , de surface $2\pi \sin\theta \, d\theta$.

Et la pression sur cette zone est :

$$d\omega \frac{\rho c^2}{2} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta.$$

Il faut enfin faire varier θ entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

$$d\omega \frac{\rho c^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = d\omega \frac{\rho c^2}{2} \left[-\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = d\omega \frac{\rho c^2}{6}.$$

Ainsi, la pression par unité de surface est égale à $\frac{\rho c^2}{6}$. Dans la théorie cinétique des gaz, on trouve $\frac{\rho c^2}{3}$, soit une valeur double, mais on suppose qu'il y a élasticité parfaite.

Attraction de deux sphères dont l'une est très petite. — Nous avons vu que la seconde sphère ne subit pas les chocs arrêtés par la première. Considérons toutes les droites qui rencontrent les deux sphères et, suivant une de ces droites, deux corpuscules c et c' qui ont des vitesses égales et opposées (*fig. 53*). Les quantités de mouvement arrêtées sont

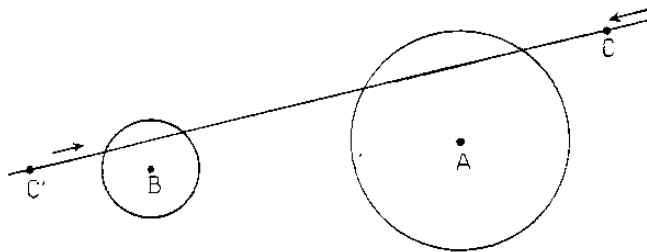


Fig. 53.

égales et de sens contraires. De plus, à cause de l'uniformité de la distribution, les corpuscules qui ont des vitesses égales et opposées sont en nombre égal. Donc, la quantité de mouvement que A intercepte pour B est égale à celle que B intercepte pour A, pendant le même intervalle de temps dt . Il y a égalité entre l'action et la réaction.

Supposons maintenant que les centres A et B de deux sphères de rayons a et b soient à une distance R l'un de l'autre, a étant infiniment petit par rapport à b et à R (*fig. 54*). Quelle est la pression subie par la petite sphère A ? Si tous les corpuscules avaient même direction MM' , ceux qui frapperaient A entre les instants zéro et t seraient à l'instant zéro à l'intérieur d'un petit cylindre de hauteur $MM' = vt$, où v est tou-

jours la vitesse des corpuscules; le volume de ce cylindre serait : $\pi a^2 v$ et la masse des corpuscules contenus dans ce volume : $\pi \rho a^2 v$.

Si maintenant nous considérons les corpuscules dont la vitesse est parallèle à l'axe d'un petit cône de base $d\sigma$, comme ci-dessus, la masse devient :

$$\frac{1}{4} \rho a^2 v d\sigma.$$

Pour avoir la quantité de mouvement, il faut multiplier par $v \cos \theta$, vitesse suivant la direction R; il vient :

$$\frac{1}{4} \rho a^2 v^2 \cos \theta d\sigma.$$

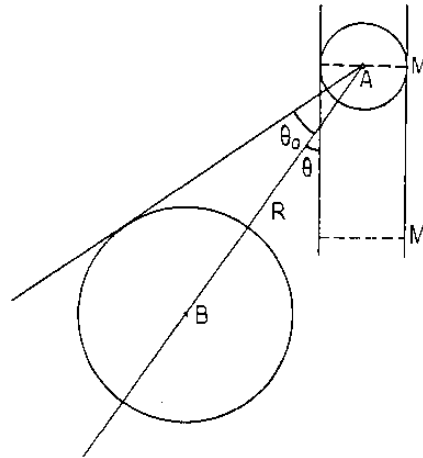


Fig. 54.

Intégrons, d'abord quand θ est compris entre θ et $\theta + d\theta$; il vient alors :

$$\frac{\pi \rho a^2 v^2}{2} \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Puis intégrons par rapport à θ ; quelles seront les limites? le corpuscule ne doit pas être intercepté par la grosse sphère. Pour un point m de A, nous avons un cône d'ombre et, comme a est très petit, tous ces cônes seront peu différents du cône circonscrit à la sphère B ayant pour sommet le centre de la sphère A; θ variera donc de zéro à θ_0 . D'où l'expression :

$$\frac{\pi \rho a^2 v^2}{4} (\sin^2 \theta)_{\theta_0}^0 = \frac{\pi \rho a^2 v^2}{4} \sin^2 \theta_0 = \frac{\pi \rho v^2}{4} \frac{a^2 b^2}{R^2}.$$

Cette expression représente la force exercée par B sur A; cette force est dirigée suivant AB, et inversement proportionnelle au carré de la distance.

Attraction de deux sphères quelconques. — Nous avons supposé jusqu'à présent a très petit. Darwin a fait le calcul pour des sphères de rayons quelconques, calcul que l'on peut éviter par un artifice de raisonnement. Si la petite sphère n'existait pas, tout se passerait comme si la grosse sphère bombardée rayonnait (*fig. 55*). Un élément $d\omega$ reçoit sous un angle φ un rayonnement proportionnel à $d\omega \cos \varphi$; le rayonnement réfléchi est encore proportionnel à $\cos \varphi$.

Maintenant, au lieu d'une sphère pleine, considérons une sphère remplie de sphérules très petites rayonnantes, disposées en couches sphériques homogènes. Ces sphérules sont infiniment petites par rapport à leurs distances mutuelles. Quelle sera la loi du rayonnement émis par $d\omega$

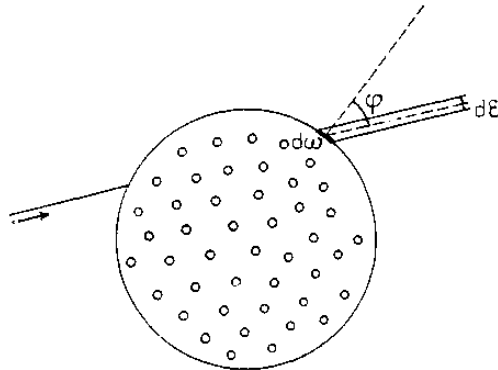


Fig. 55.

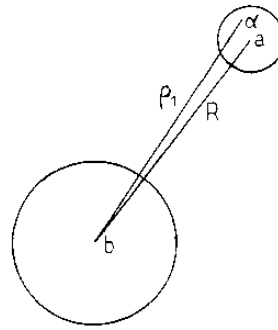


Fig. 56.

suivant l'angle φ ? Cette loi dépendra de la distribution des sphérules; or tout est symétrique par rapport à la normale à l'élément $d\omega$. Le rayonnement ne dépend donc que de l'angle φ , et a pour valeur

$$d\omega F(\varphi).$$

Comme la loi de répartition des sphérules est arbitraire, on peut la choisir de façon que $F(\varphi)$ soit précisément égal à $\cos \varphi$. Darwin pensait, à tort, qu'il suffirait de considérer une sphère homogène; cette hypothèse donnerait $\cos^2 \varphi$, et non $\cos \varphi$. Mais la loi existe, même si elle est inconnue, et l'on peut choisir

$$F(\varphi) = \cos \varphi.$$

Nous considérons donc la loi de distribution des sphérules de façon à avoir le rayonnement $d\omega \cos \varphi$.

Alors l'action d'une telle sphère sur une petite sphère extérieure sera la même que si la grosse sphère était pleine. De même, pour deux sphères de rayons finis a et b , dont les centres sont situés à la distance R , il y a égalité de l'action et de la réaction; nous pouvons remplacer la sphère de rayon a par le système des sphérules de rayon α (*fig. 56*). L'attraction

de B sur une sphérule sera :

$$\frac{\pi \rho v^2}{4} \frac{\alpha^2 b^2}{\rho_1^2}.$$

Nous avons ici la loi du carré des distances; donc l'attraction sur une couche sphérique homogène sera la même que si toute la masse était concentrée au centre, c'est-à-dire en a .

Nous aurons l'attraction :

$$\frac{\rho v^2 b^2}{R^2} F(a)$$

en posant

$$\frac{F(a)}{R^2} = \sum \frac{\pi}{4} \frac{\alpha^2}{\rho_1^2}.$$

L'attraction de la sphère A sur la sphère B sera de même :

$$\frac{\rho v^2 \alpha^2}{R^2} F(b).$$

Le principe d'égalité de l'action et de la réaction donne :

$$b^2 F(a) = \alpha^2 F(b),$$

ou, K désignant une constante à déterminer :

$$F(a) = K \alpha^2 \quad \text{et} \quad F(b) = K b^2.$$

L'attraction des deux sphères est donc :

$$\frac{\rho v^2 b^2}{R^2} K \alpha^2.$$

Or, nous avons trouvé $K = \frac{\pi}{4}$ dans le cas particulier d'une petite sphère; donc quels que soient les rayons, l'attraction des deux sphères est

$$\frac{\pi}{4} \frac{\rho v^2 \alpha^2 b^2}{R^2}.$$

On obtient rigoureusement la loi de Newton, ce qui n'aurait pas lieu avec l'hypothèse de l'élasticité et du poli imparfaits.

Attraction de deux corps quelconques. — Considérons deux corps quelconques : le premier composé de n atomes sphériques de rayon a , le deuxième de n' atomes sphériques de rayon b (*fig. 57*).

L'attraction est égale à :

$$\frac{\pi}{4} \rho \frac{v^2}{R^2} n \alpha^2 n' b^2 = \frac{k^2 MM'}{R^2}.$$

Donc la masse attirante est proportionnelle à na^2 , ou $n'b^2$, soit :

$$kM = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \rho na^2 v.$$

D'autre part, la masse d'un atome sphérique a est :

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \alpha,$$

α étant sa densité.

Il faudrait admettre que $\frac{na^2}{na^3 \alpha}$ soit le même pour tous les corps, c'est-à-dire que αx soit le même pour tous les atomes matériels : la densité serait inversement proportionnelle au rayon. Si l'on admet l'unité de

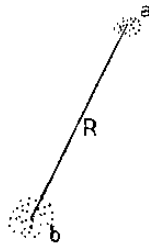


Fig. 57.

la matière, a et α sont les mêmes pour tous les atomes, et la loi du carré des distances reste vraie même dans le cas d'élasticité et de poli imparfaits.

Chaleur dégagée. — Nous avons vu que la masse des corpuscules qui frappent la sphère dans l'unité de temps est :

$$\pi \rho a^2 v \frac{d\sigma}{4\pi}.$$

Leur force vive sera :

$$\pi \rho a^2 v \frac{d\sigma}{4\pi} \frac{v^2}{2} = \rho \frac{a^2 v^3}{2} \frac{d\sigma}{4}.$$

Pour toutes les directions possibles, l'intégrale de $d\sigma$ est 4π . Donc une sphère de rayon a détruit par seconde une quantité d'énergie :

$$\frac{\pi}{2} \rho a^2 v^3.$$

Pour un corps composé de n atomes sphériques a , l'énergie détruite et transformée en chaleur sera :

$$J = \frac{\pi}{2} \rho na^2 v^3 \text{ par seconde.}$$

Remarque. — Un corps B placé entre deux corps A et C ne forme pas écran, ou du moins son effet est inférieur à 10^{-7} pour la Terre. Or, si la Terre était pleine, elle arrêterait les corpuscules, c'est-à-dire l'attraction; la Terre est donc composée d'atomes dont les distances sont très grandes par rapport à leurs dimensions : la surface occupée par les projections des atomes sur un grand cercle est inférieure à la fraction 10^{-7} de la surface apparente de la Terre; les corpuscules qui rencontrent un petit cercle, atomes en projection, sont arrêtés (*fig. 58*); donc, si n est le nombre de petits cercles et A le rayon de la Terre, on a :

$$n \pi a^2 = \varepsilon \pi A^2, \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{1}{10^7}.$$

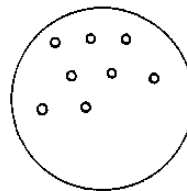


Fig. 58.

Résistance du milieu corpusculaire au mouvement des corps. — Considérons la résistance qu'éprouverait une molécule sphérique si elle était isolée. Il suffit de calculer la pression en tenant compte de la vitesse v de la molécule.

Les corpuscules dont la vitesse est parallèle à l'axe du petit cône de base $d\sigma$ ont pour masse par unité de volume $\frac{\rho d\sigma}{4\pi}$. Nous avons toujours le petit cylindre $\pi a^2 v$; mais ici v n'est plus la vitesse absolue, mais bien la vitesse relative (*fig. 59*). La molécule a pour vitesse u , le corpuscule a



Fig. 59.

pour vitesse v . Soit θ l'angle de ces deux vitesses; la vitesse relative sera :

$$\sqrt{u^2 - 2uv \cos \theta + v^2} = \sqrt{(v - u \cos \theta)^2 + u^2 \sin^2 \theta}.$$

Or, u est petit devant v , $u^2 \sin^2 \theta$ est négligeable devant le premier terme; la vitesse relative devient : $v - u \cos \theta$; la masse des corpuscules frappant la molécule, dans l'unité de temps, parallèlement à l'axe du petit cône est :

$$\rho \pi a^2 (v - u \cos \theta) \frac{d\sigma}{4\pi}.$$

Ces corpuscules perdent, au choc, leur vitesse relative; ils prennent alors la vitesse u . Sur la vitesse u , la vitesse absolue a pour projection $v \cos \theta$, la vitesse relative est alors : $v \cos \theta - u$.

La quantité de mouvement perdue est donc :

$$\rho a^2 (v - u \cos \theta) (v \cos \theta - u) \frac{d\sigma}{4} = \rho a^2 [v^2 \cos \theta - u v (1 + \cos^2 \theta)] \frac{d\sigma}{4}.$$

Intégrons par rapport à $d\sigma$: le premier terme $v^2 \cos \theta$ donne zéro. Le second terme donne la résistance :

$$\rho a^2 u v (1 + \cos^2 \theta) \frac{d\sigma}{4}.$$

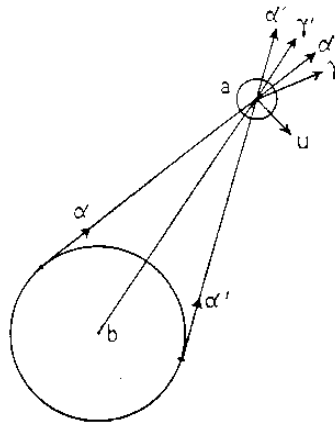


Fig. 60.

Si θ varie d'abord de θ à $\theta + d\theta$, il vient

$$\frac{\pi \rho a^2 u v}{2} (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta.$$

Intégrons enfin par rapport à θ , qui varie de zéro à π :

$$\frac{\pi \rho a^2 u v}{2} \left[- \left(\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \right]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi \rho a^2 u v.$$

Nous avons donc, pour un corps composé de n atomes, la résistance :

$$\mathcal{R} = \frac{4}{3} \pi n \rho a^2 u v.$$

Considérons maintenant, non plus une sphère, mais deux sphères. Leur attraction ne sera-t-elle pas modifiée par leur mouvement ? Si les deux sphères sont au repos, il est évident que leur attraction mutuelle est dirigée suivant la ligne des centres. Mais si les deux corps sont en mouvement, on a un phénomène analogue à l'aberration, ce qui justifie les idées de Laplace sur la propagation de l'attraction. En effet, soit une sphère a attirée par une sphère de grand rayon b (fig. 60). Les corpuscules

arrêtés seront ceux dont la vitesse est située à l'intérieur d'un cône de sommet a , circonscrit à la sphère b .

Si la sphère a est en mouvement, le nombre des corpuscules frappant a va-t-il être modifié ? Supposons la vitesse de a perpendiculaire à la ligne des centres (trajectoire circulaire). Le nombre de rencontres est proportionnel à la vitesse relative γ , la vitesse absolue étant α ,

$$\begin{aligned} \text{Mais} \quad & \gamma > \alpha. \\ & \gamma' < \alpha'. \end{aligned}$$

Il y a compensation des vitesses; le nombre des rencontres ne sera pas sensiblement modifié. Après le choc, ces corpuscules prennent une vitesse u . La quantité de mouvement sera Mu . Il faut donc évaluer M , masse totale des corpuscules choquants, qui donnait précédemment la force

$$\frac{\pi}{4} \rho v^2 \frac{a^2 b^2}{R^2},$$

dirigée suivant la ligne des centres.

Comme les corpuscules ne sont pas arrêtés, mais prennent la vitesse u , nous aurons, en outre, suivant la tangente à l'orbite la force

$$\frac{\pi}{4} \rho v u \frac{a^2 b^2}{R^2}.$$

Pour deux corps composés respectivement de n sphères a et n' sphères b , nous aurons la résistance

$$\mathcal{R}' = \frac{\pi}{4} \rho v u \frac{n a^2 n' b^2}{R^2};$$

c'est l'effet de résistance étudié par Laplace. Le rapport $\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}}$ sera

$$\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} = \frac{3}{16} \frac{n' b^2}{R^2}.$$

Supposons que b soit le Soleil et a la Terre; le rapport du rayon du Soleil à la distance Soleil-Terre est de l'ordre de $\frac{1}{200}$; reprenons pour n' le nombre $\varepsilon = \frac{1}{10^7}$ considéré plus haut. On obtient

$$\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} = \frac{3}{16} 10^{-7} \left(\frac{1}{200} \right)^2 < \frac{1}{2 \cdot 10^{12}}.$$

Laplace, en ne tenant compte que de \mathcal{R}' arrive à une valeur de v supérieure à $6 \cdot 10^8$ fois la vitesse de la lumière; si l'on tient compte de \mathcal{R} qui est $2 \cdot 10^{12}$ fois plus grand que \mathcal{R}' , il vient :

$$v > 12 \times 10^{18}.$$

D'autre part, le rayon de la Terre a est $\frac{2 \times 10^9}{\pi}$, et avec $\varepsilon > \frac{1}{10^7}$, on obtient :

$$na^2 < 4 \cdot 10^{16}.$$

La masse de la Terre en unités C.G.S. est $6 \cdot 10^{27}$, d'où k^2 désignant la constante de la gravitation universelle, égale à $\frac{6,67}{10^8}$.

$$kM = 1,5 \cdot 10^{24}.$$

Mais

$$kM = \sqrt{\frac{\pi}{4} \rho} na^2 c$$

donne :

$$\rho = \frac{1}{8} \cdot 10^{-19}.$$

La quantité de chaleur produite J est alors équivalente par seconde à $J = 3 \cdot 10^{57}$ ergs ou égale à $0,7 \cdot 10^{50}$ petites calories (1).

Ceci signifierait que la Terre recevrait 10^{20} fois plus de chaleur que n'en émet le Soleil; ce qui est impossible.

Remarques. — 1° Pour conserver l'hypothèse de Lesage, peut-on admettre que l'inélasticité et l'impoli ne sont pas parfaits ? En supposant que tous les atomes sont semblables, la loi d'égalité de l'action et de la réaction subsiste, et si le rapport $\frac{a}{R}$ est très petit, la loi de Newton est conservée aussi.

Au lieu de 10^{20} , on trouverait, dans le cas d'inélasticité et d'impoli imparfaits, 10^{18} ou 10^{19} , c'est-à-dire que l'on ne gagnerait pas grand'chose : en effet, la chaleur produite est : $\Sigma M(v^2 - v'^2)$ (v' , vitesse du corpuscule après le choc). Or, la Terre ne formant pas écran, il faut supposer que l'on a

$$\frac{\Sigma M c - \Sigma M v'}{\Sigma M c} \leq 10^{-7},$$

donc, avec $v' < v$, que $\frac{\Sigma M(v^2 - v'^2)}{\Sigma M(v - v')}$ est toujours de l'ordre de grandeur de $v + v'$, c'est-à-dire très grand.

2° A l'époque de Lesage, personne ne songeait à la théorie ondulatoire de la lumière. On assimilait les corpuscules de Lesage à des boulets lumineux. Aujourd'hui, la théorie de l'émission est abandonnée, mais la pression de Maxwell-Bartholi est la même que celle produite par un bombardement. Il est donc encore permis de considérer l'hypothèse de Lesage comme l'effet de rayons lumineux; c'est ce qu'a fait Lorentz,

(1) POINCARÉ, dans *Science et méthode*, p. 267, donne le nombre un peu différent $2 \cdot 10^{50}$ petites calories.

mais il a trouvé une quantité de chaleur encore plus grande que celle qu'avait trouvée Lesage.

3° Pour expliquer la non-absorption de l'attraction, on a cherché à assimiler les rayons de Lesage aux rayons X qui sont très peu absorbables. Il reste toujours la même difficulté : s'il n'y a pas d'absorption, il n'y aura pas d'attraction et, s'il y a absorption, il y a dégagement de chaleur.

4° Il reste encore une issue : un corps frappé par des rayons X émet des rayons secondaires, ceux-ci étant plus absorbables que les rayons X. Mais, pour conserver l'hypothèse de Lesage, il faudrait supposer que les rayons secondaires X' sont moins absorbables encore que les rayons X : alors ces rayons X' ne seraient plus transformés en chaleur, puisqu'ils traverseraient tous les corps. Mais tout ceci est arbitraire.

5° On a encore supposé que les corps radioactifs devaient leur énergie inépuisable à des rayons infiniment pénétrants qui sillonnent l'espace, et qui ne sont absorbés que par les corps radioactifs, ce qui produit de la chaleur : ce seraient là les rayons X'. Alors la loi fondamentale de Newton, proportionnalité de la masse et du poids, subsiste-t-elle pour les corps radioactifs ? Sagnac a essayé de résoudre ce problème par l'expérience, mais il n'a pas réussi.

CHAPITRE XI.

DYNAMIQUE DE L'ÉLECTRON.

Influence du mouvement sur les phénomènes optiques. — Soit T la Terre, A une étoile que nous observons (*fig. 61*). A cause de l'aberration, la direction d'observation n'est pas TA, mais une direction voisine. Prenons sur TA une longueur TB égale à la vitesse de la lumière, et soit BC un vecteur équipollent au vecteur opposé à la vitesse de la Terre. BC est la vitesse absolue de la Terre, résultante de la vitesse absolue du système solaire (constante) et de la vitesse relative de la Terre par rapport au Soleil. Nous observons d'abord l'étoile dans la direction TC; la vitesse de la Terre étant variable, BC viendra en BC', et nous l'observerons alors suivant TC'.

Si nous connaissons la direction vraie TA de l'étoile, nous connaîtrions le point B, donc BC, donc le mouvement absolu de la Terre; mais ce que l'on observe, c'est seulement la direction variable TC. L'angle CTC' dépend du rapport $\frac{CC'}{TC}$; or CC' est la variation de la vitesse de la Terre que nous connaissons et TC diffère très peu de TB. Au lieu du rapport $\frac{CC'}{TC}$, nous pouvons considérer $\frac{CC'}{TB}$. L'aberration ne donne donc que CC', c'est-

à-dire la variation de la vitesse relative de la Terre, seule variable. En tenant compte du carré de l'aberration, on aurait $\frac{CC'}{TC}$ et non $\frac{CC'}{TB}$; TC pourrait nous renseigner sur la vitesse absolue du système solaire, car il différerait suivant les régions du ciel. En réalité, même des observations très précises ne donneraient aucun résultat. En effet, on a cherché à mettre en évidence, par des expériences terrestres le mouvement absolu de la Terre. En observant les étoiles avec une lunette pleine d'eau, on espérait trouver une valeur différente de la constante d'aberration : la déviation observée dépendant du rapport de la vitesse de la lumière à l'intérieur de la lunette à la vitesse de la Terre. Mais ces expériences ne donnent que

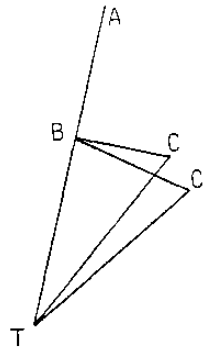


Fig. 61.

des résultats négatifs. Pourquoi ? L'explication en a été donnée par Lorentz.

Temps apparent ou temps réduit. — Soient deux stations A et B situées à une distance D l'une de l'autre; en A et B, deux observateurs veulent régler leurs montres l'une sur l'autre : ils vont se faire des signaux lumineux. Il faudra tenir compte de la vitesse de la lumière.

A fait un signal que B lui renvoie aussitôt : A prendra la moyenne du temps de l'aller et du retour, pour avoir le temps employé par la lumière pour aller de A à B. Dans l'expérience de Fizeau, B est remplacé par un miroir.

A l'aller, la lumière met le temps $\tau = \frac{D}{V}$; au retour, le temps $\tau_1 = \frac{D}{V} = \tau$.

Or, A note le temps $\tau + \tau_1$, et prend $\frac{\tau + \tau_1}{2}$ au lieu de τ comme correction de son chronomètre. Ceci est exact si les deux stations A et B sont fixes.

Mais supposons un déplacement d'ensemble de AB avec une vitesse v dirigée dans le sens AB (fig. 62). Alors

$$\tau = \frac{D}{V - v}, \quad \tau_1 = \frac{D}{V + v}.$$

En prenant comme correction $\frac{\tau + \tau_1}{2}$ au lieu de τ , l'erreur est $\frac{\tau - \tau_1}{2}$.

Or, on a :

$$\frac{\tau + \tau_1}{2} = \frac{DV}{V^2 - v^2}, \quad \frac{\tau - \tau_1}{2} = \frac{Dv}{V^2 - v^2}.$$

La vitesse de la lumière mesurée est $\frac{V^2 - v^2}{V}$. L'erreur sera de l'ordre

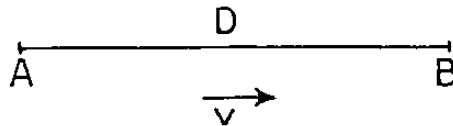


Fig. 62.

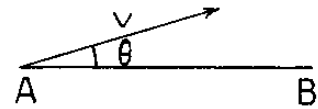


Fig. 63.

de $\frac{v^2}{V^2}$, c'est-à-dire du carré de l'aberration. L'erreur commise pour le réglage de la montre est

$$\frac{\tau - \tau_1}{2} = \frac{Dv}{V^2},$$

au carré près de l'aberration. Donc la montre A avancera sur la montre B de la quantité fixe $\frac{Dv}{V^2}$; ainsi réglée, la montre A donne le temps réduit.

Si les deux stations ont une vitesse v , faisant un angle θ avec la direction AB (fig. 63), l'erreur deviendra : $\frac{Dv \cos \theta}{V^2}$.

Tout ceci n'est vrai qu'à condition de négliger le carré de l'aberration. Soient alors trois stations A, B, C (fig. 64). On peut : 1° comparer les

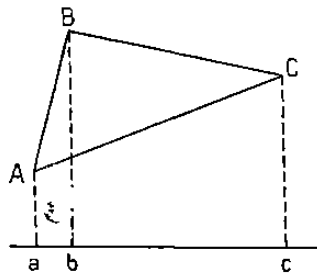


Fig. 64.

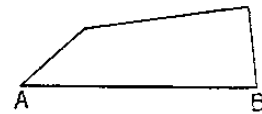


Fig. 65.

montres A et B, puis les montres B et C et en déduire la comparaison des montres A et C; 2° comparer directement les montres A et C. Des deux manières, le résultat doit être le même; en effet, le décalage de B par rapport à A est proportionnel à ab ; celui de C par rapport à B, à cb , et le décalage de C par rapport à A sera proportionnel à ac . Des expériences d'optique ne suffisent donc pas pour décider si le système ABC est fixe, ou s'il possède une translation.

Supposons encore que la lumière aille de A ou B par deux chemins différents (*fig. 65*). Quelle sera la différence des temps ? La lumière paraîtra mettre le même temps que si le système était au repos. La différence des temps paraîtra indépendante du mouvement absolu du système.

Hypothèse de Lorentz. — Lorentz suppose que les corps en mouvement éprouvent une contraction dans le sens du mouvement lui-même : une sphère se transformera en un ellipsoïde un peu aplati. La contraction est la même pour tous les corps : alors comment nous en apercevrons-nous ? les mesures ne peuvent nous donner aucun renseignement car le mètre placé dans la direction du mouvement s'est contracté également ; nous définirons alors la longueur unité par le temps mis par la lumière pour la parcourir.

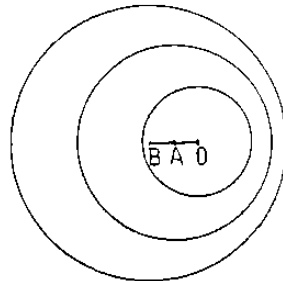


Fig. 66.

Considérons une surface rigoureusement sphérique de rayon r , et mesurons-la avec le mètre ainsi défini : dans la direction du mouvement, ce mètre se sera contracté avec un coefficient α ; sa longueur vraie sera devenue αr . Donc le rayon de la sphère, dans le sens du mouvement, aura pour longueur mesurée $\frac{1}{\alpha} r$, dans le sens perpendiculaire au mouvement, le rayon mesuré sera r . Donc une sphère paraîtra être un ellipsoïde allongé dans le sens du mouvement.

Soit alors une source en mouvement ; à l'instant zéro, elle est en O ; à l'instant τ , elle est en A ; à l'instant 2τ , elle est en B, (*fig. 66*). L'onde émanée du point O sera, à l'instant 2τ , sur une sphère de centre O et de rayon $2V\tau$; l'onde émanée de A à l'instant τ sera, à l'instant 2τ , sur une sphère de centre A et de rayon $V\tau$. Les surfaces seront donc des sphères non-concentriques, homothétiques par rapport au point B, position actuelle de la source.

Introduisons l'hypothèse de Lorentz. En apparence, les surfaces d'onde sont devenues des ellipsoïdes homothétiques par rapport au point B. Si l'on appelle α et β les coefficients de contraction dans le sens de la vitesse et dans le sens perpendiculaire, les deux axes de l'ellipsoïde de révolution sont :

$$\alpha V\tau = a \quad \text{et} \quad \beta V\tau = b$$

(pour Lorentz, $\beta = 1$) et de plus $OF = v\tau$, F étant la position actuelle de la source.

Nous choisisons :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}},$$

$\frac{v}{V}$ sera l'excentricité de l'ellipse, et le point F (centre d'homothétie), le foyer commun des sections méridiennes des ellipsoïdes. Alors la compensation est rigoureuse. En effet, soient F et M les deux stations A et B

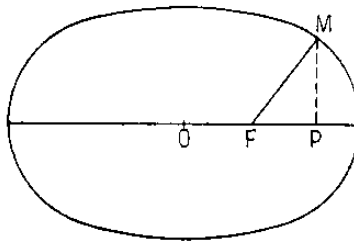


Fig. 67.

considérées précédemment, elles sont toutes deux animées d'une vitesse commune v (fig. 67). FM est la distance apparente des deux points. On a :

$$\begin{aligned} FM &= a(1 - e \cos u), & FP &= a(\cos u - e), \\ FM + FP e &= a(1 - e^2) = \alpha V \tau (1 - e^2) = k \tau, \end{aligned}$$

en posant :

$$\alpha V (1 - e^2) = k.$$

Donc le temps τ est donné par :

$$\tau = \frac{FM}{k} + \frac{e}{k} FP.$$

Si ces deux stations font l'échange des signaux, pour le retour de M en F, nous aurons :

$$\tau_1 = \frac{FM}{k} - \frac{e}{k} FP, \quad \text{donc} \quad \frac{\tau - \tau_1}{2} = \frac{e}{k} FP.$$

Donc, la différence des temps est rigoureusement proportionnelle à la différence des abscisses, et ceci sans négliger le carré de l'aberration. Nous n'avons avec cette déformation de Lorentz, aucun moyen de mettre en évidence le mouvement absolu de la Terre, c'est-à-dire le mouvement relatif de la Terre par rapport à l'éther. Ceci est un résultat expérimental qu'explique l'hypothèse de Lorentz.

Transformation de Lorentz. — Soit un point ayant à l'époque vraie t les coordonnées vraies x, y, z ; quelles seront ses coordonnées apparentes x', y', z' à l'époque apparente t' ?

Choisissons les unités de façon que la vitesse de la lumière soit égale à 1. Alors toutes les vitesses seront très petites. Posons :

$$(1) \quad x' = k(x + \varepsilon t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = k(t + \varepsilon x');$$

ε est une constante et $k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$.

Quelle est la signification de ε ? La vitesse de translation du système est dirigée dans le sens de l'axe des x et a pour valeur $-\varepsilon$. En effet, un corps entraîné dans le mouvement de translation paraît fixe, donc :

$$\begin{aligned} x' &= \text{const.}, & x + \varepsilon t &= \text{const.}, \\ x &= \text{const.} - \varepsilon t & \text{et} & \quad v &= -\varepsilon. \end{aligned}$$

De même, t' est le temps apparent, puisqu'en deux points, le temps apparent diffère du temps vrai d'une quantité proportionnelle à l'abscisse.

On vérifie aisément que l'on a identiquement :

$$(2) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Si l'on considère deux points x_1, y_1, z_1, t_1 , et x_2, y_2, z_2, t_2 , nous aurons l'identité :

$$(3) \quad \mathbf{S}(x'_1 - x'_2)^2 - (t'_1 - t'_2)^2 = \mathbf{S}(x_1 - x_2)^2 - (t_1 - t_2)^2,$$

où \mathbf{S} se rapporte aux coordonnées x, y, z . En effet, on démontre facilement que l'on a aussi :

$$\mathbf{S} x'_1 x'_2 - t'_1 t'_2 = \mathbf{S} x_1 x_2 - t_1 t_2,$$

et de l'identité (2), on déduit (3).

Supposons que le point x_1, y_1, z_1 soit une source lumineuse et que le point x_2, y_2, z_2 soit un point éclairé par cette source. Puisque la vitesse vraie de la lumière est égale à l'unité, le premier terme de (3) est nul, le second l'est donc aussi et la vitesse apparente de la lumière est encore égale à 1.

Les phénomènes optiques ne seront pas altérés par la translation. Nous pouvons généraliser en posant :

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t + \varepsilon x),$$

l désignant une constante.

Alors nous aurons

$$\mathbf{S}(x'_1 - x'_2)^2 - (t'_1 - t'_2)^2 = l^2 \left[\mathbf{S}(x_1 - x_2)^2 - (t_1 - t_2)^2 \right].$$

les deux membres sont nuls; la vitesse apparente de la lumière reste égale à 1, et l reste une constante arbitraire.

Nous n'avons considéré jusqu'alors qu'une vitesse parallèle à l'axe des x , mais nous aurions pu supposer une vitesse de translation quelconque; nous aurions encore des relations linéaires. Ces relations doivent former un groupe : sinon on pourrait s'apercevoir du mouvement absolu; il faudra donc choisir l en fonction de ε . Faisons tourner la vitesse de 180° , sa grandeur restant constante; l reste le même et ε devient $-\varepsilon$, ce qui donne :

$$x'' = kl(x - \varepsilon t), \quad z'' = ly, \quad z'' = lz, \quad t = kl(t - \varepsilon x).$$

Ceci revient à changer le signe de la vitesse; on doit donc avoir la transformation inverse de la précédente. Or, cette transformation inverse est

$$x = \frac{k}{l}(x' - \varepsilon t'), \quad y = \frac{y'}{l}, \quad z = \frac{z'}{l}, \quad t = \frac{k}{l}(t' - \varepsilon x').$$

Il faudra donc prendre

$$l = 1,$$

ce qui justifie l'hypothèse de Lorentz : les dimensions perpendiculaires au mouvement ne sont pas changées.

Toute transformation linéaire qui satisfait à l'identité

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

est une transformation de Lorentz. Il est évident que tout changement d'axes, indépendant de t , y satisfait; mais ceci est sans intérêt. La véritable transformation de Lorentz est :

$$(4) \quad \begin{cases} x' = k(x + \varepsilon t), & y' = y, & z' = z, & t' = k(t + \varepsilon x), \\ \text{avec } k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \end{cases}$$

Le principe de la relativité est alors vérifié : on ne peut pas mettre en évidence le mouvement absolu par des expériences d'optique; il doit en être de même au point de vue de l'électricité.

Influence du mouvement sur les phénomènes électriques. — Soient f, g, h les composantes du champ électrique; α, β, γ les composantes du champ magnétique : ce sont les notations de Maxwell, mais les unités sont celles de Lorentz.

Nous supposons l'éther uniforme, mais parsemé d'électrons (particules chargées); pour les corps neutres, le nombre des électrons positifs est égal au nombre des électrons négatifs.

Soient ρ la densité de distribution des électrons et ξ, η, ζ les composantes de la vitesse de l'électron. L'équation du champ électrique est

$$\frac{df}{dt} - \rho\xi = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z},$$

et l'équation du champ magnétique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y}.$$

On peut y adjoindre l'équation

$$\mathbf{S} \frac{df}{dx} = \rho,$$

la divergence du champ électrique est égale à la densité.

Nous avons, de plus, l'équation

$$\mathbf{S} \frac{dx}{dx} = 0,$$

et l'équation de continuité de la dynamique des fluides, qui est

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{S} \frac{\partial\rho\xi}{\partial x} = 0.$$

Il s'agit de savoir si l'on peut trouver pour $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$ une transformation qui, composée avec la transformation de Lorentz, satisfasse au principe de relativité.

Lorentz prend

$$(5) \quad \begin{cases} f' = f, & x' = x, \\ g' = k(g + \varepsilon\gamma), & \beta' = k(\beta - \varepsilon h), \\ h' = k(h - \varepsilon\beta), & \gamma' = k(\gamma + \varepsilon g). \end{cases}$$

Ces transformations forment un groupe, et $g^2 - \gamma^2$ et $h^2 - \beta^2$ ne sont pas altérés.

Pour ρ, ξ, η, ζ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \rho' &= k(\rho - \varepsilon\rho\xi), \\ \rho'\xi' &= k(\rho\xi + \varepsilon\rho), & \rho'\eta' &= \rho\eta, & \rho'\zeta' &= \rho\zeta. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que toutes les équations données ci-dessus ne sont pas altérées par ces transformations.

Ces relations sont linéaires. Entre les vitesses $\frac{dx'}{dt'}$, ..., et $\frac{dx}{dt}$, ..., nous aurons les mêmes relations qu'entre les quantités $\frac{\rho'\xi'}{\rho'}$, ..., et $\frac{\rho\xi}{\rho}$, ...

Donc ξ', η', ζ' sont les vitesses apparentes de l'électron. Ceci nous

interdit d'observer le mouvement absolu, car nous observons ξ', η', ζ' , et non pas ξ, η, ζ .

Pour que cette théorie soit exacte, il faut cependant modifier un peu les équations différentielles du mouvement de l'électron. Supposons un électron dans un champ électromagnétique, et écrivons les équations de son mouvement; nous aurons une accélération proportionnelle au déplacement électrique :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = A f + B(\eta\gamma - \zeta\beta),$$

où le coefficient A dépend de la vitesse.

Ceci correspond au cas d'une vitesse faible où B est une constante; mais, pour une grande vitesse, il faut supposer que B dépend de la vitesse. De plus, le coefficient B peut n'être pas le même dans la direction de la vitesse et dans la direction perpendiculaire. ξ, η, ζ étant les composantes de la vitesse, ses cosinus directeurs sont $\frac{\xi}{v}, \frac{\eta}{v}, \frac{\zeta}{v}$.

La composante normale sera :

$$\frac{\Sigma f\xi}{v} = \frac{\varphi}{v} \quad \text{avec} \quad \varphi = f\xi + g\eta + h\zeta.$$

Nous écrirons donc :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = A f + B(\eta\gamma - \zeta\beta) + C\varphi\xi,$$

en posant $C = \frac{K}{v^2}$, car nous avons une force $K \frac{\varphi}{v} \frac{\xi}{v}$.

Finalement, nous aurons les trois équations :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = A f + B(\eta\gamma - \zeta\beta) + C\varphi\xi, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = A g + B(\zeta\alpha - \xi\gamma) + C\varphi\eta, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = A h + B(\xi\beta - \eta\alpha) + C\varphi\zeta. \end{cases}$$

Cherchons alors à déterminer A, B, C de façon que le principe de relativité soit applicable.

Il faut que les équations (6) ne soient pas altérées par une transformation quelconque du groupe de Lorentz. Il nous suffira de considérer une transformation infinitésimale. Nous supposons ε très petit, et nous négligerons ε^2 , c'est-à-dire que nous prenons $k = 1$. Alors

$$x' = x + \delta x, \quad \dots, \quad t' = t + \delta t.$$

Nous aurons, d'après les équations (4) et (5) :

$$(7) \quad \partial x = \varepsilon t, \quad \partial \gamma = \partial z = 0, \quad \partial t = \varepsilon x$$

et

$$(8) \quad \begin{cases} \partial f = 0, & \partial g = \varepsilon \gamma, & \partial h = -\varepsilon \beta, \\ \partial x = 0, & \partial \beta = -\varepsilon h, & \partial \gamma = \varepsilon g. \end{cases}$$

Il nous faut aussi $\partial \xi, \partial \eta, \partial \zeta$. On a :

$$\xi + \partial \xi = \frac{dx + d \partial x}{dt + d \partial t} = \frac{dx + \varepsilon dt}{dt + \varepsilon dx} = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \xi} = \xi + \varepsilon(1 - \xi^2);$$

donc et, de même :

$$(9) \quad \begin{cases} \partial \xi = \varepsilon(1 - \xi^2), \\ \partial \eta = -\varepsilon \xi \eta, \\ \partial \zeta = -\varepsilon \xi \zeta. \end{cases}$$

Il nous faut encore $\partial \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \partial \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \partial \left(\frac{d \xi}{dt} \right), \\ \frac{d \xi}{dt} + \partial \left(\frac{d \xi}{dt} \right) &= \frac{d \xi + \varepsilon d \xi}{dt + \varepsilon dx} = \frac{d \xi}{dt} \frac{1 + \varepsilon \xi}{1 + \varepsilon \xi} = \frac{d \xi}{dt} (1 + 3 \varepsilon \xi). \end{aligned}$$

Donc

$$(10) \quad \begin{cases} \partial \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = -\frac{d^2 x}{dt^2} 3 \varepsilon \xi, \\ \partial \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) = -\varepsilon \left(2 \xi \frac{d^2 y}{dt^2} + \eta \frac{d^2 x}{dt^2} \right), \\ \partial \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = -\varepsilon \left(2 \xi \frac{d^2 z}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 x}{dt^2} \right). \end{cases}$$

Calculons enfin ∂v ; nous avons :

$$\begin{aligned} v^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ v \partial v &= \xi \partial \xi + \eta \partial \eta + \zeta \partial \zeta \end{aligned}$$

et, en remplaçant $\partial \xi, \partial \eta, \partial \zeta$ par les expressions (9), il vient :

$$(11) \quad v \partial v = \varepsilon \xi (1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2), \quad v \partial v = \varepsilon \xi (1 - v^2).$$

Cas particuliers. — *a.* Nous prendrons la vitesse sur l'axe des x

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = v,$$

La transformation de Lorentz est perpendiculaire à cette vitesse. Les équations (9) nous donnent :

$$\partial \xi = \varepsilon, \quad \partial \eta = \partial \zeta = 0,$$

et l'équation (11) donne :

$$\delta v = 0.$$

Donc δA , δB , δC sont nuls; en effet, A , B , C ne dépendent que de v , et δv est nul.

De plus, les équations (10) deviennent :

$$\delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0, \quad \delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0, \quad \delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = -\varepsilon v \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Il faut encore calculer les variations telles que $\delta(\eta\gamma - \zeta\beta)$. Or nous avons :

$$\delta(\eta\gamma - \zeta\beta) = \eta \delta\gamma + \gamma \delta\eta - \zeta \delta\beta - \beta \delta\zeta = -\zeta \delta\beta = \varepsilon v h.$$

De même,

$$\delta(\varphi\xi) = \varphi \delta\xi = \varepsilon\varphi,$$

mais

$$\varphi = f\xi + g\eta + h\zeta = v h,$$

donc

$$\delta(\varphi\xi) = \varepsilon v h.$$

La première équation (6) nous donne alors :

$$\delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = A \delta f + B \delta(\eta\gamma - \zeta\beta) + C \delta(\varphi\xi),$$

c'est-à-dire :

$$0 = 0 + B \varepsilon v h + C \varepsilon v h, \quad \text{donc } B + C = 0.$$

Les autres équations (6) donneraient :

$$A = B \quad \text{et, par suite,} \quad A = B = -C.$$

b. Faisons maintenant une autre hypothèse; supposons la vitesse dirigée suivant l'axe des x

$$\xi = v, \quad \eta = \zeta = 0.$$

Calculons toutes les variations comme précédemment; il vient

$$\delta\eta = \delta\zeta = 0, \quad \delta v = \varepsilon(1 - v^2) \neq 0.$$

δA , δB , δC ne seront plus nuls puisque $\delta v \neq 0$. Mais

$$\eta = \zeta = \delta\eta = \delta\zeta = 0;$$

donc η et ζ sont et restent nuls. Et il reste l'équation suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (A + C v^2) f = D f,$$

en posant

$$D = A + C v^2.$$

La transformation de Lorentz ne doit pas altérer $\delta \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)$

$$\delta \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \delta(Df) = D \delta f + f \delta D.$$

D'après les équations (10) et (11), nous avons

$$\begin{aligned} -3v \frac{d^2 x}{dt^2} &= f \frac{\delta D}{\varepsilon} = f \frac{dD}{dv} \frac{\delta v}{\varepsilon}, \\ -3v Df &= f \frac{dD}{dv} (1 - v^2); \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dD}{dv} (1 - v^2) = -3v D$$

et

$$D = K(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Nous avons donc

$$A + Cv^2 = K(1 - v^2)^{\frac{3}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{C}{A} = -1 \quad \text{et} \quad A = K(1 - v^2)^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$A = B = -C = K(1 - v^2)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est là l'origine de la notion de masse variable, et de la différence entre la masse transversale et la masse longitudinale.

S'il n'y avait pas de champ magnétique, nos équations (6) deviendraient

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = A(1 - v^2)f = Df, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = A g.$$

Nous avons donc deux coefficients différents l'un de l'autre

$$D = K(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}, \quad A = K(1 - v^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons choisi comme unité de vitesse la vitesse de la lumière; pour des vitesses modérées, nous aurons :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = Kf, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = Kg,$$

avec $K = \frac{e}{m}$; ce qui est la loi ordinaire de l'électrodynamique avec une masse constante.

Mais si la vitesse est grande, la masse est, pour la première équation

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{K} (1 - v^2)^{-\frac{3}{2}},$$

pour la seconde équation

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{K} (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous distinguons ainsi la masse longitudinale et la masse transversale. Ces deux masses deviennent infinies pour $v = 1$, c'est-à-dire pour la vitesse de la lumière; l'inertie devient également infinie. Donc la nouvelle mécanique interdit des vitesses supérieures à celle de la lumière. On a cependant cherché si un électron ayant une vitesse supérieure à celle de la lumière pourrait la conserver; mais il ne peut pas l'acquérir !

Principe de moindre action. — Nous avons vu une première origine de la dynamique de l'électron : le principe de relativité. On est arrivé à cette théorie par une autre voie : en considérant les corps comme formés d'électrons, les corps neutres comportant autant d'électrons positifs que d'électrons négatifs. Un électron ne peut pas se déplacer sans ébranler l'éther. Son inertie comprendra deux parties : l'une mécanique, l'autre électromagnétique. Les rayons β du radium sont formés de petits corpuscules animés de très grandes vitesses et chargés d'électricité négative.

Dans un champ magnétique, ils sont déviés par production d'un courant de convection; dans un champ électrique, ils sont déviés parce que chargés. L'accélération due à la déviation électrique dépendra uniquement du rapport $\frac{e}{m}$ (e , charge et m , masse d'un corpuscule). La déviation dépendra de $\frac{e}{m}$ et de v ; si la vitesse est très grande, le rayon de courbure sera très grand. Dans un champ magnétique, l'accélération est proportionnelle à $\frac{e v}{m}$. Si l'énergie était seulement mécanique, on aurait $\frac{e}{m} = \text{const.}$, mais en réalité, on a entre $\frac{e}{m}$ et v une certaine relation (cette relation se déduit d'une courbe obtenue par un procédé photographique). Ici m ne représente pas la masse mécanique, mais la masse apparente dépendant de la vitesse. Nous avons donc une relation entre v et $\frac{e}{m} = \frac{e}{\mu + \varphi(v)}$: μ , masse mécanique.

On suppose que μ et $\varphi(v)$ sont les mêmes pour tous les électrons et l'on détermine μ ; on trouve

$$\mu = 0, \quad \text{donc } m = \varphi(v).$$

Tout se passe comme si la masse m était uniquement d'origine électromagnétique. Voyons par quelle fonction $\varphi(v)$ elle peut être représentée. Posons :

$$H = \frac{1}{2} \int (S f^2 - S a^2) d\tau,$$

où $d\tau$ est l'élément de volume $dx dy dz$; f, g, h sont les composantes du champ électrique; α, β, γ celles du champ magnétique; $S f^2 + S \alpha^2$ serait l'énergie totale, H est l'action.

H sera une fonction de la vitesse de l'électron, de son accélération, etc.; mais nous nous bornerons au mouvement quasi-stationnaire, c'est-à-dire au cas où l'action H est considérée comme dépendant seulement de la vitesse. Ceci revient à admettre que la trajectoire de l'électron a une courbure qui n'est pas très grande comparée à son diamètre.

S'il y a deux électrons assez éloignés, on pourra poser :

$$H = f(\xi, \eta, \zeta) + f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1),$$

ξ, η, ζ et ξ_1, η_1, ζ_1 étant les composantes des vitesses des deux électrons.

Ceci n'est pas absolument rigoureux; il existe des termes dépendant à la fois de ξ, η, ζ et de ξ_1, η_1, ζ_1 ; mais on se contente de cette approximation.

Posons

$$V^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

nous aurons

$$H = F\left(\frac{V^2}{2}\right).$$

Prenons alors

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = H' \xi, \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = H' \eta, \quad \frac{\partial H}{\partial \zeta} = H' \zeta, \quad \frac{\partial H}{\partial V} = H' V,$$

où H' est la dérivée de $F\left(\frac{V^2}{2}\right)$ par rapport à $\frac{V^2}{2}$.

De même, nous aurons :

$$\frac{\partial H'}{\partial \xi} = H'' \xi, \quad \dots$$

Supposons l'électron soumis à une force X, Y, Z . Maxwell a démontré que les équations de Lagrange s'appliquent au mouvement de l'électron. Nous aurons :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right) = X, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right) = Y, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) = Z. \end{cases}$$

Prenons l'axe des x parallèle à la vitesse :

$$\xi = v, \quad \eta = \zeta = 0,$$

alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right) = \xi \frac{\partial H'}{\partial t} + H' \frac{d\xi}{dt},$$

or

$$\frac{dH'}{dt} = S \frac{\partial H'}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = H'' S \xi \frac{d\xi}{dt} = H'' v \frac{d\xi}{dt}.$$

La première équation (12) devient

$$\frac{d\xi}{dt} (H' + v^2 H'') = X.$$

Pour la seconde équation (12), nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right) = \eta \frac{dH'}{dt} + H' \frac{d\eta}{dt}.$$

Or η est nul. D'où les trois équations :

$$\frac{d\xi}{dt} (H' + v^2 H'') = X, \quad \frac{d\eta}{dt} H' = Y, \quad \frac{d\zeta}{dt} H' = Z.$$

Le coefficient du premier membre joue le rôle de la masse; la masse longitudinale est $H' + v^2 H''$ et la masse transversale, H' .

Introduisons la quantité de mouvement

$$D = H' V,$$

dont les composantes seront $H'\xi$, $H'\eta$, $H'\zeta$. Alors la masse transversale est :

$$H' = \frac{D}{V},$$

et l'on a

$$\frac{dD}{dV} = H' + V \frac{dH'}{dV} = H' + V^2 H''.$$

La masse longitudinale sera $\frac{dD}{dV}$. Dans le cas ordinaire, on a $D = mv$, et la masse transversale est égale à la masse longitudinale m .

Établissons l'équation des forces vives. Nous supposons que la force dérive d'un potentiel :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Les équations de Lagrange deviennent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \dots$$

Posons alors :

$$T = S \xi \frac{\partial H}{\partial \xi} - H,$$

et calculons $\frac{dT}{dt}$:

$$\frac{dT}{dt} = S \frac{d\xi}{dt} \frac{\partial H}{\partial \xi} + S \xi \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right) - \frac{dH}{dt};$$

Or

$$\frac{dH}{dt} = S \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt},$$

donc

$$\frac{dT}{dt} = S \xi \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right) = S \xi \frac{\partial U}{\partial x} = S \frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dt}.$$

Nous avons donc

$$T - U = \text{const.};$$

c'est l'équation des forces vives; U est l'énergie potentielle de la force X , Y , Z ; donc T représente l'énergie cinétique qui, ici, est d'origine électromagnétique.

Ceci s'applique aussi bien à plusieurs électrons, et l'on a

$$T = \frac{1}{2} \int (S f^2 + S x^2) d\tau,$$

Les équations du théorème de la quantité de mouvement sont, pour le premier, pour le deuxième, pour le troisième

$$\frac{d}{dt} (H' \xi) = X, \quad \frac{d}{dt} (H' \xi_1) = X_1, \quad \frac{d}{dt} (H' \xi_2) = X_2.$$

Donc :

$$\frac{d}{dt} \Sigma H' \xi = \Sigma X.$$

Or, ΣX est nul en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction; donc

$$\Sigma H' \xi = \text{const.};$$

la somme des quantités de mouvement est constante.

Supposons encore que la force appliquée à un électron soit centrale et passe par l'origine :

$$xY - yX = 0.$$

Alors nous avons :

$$H'(y\xi - x\eta) = \text{const.}$$

En effet, en différentiant, le premier membre donne :

$$y \frac{d}{dt} (H' \xi) - x \frac{d}{dt} (H' \eta) + H' \left(\xi \frac{dy}{dt} - \eta \frac{dx}{dt} \right) = yX - xY + H' (\xi \eta - \eta \xi) = 0.$$

Nous retrouvons donc le théorème des aires.

Différentes valeurs de H. — Voyons maintenant ce qu'est la fonction H . Il existe plusieurs théories :

1° Abraham a fait le calcul en supposant que l'électron est une sphère, et il a trouvé

$$H = \frac{\alpha}{r} \frac{1 - V^2}{V} \log \frac{1 + V}{1 - V},$$

où α est une constante, et r le rayon de l'électron.

2° Langevin suppose que l'électron est déformable, que l'électricité y circule librement, mais que son volume est constant; alors il trouve

$$H = K(1 - V^2)^{\frac{2}{3}}.$$

3° Lorentz considère que l'électron se déforme dans son mouvement, mais que son volume ne demeure pas constant; la sphère devient un ellipsoïde aplati, les dimensions transversales seules ne varient pas. Il a alors :

$$H = K\sqrt{1 - V^2}.$$

Comparons ces trois hypothèses et notons d'abord que V est petit, puisque l'unité de vitesse est la vitesse de la lumière. Développons suivant les puissances de V^2 .

Pour Abraham

$$H = K\left(1 - \frac{2}{3}V^2 - \frac{2}{15}V^4\right).$$

Pour Langevin

$$H = K\left(1 - \frac{2}{3}V^2 - \frac{1}{9}V^4\right).$$

Pour Lorentz

$$H = K\left(1 - \frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{8}V^4\right),$$

où K est négatif.

Le premier terme indépendant de la vitesse ne donnera rien, car ce qui intervient c'est H' et non H . Le terme en V^2 donnera la force vive ordinaire, le terme perturbateur est le terme en V^4 ; donc tout dépend du rapport du coefficient de V^4 à celui de V^2 , et il revient au même de considérer simplement

$$H = \frac{m}{2} \left(V^2 + \frac{V^4}{\alpha} \right),$$

avec

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{pour Abraham,}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{pour Langevin,}$$

et

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour Lorentz;}$$

ε étant l'inverse du carré de la vitesse de la lumière dans un système d'unités quelconque.

Alors la quantité de mouvement devient :

$$D = H'V = mV \left(1 + \frac{2}{z} V^2 \right)$$

Elle devient très grande pour $V = 1$ (vitesse de la lumière); nous avons alors $V + 1 \approx 2$; dans la théorie d'Abraham, elle est de l'ordre de $\log(1 - V)$; dans celle de Langevin, de l'ordre de $(1 - V)^{-\frac{1}{2}}$; dans celle de Lorentz, de l'ordre de $(1 - V)^{-\frac{1}{2}}$.

La masse longitudinale $\frac{dD}{dV}$ sera de l'ordre de

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - V} & \text{ pour Abraham,} \\ \frac{1}{(1 - V)^{\frac{3}{2}}} & \text{ pour Langevin,} \\ \frac{1}{(1 - V)^{\frac{3}{2}}} & \text{ pour Lorentz.} \end{aligned}$$

Il s'agit de choisir entre ces trois théories. Kaufmann a fait des expériences qui paraissent contraires à l'hypothèse de Lorentz, sans permettre de conclure entre celles de Langevin et d'Abraham. Mais, d'autre part, la théorie de Lorentz est la seule qui respecte le principe de relativité ⁽¹⁾.

CHAPITRE XII.

APPLICATION A LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

Il reste à voir comment la dynamique de l'électron peut s'appliquer à la Mécanique céleste.

Équations d'Hamilton. — Avec cette nouvelle mécanique, il est possible de retrouver les équations d'Hamilton, Nous avons :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right) = X = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Introduisons, comme au chapitre précédent, la fonction

$$T = S \xi \frac{\partial H}{\partial \xi} - H,$$

⁽¹⁾ Poincaré signale dans *Science et méthode*, paru en 1908, que « M. Bucherer a repris les expériences de M. Kaufmann en s'entourant de précautions nouvelles et qu'il a obtenu des résultats confirmant les vues de Lorentz ». (*Science et méthode*, p. 248, note.)

et prenons comme nouvelles variables

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = u, \quad \frac{\partial H}{\partial r_1} = v, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = w,$$

d'où :

$$T = S \xi u - H.$$

L'équation (1) devient :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Différentions, il vient :

$$dT = S \xi du + S u d\xi - dH;$$

or

$$dH = S \frac{\partial H}{\partial \xi} d\xi = S u d\xi,$$

donc

$$dT = S \xi du,$$

ce qui montre que l'on a

$$\xi = \frac{\partial T}{\partial u} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial T}{\partial u'}.$$

Posons $F = T - U$, T ne dépend que des ξ (ou des u), U ne dépend que des x .

Donc :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Nos équations deviennent :

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x},$$

qui sont les équations canoniques d'Hamilton.

Attraction par un centre fixe. — Soit un corps attiré par un centre fixe. Nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \text{avec} \quad u = \frac{k}{r},$$

où r est la distance au centre attractif.

Dans ce cas, nous avons le théorème des forces vives qui donne :

$$\begin{aligned} T - U &= \text{const.}, \\ S \xi \frac{\partial H}{\partial \xi} - H - U &= S \xi^2 H' - H - U, \\ H' V^2 - H - U &= A. \end{aligned}$$

D'où, en remplaçant

$$H = \frac{1}{2} \left(V^2 + \frac{V^4}{x} \right), \quad H' = 1 + \frac{2V^2}{x},$$

pour $m = 1$, par leurs valeurs,

$$(3) \quad \frac{V^2}{2} + \frac{3V^4}{2x} - \frac{k}{r} = A,$$

le théorème des aires donne

$$H' \left(\frac{1}{2} r' - r_1 x \right) = \text{const.} = B,$$

et, si θ est l'anomalie vraie,

$$H' r^2 \theta' = B,$$

ou

$$(4) \quad r^2 \theta' \left(1 + \frac{2V^2}{x} \right) = B.$$

Ces deux équations permettent de ramener le problème à deux quadratures. En effet, nous avons :

$$V^2 = r'^2 + r^2 \theta'^2,$$

et, des équations (3) et (4), on déduit les expressions

$$r' = \varphi(r), \quad \text{et} \quad \theta' = \psi(r);$$

d'où

$$t = \int \frac{dr}{\varphi(r)} \quad \text{et} \quad \theta = \int \frac{dr \psi(r)}{\varphi(r)}.$$

Quand r varie d'un aphélie à un périhélie, t augmente d'une certaine quantité, et θ également. Et le problème s'achève par des symétries successives. La seule variation séculaire est un mouvement du périhélie ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Indiquons un calcul un peu plus simple de cette avance du périhélie, en éliminant, comme dans le mouvement elliptique, le temps entre les deux équations (3) et (4). Faisant

$$V^2 = r'^2 + r^2 \theta'^2,$$

on obtient

$$\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{\left(1 + \frac{2V^2}{x} \right)^2}{1 + \frac{2V^2}{x}} \left(\frac{2k}{B^2 r} + \frac{2A}{B^2} \right).$$

Puisque $\frac{V^2}{x}$ est petit, le premier facteur du second membre devient, approximativement et d'après l'équation (3) elle-même,

$$1 + \frac{2V^2}{x} = 1 + \frac{1}{x} \left(\frac{2k}{r} + 2A \right).$$

Dans le cas d'une orbite presque circulaire, pour déterminer l'aphélie ou le périhélie, nous écrirons que la vitesse est normale au rayon vecteur; en ce point, on a :

$$r\theta' = V.$$

Alors l'équation (4) s'écrit

$$rV\left(1 + \frac{2V^2}{\alpha}\right) = B,$$

et sous cette forme, jointe à l'équation (3), donnera les valeurs de r et V correspondant au périhélie. Ces deux équations doivent avoir une racine double, c'est-à-dire que leur déterminant fonctionnel doit être nul

$$\begin{vmatrix} V\left(1 + \frac{6V^2}{\alpha}\right) & \frac{k}{r^2} \\ r\left(1 + \frac{6V^2}{\alpha}\right) & V\left(1 + \frac{2V^2}{\alpha}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

soit

$$V^2 + \frac{2V^4}{\alpha} = \frac{k}{r},$$

ou encore

$$n^2 a^3 + \frac{2n^4 a^5}{\alpha} = \text{const.}$$

Cette équation remplace l'équation de Képler; le terme correctif est très petit.

D'où

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = -\frac{1}{r^2} + \left[1 + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2k}{r} + 2A\right)\right]\left(\frac{2k}{B^2 r} + \frac{2A}{B^2}\right).$$

Le second membre est un polynôme du second degré en $\frac{1}{r}$, que nous pouvons écrire, β et γ désignant deux constantes,

$$\left(1 - \frac{4k^2}{B^2 \alpha}\right) \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{\beta}{r} + \gamma\right).$$

D'où

$$\theta = \left(1 + \frac{2k^2}{B^2 \alpha}\right) \int \frac{d\frac{1}{r}}{\pm \sqrt{-\frac{1}{r^2} + \frac{\beta}{r} + \gamma}} + \text{const.}$$

D'un périhélie à un aphélie, la dernière intégrale est égale à π : d'où l'avance du périhélie par révolution

$$2\pi\left(1 + \frac{2k^2}{B^2 \alpha}\right) - 2\pi = \frac{4\pi k^2}{B^2 \alpha} = \frac{4\pi k}{\alpha a(1-e^2)},$$

qui donne une extension de la formule (5).

Nous aurons un mouvement séculaire du périhélie; pour le calculer, utilisons les équations d'Hamilton. Nous avons

$$V^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Posons :

$$W^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Il vient :

$$u = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \xi \left(1 + \frac{2V^2}{x} \right),$$

puisque

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(V^2 + \frac{V^4}{x} \right),$$

donc en première approximation

$$u = \xi, \quad V = W;$$

en deuxième approximation

$$u = \xi \left(1 + \frac{2V^2}{x} \right) \quad \text{et} \quad \xi = u \left(1 - \frac{2V^2}{x} \right),$$

$$W = H'V.$$

La première équation (2) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \xi = u \left(1 - \frac{2W^2}{x} \right),$$

car V^2 peut être remplacé par W^2 , puisque multiplié par u .

D'où, en intégrant

$$T = \frac{W^2}{2} \left(1 - \frac{W^2}{x} \right),$$

donc

$$F = \frac{W^2}{2} - \frac{W^4}{2x} - \frac{k}{r}.$$

La fonction perturbatrice, ainsi ajoutée au potentiel newtonien, est

$$R = \frac{W^4}{2x}.$$

Or les formules de la théorie des perturbations donnent pour le mouvement du périhélie

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{na^2e} \frac{dR}{de},$$

pour une orbite très peu excentrique et une inclinaison nulle.

Développons la fonction perturbatrice; seuls les termes séculaires nous intéressent: nous chercherons donc la valeur moyenne de R , et garderons

seulement les termes en e^2 , car les termes indépendants de e ne donnent rien, puisque l'orbite est presque circulaire.

Nous avons :

$$\frac{W^2}{2} - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2a},$$

d'où

$$W^2 = \left(\frac{2k}{r} - \frac{k}{a} \right)^2.$$

Le terme en $\frac{1}{a^2}$ est une constante, ne nous en occupons pas. Du terme en $\frac{1}{r}$, nous ne nous occuperons pas non plus, car sa valeur moyenne est nulle, puisqu'il est indépendant de e ; on a

$$nt = u - e \sin u, \quad n dt = (1 - e \cos u) du,$$

donc le quotient

$$\frac{dt}{r} = \frac{du}{an}$$

est indépendant de e .

Il reste le terme en $\frac{1}{r^2}$ que nous calculons au moyen de l'intégrale des aires

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

où la constante des aires C est égale, en fonction des axes de l'ellipse $2a$ et $2b$, à nab .

Donc

$$\frac{dt}{r^2} = \frac{d\theta}{nab}.$$

La valeur moyenne sera donc

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a^2} (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right);$$

le seul terme à introduire dans R provient de $\frac{1}{2\alpha} \frac{4k^2}{r^2}$, soit

$$+ \frac{2k^2}{\alpha ab} = + \frac{2k^2}{\alpha a^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right).$$

Et l'on a

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \frac{d}{de} \left[+ \frac{2k^2}{\alpha a^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) \right] = \frac{2k^2}{\alpha na^2}.$$

D'où, avec $K = n^2 a^3$, l'avance du périhélie à chaque révolution

$$(5) \quad \delta\varpi = \frac{4\pi k}{\alpha a}.$$

Avec l'hypothèse d'Abraham, par exemple, il vient

$$\delta\omega = \frac{4\pi k\varepsilon}{5a}.$$

Il sera possible, en choisissant k , d'attribuer un mouvement convenable au périhélie de Mercure, sans qu'il entraîne un mouvement beaucoup plus fort du périégée de la Lune : le résultat sera plus satisfaisant, mais encore insuffisant.

Problème des deux corps. — Considérons maintenant deux corps mobiles; nous prendrons comme variables leurs coordonnées et leurs vitesses

$$x, y, z; \quad u, v, w; \quad x_1, y_1, z_1; \quad u_1, v_1, w_1,$$

Nous avons les équations canoniques

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x},$$

avec

$$F = T - U.$$

Soient m et m_1 les masses des deux corps; nous poserons encore

$$W^2 = u^2 + v^2 + w^2, \quad W_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2;$$

W est la quantité de mouvement du premier corps,

$$W = H'V.$$

La force vive et le potentiel sont

$$T = \frac{W^2}{2m} \left(1 - \frac{W^2}{am^2}\right) + \frac{W_1^2}{2m_1} \left(1 - \frac{W_1^2}{am_1^2}\right),$$

$$U = \frac{k}{r}.$$

Donc la fonction génératrice F est

$$F = \frac{W^2}{2m} \left(1 - \frac{W^2}{am^2}\right) + \frac{W_1^2}{2m_1} \left(1 - \frac{W_1^2}{am_1^2}\right) - \frac{k}{r}.$$

Faisons un changement de variables en posant :

$$\begin{aligned} x' &= x - x_1, & y' &= y - y_1, & z' &= z - z_1, \\ x'_1 &= x_1, & y'_1 &= y_1, & z'_1 &= z_1, \\ u' &= u, & v' &= v, & w' &= w, \\ u'_1 &= u + u_1, & v'_1 &= v + v_1, & w'_1 &= w + w_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que x', y', z' seront les coordonnées de la planète par rapport au Soleil, u'_1, v'_1, w'_1 seront les composantes de la quantité de mouvement totale, tandis que x'_1, y'_1, z'_1 restent les coordonnées du Soleil et u', v', w' les composantes de la quantité de mouvement de la planète seule. On vérifie que l'on a alors

$$\Sigma u' dx' = \Sigma u dx,$$

et les équations restent canoniques.

Or T ne dépend que des u , c'est-à-dire des u' ; et U ne dépend que des x , c'est-à-dire des x' . Nous avons donc :

$$\frac{du'_1}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x'_1} = 0,$$

car $U = \frac{k}{r}$ n'est fonction que de x', y', z' et non de x'_1, y'_1, z'_1 . Donc u'_1, v'_1, w'_1 sont des constantes; c'est le théorème du mouvement du centre de gravité. Il reste comme inconnues $x', y', z'; u', v', w'$. Posons :

$$\begin{aligned} W^2 &= u'^2 + v'^2 + w'^2, \\ W_1^2 &= u_1'^2 + v_1'^2 + w_1'^2, \\ Q &= u' u'_1 + v' v'_1 + w' w'_1. \end{aligned}$$

Nous aurons alors :

$$\begin{aligned} W^2 &= W'^2, \\ W_1^2 &= \Sigma u_1'^2 = \Sigma (u'_1 - u')^2 = W_1'^2 + W'^2 - 2Q. \end{aligned}$$

Que sera la fonction perturbatrice ? Elle se réduit à

$$R = \frac{W^4}{4\alpha m^3} + \frac{W_1^4}{4\alpha m_1^3},$$

car les autres termes de F existent dans la théorie ordinaire. Nous aurons donc des termes en $W'^4, W_1'^4, Q^2, W'^2, W_1'^2, QW'^2, QW_1'^2$.

Remarquons qu'il n'y aura pas de perturbation séculaire des grands axes; la démonstration ordinaire du théorème de Lagrange s'applique; on a

$$\frac{da}{dt} = \kappa \frac{dR}{dl},$$

où l est la longitude moyenne. Si R est une fonction périodique de l , $\frac{dR}{dl}$ a une valeur moyenne nulle.

Toutes les fois que les forces perturbatrices ne représentent pas une consommation d'énergie, nous n'avons pas d'accélération séculaire, c'est-à-dire pas de variation séculaire du grand axe. Il n'y a de variation

séculaire de a que lorsque le théorème des forces vives ne s'applique plus, dans le cas d'une résistance de milieu ou dans la propagation de l'énergie selon l'hypothèse de Laplace. Donc ici, nous n'avons pas de variation du grand axe.

L'excentricité et le périhélie subiront des variations séculaires. Si nous supposons que le système solaire est au repos,

$$u'_1 = v'_1 = w'_1 = 0.$$

nous n'aurons pas de variation d'excentricité. Mais, si le mouvement du système solaire n'est pas nul, $W'_1{}^2$ est une constante donnée non nulle. Or R dépend de $W'_1{}^2$ et de Q , qui est une fonction linéaire donnée de u, v, w , fonction linéaire dont les coefficients dépendent de la vitesse absolue u'_1, v'_1, w'_1 du système solaire. Le mouvement dépendra donc de la vitesse absolue du système solaire, et le principe de relativité se trouve en défaut : ceci tient à ce que l'hypothèse de Lorentz ne respecte le principe de relativité qu'à condition de modifier la loi de Newton, ce dont nous n'avons pas tenu compte.

Généralisation des équations de Maxwell. — Nous avons vu ⁽¹⁾ comment on doit modifier la loi d'attraction si l'on veut respecter le principe de relativité. On arrive à des formules compliquées, mais susceptibles d'interprétation :

1° Les forces sont telles que, si le corps attirant est fixe, la loi d'attraction se réduit à la loi de Newton;

2° Si un corps mobile, soit le Soleil S , attire un corps mobile, soit la Terre T , la force dépend de la position et de la vitesse de la Terre à l'instant t , et elle dépend aussi de la position et de la vitesse du Soleil à un instant antérieur t_0 , tel que $t - t_0$ soit le temps mis par la lumière à venir du Soleil à la Terre;

3° Le principe de relativité est satisfait.

Ces conditions suffisent pour déterminer les forces d'attraction à chaque instant et pour former les équations différentielles du mouvement. Le problème ne comporte qu'une solution : quelle en est la signification ?

Considérons à nouveau les équations du champ électrique, les unités étant celles de Lorentz; soient f, g, h les composantes du champ électrique; α, β, γ celles du champ magnétique; ξ, η, ζ celles de la vitesse de l'électron

⁽¹⁾ Dans les Notes de Henri Vergne, il manque ici une leçon. D'après la suite, cette leçon devait être une partie ou un résumé du Mémoire de Poincaré : *Sur la dynamique de l'électron* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 21, 1906, p. 166).

et ρ la densité électrique. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} + \rho \xi &= \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z} \quad \text{et deux équations analogues,} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{et deux équations analogues,} \\ \frac{d\rho}{dt} + S \frac{\partial(\rho \xi)}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

et

$$S \frac{df}{dx} = \varepsilon, \quad S \frac{dz}{dx} = 0.$$

Quel est le champ produit par un électron en mouvement ? Intro-

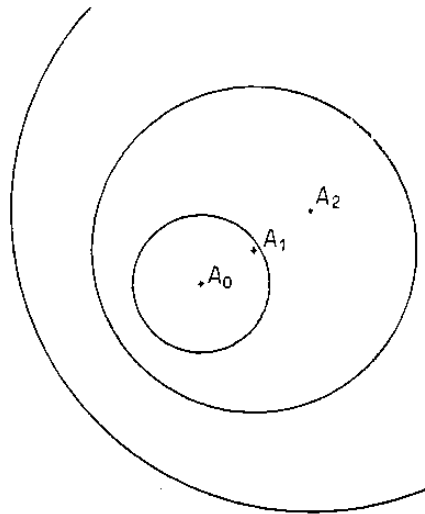


Fig. 68.

duisons le potentiel électrostatique Ψ et le potentiel vecteur (F, G, H). Nous aurons alors :

$$z = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad f = - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

d'où le champ électromagnétique par une simple différentiation des potentiels.

Pour déterminer F, G, H et Ψ , nous avons des équations différentielles :

$$(6) \quad \square F = -\rho \xi, \quad \square \Psi = -\rho,$$

avec la notation

$$\square U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Si l'électron était fixe, on aurait :

$$\square \Psi = \Delta \Psi,$$

Ψ serait un potentiel newtonien dû à l'attraction de l'électron. Si l'électron est mobile, nous avons les équations (6) qui ont une solution analogue.

Considérons en A_0, A_1, A_2, \dots les positions de l'électron aux instants t_0, t_1, t_2, \dots (fig. 68). Avec un rayon égal à $t-t_0$, décrivons une sphère de centre A_0 ; en tous les points de cette sphère, le potentiel aura la même valeur $\frac{e}{4\pi(t-t_0)}$.

De A_1 décrivons une sphère de rayon $t-t_1$; sur cette sphère le potentiel est $\frac{e}{4\pi(t-t_1)}$. Nous connaissons ainsi le potentiel Ψ en tous les points de l'espace. De même pour F , nous aurons sur les diverses sphères les valeurs $\frac{e\zeta_0}{4\pi(t-t_0)}, \frac{e\zeta_1}{4\pi(t-t_1)}, \dots$

Le potentiel électrostatique Ψ dépend donc uniquement de la position de l'électron à l'instant où l'onde gravifique le quitte, tandis que le potentiel vecteur dépend de sa position et de sa vitesse au même instant.

Onde de vitesse; onde d'accélération. — Les composantes α, β, γ et f, g, h des champs électrique et magnétique dépendent des dérivées de Ψ et de F , c'est-à-dire de ce qui se passe sur deux sphères infiniment voisines. Ψ dépendait de la seule position, A_0 par exemple, mais $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ va dépendre, de plus, de la position A_1 , c'est-à-dire de la vitesse de l'électron. Quant aux dérivées du potentiel vecteur, elles dépendront des valeurs de F, G, H sur deux sphères infiniment voisines, donc de la position, de la vitesse et de l'accélération de l'électron. Les composantes du champ électromagnétique dépendent donc de la position, de la vitesse et de l'accélération de l'électron à un instant antérieur; l'accélération figurera au premier degré.

Alors Langevin divise l'onde correspondante en deux parties :

- 1° L'onde de vitesse, en supposant le mouvement rectiligne et uniforme;
- 2° L'onde d'accélération proportionnelle à l'accélération de l'électron.

Quelle sera l'action sur un électron extérieur ? Soit $d\tau$ un élément de volume de cet électron : sa charge est $\rho d\tau$; la force qui l'attire est

$$K\rho d\tau[f + (\tau\gamma - \zeta\beta)] \quad (K = \text{const.}).$$

Considérons l'action mutuelle de deux électrons :

Si l'électron attirant est fixe, il produit un champ électrique, mais pas de champ magnétique; l'attraction sera électrostatique. La loi de Newton s'appliquera.

Si l'électron attirant est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, nous n'aurons que l'onde de vitesse et nous pourrons appliquer la trans-

formation de Lorentz qui respecte le principe de relativité. La force dépend seulement de la position et de la vitesse de l'électron attirant à un instant antérieur. C'est précisément le résultat obtenu précédemment; on le retrouverait en négligeant l'onde d'accélération de Langevin.

Interprétation des résultats. — Il reste à interpréter, c'est ce qu'a tenté Lorentz. Nous avons vu que ce qui se passe en un point de l'espace dépend seulement du champ en ce point, quelle que soit son origine (courants ou aimants).

Considérons alors deux électrons; s'ils sont tous deux positifs, par exemple, nous aurons un champ positif. Deux électrons de signes contraires, très voisins l'un de l'autre ne donneront aucun champ : ils forment un corps neutre. Quelle sera son action ? Nous allons modifier

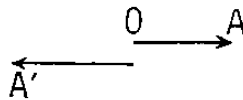


Fig. 69.

l'action de champ de Maxwell, et considérer séparément les électrons positifs et les électrons négatifs; les premiers donnent un champ OA, les autres un champ OA' (fig. 69). Dans la théorie ordinaire, les deux champs sont égaux et opposés, donc ils ne produisent rien. L'action du champ OA sur l'électron positif + M est +kM.OA (k = const.); sur l'électron négatif—M, c'est —kM.OA. De même, le champ OA' donnera les actions kM.OA' et —kM.OA'; et si l'on suppose OA = —OA', l'action est nulle.

Lorentz suppose que le champ OA agit sur les électrons positifs avec un coefficient k, et sur les électrons négatifs avec un coefficient k'. Au contraire, le champ OA' agit sur les électrons positifs avec le coefficient k' et sur les électrons négatifs avec le coefficient k. Nous avons alors la somme

$$(7) \quad kM.OA - k'M.OA + k'M.OA' - kM.OA',$$

dont les termes ne se détruisent plus deux à deux.

Il vient pour l'équation (7)

$$2(k - k')M.OA.$$

Les électrons positifs seuls engendrent un champ ($\alpha, \beta, \gamma; f, g, h$) et nous avons les équations :

$$\frac{df}{dt} + e\xi = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Les électrons négatifs seuls donneront un champ $(\alpha', \beta', \gamma'; f', g', h')$, et nous aurons les équations de la forme

$$\frac{df'}{dt} + \rho' \xi' = \frac{\partial \alpha'}{\partial y} - \frac{\partial \beta'}{\partial z},$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{\partial g'}{\partial z} - \frac{\partial h'}{\partial y}.$$

A quelle action sera soumis un électron positif dont la masse est ρ ? Ce sera :

$$k\rho[f + (\alpha\gamma - \xi\beta)] d\tau + k'\rho[f' + (\alpha'\gamma' - \xi'\beta')] d\tau.$$

L'action, à laquelle sera soumis un électron négatif de masse ρ' , sera

$$k'\rho'[f + (\alpha\gamma - \xi\beta)] d\tau + k\rho[f' + (\alpha'\gamma' - \xi'\beta')] d\tau.$$

Ces deux champs dus séparément aux électrons positifs et aux électrons négatifs seront considérés indépendamment l'un de l'autre, et nous aurons un coefficient k ou k' suivant qu'un champ positif (ou négatif) attire un électron positif (ou négatif), ou un électron négatif (ou positif).

En résumé, lorsque le corps attirant est fixe, la loi de Newton s'applique; lorsque le corps attirant a un mouvement rectiligne et uniforme, nous n'avons qu'une onde de vitesse; enfin, pour un mouvement quelconque, on doit ajouter à l'onde de vitesse une onde d'accélération de Langevin. Mais ce terme est absolument négligeable : en effet, l'accélération des corps célestes est pratiquement nulle (surtout si l'on choisit comme unité de vitesse la vitesse de la lumière). Le seul effet appréciable que donnerait cette théorie serait un mouvement de $7''$ pour le périhélie de Mercure.

CHAPITRE XIII.

LA THÉORIE DE LESAGE ET LA DYNAMIQUE NOUVELLE.

Nous avons vu la difficulté soulevée par la théorie de Lesage : les corpuscules ont une vitesse très grande et la force vive perdue dégage une quantité de chaleur inadmissible.

Pourrait-on espérer échapper à cette difficulté avec la dynamique de l'électron ? Pour les vitesses très grandes, la force vive n'a pas la même expression que pour les vitesses faibles. Mais nous n'avons pas le droit d'admettre une vitesse plus grande que celle de la lumière et ce sera là notre pierre d'achoppement; mais nous prendrons $V = 1$.

Que deviennent les lois du choc ? nous distinguerons le cas des corps élastiques et celui des corps non-élastiques.

1° *Corps élastiques.* — Il y a conservation de la quantité de mouvement

Bull. astron. (Tome XVII. — Fasc. 3).

et de la force vive. Avec les notations de Lorentz, la quantité de mouvement a pour composantes : $H'\xi$, $H'\eta$, $H'\zeta$, et la force vive est H' . Les lois du choc seront :

$$(1) \quad \Sigma H' = \text{const.}, \quad \Sigma H'\xi = \text{const.}, \quad \Sigma H'\eta = \text{const.}, \quad \Sigma H'\zeta = \text{const.}$$

Ces lois sont-elles altérées par une transformation de Lorentz? il ne le faut pas, si nous voulons respecter le principe de relativité. Or, nous avons :

$$\begin{aligned} \delta H' &= H'\xi\varepsilon(1 - V^2), \\ \delta(H'\xi) &= 4\alpha\varepsilon\xi^2(1 - V^2) + H'\varepsilon(1 - \xi^2), \\ \delta(H'\eta) &= 4\alpha\varepsilon\eta^2(1 - V^2) - H'\varepsilon\xi\eta, \\ \delta(H'\zeta) &= 4\alpha\varepsilon\xi\zeta(1 - V^2) - H'\varepsilon\xi\zeta, \end{aligned}$$

et, en négligeant les carrés ou les produits des composantes de la vitesse V , et en faisant $V = 1$,

$$(2) \quad \begin{cases} \delta H' = 0, \\ \delta(H'\xi) = \varepsilon H', \\ \delta(H'\eta) = 0, \\ \delta(H'\zeta) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$(3) \quad \begin{cases} \delta \Sigma H' = 0, \\ \delta \Sigma H'\xi = \varepsilon \Sigma H' = \text{const.}, \\ \delta \Sigma H'\eta = 0, \\ \delta \Sigma H'\zeta = 0. \end{cases}$$

Les équations du choc ont bien pour conséquences, d'après (3),

$$\delta \Sigma H' = \text{const.}, \quad \delta \Sigma H'\xi = \text{const.}, \quad \delta \Sigma H'\eta = \text{const.}, \quad \delta \Sigma H'\zeta = \text{const.}$$

Les lois du choc pour les corps élastiques respectent le principe de relativité.

2° *Corps non-élastiques.* — En est-il de même pour les corps non-élastiques? Non; il y a perte de force vive, $\Sigma H'$ n'est plus constant; donc dans les équations (3), $\delta \Sigma H'\xi$ n'est plus constant. Or Lesage est obligé d'admettre que les corpuscules ne sont pas parfaitement élastiques.

Objections diverses. — 1° Les vitesses des corpuscules sont distribuées dans tous les sens. Un observateur en mouvement verra-t-il encore ces vitesses uniformément distribuées? Il faudrait pour cela que les vitesses ne soient pas altérées par une transformation de Lorentz; or cette transformation donne :

$$\begin{aligned} V \delta V &= \varepsilon\xi(1 - V^2), \\ \delta\xi &= \varepsilon(1 - \xi^2), \\ \delta\eta &= -\varepsilon\xi\eta, \\ \delta\zeta &= -\varepsilon\xi\zeta. \end{aligned}$$

Si la vitesse V est celle de la lumière, c'est-à-dire si $V = 1$, δV est nul. Quant aux directions, la distribution uniforme s'écrit :

$$\begin{aligned} \Sigma \xi &= \Sigma \eta = \Sigma \zeta = 0, \\ \Sigma \xi \eta &= 0. \quad \Sigma \xi \zeta = 0. \quad \Sigma \eta \zeta = 0 \end{aligned}$$

et

$$\Sigma \xi^2 = \Sigma \eta^2 = \Sigma \zeta^2 = \frac{n}{3},$$

n , nombre de corpuscules par unité de volume.

Alors

$$\delta \Sigma \xi = \varepsilon \Sigma (1 - \xi^2) = \frac{2n\varepsilon}{3},$$

qui n'est pas nul.

Le fait de la distribution uniforme prouverait à notre observateur qu'il est en repos. Par conséquent, la théorie de Lesage ne respecte en aucune manière le principe de relativité.

2° Considérons l'attraction mutuelle de deux corps; dans la théorie de Lesage, elle est représentée par

$$\frac{\pi}{4} \nu v^2 \frac{na^2 n' b^2}{R^2},$$

le premier corps étant formé de n atomes sphériques de rayon a , et le second de n' atomes de rayon b .

Pour arriver à ce résultat, nous avons évalué le nombre des corpuscules heurtés par chaque sphère, et nous avons calculé la quantité de mouvement correspondante. Dans ce cas, le nombre des corpuscules rencontrés sera le même. Mais la quantité de mouvement, au lieu d'être $m\nu$, sera représentée par $H'\nu$. Notre formule devient :

$$\frac{\pi}{4} H' \nu v^2 \frac{na^2 n' b^2}{R^2},$$

où νv est le nombre des corpuscules rencontrés dans l'unité de temps, et où H' est la masse transversale.

Faisons $V = 1$; il vient

$$\frac{\pi}{4} H' \nu \frac{na^2 n' b^2}{R^2}.$$

3° Nous avons obtenu la formule

$$na^2 = \varepsilon A^2,$$

où A est le rayon de la Terre, et n le nombre des atomes qui forment la Terre. Et nous avons trouvé que ε doit être inférieur à 10^{-7} . Nous n'avons rien à changer à cette formule, qui a été obtenue géométriquement.

4° Pour la chaleur dégagée :

$$J = \frac{\pi}{2} n a^2 \rho v^3,$$

il faut remplacer la force vive par l'expression

$$V \frac{dH}{dV} - H = V^2 H' - H,$$

dans laquelle nous ferons $V = 1$. Or H' est alors beaucoup plus grand que H ; remplaçons la force vive par H' et nous aurons donc :

$$J = \frac{\pi}{2} n a^2 H' v.$$

5° Il faut encore parler de la résistance rencontrée par un corps par suite du choc des corpuscules : le milieu corpusculaire est résistant.

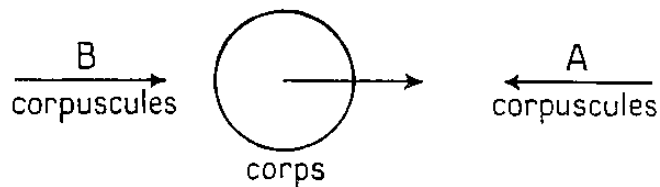


Fig. 70.

Soit u la vitesse du corps; la résistance est égale à

$$\frac{4}{3} \pi n a^2 \rho u v.$$

Cette résistance est due à deux causes :

a. Le nombre de rencontres avec les corpuscules A est plus grand qu'avec les corpuscules B; il n'y a donc pas de symétrie (fig. 70).

b. Après le choc, les corpuscules parfaitement mous prennent la vitesse u du corps choqué, donc acquièrent une quantité de mouvement non nulle mu .

Le premier effet, purement géométrique, subsiste; mais le second va disparaître. En effet, avant le choc, la quantité de mouvement est

$$H'V = H'.$$

Or

$$H' = \frac{K'}{\sqrt{1-V^2}};$$

V est voisin de 1, et K' est très petit.

Après le choc, la masse transversale devient

$$H' = \frac{K'}{\sqrt{1-u^2}},$$

et la quantité de mouvement

$$\frac{K' u}{\sqrt{1-u^2}},$$

qui est très petit, puisque u est très petit.

Le second effet ne se produit pratiquement pas. La résistance est diminuée de moitié, et devient

$$(4) \quad \frac{2}{3} \pi n a^2 H' v u.$$

6° Quant à l'effet Laplace, il disparaît. Si la vitesse du corpuscule est voisine de la vitesse de la lumière, sa masse est sensible; mais si sa vitesse est petite, sa masse est négligeable. Or, l'effet Laplace provenait de la vitesse u que prenaient les corpuscules après le choc.

En résumé, nous prenons V égal à la vitesse de la lumière; l'observation nous donne $\varepsilon \leq 10^{-7}$. Les formules trouvées nous donneront successivement na^2 , $H'v$, puis la résistance (4). Or cette résistance est très notable et incompatible avec les données de l'observation. Sous cette forme, la théorie de Lesage est inacceptable.

Théorie de Lesage-Maxwell-Bartholi. — Si nous voulons remplacer les corpuscules de Lesage par une pression comme celle de Maxwell-Bartholi, nous retrouverons les mêmes difficultés. En effet, dans la théorie de Lorentz, les lois de la réfraction ne sont pas modifiées par une translation, mais il n'en est pas de même de l'absorption.

Pour un observateur animé d'un mouvement de translation, une onde plane reste plane; mais ni le plan de l'onde, ni la longueur d'onde (Doppler-Fizeau) ne seront les mêmes. L'observateur ne s'en apercevra pas, la différence ne provenant que du mouvement relatif de la source et de l'observateur. Mais imaginons des ondes, sillonnant l'espace dans tous les sens, comme les corpuscules de Lesage. Notre observateur verra toujours des ondes planes; mais s'il est en mouvement, il constatera une non-uniformité dans la distribution des ondes; le principe de relativité ne sera pas respecté.

Une telle pression de Maxwell-Bartholi offre-t-elle une résistance au mouvement des corps? Oui. En effet, soit une paroi au repos, choquée à droite et à gauche par une onde (*fig. 71*); il en résulte, de part et d'autre, une pression égale.

Mais si la paroi est en mouvement, au temps t , on a la figure 72.

La plaque AB est venue en A'B', les ondes CD et EF en C'D' et E'F'.

Supposons que l'onde soit absorbée par la paroi; le problème se traite alors comme si les ondes étaient des projectiles (Maxwell). Si la plaque était au repos, nous aurions pour l'onde de droite une quantité de mouvement détruite correspondant au déplacement CD, C'D' et pour l'onde

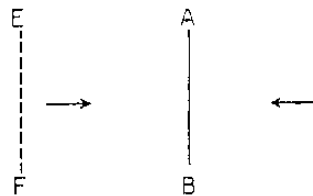


Fig. 71.

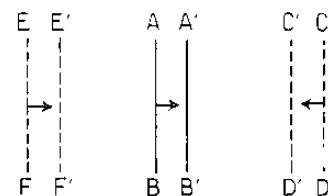


Fig. 72.

de gauche, correspondant à EF, E'F'. Donc la quantité de mouvement totale serait nulle. Mais AB est, en réalité, venu en A'B'; le volume ABA'B' doit s'ajouter au volume CDC'D' et se retrancher du volume EFE'F'; la plaque subit donc une résistance dans le sens inverse de sa vitesse.

En serait-il de même si la plaque était réfléchissante? Non (*fig. 73*). Au bout du temps t , C serait en C', mais D en D'; de même, E serait en E', mais F en F', tandis que AB serait venu en A'B'.

Il n'y a donc pas de résistance; mais si les corps sont réfléchissants, il n'y a pas non plus d'attraction, comme dans le cas des corpuscules de Lesage parfaitement polis. Donc, si nous avons une attraction, nous avons une résistance, et si nous éliminons la résistance, nous annulons en même temps l'attraction.

Peut-on supposer que la plaque réfléchit, non pas une onde identique à celle qu'elle reçoit, mais des rayons secondaires différents, moins absorbables que les rayons incidents? Les rayons primaires auront une action normale, les rayons secondaires seront infiniment pénétrants,

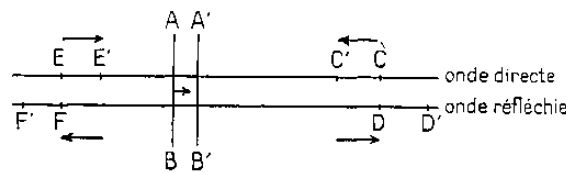


Fig. 73.

c'est-à-dire dénués de toute action. Par exemple, les rayons X étant des rayons de très faible longueur d'onde, seraient nos rayons incidents, ou plutôt nous aurions des rayons primaires X' moins absorbables encore; nos rayons secondaires X'' ne seraient plus absorbés du tout. Nous avons vu que l'on peut ainsi rendre compte des faits, mais que cette hypothèse est absolument arbitraire.

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DE LORENTZ ⁽¹⁾.

Nous allons étudier un Mémoire de Lorentz sur une théorie analogue à celle de Lesage. Supposons l'espace parcouru par des ondes lumineuses, venant de l'infini et uniformément distribuées. Ces ondes frappant les électrons produisent des forces; la force exercée sur un électron sera perturbée par l'électron voisin.

Soient f, g, h les composantes du champ électrique, et α, β, γ celles du champ magnétique. Nous prendrons la vitesse de la lumière comme unité de vitesse.

Soit encore e la charge de l'électron; la force agissant sur cet électron a pour projection sur l'axe des x

$$(1) \quad e(f - \eta\gamma - \xi\beta),$$

si ξ, η, ζ sont les composantes de la vitesse.

Appellons X, Y, Z les trois composantes du déplacement de l'électron à partir de l'équilibre. Nous avons alors :

$$\xi = \frac{dX}{dt}, \quad \eta = \frac{dY}{dt}, \quad \zeta = \frac{dZ}{dt};$$

X, Y, Z seront des fonctions des composantes du champ et de leurs dérivées; X ne dépendra que de f , car si l'on change g (ou h) en $-g$ (ou $-h$) X ne change pas. Donc

$$X = a_1 f + a_2 \frac{df}{dt} + a_3 \frac{d^2 f}{dt^2} + \dots,$$

cette relation étant linéaire.

Nous écrirons simplement :

$$X = af - b \frac{df}{dt}.$$

En effet, nous aurons des vibrations périodiques et nous pourrions grouper les termes $\frac{d^2 f}{dt^2}, \frac{d^3 f}{dt^3}, \dots$, avec f et, de même, $\frac{d^3 f}{dt^3}, \dots$, avec $\frac{df}{dt}$ (ceci pour une longueur d'onde déterminée). Donc

$$(2) \quad \begin{cases} X = af - b \frac{df}{dt}, \\ Y = ag - b \frac{dg}{dt}, \\ Z = ah - b \frac{dh}{dt}; \end{cases}$$

a et b sont deux coefficients donnés pour une longueur d'onde donnée.

⁽¹⁾ *Mémoires de l'Académie des Sciences d'Amsterdam* (Considerations on Gravitation), 25 avril 1900.

Les vibrations étant très petites, f est du premier ordre, ainsi que ξ et α, β, γ . Donc les termes $\eta\gamma - \zeta\beta$ sont du second ordre; et en première approximation l'expression (1) se réduit à ef .

En deuxième approximation, f sera changé en $f + \delta f$, car f est la valeur du champ dans la position d'équilibre; et l'on aura :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z.$$

Donc les termes du second ordre seront :

$$e \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z \right) + (\eta\gamma - \zeta\beta) \right].$$

Or on a

$$\eta = \frac{dY}{dt}, \quad \zeta = \frac{dZ}{dt},$$

et nous pouvons remplacer $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$ par leurs valeurs, données par la première approximation, c'est-à-dire que nous remplacerons X par $af - b \frac{df}{dt}, \dots$, valeurs (2). Nous aurons ainsi des termes en a et des termes en b , que nous étudierons successivement.

Termes en a . — Le coefficient de ea est

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial g}{\partial t} \gamma - \frac{\partial h}{\partial t} \beta.$$

Cherchons la valeur moyenne de cette expression; nous avons

$$\text{Moy} \left(\gamma \frac{dg}{dt} \right) = \text{Moy} \left(\frac{dg\gamma}{dt} \right) - \text{Moy} \left(g \frac{d\gamma}{dt} \right).$$

Or, le premier terme du second membre de cette équation est la dérivée d'une fonction périodique; il a une valeur moyenne nulle. Donc l'expression (3) devient

$$\frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial f}{\partial z} h - g \frac{d\gamma}{dt} + h \frac{d\beta}{dt}.$$

D'autre part, les équations du champ magnétique donnent :

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \end{aligned}$$

et il vient finalement

$$\frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial g}{\partial x} g + \frac{\partial h}{\partial x} h = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial S f^2}{\partial x}.$$

Cette expression dérive d'un potentiel $\frac{1}{2} \Sigma f^2$; mais qu'est-ce que f^2 ?
 Posons :

$$f = f_1 + f_2,$$

et soient deux électrons P et Q; nous appellerons f_1 la valeur qu'aurait le champ électrique si Q n'existait pas; f_2 sera le champ produit par l'électron Q. Alors

$$\Sigma f^2 = \Sigma f_1^2 + 2 \Sigma f_1 f_2 + \Sigma f_2^2.$$

Or le premier terme Σf_1^2 est certainement nul, car si l'électron Q n'existait pas, les ondes, uniformément distribuées, n'auraient aucun effet.

De plus, supposons une onde plane; nous prendrons Oz perpendiculaire

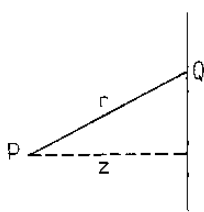


Fig. 74.

au plan de l'onde; z sera la projection de la distance $PQ = r$ sur une normale au plan de l'onde (fig. 74). Nous aurons le champ

$$f_1 = A \cos(mz - nt).$$

L'électron Q va avoir une vibration qui sera proportionnelle à $\cos(nt + \varepsilon)$, où ε est la différence de phase. Les vibrations de cet électron vont produire un champ complémentaire f_2, g_2, h_2 .

Pour un point suffisamment éloigné, le seul effet sensible sera une onde assimilable à une onde plane, proportionnelle à r . Nous aurons donc :

$$f_2 = \frac{A}{r} \cos(mr - nt - \varepsilon);$$

f_2^2 donnera des termes en $\frac{1}{r^2}$ négligeables. Nous ne conserverons que les termes en $\frac{1}{r}$ provenant de $\Sigma f_1 f_2$. Le produit $f_1 f_2$ nous donne le terme :

$$\frac{A^2}{r} \cos(mz - mr + \varepsilon).$$

Nous aurons donc une différence de phase variable, dépendant de $mr - \varepsilon$. Si PQ est parallèle au plan de l'onde, $z = r$; dans ce cas seulement, le produit $f_1 f_2$ ne sera pas nul.

En résumé, $\Sigma f_1 f_2$ n'est pas nul, mais est extrêmement petit. Nous négligerons donc les termes en ea .

Termes en b . — Le coefficient de eb est

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{df}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dh}{dt} + \frac{d^2 g}{dt^2} \gamma - \frac{d^2 h}{dt^2} \beta.$$

Les trois premiers termes sont du second degré par rapport aux dérivées de f, g, h ; ils proviennent de l'action électrostatique, tandis que les deux derniers proviennent de l'action magnétique. Remplaçons f par $f_1 + f_2$, nous aurons des termes en f_1^2 , en $f_1 f_2$ et en f_2^2 .

Les termes en f_1^2 (ou en $f_1 g_1$, ou en $f_1 h_1$) seront nuls par raison de symétrie.

Les termes en f_2^2 (ou en $f_2 g_2$, ou en $f_2 h_2$) seront de l'ordre de r^2 , donc ils seront négligeables.

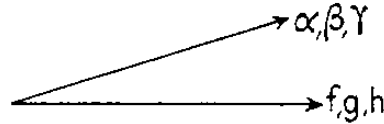


Fig. 75.

Pour les termes en $f_1 f_2$ (ou en $f_1 g_2, \dots$) nous aurons :

$$f_1 = \cos(mz - nt), \quad f_2 = \frac{\cos(mr - nt + \varepsilon)}{r}.$$

Dans la valeur moyenne de l'expression (4), nous aurons un terme

$$\frac{\cos(mz - mr + \varepsilon)}{r},$$

qui aura lui-même une valeur moyenne nulle, à moins que l'on n'ait $z=r$; donc ces trois premiers termes sont négligeables.

Voyons maintenant ce que donnent les deux derniers termes

$$eb \left(\frac{d^2 g}{dt^2} \gamma - \frac{d^2 h}{dt^2} \beta \right) = ebn^2 (g\gamma - h\beta).$$

Or qu'est-ce que $g\gamma - h\beta$?

C'est la composante suivant Ox d'un vecteur perpendiculaire au plan des deux vecteurs (α, β, γ) et (f, g, h) , et proportionnel à leur produit géométrique (fig. 75). Ce vecteur représente la quantité d'énergie qui traverse une surface unité dans l'unité de temps. Nous appellerons S_x, S_y, S_z les composantes de ce vecteur, dit vecteur de Poynting. Finalement, ce terme en eb est $ebn^2 S_x$.

En présence de l'électron Q, ce vecteur n'est pas nul. Une sphère de centre Q absorbera constamment de l'énergie; soit E l'énergie absorbée dans l'unité de temps. Par unité de surface, on aura $\frac{E}{4\pi R^2}$. Le vecteur de

Poynting sera le même dans toutes les directions et aura pour grandeur $\frac{E}{4\pi R^2}$. Nous aurons pour le terme en eb :

$$ebn^2 \frac{E}{4\pi R^2}.$$

L'attraction sera proportionnelle à $\frac{1}{R^2}$.

Considérons la quantité d'énergie absorbée par P; c'est le travail de la force qui agit sur l'électron; cette force est ef en première approximation. L'énergie absorbée par unité de temps est égale à

$$E = e \left(f \frac{dX}{dt} + g \frac{dY}{dt} + h \frac{dZ}{dt} \right)$$

ou

$$e \left(X \frac{df}{dt} + Y \frac{dg}{dt} + Z \frac{dh}{dt} \right),$$

après intégration par parties; soit

$$E = -e \Sigma X \frac{df}{dt} = ae \Sigma f \frac{df}{dt} + be \Sigma \left(\frac{df}{dt} \right)^2.$$

Le terme en ae a une valeur moyenne nulle, et l'on a

$$\Sigma \left(\frac{df}{dt} \right)^2 = n^2 \Sigma f^2.$$

L'énergie absorbée est donc

$$E = ebn^2 \Sigma f^2.$$

Or l'énergie totale par unité de volume est

$$\frac{\Sigma f^2}{2} + \frac{\Sigma \alpha^2}{2} = \Sigma f^2 = E';$$

les énergies des deux premiers termes étant en moyenne, égales entre elles, E' est l'énergie incidente par unité de volume; donc

$$E = n^2 be E'.$$

Attraction. -- L'attraction mutuelle de deux électrons semblables sera

$$\frac{ebn^2 E}{4\pi R^2} = \frac{E^2}{4\pi R^2 E'}.$$

Pour deux électrons différents, nous aurions :

$$\frac{EE_1}{4\pi R^2 E'};$$

c'est la formule de Newton

$$\frac{k^2 MM'}{R^2},$$

en posant :

$$(5) \quad kM = \frac{E}{\sqrt{4\pi} E'}.$$

Telle serait l'expression de la masse, E' étant l'énergie incidente, et E l'énergie absorbée par unité de temps.

Si l'on considère que la Terre joue le rôle d'écran, l'attraction est diminuée dans le rapport

$$\varepsilon = 10^{-7}.$$

L'énergie absorbée est

$$E = \varepsilon \times \text{énergie incidente.}$$

L'énergie incidente est égale au produit par E' du volume d'un cylindre ayant pour section la surface de la Terre $4\pi\rho^2$, et pour hauteur la vitesse de la lumière V ; donc

$$\frac{E}{E' \times 4\pi\rho^2 V} = \varepsilon,$$

et, d'après l'expression (5),

$$E = \frac{4\pi k^2 M^2}{4\pi\rho^2 V \varepsilon} = \frac{k^2 M^2}{\rho^2} \frac{1}{V \varepsilon}.$$

Or $\frac{k^2 M^2}{\rho^2}$ représente l'attraction mutuelle de deux masses égales à la Terre, situées à une distance égale au rayon de la Terre : C'est le poids de la Terre, Mg . Donc

$$E = \frac{Mg}{V \varepsilon}.$$

Remarquons que cette formule n'est pas homogène;

$$E = \frac{\text{énergie}}{\text{temps}} = \frac{FL}{T},$$

$$\frac{Mg}{V \varepsilon} = \frac{\text{force}}{\text{vitesse}} = \frac{FT}{L},$$

car ε est un nombre. Ce défaut d'homogénéité provient de notre choix des unités. Pour rétablir cette homogénéité, il suffit de multiplier l'expression de E par V^2 , qui est égal à 1. Et il vient

$$E = \frac{MgV}{\varepsilon},$$

ce qui représente l'énergie absorbée par la Terre dans l'unité de temps. ε étant égal à 10^{-7} , nous aurons en unités C.G.S. :

$$E = Mg \times 3.10^{17}.$$

Si la Terre pèse N kilogrammes, l'énergie sera $3 \cdot 10^{15} N$ kilogrammètres, ce qui, en chaleur, donne :

$$\frac{3 \cdot 10^{15} N}{425} \text{ cal.}$$

La Terre élèverait, en 1 seconde, sa température de 10^{13} °C, si l'on suppose sa capacité calorifique égale à 1.

Donc, de quelque façon qu'elle soit envisagée, la théorie de Lesage correspond à un dégagement de chaleur inadmissible. La difficulté est insurmontable.

CHAPITRE XV.

HYPOTHÈSES DIVERSES SUR L'ATTRACTION.

Hypothèse de Bjerknæs (1). — Considérons un liquide où sont plongées deux sphères en caoutchouc, auxquelles sont communiquées des vibrations. Si ces vibrations ont même phase, les sphères s'attirent; si elles ont des phases différentes, elles se repoussent. Nous avons ainsi une imitation des phénomènes électrostatiques, mais l'image est inversée.

Si l'on veut, au contraire, y voir une explication de l'attraction, il n'y a plus inversion : deux sphères de même phase correspondront à deux masses positives. Dans le cas de l'hypothèse de Bjerknæs, deux sphères qui en attirent une troisième s'attirent entre elles, comme les planètes, contrairement à ce qui se produit en électrostatique. Tout se passe comme si tous les atomes matériels étaient des sphères de Bjerknæs, pour lesquelles la vibration et la phase seraient les mêmes.

Soient deux sphères vibrantes d'amplitudes α_1 et α_2 , de phases ε_1 et ε_2 . Leur attraction sera

$$\alpha_1 \alpha_2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = m_1 m_2,$$

car l'attraction est le produit des masses ordinaires.

Pour deux autres sphères α_3 et α_4 , nous aurons

$$\alpha_3 \alpha_4 \cos(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) = m_3 m_4.$$

De même, en combinant les sphères 1 et 3, puis 2 et 4, nous aurons :

$$\alpha_1 \alpha_3 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = m_1 m_3,$$

$$\alpha_2 \alpha_4 \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_4) = m_2 m_4.$$

Donc, en multipliant membre à membre ces équations deux par deux, il vient :

$$\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)$$

(1) *Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte*, Leipzig, 1900-1902.

ou

$$\begin{aligned} & \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) + \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \\ &= \cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4) + \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \end{aligned}$$

ou

$$\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4).$$

Puisque les cosinus sont égaux, les angles sont égaux ou opposés, c'est-à-dire que nous avons :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3, \quad \text{ou} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_4.$$

Deux phases sont identiques. Si nous faisons toutes les combinaisons possibles, nous constaterons que toutes les phases doivent être identiques. Donc, si tous les atomes sont des sphères de Bjerknes, toutes leurs phases seront les mêmes.

Cette explication avait déjà été proposée par Riemann : il supposait que les atomes matériels absorbent et détruisent constamment de l'éther. Cet éther disparu quittait l'espace à trois dimensions, et devenait quelque chose de tout à fait mystérieux. Ici, la difficulté relative à la phase disparaît, puisqu'il y a contraction.

Si nous voulons imiter un champ électrostatique, prenons deux corps semblables plongés dans un liquide et imprimons à leur surface des pulsations normales à la surface elle-même. Supposons l'amplitude de la vibration proportionnelle à la densité électrique du champ que nous voulons imiter. Une molécule liquide aura une vitesse u, v, w ; ces trois composantes sont proportionnelles à $\sin \frac{2\pi t}{T}$, T étant la période de vibration.

Nous aurons une fonction des vitesses φ , telle que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

L'équation de continuité, qui exprime que le liquide est incompressible, est

$$\text{S} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta \varphi = 0;$$

c'est l'équation de Laplace.

A l'infini, φ doit être nul; ces conditions sont aussi réalisées par le potentiel d'un champ électrique. De plus, $\frac{d\varphi}{dn}$ doit être proportionnel, en un point de la surface du corps, à la vitesse du corps pulsant, c'est-à-dire à la densité électrique μ du champ à imiter; à cette condition doit encore satisfaire le potentiel électrique V . φ et V satisfont aux mêmes conditions; le potentiel des vitesses est donc proportionnel au potentiel

du champ électrique, dont notre champ hydrodynamique doit être l'image. Les forces électriques seront aussi proportionnelles aux vitesses du liquide.

La pression hydrostatique p est donnée par les équations d'Euler

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz},$$

où le second membre représente la composante sur Ox de l'accélération de la particule liquide. D'où

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Nous avons deux autres équations analogues en y et z , et en intégrant

$$-\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2,$$

puisque la constante d'intégration doit être nulle à l'infini.

La pression p sera une fonction périodique du temps; nous devons en chercher la valeur moyenne sur une portion de surface du corps pulsant. Or φ est une fonction périodique du temps; donc $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est aussi une fonction périodique du temps à valeur moyenne nulle, puisque c'est une dérivée. Donc

$$\int \frac{dp}{\rho} = -\frac{1}{2} S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Nous avons une inversion de l'image; en effet, tout se passe dans un champ électrique comme si le champ exerçait sur le conducteur une pression proportionnelle à $+ S \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2$.

On arriverait aux mêmes résultats par les équations de Lagrange. En effet, soient q_i les paramètres dont dépendent la position du système, T la force vive, U le potentiel. Le travail virtuel des forces extérieures sera $\sum Q_i \delta q_i$.

Nous avons l'équation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i.$$

Parmi les paramètres q_i , nous distinguerons les paramètres à variations lentes q_a qui définiront la position relative des conducteurs, et les paramètres à variations rapides q_b qui définissent les vibrations. Si le système est en équilibre grâce à l'action de corps extérieurs, q_a est constant; donc \dot{q}_a est nul ou, au moins, très petit.

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$-\frac{\partial T}{\partial q_a} + \frac{\partial U}{\partial q_a} = Q_a.$$

L'énergie potentielle sera

$$U = S \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2$$

dans le cas du champ électrique.

Pour le champ de Bjerknès, $U = 0$, il n'y a plus d'énergie potentielle, mais une énergie cinétique

$$T = S \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2.$$

Donc la fonction T de l'hypothèse de Bjerknès a même valeur que la fonction U du champ électrique.

Dans le champ électrique, nous avons

$$\frac{\partial U}{\partial q_a} = Q_a;$$

dans le champ de Bjerknès

$$-\frac{\partial U}{\partial q_a} = Q_a;$$

les forces Q_a ont même valeur, mais sont de signes contraires.

Hypothèse de Lord Kelvin. — Pour imiter l'action électrodynamique de deux circuits fermés, Lord Kelvin considère deux fils métalliques et les plonge dans un liquide indéfini, en mouvement (*fig. 76*). Nous aurons alors une fonction des vitesses, telle que

$$u dx + v dy + w dz$$

soit une différentielle exacte $d\varphi$. Mais cette fonction φ ne sera pas uniforme quand on enlaccera un des circuits : la valeur de l'intégrale le long de ce petit contour sera une constante. Au lieu de circuits métalliques, Lord Kelvin imagine deux tubes de tourbillon. La vitesse du liquide en un point quelconque est égale à la force magnétique du champ correspondant; mais on a encore une image inversée.

Pourquoi avons-nous inversion ?

a. Dans le cas des sphères de Bjerknès, l'amplitude des oscillations doit représenter la charge des sphères. Elle doit être entretenue par un soufflet extérieur qui dépense du travail, tandis qu'un corps chargé conserve sa charge. On pourrait imaginer une sphère parfaitement élastique qui

conserve sa vibration; dans ce cas, si nous approchons deux telles sphères l'une de l'autre, que va-t-il se passer? Ou bien elles conservent leurs amplitudes, et la force vive va augmenter, puisque la vitesse d'un point du liquide est accrue; mais les deux sphères s'attirent, donc s'approchent en produisant du travail et en augmentant leur force vive : ce qui est impossible. Ou bien l'amplitude diminuera, et il y aura conservation de l'énergie. L'amplitude ne reste donc pas constante comme la charge électrique, sans travail extérieur. C'est cette imperfection qui est cause de l'inversion.

b. Le cas des tourbillons de Lord Kelvin est analogue. L'intensité du courant est représentée par $\int d\varphi$ le long d'un petit contour autour d'un circuit; c'est le moment du tube de tourbillon qui est constant,

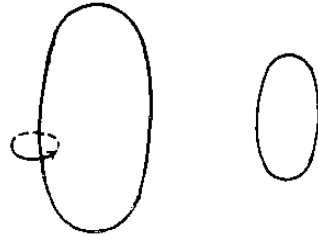


Fig. 76.

d'après Helmholtz. Mais, à cause de la force électromotrice d'induction, l'intensité du courant électrique n'est pas du tout constante; nous avons donc le défaut inverse de la théorie de Bjerknæs. Pour la gravitation, ces difficultés subsistent entièrement :

- 1° Pourquoi toutes les sphères pulsantes que sont les atomes ont-elles même phase ?
- 2° L'amplitude ne peut rester constante sans travail extérieur.

Hypothèse de Korn. — Supposons des sphères incompressibles plongées dans un liquide. Ce système possédera des vibrations propres, donnant un son fondamental, le plus grave de tous, et des harmoniques. Korn suppose que le son fondamental prédomine, et explique ainsi la concordance de phase.

Soit φ la fonction des vitesses; dans le liquide, on aura $\Delta\varphi = 0$, et dans le milieu des sphères

$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Nous poserons

$$\varphi = f(x, y, z) \cos kt.$$

La première équation ne change pas, la seconde devient

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \quad \text{avec} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2\varphi.$$

Il y a une infinité de valeurs de k telles qu'il existe une fonction φ satisfaisant à ces conditions; soit k_0 la plus petite qui correspond au son fondamental. Dans ce cas, tout est symétrique; φ ne dépend que de r . A l'extérieur des sphères, on a

$$\varphi = \frac{A}{r},$$

et à l'intérieur,

$$\varphi = \frac{B \sin kr}{r}.$$

La fonction φ et ses dérivées du premier ordre sont continues pour $r = R$ rayon de l'atome sphérique; on a donc

$$\frac{A}{R} = \frac{B \sin kR}{R}$$

et

$$-\frac{A}{R^2} = -\frac{B \sin kR}{R^2} + \frac{kB \cos kR}{R},$$

d'où

$$\frac{kB \cos kR}{R} = 0.$$

Les valeurs de k sont données par

$$\cos kR = 0,$$

la plus petite est

$$k = \frac{\pi}{2R}.$$

La période est inversement proportionnelle à R ; comme tous les atomes doivent avoir la même période, il nous faut admettre que tous les atomes sont des sphères pulsantes de même rayon; il y a identité de la matière.

Dans le cas de plusieurs atomes dont les distances mutuelles ρ_{ik} sont grandes devant R , Korn développe suivant les puissances de $\frac{R}{\rho_{ik}}$, et,

en ne gardant que les termes en $\frac{R}{\rho}$, il obtient le son fondamental. Il admet, de plus, qu'il n'y a qu'une solution; alors l'égalité de phase s'imposerait. Mais, en réalité, il y a un certain nombre de solutions donnant des valeurs de k voisines de $\frac{\pi}{2R}$, aux termes près de l'ordre de $\frac{R}{\rho}$.

Le son fondamental, de degré zéro donnera la gravitation; celui de degré 1 donnera la loi de Maxwell relative à la théorie cinétique des gaz; celui de

degré 2, c'est-à-dire le deuxième harmonique, donnerait les lois des phénomènes capillaires.

Considérons maintenant les actions de deux sphères, et soient k_1, k_2, \dots, k_n les n valeurs de k , voisines de $\frac{\pi}{2R}$. Soient encore $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les amplitudes correspondantes pour la première sphère et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ les amplitudes des vibrations de la seconde. L'action mutuelle des deux sphères sera une fonction bilinéaire des α et des β , dont les termes seront en $\alpha_i \beta_i$. Si la première vibration existait seule, nous aurions le terme $\alpha_1 \beta_1$; si la seconde existait seule, nous aurions $\alpha_2 \beta_2$ et ainsi de suite.

Mais si nous avons α_1 pour la première sphère et β_2 pour la seconde, nous avons un terme en $\alpha_1 \beta_2$ dont le coefficient sera nul; puisqu'il n'y a pas concordance de phase, l'action moyenne est nulle. L'action mutuelle de deux sphères est donc proportionnelle à

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

Reprenons les équations de Lagrange; soit T la force vive. Nous aurons encore les paramètres q_a à variations lentes qui définissent les distances des sphères, et les paramètres q_b à variations rapides qui définissent l'état vibratoire de chacune des petites sphères; par exemple, R sera devenu $R + q_a$. T sera alors un polynôme du second degré par rapport aux dérivées \dot{q}_b , vitesses de déformation. L'énergie potentielle des petits ressorts que sont ces sphères U est

$$U = \Sigma \frac{K}{2} q_b^2 = \Sigma \frac{q_b^2}{2},$$

en supposant $K = 1$.

Nous aurons des termes en q_b^2 , les mêmes pour toutes les sphères puisqu'elles sont identiques, soit Λq_b^2 . Nous aurons également des termes $\Sigma A_{bc} \dot{q}_b \dot{q}_c$; ces termes doivent représenter l'énergie mutuelle de gravitation des deux sphères. Donc A_{bc} est en raison inverse de la distance des deux sphères; A_{bc} sera de l'ordre de $\frac{R}{\varphi}$, donc très petit par rapport à l'unité.

L'équation de Lagrange est :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0.$$

T ne dépend pas de q (ou s'il en dépend ce n'est qu'au deuxième ordre);

$\frac{\partial T}{\partial q} = 0$. L'équation de Lagrange s'écrit :

$$(1) \quad q_b'' + \Sigma_c \Lambda_{bc} q_c'' + q_b = 0.$$

Cherchons les vibrations simples et posons :

$$q_b = \cos kt, \quad \text{d'où} \quad q_b'' = -k^2 q_b.$$

Posons encore $k^2 = -\frac{1}{S}$, nous aurons

$$q_b'' = \frac{q_b}{S} \quad \text{et} \quad q_b(1+S) + \Sigma A_{bc} q_c = 0.$$

Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux q_b . Égalons leur déterminant à zéro; nous aurons ainsi les valeurs de S , et nous en déduirons les rapports des q_b .

Soient alors trois sphères; q_a, q_b, q_c seront représentés par x, y, z ; nous aurons, d'après l'équation (1),

$$(2) \quad T = x^2 + y^2 + z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{23}yz + 2A_{13}xz = 1,$$

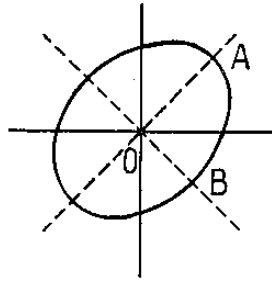


Fig. 77.

d'où les équations

$$\begin{aligned} x(1+s) + A_{12}y + A_{13}z &= 0, \\ A_{12}x + y(1+s) + A_{23}z &= 0, \\ A_{13}x + A_{23}y + z(1-s) &= 0. \end{aligned}$$

Les trois vibrations simples correspondront aux trois axes de l'ellipsoïde (2). Soient a_1, a_2, a_3 les cosinus directeurs de l'un des axes; les amplitudes de vibration des trois sphères suivant cet axe seront: $\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3$. Le deuxième axe aura pour cosinus directeurs b_1, b_2, b_3 et nous aurons des vibrations d'amplitude, respectivement $\mu b_1, \mu b_2, \mu b_3$. De même pour le troisième axe, c_1, c_2, c_3 , qui donnera $\nu c_1, \nu c_2, \nu c_3$. λ, μ, ν sont des constantes.

Si nous avons seulement deux sphères, nous aurons une ellipse (2) dont les axes seraient les bissectrices des axes de coordonnées (fig. 77). Donc les cosinus directeurs de l'axe OA sont égaux et donnent même amplitude et même phase; les cosinus directeurs de l'axe OB sont de signes contraires; nous aurons donc même amplitude, mais phases opposées.

Dans le cas de trois sphères, les expressions $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$ considérées précédemment, ne sont autres que $\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda a_2, \lambda b_2, \dots$

Donc, l'action mutuelle des deux premières sphères est proportionnelle à

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n,$$

ou à

$$\lambda^2 a_1 a_2 + \mu^2 b_1 b_2 + \nu^2 c_1 c_2;$$

elle est

$$\Sigma \frac{\lambda^2 a_1 a_2}{r_{12}^2}.$$

De même, les actions des sphères 2 et 3, puis 3 et 1 sont

$$\frac{\lambda^2 a_2 a_3}{r_{23}^2} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda^2 a_1 a_3}{r_{13}^2}.$$

Pour que la loi de Newton soit vérifiée, il faut

$$(3) \quad \Sigma \lambda^2 a_1 a_2 = \Sigma \lambda^2 a_2 a_3 = \Sigma \lambda^2 a_3 a_1.$$

Ces équations déterminent d'une façon unique les rapports de λ^2 , μ^2 , ν^2 . Si l'on choisit

$$\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2 = 1,$$

la formule (3) devient

$$\Sigma a_1 a_2 = \Sigma a_2 a_3 = \Sigma a_1 a_3,$$

expressions qui sont justement nulles.

L'attraction est bien la même pour chaque couple de sphères, mais elle est nulle; il y a donc contradiction.

Pour expliquer la loi de Newton par l'hypothèse des sphères pulsantes, deux sphères qui se rapprochent doivent conserver les mêmes amplitudes de vibration; mais ces deux sphères produisent un travail positif et, d'autre part, l'énergie cinétique augmente aussi. Ceci est impossible. Les amplitudes doivent avoir diminué, comme la force vive, et il y a encore contradiction.

Ceci est comparable à un régulateur à boules. Si les boules s'écartent, la force centrifuge produit un travail positif et, en même temps, la force vive augmente, donc ω diminuera; nous ne pourrions maintenir la vitesse angulaire constante qu'en fournissant du travail de l'extérieur.

Nous devons donc avoir une diminution de l'amplitude, quand les sphères se rapprochent; mais la loi de Newton n'est plus respectée.

CONCLUSION.

Nous n'avons, à l'heure actuelle, aucune explication satisfaisante de l'attraction.

D'autre part, nous n'avons aucune raison sérieuse de modifier la loi de Newton. La discordance la plus grave est l'avance du périhélie de Mercure. Mais il est vraisemblable que ce désaccord est dû à l'existence d'un anneau, tel que nous l'avons vu au chapitre IV.

(Manuscrit reçu le 26 juin 1952).

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	121
CHAPITRE I. — <i>Généralités.</i>	
But de la Mécanique céleste.....	122
Erreurs.....	123
Principales divergences entre la loi de Newton et l'observation.....	123
Diverses explications de ces divergences.....	124
Méthode de comparaison de la théorie et des observations.....	125
CHAPITRE II. — <i>Travaux de Le Verrier.</i>	
Résultats déduits des observations du Soleil.....	128
Résultats déduits des observations des planètes.....	129
CHAPITRE III. — <i>Travaux de Newcomb.</i>	
Méthode suivie dans les comparaisons.....	132
Erreurs systématiques.....	133
Théorie de la Terre.....	133
Théorie de Mercure.....	134
Détermination des masses.....	134
Détermination de la parallaxe solaire.....	136
Divergences importantes entre la théorie et l'observation.....	138
Conclusion.....	138
CHAPITRE IV. — <i>Différentes explications des désaccords entre la théorie et l'observation.</i>	
Inégalités séculaires des périhélie et des nœuds planétaires.....	138
Loi d'attraction différente de la loi de Newton.....	138
Loi de force $F \approx \frac{K}{r^2}$	140
Couches sphériques et homogènes.....	141
Anneau circulaire et homogène.....	141
Diverses explications des désaccords.....	144
1 ^{re} hypothèse : Non-sphéricité du Soleil.....	144
2 ^e hypothèse : Masse de la couronne solaire.....	144
3 ^e hypothèse : Anneau ou planète intramercurielle.....	145
4 ^e hypothèse : La lumière zodiacale.....	147
5 ^e hypothèse : Anneau situé entre Mercure et Vénus.....	147
6 ^e hypothèse : Loi de Hall.....	147
7 ^e hypothèse : Lois de forces extra-newtoniennes.....	148
Conclusion.....	149

CHAPITRE V. — *Accélération séculaire du mouvement de la Lune.*

	Pages.
Irrégularités dans la longitude de la Lune.....	149
Résultats déduits des observations.....	150
Travaux de Cowell.....	151
Confrontation de l'hypothèse de Newcomb avec la théorie de Mercure.....	155
Hypothèse d'une planète intramercurielle de Saint-Blancat.....	157
Théorie de Darwin.....	161
<i>a.</i> Excentricité et inclinaison nulles.....	162
<i>b.</i> Excentricité et inclinaison non nulles.....	165
<i>c.</i> Durée probable de l'évolution.....	167
Remarques.....	168

CHAPITRE VI. — *Comète d'Encke.*

Influence d'un milieu résistant.....	171
Résistance de milieu : $R = \frac{K \rho^m}{r^n}$	174
Autres explications de l'accélération de la comète d'Encke.....	176

CHAPITRE VII. — *Attraction.*

Détermination de K à partir de l'inégalité parallactique de la Lune.....	181
Détermination de K à partir des perturbations planétaires.....	184
Hypothèse de Laplace :	
<i>a.</i> Généralités.....	186
<i>b.</i> Cas d'un corps sphérique.....	187
<i>c.</i> Cas de deux sphères en présence.....	189
Attraction dans les queues cométaires :	
<i>a.</i> Théorie de Roche.....	190
<i>b.</i> Théorie de Bredikhine.....	191
<i>c.</i> Pression de Maxwell-Bartholi.....	193

CHAPITRE VIII. — *Vitesse de propagation de l'attraction.*

Hypothèse de Laplace.....	194
Hypothèse de Lehmann-Filhès.....	196
Propagation du potentiel.....	200

CHAPITRE IX. — *Loi de Weber.*

Problème des deux corps.....	202
------------------------------	-----

CHAPITRE X. — *Hypothèse de Lesage.*

Généralités.....	203
Action des corpuscules sur une sphère.....	205
Action de deux sphères dont l'une est très petite.....	207
Attraction de deux sphères quelconques.....	209
Attraction de deux corps quelconques.....	210
Chaleur dégagée.....	211
Remarque.....	212
Résistance du milieu corpusculaire au mouvement des corps.....	212
Remarques.....	215

TABLE DES MATIÈRES

269

CHAPITRE XI. — *Dynamique de l'électron.*

	Pages.
Influence du mouvement sur les phénomènes optiques.....	216
Temps apparent ou temps réduit.....	217
Hypothèse de Lorentz.....	219
Transformation de Lorentz.....	221
Influence du mouvement sur les phénomènes électriques.....	222
Cas particuliers.....	225
Principe de moindre action.....	228
Différentes valeurs de H	231

CHAPITRE XII. — *Application à la Mécanique céleste.*

Équations d'Hamilton.....	233
Attraction par un centre fixe.....	234
Problème des deux corps.....	239
Généralisation des équations de Maxwell.....	241
Onde de vitesse; onde d'accélération.....	243
Interprétation des résultats.....	244

CHAPITRE XIII. — *La théorie de Lesage et la dynamique nouvelle.*

Objections diverses.....	246
Théorie de Lesage-Maxwell-Bartholi.....	249

CHAPITRE XIV. — *Théorie de Lorentz.*

Termes en a	252
Termes en b	254
Attraction.....	255

CHAPITRE XV. — *Hypothèses diverses sur l'attraction.*

Hypothèse de Bjerknes.....	257
Hypothèse de Lord Kelvin.....	260
Hypothèse de Korn.....	261
CONCLUSION.....	265

