Poincaré
1925

36e Année. Octobre 1925. N° 1.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

La publication récente des *Annales du concours général* nous a fait penser à d'anciens lauréats de ce concours, et surtout à l'un d'eux, illustre entre tous. Grâce à l'obligeance de M. le marquis de Beauchesne, l'historiographe du concours général, nous avons pu retrouver la copie d'Henri Poincaré, que nous publions ci-après.

Le jury de correction, composé de MM. Bouquet, Briot, Puiseux et Prollier, a mis cette note dans son rapport : « La copie placée la première dans le concours des lycées des départements annonce chez son auteur des connaissances et une aptitude d'un ordre distingué. »

C'était deux ans après la guerre. A la Sorbonne, où le jeune Lorrain est venu chercher son prix, on lui a fait une ovation.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1873

PRIX D'HONNEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Copie de Henri Poincaré, élève du lycée de Nancy.

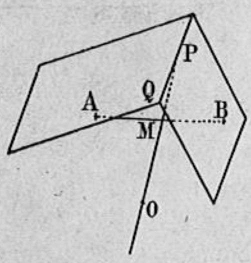
Une surface du second ordre S *étant donnée, ainsi que deux points* A *et* B *de cette surface, il existe une infinité de surfaces du second ordre* Σ *qui sont tangentes en* A *et en* B *à la surface* S. *On propose de trouver :*

1° *Le lieu géométrique des centres des surfaces* Σ *;*

2° *Le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener parallèlement à un plan donné ;*

3° *Le lieu géométrique des points de contact des mêmes surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener par une droite donnée.*

Solution géométrique. — *Lieu des centres.* — Considérons une des surfaces Σ ; par le centre de cette surface et par la droite AB, je fais passer un plan ; soit P le point où ce plan vient couper la droite PQ d'intersection des plans tangents. Le point O devra être le centre de l'intersection de la surface avec le plan PAB, c'est-à-dire d'une conique tangente en A et en B aux droites PA et PB ; or dans cette conique le diamètre conjugué de AB est la droite qui joint le point P, pôle de AB, au point M, milieu de AB.



Donc le lieu des centres n'est autre que le lieu des droites PM, c'est-à-dire que le plan PQM.

On pourrait dire encore que le plan diamétral conjugué de AB, par rapport à l'une quelconque des surfaces Σ, doit contenir la polaire PQ de AB et le milieu M de AB, et n'est autre, par conséquent, que le plan PQM.

Si l'on transforme ce résultat par la méthode de la transformation homologique, on peut dire que :

Le lieu des pôles d'un plan fixe est un plan qui passe par la droite PQ et par le conjugué harmonique C′ par rapport à A, B du point C où le plan fixe coupe la droite AB.

On retrouve directement ce résultat sans difficulté en disant :

Le plan polaire du point C passe par la droite PQ polaire de AB et par le conjugué harmonique C′ de C ; or il contient le pôle du plan fixe donné ; donc le lieu de ce pôle est le plan PQC′.

En transformant par polaires réciproques, on arrive au résultat suivant :

Le plan polaire d'un point fixe D passe par un point fixe C′, situé sur la droite AB et conjugué harmonique par rapport à A, B, du point C où cette droite est coupée par le plan PQD.

On peut retrouver ce résultat directement :

En effet : le pôle du plan PQD doit être sur la droite AB, polaire de PQ et de plus sur le plan PQC′, conjugué harmonique du plan PQD, par rapport au système des plans tangents; c'est donc le point C′, conjugué harmonique du point C par rapport à A, B.

Cas particuliers. — Le lieu des pôles d'un plan passant par AB est indéterminé, puisque le point C où ce plan coupe AB est lui-même indéterminé.

Mais cette indétermination n'est qu'apparente ; car, le plan passant par AB, son pôle est sur PQ, polaire de AB.

Appliquons cette remarque au lieu des centres; c'est-à-dire supposons que les points A et B soient à l'infini et nous arriverons au résultat suivant :

Le lieu des centres des surfaces dont les cônes asymptotes sont tangents à deux plans donnés le long de génératrices parallèles est la droite d'intersection de ces deux plans, théorème évident par lui-même.

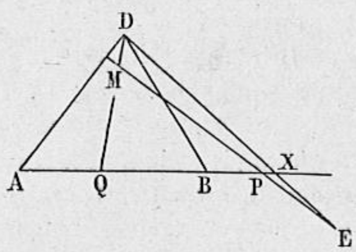
De même, le plan polaire d'un point situé sur PQ passe par AB.

Le pôle d'un plan passant par PQ est sur AB et est conjugué harmonique du point où ce plan coupe cette droite.

Si on applique au lieu des centres, on a : si les plans tangents sont parallèles, le centre est le milieu de AB.

De même, le plan polaire d'un point C situé sur AB est un plan passant par PQ et le conjugué harmonique du point C.

Lieu des points de contact des plans tangents menés par une droite extérieure. — Menons par la droite extérieure un plan quelconque, dans ce plan une droite quelconque rencontrant AB. Par cette droite, que nous supposerons tangente à la surface considérée et par AB menons un plan et considérons la section de la figure.



Soit E la trace de la droite donnée, D celle de la droite PQ, EM la tangente considérée, M le point de contact. La droite EM est aussi tangente à la conique, intersection de la surface par le plan de la figure. Son pôle est donc le point M ; or ce pôle doit se trouver sur EM et sur la polaire du point P, c'est-à-dire sur la droite DQ qui joint le point D au conjugué harmonique de P par rapport à AB. Donc pour engendrer la surface, lieu des points M, par la droite donnée E et un point P quelconque de AB, on mène un plan ; par la droite D, polaire de AB, et par le conjugué harmonique de P, on fait passer un second plan et on considère l'intersection de ces deux plans ; le lieu de ces intersections est le lieu des points M. Or il est facile de voir que ces deux plans forment un faisceau homographique. En effet, à un plan EP correspond un plan DQ et un seul, puisque à un point P correspond un point Q et un seul ; donc le lieu est une surface réglée du second ordre. Cette surface admet pour génératrices les droites D et E ; de plus, elle passe par les points A et B.

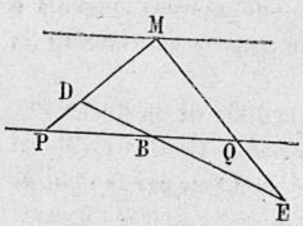
Il est facile de trouver la polaire de AB par rapport à la surface ; en effet, revenons à la figure 2 et considérons la section faite dans la surface par le plan de la figure. Le lieu des points M est une conique passant par les points A, B, D, E; je dis que les droites AB et DE sont conjuguées ; en effet, projetons sur un plan de telle sorte que les points A et B aillent aux points circulaires à l'infini. Le lieu deviendra le cercle décrit sur DE comme diamètre, car les droites DQ et EP deviennent deux droites rectangulaires quelconques, donc les droites DE et AB sont conjuguées par rapport à la conique M, puisqu'un diamètre et la droite de l'infini sont conjugués par rapport au cercle DE. Donc le pôle de AB est sur la droite DE; de plus il est sur la polaire du point X, intersection de AB et de DE, c'est-à-dire sur la troisième diagonale du quadrilatère ABDE, AB et DE étant considérées comme les deux premières diagonales. Si l'on fait tourner le plan de la figure autour de AB, la droite DE décrit l'hyperboloïde dont les génératrices sont D, E et AB. La troisième diagonale décrit le plan α de l'intersection des plans AD, BE et de celle des plans AE, BD; la polaire de AB est la génératrice, intersection de ce plan et de cet hyperboloïde, mais la génératrice du même système que D et que E seulement.

Discussion. — En général, la surface est un hyperboloïde à une nappe. Cherchons d'abord à classer la surface par ses propriétés projectives, c'est-à-dire à reconnaître dans quel cas elle se réduit à un cône ou à deux plans.

Pour qu'elle se réduise à un cône proprement dit ou à un cylindre, il faut et il suffit que les génératrices D et E soient dans un même plan; il le faut, car dans un cône ou un cylindre deux génératrices quelconques sont dans un même plan; cela suffit, car alors les plans DQ et EP passant toujours par un point fixe, leur intersection passera aussi par ce point.

Pour qu'elle se réduise à deux plans, il faut qu'elle se réduise aux plans DA et BE, ce qui est impossible, car la conique de la figure 2 se réduirait à AD et BE, droites par rapport auxquelles les droites AB et DE ne peuvent être conjuguées que si l'une d'elles passe par le point d'intersection de DA et de BE, ce qui exige que la droite E soit dans l'un des plans tangents; elle peut encore se décomposer si la droite AB et l'une des droites D et E sont dans un même plan.

Dans le premier cas, le lieu se compose évidemment du plan tangent et d'un plan passant par A, en supposant que la droite E soit dans le plan tangent au point B; en effet, considérons encore la section par le plan de la figure 2 et rejetons pour simplifier le point A à l'infini. Les points P et Q seront équidistants du point B et on devra avoir, en vertu du théorème des transversales dans le triangle MPQ,



$$\frac{BP}{BQ}\cdot\frac{MD}{DP}\cdot\frac{QE}{ME}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{MD}{DP}\cdot\frac{QE}{ME}=1,$$

ou, en appelant m, d, e les distances des trois points M, D, E à AB,

$$\frac{m-d}{d}\cdot\frac{e}{m+e}=1,$$

ce qui montre que le lieu des points M est une droite parallèle à AB. C. Q. F. D.

On obtient en plus le plan tangent au point B, parce que les plans DB, BE se confondent.

Dans le second cas, le lieu se compose évidemment du plan ABE et du plan de la droite D et du conjugué harmonique K′ du point K où la droite E rencontre AB. En effet, si le point P diffère du point K, le plan EP est le plan ABE; si le point P vient en K, le plan PQ est le plan DK′.

Cherchons maintenant dans quel cas la surface est un paraboloïde.

Si les droites D et E sont à distance finie, on n'aura de génératrice à distance infinie que si les plans DQ et EP peuvent devenir parallèles, c'est-à-dire si les plans parallèles menés par D et E divisent harmoniquement le segment AB. Si l'une des droites D ou E est à l'infini, on a toujours une génératrice à l'infini, ce qui donne un paraboloïde.

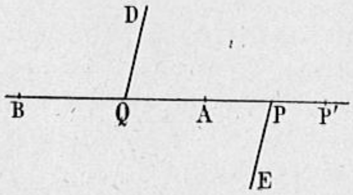
On aura un cylindre si la surface est à la fois un paraboloïde et un cône, ou un cône dont le sommet est à l'infini, c'est-à-dire si les droites D et E sont parallèles.

Résumons la discussion :

1° Les deux droites sont à distance finie.		Hyperboloïde à une nappe.
	Les plans parallèles menés par D et E divisent harmoniquement AB :	Paraboloïde.
	Les droites D, E se rencontrent :	Cône.
	Les droites D, E sont parallèles :	Cylindre.
	La droite D ou la droite E rencontre AB :	Deux plans.
	La droite E est dans l'un des plans tangents :	Deux plans.

2° L'une des droites est à l'infini.	Paraboloïde hyperbolique.	
	Les deux droites se rencontrent, c'est-à-dire que l'une des droites est parallèle au plan représenté par l'autre :	Cylindre.
	La droite D ou la droite E rencontre AB : La droite E est dans l'un des plans tangents :	Deux plans.
3° Les deux droites sont à l'infini.	Cylindre.	
	La droite D ou la droite E rencontre AB : La droite E est dans l'un des plans tangents :	Deux plans.

Dans le cas où la surface est un paraboloïde proprement dit, rien n'est plus facile que de trouver les plans directeurs. Il n'en est plus de même quand elle est un cylindre. Pour les déterminer dans ce cas, considérons encore la figure 2.



Il s'agit de mener par les points D et E deux droites parallèles qui divisent harmoniquement le segment AB. Pour cela, considérons un point Q de AB et son conjugué P′ ; menons EP parallèle à DQ ; les points P et P′ formeront un système homographique facile à déterminer, et on en cherchera les points doubles par le procédé connu.

Si ces points doubles sont réels, on aura un cylindre hyperbolique ; imaginaires, un cylindre elliptique ; confondus, un cylindre parabolique.

Cas particulier. — Les points A et B sont des points circulaires à l'infini ; les plans DP et EQ deviennent des plans dont les traces sur un plan parallèle au plan AB sont rectangulaires ; les sections circulaires sont alors parallèles au plan AB.

Donc le lieu des points de contact des plans tangents menés par une droite aux surfaces qui ont une direction de plans cycliques communs, avec le diamètre conjugué commun, est une surface du second ordre ayant même direction de plans cycliques.

Remarque. — Par polaires réciproques : l'enveloppe des plans tangents aux surfaces Σ dont les points de contact sont situés sur une droite est une surface du second ordre.

Solution analytique. — *Equation générale.* — Prenons pour tétraèdre de référence un tétraèdre formé des deux plans tangents R et S et de deux plans P, Q passant par AB. L'équation d'une surface quelconque est

$$AP^2 + A'Q^2 + A''R^2 + 2BQR + 2B'PR + 2B''PQ + 2CPS + 2C'QS + 2C''RS + DS^2 = 0.$$

La section par le plan $Q = 0$ est

$$AP^2 + A''R^2 + 2B'PR + 2CPS + 2C''RS + DS^2 = 0.$$

Or, cette section doit être de la forme

$$RS + \lambda P^2.$$

Donc $$A'' = B' = C = D = 0.$$

De même, $$B = C' = 0.$$

Donc l'équation générale est de la forme

$$RS + \lambda P^2 + \mu Q^2 + 2\nu PQ = 0.$$

Lieu des centres. — Supposons qu'on ait pris les plans P et Q pour plans des yz et des xz et posons $RS = F$; l'équation devient

$$F + \lambda x^2 + \mu y^2 + 2\nu xy = 0.$$

Les équations du centre seront

$$F'_x + 2\lambda x + 2\nu y = 0,$$
$$F'_y + 2\mu y + 2\nu x = 0,$$
$$F'_z = 0.$$

L'élimination est toute faite et on trouve $F'_z = 0$, qui représente un plan qui est le plan diamétral de AB par rapport au système de plans RS.

En prenant un tétraèdre de référence, ou les équations tangentielles, on démontrerait tout à fait de la même façon les propositions que nous avons énoncées sur le lieu du pôle d'un plan et sur l'enveloppe du plan polaire d'un point.

Lieu des points de contact. — Prenons un tétraèdre de référence formé des deux plans P et Q, que nous appellerons X et Y, et de deux plans Z et T passant par la droite donnée.

Soit

$$\Sigma = F + \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\nu XY = 0$$

l'équation de la surface; les équations de la polaire de la droite Z, T seront

$$\Sigma'_X = 0, \qquad \Sigma'_Y = 0,$$

puisque le pôle du plan $Z + kT$ est donné par

$$\Sigma'_X = 0, \qquad \Sigma'_Y = 0, \qquad \Sigma'_Z + k\Sigma'_T = 0.$$

Eliminons donc λ, μ, ν entre les équations

$$\Sigma = 0, \qquad \Sigma'_X = 0, \qquad \Sigma'_Y = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} F + \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\nu XY &= 0, \\ F'_X + 2\lambda X + 2\nu Y &= 0, \\ F'_Y + 2\mu Y + 2\nu X &= 0, \end{aligned}$$

qui peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} F + (\lambda X + \nu Y)X + (\mu Y + \nu X)Y &= 0, \\ F'_X + 2(\lambda X + \nu Y) + 0 \quad &= 0, \\ F'_Y + 0 \quad + 2(\mu Y + \nu X) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} F & X & Y \\ F'_X & 2 & 0 \\ F'_Y & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

(1) $$4F = 2XF'_X + 2YF'_Y,$$

ou, en posant

$$4F = 2XF'_X + 2YF'_Y + 2ZF'_Z + 2TF'_T,$$

(2) $$ZF'_Z + TF'_T = 0.$$

C'est une surface réglée du second ordre dont les génératrices rectilignes sont

$$Z = \lambda F'_T, \qquad T = -\lambda F'_Z,$$
$$Z = \lambda T, \qquad \lambda F'_Z + F'_T = 0.$$

Parmi ces génératrices on remarque

$$Z = 0, \qquad T = 0,$$

qui est la droite donnée,

et $$F'_Z = 0, \qquad F'_T = 0,$$

qui est la droite PQ.

La forme (1) de l'équation fait voir que la surface passe par les points

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad F = 0,$$

c'est-à-dire par les points A et B ;

par les points

$$F'_X = 0, \qquad F'_Y = 0, \qquad F = 0,$$

qui est la droite PQ ;

par les points

$$X = 0, \qquad F'_Y = 0, \qquad F = 0,$$

qui sont des points situés sur l'un des plans tangents, sur le plan $X = 0$ et sur le plan polaire de $X = 0$, $Z = 0$, $T = 0$.

La surface sera un cône si les génératrices

$$Z = 0, \qquad T = 0, \qquad F'_Z = 0, \qquad F'_T = 0$$

se rencontrent.

Elle sera un cylindre si elles sont parallèles.

On a

$$F'_Z = R'_Z S + S'_Z R, \qquad F'_Y = \ldots.$$

Prenons les dérivées partielles de la surface

$$\begin{aligned} ZF''_{ZY} + TF''_{TY} &= 0,\\ ZF''_{ZX} + TF''_{TX} &= 0,\\ ZF''_{Z^2} + TF''_{TZ} + F'_Z &= 0,\\ ZF''_{TZ} + TF''_{T^2} + F'_T &= 0.\end{aligned}$$

Ces quatre plans doivent se couper suivant une même droite pour que la surface se réduise à deux plans, ce qui exigerait que les droites données coïncidassent, ou que les deux premiers plans coïncidassent, ou que

$$\frac{F''_{ZY}}{F''_{ZX}} = \frac{F''_{TY}}{F''_{TX}}.$$

Or, si la droite ZT est sur la surface $F = 0$, cette surface peut s'écrire

$$F = (Z + \lambda T)(AX + BY + CZ + DT) = 0,$$

d'où

$$F''_{TY} = \lambda B, \qquad F''_{TX} = \lambda A,$$
$$F''_{ZY} = B, \qquad F''_{ZX} = A.$$

Donc la condition est remplie.

Si la droite $F'_Z = 0$, $F'_T = 0$ rencontre l'axe $X = 0$, $Y = 0$, on peut écrire

$$F = (AX + BY + CZ + T)(A'X + B'Y + CZ + T)$$

de telle façon que $C = C'$.

$$F''_{TX} = A + A', \qquad F''_{TY} = B + B',$$
$$F''_{ZX} = C(A + A'), \qquad F''_{TX} = C(B + B').$$

Si $Z = 0$, $T = 0$ rencontre cet axe, on arrivera au même résultat en remarquant que l'équation est symétrique en Z, T, F'_Z, F'_T.

ALGÈBRE ET ANALYSE

2776. — *Déterminer deux polynomes du troisième degré $f(x)$ et $g(x)$ tels que l'on ait*

$$f = g'.g'', \qquad g = f'.f''.$$

De la relation $g = f'f''$ on déduit, en dérivant et en remarquant que f''' est une constante,

$$g' = f''^2 + f'f''', \qquad g'' = 3f''f''';$$

remplaçons g', g'' par ces valeurs dans la deuxième relation donnée $f = g'g''$; nous obtenons

$$(1) \qquad f = 3f''f'''(f''^2 + f'f''').$$

Dérivons encore une fois; nous avons, en désignant par k la constante f''',

$$f' = 3k^2(f''^2 + kf') + 3kf''(2kf'' + kf''),$$