SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

Par M. **H. Poincaré** (Paris).

Adunanza del 10 marzo 1912.

§ 1.

Introduction.

Je n'ai jamais présenté au public un travail aussi inachevé; je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques mots les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai démontré, il y a longtemps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.

J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. J'ai été obligé d'envisager séparément un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que j'aie pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème dans tous ceux que j'ai traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration générale, soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défaut.

Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermissait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.

Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas résolu la question; mais après les inutiles efforts que j'ai faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant quelques années; cela serait très bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre un jour; mais à mon âge je ne puis en répondre. D'un autre côté, l'importance du sujet est trop grande (et je chercherai plus loin à la faire comprendre) et l'ensemble des résultats obtenus trop considérable déjà, pour que je me résigne à les laisser définitivement infructueux. Je puis espérer que les géomètres qui s'intéresseront à ce problème et qui seront sans doute plus heureux que moi, pourront en tirer quelque parti et s'en servir pour trouver la voie dans laquelle ils doivent se diriger.

Je pense que ces considérations suffisent à me justifier.

§ 2.

Énoncé du théorème.

Je désigne par x et y les coordonnées polaires d'un point et je considère une couronne circulaire comprise entre deux circonférences extrêmes, l'une extérieure $x = a$, l'autre intérieure $x = b$. Je considère une transformation ponctuelle biunivoque T de cette couronne en elle-même. Je désigne par x et y les coordonnées du point M, par X et Y celles de son transformé; et je fais les deux hypothèses suivantes:

Première condition. — Comme T transforme la couronne en elle-même, elle transformera en elles-mêmes les deux circonférences extrêmes $x = a$ et $x = b$, de sorte que l'on aura $X = x$ si l'on a $x = a$ ou $x = b$; mais on aura $Y < y$ sur $x = a$ et $Y > y$ sur $x = b$ ou inversement; c'est-à-dire que la transformation fait tourner sur elle-même chacune des circonférences extrêmes, tous les points de *chacune* des circonférences avançant *dans le même sens,* quoique en général de quantités inégales, mais de façon que les rotations des *deux* circonférences se fassent *en sens contraire.* On pourrait croire que cet énoncé n'a aucun sens, puisque y et Y ne sont définis qu'à un multiple de 2π près; mais si nous nous donnons, par une convention arbitraire, la valeur exacte de $Y - y$ en un point quelconque de la couronne, la valeur de $Y - y$ sera entièrement déterminée *par continuité,* en tous les points de la couronne.

Deuxième condition. — La transformation conserve les aires ou, plus généralement, elle admet un invariant intégral positif, c'est-à-dire qu'il existe une fonction positive $f(x, y)$, telle que l'on ait

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \int\int f(X, Y)\,dX\,dY,$$

les deux intégrales étant étendues à une aire quelconque et à sa transformée.

Si ces deux conditions sont remplies, je dis qu'il existera toujours à l'intérieur de la couronne deux points qui ne seront pas altérés par la transformation.

Je supposerai en général, pour simplifier, que la transformation est analytique; mais cela n'a rien d'essentiel.

On pourrait être tenté d'essayer une démonstration dans la voie suivante. Il suffira de l'expliquer dans le cas simple où $f(x, y) = 1$. Alors X et Y, considérés comme fonctions de x et y, doivent satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} = 1,$$

c'est-à-dire que

$$dZ = (X - x)dy - dX(Y - y)$$

est une différentielle exacte.

On voit sans peine que Z est une fonction uniforme de x et y, périodique par rapport à y; elle doit avoir un maximum et un minimum qui ne peuvent être atteints sur les circonférences extrêmes. Si donc x et y étaient fonctions uniformes de X et de y, le maximum ne pourrait être atteint que pour

$$X = x, \quad Y = y$$

et on pourrait conclure qu'il existe à l'intérieur de la couronne deux points tels que $X = x$, $Y = y$; c'est-à-dire deux points invariants. Mais il n'en est pas toujours ainsi et le maximum pourrait encore avoir lieu pour des points tels que

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \left[(X - x) - (Y - y)\frac{\partial X}{\partial y}\right] = 0,$$

et c'est ce qui fait que la démonstration n'est applicable qu'aux transformations infinitésimales.

Le théorème peut être présenté sous une autre forme, tout à fait équivalente, mais en quelque sorte inverse de la précédente. Imaginons que la transformation T remplisse toujours la 1ère condition énoncée plus haut, *mais non pas la* 2de, en revanche elle satisfera à une

TROISIÈME CONDITION. — *Il n'existe pas dans toute la couronne de point invariant.*

Je dis que s'il en est ainsi, la transformation T ne saurait SATISFAIRE À LA SECONDE CONDITION, c'est-à-dire *posséder un invariant intégral positif.*

Il est clair que les deux énoncés sont équivalents; si toute transformation qui satisfait aux conditions 1 et 3, ne saurait satisfaire à la condition 2, toute transformation qui satisfera aux conditions 1 et 2 ne pourra satisfaire à la conditions 3; elle aura donc au moins un point invariant, et par conséquent elle en aura au moins deux puisque l'Analysis situs (et en particulier le théorème de KRONECKER) nous montre immédiatement qu'elle doit en avoir un nombre pair.

Pour faire voir maintenant que la 2de condition ne peut être remplie quand la 1ère et la 3e le sont, je chercherai à montrer que l'on peut construire un contour fermé C jouissant des propriétés suivantes: 1° Il entoure la circonférence extrême intérieure $x = b$, de sorte que, quand on en fait le tour, y varie de 0 à 2π. 2° Il ne coupe pas son transformé C', de telle façon qu'il lui est, ou tout entier intérieur, ou tout entier extérieur. S'il en est ainsi, l'aire annulaire comprise entre C et $x = b$ a pour transformée l'aire comprise entre C' et $x = b$.

Or l'une de ces aires est une partie de l'autre. Si, par exemple, C' est tout entier extérieur à C, l'aire comprise entre C' et $x = b$ se compose de l'aire comprise entre C' et C, plus l'aire comprise entre C et $x = b$. Il n'est donc pas possible que la transformation conserve les aires; elle ne peut pas non plus admettre d'invariant intégral positif.

Dans les tentatives de démonstration qui vont suivre, je prendrai ordinairement le théorème sous sa seconde forme; j'envisagerai donc les transformations qui satisfont aux conditions 1 et 3; j'en ferai une classification, et, pour chaque classe, je chercherai à former le contour C défini plus haut. Au contraire, dans les applications il sera plus commode d'utiliser le théorème sous sa 1ère forme.

§ 3.

Applications du théorème.

Si le théorème pouvait être établi, il comporterait plusieurs généralisations immédiates.

Imaginons en effet d'abord que la circonférence extrême intérieure $x = b$ vienne à se réduire à un point, notre couronne circulaire se réduira à un cercle. Si alors sur la circonférence extérieure $x = a$, on a toujours $Y > y$, et dans le voisinage du centre $Y < y$ ou inversement; si, de plus, la transformation admet un invariant intégral, il y aura à l'intérieur du cercle au moins deux points inaltérés par la transformation. D'autre part, nous pouvons appliquer les mêmes principes à une puissance quelconque T^n de la transformation T.

Voyons maintenant comment cela peut être appliqué aux problèmes de Dynamique où il y a deux degrés de liberté. Pour simplifier l'exposition, j'envisagerai particulièrement le plus simple de ces problèmes, celui des lignes géodésiques d'une surface convexe. J'ai écrit sur ce sujet un Mémoire [1]. Il nous faut d'abord trouver une représentation géométrique convenable pour notre objet; définissons ce que nous appellerons un *élément*; et cherchons à faire correspondre à un chacun de ces éléments un point de l'espace. Un élément, ce sera l'ensemble d'une géodésique et d'un point de cette géodésique; une même courbe géodésique devra être regardée comme deux géodésiques distinctes suivant qu'elle sera parcourue dans un sens ou dans l'autre. A chaque élément correspond un trièdre défini comme il suit: nous aurons d'abord la normale à la surface au point considéré, normale menée du côté extérieur; en second lieu la tangente à la géodésique, dans le sens où cette géodésique doit être parcourue; enfin une perpendiculaire à ces deux droites menée aussi dans un sens déterminé; nous transporterons ensuite par translation ce trièdre trirectangle de façon que son sommet vienne à l'origine. A tout trièdre trirectangle ayant son sommet à l'origine correspond ainsi un *élément* et un seul; et d'abord la surface étant convexe, il n'y a que deux points où le plan tangent soit perpendiculaire à la 1ère arête du trièdre; il n'y a qu'un de ces points où la normale *extérieure* soit parallèle à cette arête et *de même sens*.

En second lieu, par ce point passe une géodésique et une seule dont la tangente

---

[1]) *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. VI (1905), pp. 237-274].

soit parallèle à la seconde arête du trièdre; le sens dans lequel cette géodésique est parcourue est également défini.

Cela posé, chaque trièdre sera défini par le quaternion: λ, μ, ν, ρ $(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=1)$, qui définit la rotation nécessaire pour amener le trièdre d'une position initiale, déterminée une fois pour toutes, à la position actuelle. Alors le demi angle de cette rotation a pour cosinus λ et pour sinus $\sqrt{\mu^2+\nu^2+\rho^2}$; et l'axe de rotation a ses cosinus directeurs proportionnels à μ, ν, ρ.

Nous remarquerons toutefois que les deux quaternions: λ, μ, ν, ρ et $-\lambda, -\mu, -\nu, -\rho$ représentent la même rotation, et par conséquent le même trièdre et le même *élément*.

Nous poserons ensuite:

$$\lambda=\frac{1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad \mu=\frac{2\xi}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad \nu=\frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad \rho=\frac{2\zeta}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

et nous représenterons notre élément par le point de l'espace dont les coordonnées rectangulaires sont ξ, η, ζ. A tout point de l'espace correspond un élément et un seul; à tout élément correspondent *deux* points de l'espace, que l'on peut déduire l'un de l'autre par une inversion ayant pour pôle l'origine et pour puissance -1.

Une géodésique formée par une infinité de pareils éléments, sera représentée dans cet espace par une courbe. Par chaque point de cet espace passe une de ces courbes et une seule, et le sens dans lequel cette courbe doit être parcourue est également déterminé. Je les appellerai les courbes C.

Dans le cas de la sphère, les géodésiques sont les grands cercles, et les courbes C forment une famille de cercles, dont les plans passent par l'origine et qui ont pour puissance -1 par rapport à cette origine. Deux de ces cercles C ne peuvent se rencontrer, et ils *s'entrelacent* toujours. Dans le cas général, à toute solution périodique du problème, c'est-à-dire à toute géodésique fermée, correspondra une courbe C fermée.

Je prendrai comme second exemple le cas particulier du problème des trois corps connu sous le nom de *problème restreint.* Nous rapporterons le système des trois corps à des axes tournants, ainsi qu'on le fait d'ordinaire, et nous écrirons l'intégrale de Jacobi (ou intégrale des forces vives dans le mouvement relatif) sous la forme:

$$J=c,$$

c étant une constante et J une fonction de nos 4 variables, qui sont: x et y coordonnées du corps troublé; x' et y' composantes de sa vitesse. Si c est considérée comme une constante donnée, 3 seulement de ces variables sont indépendantes.

Nous pourrons écrire

$$J=\frac{x'^2+y'^2}{2}+H,$$

H ne dépendant que de x et de y. Dans ces conditions on aura

$$H<c.$$

Cette inégalité définit une région du plan et dans certains cas, auxquels nous nous restreindrons, cette région β est limitée par une courbe fermée α; en chaque point de la région β, la vitesse est déterminée en grandeur par l'équation de JACOBI; mais sa direction reste arbitraire; en chaque point de la courbe α, cette vitesse est nulle, de sorte que sa direction importe peu. Donc, à chaque point de β correspondront une infinité d'*éléments,* à chaque point de α un seul élément; c'est ce qui nous conduit à la représentation géométrique suivante:

Nous pouvons faire correspondre point par point à l'aire β l'intérieur d'un cercle β', et à la courbe α sa circonférence α'. Cela posé, imaginons un cercle γ dont le plan soit perpendiculaire à celui du cercle β' et dont la puissance par rapport au centre de β' soit le carré du rayon de β'; il coupera le plan de β' en deux points, l'un intérieur, l'autre extérieur à la circonférence α; soit M le premier de ces points, et x, y le point correspondant de l'aire β. Nous représenterons alors les divers *éléments* par un point de l'espace de la façon suivante: Quand le point représentatif décrira le cercle γ, x et y conserveront des valeurs constantes, celles qui correspondent au point M; et l'angle $\operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}$ qui définit la direction de la vitesse variera de 0 à 2π. A chaque point de β correspondent donc ainsi une infinité d'éléments représentés par les divers points d'un cercle γ. Quand le point M est sur α', et par conséquent le point correspondant sur α, le cercle γ se réduit à un point et c'est en effet ce qui convient, puisqu'à tout point de α correspond un seul élément.

A tout élément correspond donc un point de l'espace et un seul, et inversement.

Une trajectoire sera représentée par une courbe gauche C, et par chaque point de l'espace passe une de ces courbes et une seule. Le sens dans lequel cette courbe doit être parcourue est également déterminé. Les courbes C fermées représentent les solutions périodiques.

Imaginons maintenant, dans l'un des deux exemples précédents, une courbe C_0 fermée représentant une solution périodique, et une aire A limitée par cette courbe.

Nous supposerons que cette aire A est simplement connexe et ne se recoupe pas elle même, et de plus qu'elle est *sans contact*, c'est-à-dire qu'en aucun point de cette aire, une courbe C ne vient toucher la surface courbe dont cette aire fait partie.

Soit alors P un point quelconque de A; par ce point passe une courbe C et une seule; suivons cette courbe jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau A en P'; le point P' pourra s'appeler *le conséquent de* P; la transformation T qui fait passer d'un point à son conséquent est une transformation ponctuelle de l'aire A en elle-même. Il importe de remarquer que le point P' varie d'une manière continue quand P varie d'une manière continue. En effet, on pourrait concevoir que la variation est discontinue dans l'une des circonstances suivantes: 1° Si, envisageant les points successifs P, P', P'', P''', ... d'intersection de C avec A, on voyait à un certain moment P' et P'' se confondre puis devenir imaginaires, de façon qu'à partir de ce moment le premier point d'intersection de C avec A fût P''' et non plus P'. 2° Si, au contraire, à un certain moment deux points nouveaux d'intersection P_1 et P_2 apparussent de telle sorte que la première intersection de C avec A fût désormais P_1 et non plus P'. 3° Si à un moment donné P' venait à sortir de l'aire A et que la première intersection fût desormais P'' et non plus P'; ou inversement si un nouveau point d'intersection P_1 venait à entrer dans l'aire A et à s'intercaler entre P et P'.

Ici aucune de ces circonstances ne pourra se présenter, les deux premières parce que la courbe C ne peut devenir tangente à A qui est *sans contact;* la troisième parce que par un point de C_0, c'est-à-dire de la courbe qui limite A, ne peut jamais passer une courbe C autre que C_0.

Si le point P se confond avec son premier conséquent P', ou avec un quelconque de ses conséquents successifs, la courbe C est fermée et la solution périodique. Observons de plus que la transformation T admet un invariant intégral positif d'après des principes que j'ai exposés ailleurs [2]).

Nous devons maintenant faire intervenir la notion des exposants caractéristiques et de la stabilité des solutions périodiques. On sait que toute solution périodique admet deux exposants caractéristiques égaux et de signe contraire [loc. cit. [2]), tome I, chap. IV; loc. cit. [1]), page 255]. Si la solution périodique est stable, ces deux exposants sont imaginaires conjugués.

Dans ce cas, nous pourrons introduire la notion de l'argument réduit [loc. cit. [1]), page 256; loc. cit. [2]), tome III, n° 347] et celle des foyers cinétiques, qui nous fera connaitre de quelle manière varie le point P' quand le point P est très voisin de la courbe limite C_0. Qu'est-ce, en effet, qu'un foyer cinétique? Considérons une courbe C_1, très peu différente de C_0, représentant une trajectoire ou une géodésique très peu différente de celle que représente C_0. Soient G_0 et G_1 les deux géodésiques et les deux trajectoires représentées respectivement par C_0 et C_1.

Pour écrire l'équation de la courbe C_1, nous prendrons un système particulier de coordonnées u, v, w, de telle façon: 1° que les coordonnées d'un point de la trajectoire ou de la géodésique envisagées dépendent seulement de u et de v, tandis que la direction de la tangente dépend à la fois de u, v et w; 2° que les équations de la courbe C_0 soient $v = w = 0$ et que u varie depuis 0 jusqu'à 2π quand on fait le tour de la courbe fermée C_0. Dans ces conditions, on verra [loc. cit. [1]), [2])] que si la courbe C_0 correspond à une trajectoire *stable,* les équations de la courbe C_1 très peu différente de C_0 pourront s'écrire:

$$\frac{v}{a} = \rho \sin(\theta + h), \quad \frac{w}{a} = \rho_1 \sin(\theta + h) + \rho_2 \cos(\theta + h),$$

où: a et h sont des constantes d'intégration, la première très petite; ρ, ρ_1, ρ_2 des fonctions périodiques de u; θ une fonction de u, *toujours croissante,* et dont la dérivée est

---

[2]) *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.* = TOME I (1892): *Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques.* — TOME II (1893): *Méthodes de* NEWCOMB, GYLDÉN, LINDSTEDT *et* BOHLIN. — TOME III et dernier (1899): *Invariants intégraux. Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques.* [Paris, Gauthier-Villars].

périodique. On pourra écrire

$$\theta = \alpha u + \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant périodique; et alors $i\alpha$ représentera ce qu'on appelle l'exposant caractéristique.

On obtiendra les points d'intersection de G_1 avec G_0 en écrivant que v s'annule, ce qui donne:

$$\theta + h = K\pi,$$

K étant un entier. Si M est un point d'intersection de G_0 avec G_1, et M' le point d'intersection suivant, M' s'appelle le premier foyer cinétique de M, et alors si θ et θ' sont les valeurs correspondantes de θ, on aura:

$$\theta' - \theta = \pi.$$

Écrivons maintenant l'équation de notre aire A sous la forme

$$F(u, v, w) = 0;$$

si nous développons le 1$^{\text{er}}$ membre suivant les puissances de v et de w, le terme de degré zéro sera nul, puisque l'aire A passe par la courbe C_0; nous pouvons négliger les termes d'ordre supérieur au premier puisque nous ne devons donner à v et à w que des valeurs très petites, et il restera:

$$gv + g_1 w = 0,$$

g et g_1 étant des fonctions périodiques de u. Si nous remplaçons v et w par leurs valeurs, il viendra:

$$p \sin(\theta + h) + p_1 \cos(\theta + h) = 0,$$

p et p_1 étant de nouvelles fonctions périodiques de u. Si nous posons

$$\frac{p_1}{p} = \operatorname{tg} \lambda,$$

λ sera une fonction de u dont la dérivée sera périodique et qui ne pourra différer d'une fonction périodique de u que par un multiple de u, que j'appelle mu; notre équation deviendra alors:

$$\sin(\theta + \lambda + h) = 0.$$

On obtiendra donc les points d'intersection successifs de C_1 avec A, en écrivant que ce sinus s'annule; l'argument du sinus doit être un multiple de π; mais on doit observer que l'aire A est *limitée* par C_0 et ne s'étend pas au delà de cette courbe; les multiples pairs conviennent donc seuls, et on doit écrire

$$\theta + \lambda + h = 2k\pi.$$

Si alors P et P' sont deux points d'intersection consécutifs, et si θ, λ et θ', λ' sont les valeurs correspondantes de θ et de λ, on aura:

$$(\theta' + \lambda') - (\theta + \lambda) = 2\pi.$$

Il importe de remarquer que $\theta + \lambda$ est une fonction constamment croissante de u; en effet, pour v et w très petits, on peut écrire:

$$F(u, v, w) = R \sin(\theta + \lambda + h),$$

où $R = \sqrt{p^2 + p_1^2}$ est une fonction périodique de u. On obtiendra alors les intersections de C_1 avec A, en écrivant que F est nul, et les *contacts* de C_1 avec A en écrivant

$$F = F' = 0,$$

F' étant la dérivée de F par rapport à u; cela donne:

$$F = R \sin(\theta + \lambda + h) = 0,$$

$$F' = R' \sin(\theta + \lambda + h) + R(\theta' + \lambda') \cos(\theta + \lambda + h) = 0.$$

Si l'on avait $\theta' + \lambda' = 0$, on pourrait prendre $h = -\theta - \lambda$ et les conditions seraient remplies. Or cela est impossible, parce que l'aire A est supposée *sans contact*. La dérivée de $\theta + \lambda$ ne peut donc s'annuler et $\theta + \lambda$ varie toujours dans le même sens: on peut toujours s'arranger pour que ce soit en croissant.

La fonction

$$\frac{\theta + \lambda}{\alpha + m}$$

peut s'appeler *l'argument réduit,* en généralisant un peu cette notion. La quantité $\alpha + m$ ne diffère de α que par l'entier

$$m = \frac{\lambda(u + 2\pi) - \lambda(u)}{2\pi},$$

qui se trouve être nul dans les deux exemples choisis. L'argument réduit augmente de 2π quand on fait le tour de C_0 et comme c'est une fonction croissante de u, il peut servir à définir la position d'un point sur C_0; lorsque P est très voisin de C_0, l'argument réduit de P et celui de son transformé P' diffèrent de

$$\frac{2\pi}{\alpha + m}.$$

Cela posé, nous pouvons assimiler l'aire A à l'aire d'un cercle au point de vue de l'Analysis Situs. Nous pouvons donc définir la position d'un point de cette aire par un système de coordonnées x et y analogues aux coordonnées polaires, de telle façon que l'équation de la courbe C_0 soit

$$x = a$$

et que, sur cette courbe, y soit égal à l'argument réduit. Notre transformation T conserve donc la courbe $x = a$ et elle est telle que l'on ait

$$Y - y = \frac{2\pi}{\alpha + m} = \text{const.}$$

Le théorème de KRONECKER nous enseigne alors qu'il y a, à l'intérieur de A, un nombre *impair* de points inaltérés par la transformation; à chacun de ces points correspond une trajectoire périodique; une au moins de ces trajectoires est stable.

Soit P_0 le point correspondant; nous pouvons choisir notre système de coordonnées de façon que ce point corresponde au pôle

$$x = 0.$$

La transformation T conserve alors non seulement la $x=a$, mais aussi la circonférence extrême intérieure $x=0$ qui se trouve réduite à un point.

Soit C'_0 la courbe C fermée qui passe en P_0; introduisons un système de coordonnées u', v', w' qui soit à C'_0 ce que le système u, v, w est à C_0. Nous supposerons de plus que dans ce système l'équation de A soit $u'=0$; nous pouvons le faire, mais à la condition de renoncer à la 1ère hypothèse que nous avions faite au sujet de u, v, w (à savoir que le point de la géodésique ou de la trajectoire ne change pas, la direction de la tangente variant seule, quand on fait varier w, tandis que u et v restent constants). A vrai dire, cette hypothèse ne joue aucun rôle essentiel, et nous ne l'avons faite que pour faciliter l'énoncé de la définition des foyers cinétiques. Dans ces conditions, les équations d'une courbe C voisine de C'_0 seront

$$\frac{v'}{a'}=\rho'\sin(\theta'+h'),\qquad \frac{w'}{a'}=\rho'_1\sin(\theta'+h')+\rho'_2\cos(\theta'+h')$$

et on aura:

$$\theta'=\beta u'+\varphi'(u'),$$

φ' étant périodique; $i\beta$ est l'exposant caractéristique, de sorte que, quand u' augmente de 2π, θ' augmente de $2\beta\pi$. Nous pourrons choisir notre système de coordonnées x, y de telle sorte que l'on ait sensiblement dans le voisinage de P_0, c'est-à-dire pour x très petit:

$$\frac{v'}{x}=\rho'\sin y,\qquad \frac{w'}{x}=\rho'_1\sin y+\rho'_2\cos y,$$

en donnant aux fonctions ρ', ρ'_1, ρ'_2 les valeurs qu'elles prennent pour $u'=0$.

Alors, quand u' augmentera de 2π, c'est-à-dire quand on passera du point P au point P', $y=\theta'+h'$ augmentera de $2\beta\pi$, ou plutôt (car y n'est déterminé qu'à un multiple près de 2π) se changera en

$$2\pi(\beta+n),$$

n étant un entier; on aura donc

$$Y-y=2\pi(\beta+n).$$

Il semble d'abord que l'entier n soit arbitraire, tandis que m ne l'était pas, mais si l'on parcourt l'aire A tout entière, la différence $Y-y$ devra varier d'une manière continue, ce qui détermine n.

Cela posé, envisageons la transformation T^p, puissance $p^{\text{ème}}$ de T; cette transformation conservera $x=a$ et $x=0$, et *elle admettra*, comme T, *un invariant intégral positif*, d'après les principes exposés dans mon livre [loc. cit. [2])]; elle nous donnera d'autre part, sur $x=a$:

$$Y-y=2\pi\frac{p}{\alpha+m}$$

et sur $x=0$:

$$Y-y=2\pi p(\beta+n).$$

Elle ne différera pas essentiellement de celle qu'on en déduit en changeant Y en $Y+2q\pi$, q étant un entier, puisque Y n'est déterminé qu'à un multiple près de 2π.

Pour cette nouvelle transformation on aura, sur $x = a$:

$$Y - y = 2\pi\left(\frac{p}{\alpha + m} + q\right)$$

et sur $x = 0$:

$$Y - y = 2\pi[p(\beta + n) + q].$$

A moins que

$$(\beta + n)(\alpha + m) = 1,$$

on pourra trouver une infinité de couples de nombres entiers p et q, tels que:

$$\left(\frac{p}{\alpha + m} + q\right)[p(\beta + n) + q] < 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\alpha + m} > -\frac{q}{p} > \beta + n$$

ou

$$\frac{1}{\alpha + m} < -\frac{q}{p} < \beta + n.$$

Le théorème sera donc applicable, et il y aura au moins deux points inaltérés par notre transformation. Ces deux points nous donneront autant de solutions périodiques.

Comme p et q peuvent prendre une infinité de valeurs, cela nous fait *une infinité de solutions périodiques* (ce qui n'était démontré jusqu'ici que pour de petites valeurs des masses).

Supposons que, pour certaines valeurs des données du problème, on ait construit les courbes C_0 et C'_0, ainsi que l'aire A. Faisons varier maintenant les données du problème. C_0 variera d'une manière continue; on pourra également faire varier A d'une manière continue et en lui conservant ses propriétés essentielles, en particulier celle d'être sans contact; sous ce rapport on ne sera jamais arrêté tant que C_0 existera. Donc, tant que C_0 et C'_0 existeront, tout ce que nous avons dit subsistera. Les solutions périodiques correspondant au couple d'entiers p, q ne pourront disparaitre toutes qu'en se confondant avec C_0 ou C'_0, ce qui arrive pour

$$-\frac{q}{p} = \frac{1}{\alpha + m} \quad \text{ou} \quad \beta + n.$$

Cela nous donne des renseignements sur les rapports mutuels de ces solutions périodiques et cela s'appliquerait de même à l'étude des solutions périodiques du 2^{d} genre.

J'entrevois aussi, mais d'une façon beaucoup plus vague, que l'on pourrait se servir de cela pour montrer que les solutions périodiques sont *überalldicht*.

Voyons ce qui arrive dans les deux exemples particuliers que nous avons cités au début, et d'abord dans celui des géodésiques. Supposons que la surface diffère très peu d'une sphère; nous avons vu alors que les géodésiques fermées sans point double [loc. cit. [1]), page 249] correspondent aux maxima, minima et minimax d'une certaine quantité qui n'est autre que la longueur d'un « grand cercle astronomique ».

Ces maxima etc., sont au nombre de $4n + 2$, n étant entier; mais si l'on ne considérait pas comme distinctes deux géodésiques, identiques d'ailleurs, mais parcourues en sens contraire, cela ne nous donnerait qu'un nombre impair $2n+1$ de géodésiques: c'est ce que j'avais fait dans le mémoire cité [1])]. Ici, au contraire, deux géodésiques qui ne diffèrent que par le sens du parcours nous donnent deux courbes C différentes. Le nombre des courbes C fermées de cette catégorie est donc pair; toutes coupent A en un point, sauf C_0 qui limite A; le nombre des courbes C qui coupent A est donc impair, ainsi qu'il convient. On peut, si l'on veut, choisir C'_0 de telle sorte que C_0 et C'_0 correspondent à deux géodésiques ne différant que par le sens du parcours.

Si la surface S se réduit à une sphère, la courbe C_0 est une circonférence et on peut prendre pour A l'aire plane limitée par cette circonférence.

Dans le cas du problème restreint, partons du cas où la masse troublante est nulle; il y aura alors, pour le corps troublé, deux orbites circulaires compatibles avec l'équation de Jacobi (voir plus haut). Ce sont ces deux orbites qui correspondront à C_0 et C'_0.

§ 4.

Définitions et notations.

Après avoir expliqué le parti que l'on pourrait tirer du théorème s'il était vrai, je dois exposer les raisons qui me portent à croire qu'il est vrai. Je prendrai alors le théorème sous sa seconde forme; c'est-à-dire que je supposerai que la transformation T ne laisse aucun point inaltéré et que je me proposerai d'établir qu'elle ne peut admettre d'invariant intégral.

J'emploierai pour certaines raisons de commodité deux modes de représentation: Tantôt je me servirai de la couronne circulaire elle-même, de sorte que x et y seront des coordonnées polaires; c'est ce que j'appellerai l'*image circulaire*. Tantôt je considérerai x et y comme des coordonnées *rectangulaires,* en supposant, contrairement à l'usage, l'axe des x vertical et l'axe des y horizontal; c'est ce que j'appellerai *l'image rectifiée*. Il est aisé de passer d'une image à l'autre; les courbes $x=$ const. sont des circonférences sur l'une, des horizontales sur l'autre; les courbes $y=$ const. sont des rayons vecteurs sur l'une, des verticales sur l'autre.

Il importe toutefois de remarquer qu'à un point de l'image circulaire correspondent une infinité de points de l'image rectifiée (x, y; $x, y+2\pi$; $x, y+4\pi$; ...).

On est ainsi amené à distinguer les courbes fermées *au sens large* et *au sens étroit,* les premières sont fermées sur l'image circulaire et ne le sont pas sur l'image rectifiée; les secondes le sont sur les deux images.

La transformation T sera toujours supposée biunivoque; le point M aura pour coordonnées x et y et son transformé M' aura pour coordonnées X et Y; son transformé par la transformation inverse T^{-1} aura pour coordonnées (X) et (Y).

Notre couronne circulaire est limitée par les deux circonférences extrêmes: $x=X=a$,

$x = X = b$, la première extérieure, la seconde intérieure ; toutes deux sont conservées par la transformation.

Les courbes remarquables que nous aurons à envisager sont les suivantes :

1° les circonférences (ou horizontales) $x = c$;

2° les courbes $X = c$ dont les courbes $x = c$ sont les transformées et qui doivent être comme elles des courbes fermées au sens étroit ;

3° les courbes $X = x$, en regardant comme distinctes deux de ces courbes, bien qu'elles aient même équation, si on ne peut passer de l'une à l'autre par un trait continu satisfaisant à cette même équation ;

4° leurs transformées $(X) = x$.

Si nous envisageons les trois courbes $X = x$, $X = c$, $x = c$, tout point qui appartient à deux d'entre elles appartient à la 3e, et si deux d'entre elles s'y touchent, la 3e les touche également.

Sur une courbe $X = x$, il ne peut y avoir de point où $Y = y$; car ce point, où on aurait $X = x$, $Y = y$, serait un point inaltéré par T, et nous avons supposé qu'il n'y en avait pas. Donc $Y - y$ conserve le même signe tout le long d'une même courbe $X = x$; ce qui m'amène à distinguer deux sortes de courbes $X = x$: les courbes *positives* et *négatives,* suivant que $Y - y$ est lui-même positif ou négatif. Par hypothèse $Y - y$ est toujours positif sur l'une des circonférences extrêmes, et négatif sur l'autre. Toutes les courbes $X = x$ qui aboutissent à l'une de ces circonférences sont donc positives, toutes celles qui aboutissent à l'autre sont négatives et aucune courbe $X = x$ ne peut aller d'une circonférence à l'autre.

Les courbes $X = x$ se répartissent donc en trois catégories :

1° Les courbes ouvertes dont les deux extrémités sont sur une même circonférence extrême.

2° Les courbes fermées au sens large.

3° Les courbes fermées au sens étroit.

Nous ne restreignons pas essentiellement la généralité en supposant qu'aucune de ces courbes ne présente de point double.

Considérons l'image rectifiée, et sur cette image les points où la tangente à une courbe $X = x$ est horizontale ; ces points s'appelleront *fonds* ou *sommets* suivant que l'altitude (mesurée par la coordonnée x) y est maximum ou minimum. La partie d'une courbe $X = x$ comprise entre un fond et un sommet consécutifs, et sur laquelle, par conséquent, ne se trouve ni un autre fond, ni un autre sommet, s'appellera une *branche* de la courbe $X = x$ et j'emploierai toujours le mot branche dans ce sens spécial.

Soit M un point de $X = x$; son transformé M' aura même altitude (c'est précisément ce qu'exprime l'équation $X = x$) et il se trouvera sur la transformée $(X) = x$; d'où les conséquences suivantes : 1° tout fond ou tout sommet de $X = x$ aura pour transformé un fond ou un sommet de $(X) = x$ ayant même altitude ; 2° toute branche de $X = x$ parcourue, par exemple, en montant, aura pour transformée une branche de $(X) = x$ parcourue en montant.

Si une branche $X = x$ est positive, sa transformée $(X) = x$ ne pourra la couper et sera tout entière à sa droite (toujours sur l'image rectifiée); elle pourra aussi être dite positive; elle serait au contraire tout entière à gauche si la courbe $X = x$ était négative.

§ 5.

Intersection de deux courbes fermées.

Considérons la circonférence $x = c$ et sa transformée inverse $X = c$, qui est aussi une courbe fermée au sens large; ces deux courbes admettront sur l'image circulaire un nombre pair m de points d'intersection, mais ces points seront représentés par un nombre infini de points sur l'image rectifiée. Commençons par numéroter ces points d'intersection en suivant la courbe $X = c$ dans le sens des Y croissants. Si nous parcourons ensuite $x = c$ dans le sens des y croissants, nous rencontrerons tous ces points d'intersection, mais en général dans un ordre différent; dans le cas où ils se succèdent précisément dans l'ordre de leur numérotage, nous dirons que la distribution est *normale*.

Nous avons dit que le nombre m des points d'intersection réellement distincts est toujours pair; en parcourant $x = c$, depuis $y = y_0$ jusqu'à $y = y_0 + 2\pi$, nous rencontrerons successivement les points numérotés:

(1) $$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m.$$

La suite (1) définit le mode de distribution des points d'intersection; elle peut évidemment être remplacée par la suivante:

$$\alpha_1 + m, \quad \alpha_2 + m, \quad \ldots, \quad \alpha_m + m,$$

qui sont les numéros des points que l'on rencontrerait en parcourant $x = c$ depuis $y = y_0 + 2\pi$ jusqu'à $y = y_0 + 4\pi$. Si la distribution est normale, les nombres de la suite (1) sont m entiers consécutifs. Dans tous les cas ces nombres sont alternativement pairs et impairs.

Un arc de $X = c$, compris entre deux de ces points d'intersection, sera dit *élémentaire* si, ayant d'ailleurs ses deux extrémités sur $x = c$ il ne coupe pas $x = c$. Les arcs élémentaires seront *extérieurs* ou *intérieurs* suivant que sur l'image circulaire ils seront à l'extérieur ou à l'intérieur de la circonférence $x = c$. On peut supposer que *les deux extrémités d'un arc élémentaire extérieur soient toujours numérotées* $2n - 1$ *et* $2n$, et que celles d'un arc élémentaire intérieur soient toujours numérotées $2n$ et $2n + 1$.

Un arc élémentaire est *direct* si son extrémité de numéro le plus élevé est sur l'image rectifiée à droite de l'autre extrémité, il est *inverse* dans le cas contraire; en d'autres termes, si l'arc est direct, Y et y varient dans le même sens quand on passe d'une extrémité à l'autre.

La courbe $X = c$ transformée inverse d'une courbe $x = c$ sans point double, n'a pas non plus de point double. Il en résulte que deux de ses arcs élémentaires ne peuvent se couper; ce qui peut s'exprimer de la façon suivante: si A, B et C, D sont les extrémités de deux arcs élémentaires extérieurs (ou de deux arcs élémentaires intérieurs), les deux segments AB et CD (pris sur l'horizontale $x = c$ dans l'image rectifiée) ne peuvent *chevaucher* l'un sur l'autre; c'est-à-dire que C et D sont tous deux intérieurs, ou tous deux extérieurs à l'intervalle AB.

Cette condition peut encore s'énoncer d'une autre manière. Considérons la suite (1) et complétons-la en y adjoignant le nombre $\alpha_1 + m$ de façon à constituer une sorte de cycle fermé (je rappelle en effet que les points numérotés α_1 et $\alpha_1 + m$ sont identiques, sinon sur l'image rectifiée, du moins sur l'image circulaire). Dans la suite ainsi complétée, je puis distinguer $\frac{m}{2}$ couples de deux nombres consécutifs, dont le premier soit impair et le second pair. Il faut alors que, si l'on envisage deux quelconques de ces couples, les deux nombres de l'un des couples soient *tous deux* compris entre les deux nombres de l'autre ou n'y soient compris *ni l'un ni l'autre*. (Un de ces couples ne peut pas, par ex., être 14 et l'autre 52). Il existe également dans notre suite $\frac{m}{2}$ couples de deux nombres consécutifs dont le premier est pair et le second impair. La même condition doit encore être remplie pour deux quelconques de ces couples.

Voilà donc deux énoncés de la condition nécessaire et suffisante pour que la suite (1) soit *possible*. Ces deux énoncés sont équivalents, ils s'appliquent d'ailleurs à l'intersection de deux courbes fermées quelconques sans point double. Dans le premier énoncé, on considère les deux courbes fermées (au sens large) $X = c$ et $x = c$, et on suppose $X = c$ décomposée en arcs élémentaires; dans le second, on intervertit les rôles des deux courbes et c'est $x = c$ que l'on décompose en arcs élémentaires.

Considérons deux arcs élémentaires extérieurs AB et CD. Si les deux extrémités C et D sont comprises sur le segment AB de l'horizontale $x = c$ sur l'image rectifiée, de façon que l'arc CD soit tout entier compris dans l'aire limitée par l'arc AB et par sa corde, nous dirons que CD est *recouvert* par AB. La même définition s'appliquera naturellement aux arcs intérieurs.

Un arc élémentaire sera dit *primaire* s'il n'est recouvert par aucun autre et *ultime* s'il n'en recouvre aucun autre. L'arc CD sera *immédiatement* recouvert par AB, s'il n'existe aucun arc élémentaire qui recouvre CD et soit recouvert par AB.

De ces définitions, on déduit facilement les propositions suivantes:

1° Si deux arcs se recouvrent immédiatement, l'un est direct et l'autre inverse.

2° Tout arc primaire est direct.

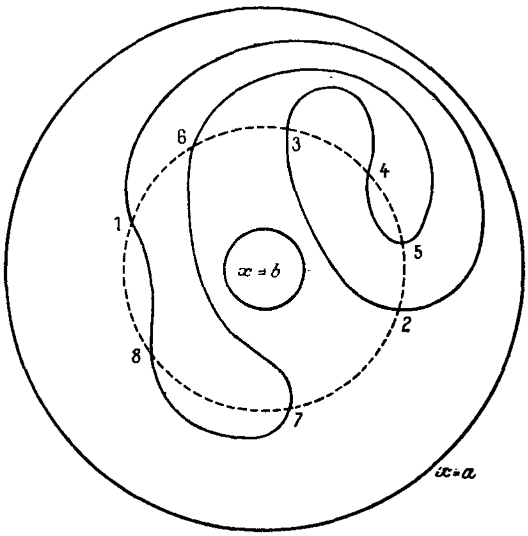
3° Si la distribution est normale, tous les arcs élémentaires sont à la fois primaires et ultimes.

4° Prolongeons indéfiniment la suite (1), en y adjoignant celles que l'on en déduit en changeant α_i en $\alpha_i + km$, où k est un entier positif ou négatif; ou, ce qui revient au même, formons cette suite (1) prolongée en écrivant les numéros de tous les points que nous rencontrons successivement en parcourant l'horizontale $x = c$ depuis $y = -\infty$ jusqu'à $y = +\infty$.

Si dans cette suite prolongée nous considérons les numéros qui correspondent aux extrémités des arcs primaires extérieurs, ces numéros se suivront dans l'ordre numérique croissant.

5° La différence des numéros des deux extrémités d'un arc primaire (et a fortiori d'un arc quelconque) est au plus égale à $m - 1$.

Le *rang* d'un point d'intersection sera par définition la place qu'occupe son numéro dans la suite (1). Ce qui caractérise un arc ultime, c'est que les rangs de ses deux extrémités sont consécutifs, ainsi que leurs numéros. Ce qui caractérise la distribution normale, c'est que les rangs se suivent dans le même ordre que les numéros, et que l'on peut toujours s'arranger pour que le rang d'un point soit égal à son numéro.



(*Fig.* 1).

On se rendra mieux compte de ce qui précède en se reportant à la figure 1; sur cette figure on s'est servi de l'image circulaire; les deux circonférences extrêmes $x = a$ et $x = b$ sont représentées en trait plein; il en est de même de la courbe $X = c$; quant à la circonférence $x = c$, elle est en trait pointillé; on voit que les arcs élémentaires extérieurs sont 12, 34, 56 et 78, et les arcs élémentaires intérieurs 23, 45, 67 et 81; les arcs 12, 78, 67, 23 sont primaires, les arcs 34, 78, 45, 81 sont ultimes. 34 est recouvert par 56, et 56 par 12.

§ 6.

Numérotage des branches.

Considérons sur l'image rectifiée les différentes *branches* $X = x$; faisons correspondre à chaque branche (A) un nombre $n(A)$, en nous assujettissant à la condition suivante:

Si une horizontale $x=c$ coupe deux branches (A) et (B), et que son intersection avec (A) soit à gauche de son intersection avec (B), on devra avoir :

$$n(A) < n(B).$$

Il est aisé de vérifier que cette hypothèse n'implique aucune contradiction et qu'il est possible de choisir les nombres $n(A)$ de façon à satisfaire à la fois à toutes ces inégalités. Le nombre $n(A)$ s'appellera le *rang* de la branche (A). On peut choisir ces nombres de façon qu'ils représentent toute la série des nombres entiers depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et cela *sans lacune ;* car s'il existait des lacunes, il suffirait pour les combler de faire « serrer les rangs ».

Sur l'image rectifiée, le nombre des branches est infini et les rangs se succèdent depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; mais ces branches ne correspondent qu'à un nombre fini de branches sur l'image circulaire, puisqu'à tout point de l'image circulaire correspondent une infinité de points de l'image rectifiée. Il suffira donc de représenter la portion de l'image rectifiée comprise entre $y=y_0$ et $y=y_0+2\pi$ et ne contenant qu'un nombre fini de branches, puisque l'image rectifiée se reproduit périodiquement quand y augmente de 2π.

On définirait de la même façon les *rangs* des branches $(X)=x$. Le *numéro* d'une branche $X=x$, sera le rang de la branche $(X)=x$ qui en est la transformée ; le *numéro* d'une branche $(X)=x$ sera le rang de la branche $X=x$ qui en est la transformée inverse.

Il est aisé de se rendre compte des relations de ce numérotage des branches $X=x$ avec le numérotage des intersections de $X=c$ et de $x=c$ étudié au § précédent.

Considérons la circonférence $x=c$ représentée sur notre image rectifiée par une horizontale ; ses intersections avec $X=c$ seront sur une branche $X=x$.

L'horizontale $x=c$ ne rencontrera pas toutes les branches $X=x$, mais tous ses points d'intersection avec l'une de ces branches seront sur $X=c$; les numéros et les rangs de ses points d'intersection avec $X=c$ se succéderont dans le même ordre que les numéros et les rangs des branches $X=x$ correspondantes. Mais, tandis que la suite des numéros (ou celle des rangs) des points d'intersection $X=c$ et $x=c$ ne présente pas de lacune, la suite des numéros (ou celle des rangs) des branches $X=x$ correspondantes en pourra présenter, puisque $x=c$ ne coupe pas toutes les branches. Pour passer de la seconde suite à la première, il suffira donc de « serrer les rangs ». Il importe de remarquer qu'en « serrant les rangs » on n'altérera pas la parité des numéros (pas plus que celle des rangs).

Nous conviendrons de dire que les numéros (ou les rangs) de deux branches sont *consécutifs au niveau d'une horizontale $x=c$ donnée,* si cette horizontale ne coupe aucune branche dont les numéros (ou les rangs) soient compris entre ceux de ces deux branches.

D'après toutes ces conventions, le numéro d'une branche $X=x$, son rang et le numéro du point correspondant d'intersection entre $X=c$ et $x=c$ seront toujours de même parité.

Les courbes $X = x$ partagent la couronne circulaire (ou son image rectifiée) en régions; on a $X > x$ dans les unes et $X < x$ dans les autres. Il résulte des conventions de ce § et de celles du § précédent, que *les régions $X > x$ sont bornées à gauche par des branches de numéro pair et à droite par des branches de numéro impair.* C'est le contraire pour les régions $X < x$.

Considérons un fond (ou un sommet) où viennent se raccorder deux branches; soient α_0 et β_0 le numéro et le rang de celle de gauche; α_1 et β_1 le numéro et le rang de celle de droite; les deux numéros α_0 et α_1, de même que les deux rangs β_0 et β_1 devront être *consécutifs au niveau de ce fond* (ou de ce sommet). Nous dirons que ce fond (ou ce sommet) est *impair* si α_0 est impair, et *pair* si α_0 est pair.

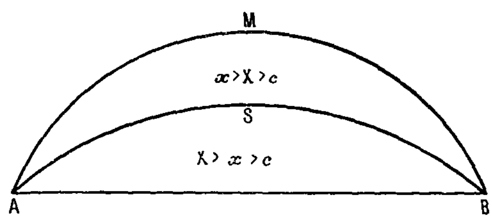
Nous dirons que le fond (ou le sommet) est *direct* si $\alpha_0 < \alpha_1$ et *inverse* si $\alpha_0 > \alpha_1$.

§ 7.

Régions interdites.

Considérons sur l'image rectifiée les deux courbes $x = c$ et $X = c$, et les diverses régions qu'elles déterminent. Nous distinguerons les *régions permises* où le signe de $X - c$ est le même que le signe de $x - c$, et les régions interdites où ces deux signes sont différents et où, par conséquent, les courbes $X = x$ ne peuvent pénétrer. La région comprise entre un arc élémentaire HK de $X = c$, et les arcs qu'il recouvre immédiatement (au sens du § 5) est permise si HK est inverse, et interdite si HK est direct.

Cela posé, soit S un sommet quelconque d'une courbe $X = x$ quelconque; soit $x = c$ une horizontale située au dessous de ce sommet et coupant $X = x$ en deux points A et B très voisins de ce sommet. Soit AMB l'arc élémentaire de la courbe $X = c$ qui va de A en B; et R la région comprise entre cet arc et l'horizontale AB. Si cet arc est inverse (c'est-à-dire si le sommet S est inverse), la région R est permise et les régions limitrophes interdites, de telle sorte que l'arc ASB de la courbe $X = x$ doit traverser cette région, qui se trouve ainsi partagée en deux régions partielles $AMBS$, et $ASBA$.



(Fig. 2).

Dans la 1ère on aura $x > X > c$ et dans la 2de $X > x > c$; alors la branche AS bornant à gauche une région $X > x$ est de numéro pair; c'est-à-dire que le sommet S est pair. *Il ne peut donc y avoir de sommet inverse impair* et on verrait de même qu'*il ne peut y avoir de fond inverse pair.*

Il est aisé de voir d'autre part que *le sommet le plus élevé d'une courbe* $X = x$ *quelconque est toujours direct;* il en est de même du fond le plus bas.

Soit en effet R la région enveloppée par la courbe $X = x$ envisagée, si cette courbe est fermée au sens étroit, ou bien comprise entre cette courbe et l'horizontale $x = b$ (qui correspond sur l'image circulaire à la circonférence extrême intérieure). Soit R' la transformée de R; soit S le sommet le plus élevé de notre courbe; son transformé S' sera le sommet le plus élevé de la courbe $(X) = x$ qui limite R'. Soit M un point qui décrit le contour de R en laissant cette région à sa droite; son transformé M' décrira le contour de R' en laissant cette région à sa droite; quand M arrivera en S il marchera de gauche à droite, puisque S est le point le plus élevé du contour de R; à ce moment, M' arrivera en S' et marchera de gauche à droite pour la même raison. Dire que les deux mobiles marchent dans le même sens, c'est dire que le sommet est direct. C. Q. F. D.

§ 8.

Conditions de possibilité.

Une transformation T sera alors caractérisée par les données suivantes, faciles à reconnaître sur l'image rectifiée:

1° La *forme* des courbes $X = x$, le nombre et la disposition des branches de chacune d'elles, l'altitude relative des divers sommets ou fonds. Quand on s'est donné ainsi la forme de ces courbes, le *rang* de chaque branche se trouve déterminé, puisqu'il ne dépend que de la position géométrique relative de ces branches.

2° Le *numéro* de chaque branche.

3° Le *signe* de chacune des courbes $X = x$, qui peuvent être positives ou négatives au sens du § 4.

Ces données toutefois ne peuvent être choisies arbitrairement. Elles doivent satisfaire à un certain nombre de conditions que je vais énumérer:

1° Supposons que l'on coupe nos courbes $X = x$ par une horizontale quelconque $x = c$. Cette horizontale ne coupera pas toutes les branches de ces courbes; mais si nous écrivons les numéros des branches qu'elle coupe dans l'ordre où elle les rencontre, ou, ce qui revient au même, dans l'ordre des rangs, nous obtiendrons une suite indéfinie.

A chacune des branches ainsi coupées correspond un des points d'intersection de $X = c$ et de $x = c$; le numéro de cette branche n'est pas égal en général au numéro de ce point d'intersection; puisque la série des numéros des branches comporte des lacunes correspondant aux branches qui ne sont pas coupées par $x = c$, tandis que la série des numéros des points d'intersection n'en comporte pas; mais ces deux séries de numéros se suivent dans le même ordre (de telle sorte qu'on peut passer de l'une à l'autre en « serrant les rangs »). La première de ces séries doit donc satisfaire comme la seconde à la condition du § 5, que l'on peut énoncer ainsi:

Considérons cette série de numéros, qui sont alternativement pairs et impairs; distinguons-y deux couples de numéros consécutifs, tels que dans chacun d'eux le premier numéro soit pair et le second impair; ces deux couples ne devront pas *chevaucher* l'un sur l'autre au sens du § 5; et il en devra être de même pour deux couples de numéros consécutifs où le premier est impair et le second pair.

2° Les numéros et les rangs des deux branches qui se raccordent en un sommet ou en un fond, doivent être *consécutifs* au niveau de ce sommet ou de ce fond, au sens du § 6.

3° Il ne doit y avoir ni *fond inverse pair*, ni *sommet inverse impair.*

4° Dans le voisinage des horizontales extrêmes $x = a$ et $x = b$, les numéros des diverses branches doivent se succéder dans le même ordre que leurs rangs; et en effet $X = a$, par exemple, se confond avec $x = a$; donc, si c est voisin de a, $X = c$ s'écartera peu de $x = c$ et de telle façon qu'une tangente quelconque à $X = c$ fasse toujours un angle très petit avec l'horizontale $x = c$ et, lorsque deux courbes fermées s'ecartent peu l'une de l'autre, la distribution de leurs points d'intersection est normale au sens du § 5.

5° Deux branches qui appartiennent à une même courbe, et en particulier deux branches qui aboutissent à un même sommet ou à un même fond, doivent être *de même signe.*

6° Nous avons vu que si une branche $X = x$ est positive, sa transformée $(X) = x$ doit être située à sa droite. Soient donc deux branches A et B de $X = x$; supposons qu'elles soient « interverties », c'est-à-dire que le numéro de A soit *plus grand* que celui de B et le rang de A *plus petit* que celui de B; et de plus qu'elles soient de *signe contraire.* Il faut alors que A soit positive et B négative. Il ne pourrait pas se faire que A fût négative et B positive; s'il en était ainsi en effet, A serait à droite de sa transformée A', et B à gauche de sa transformée B'; cela ne se peut pas, car A est à gauche de B puisque son rang est plus petit, et A' à droite de B' puisque le numéro de A est le plus grand.

§ 9.

Arcs positifs et négatifs.

Pour aller plus loin, je vais introduire une notion nouvelle. Considérons un contour fermé C parcouru dans un sens déterminé par un point mobile P et un point M; le *coefficient* du contour C sera le nombre m si l'angle du vecteur MP avec une direction fixe augmente de $2m\pi$ quand le point P décrit le contour C tout entier. Les angles seront comptés dans le sens opposé au sens trigonométrique. Un contour sera *positif* si son coefficient par rapport à un point quelconque du plan est toujours positif ou nul; il sera dit *négatif* si ce coefficient est toujours négatif ou nul; il sera *défini* s'il est positif ou négatif.

Soient $ABCDA$ et $ECBFE$ deux contours fermés; on peut les réunir et obtenir un contour résultant $ABFECDA$ en supprimant les parties communes BC et CB, qui, dans les deux contours composants, étaient parcourues en sens contraire. On écrira alors:

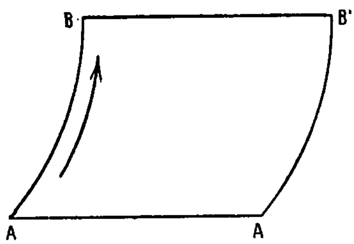
$$ABCDA + ECBFE = ABFECDA$$

ou

$$ABCDA = ABFECDA - ECBFE.$$

On aura ainsi défini la *somme* ou la *différence* de deux contours, et on définirait de même celle de plusieurs contours. Il est clair que si un contour est la somme de plusieurs autres, son coefficient par rapport à un point quelconque M sera la somme des coefficients des contours composants.

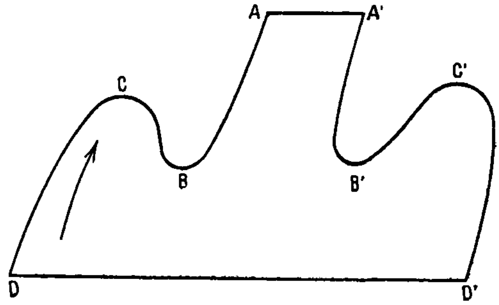
Définissons maintenant le signe d'un arc $X = x$, ou d'un arc $X = c$. Un arc $X = x$ sera *positif* s'il appartient à une branche positive *parcourue en montant* ou à une branche négative parcourue en descendant; il sera *négatif* s'il appartient à une branche négative parcourue en montant ou à une branche positive parcourue en descendant. Le mot positif n'a donc pas le même sens selon qu'il s'agit d'une branche ou d'un arc, puisque dans le cas d'une branche (cf. § 4) le signe ne dépend pas du sens du mouvement.



(Fig. 3).

Soit AB un arc positif appartenant à une branche positive $X = x$ parcourue en montant comme l'indique la flèche sur la figure. Son transformé $A'B'$ sera donc à sa droite; fermons le contour $ABB'A'A$ en traçant les horizontales BB' et $A'A$ (ce sont des horizontales de l'image rectifiée ayant pour équations $x = \text{const.}$). On voit que le contour ainsi défini est *positif,* et c'est ce qui justifie la dénomination d'arc positif.

On peut généraliser et introduire des arcs $X = x$ positifs ou négatifs *par compensation.*



(Fig. 4).

Soit un arc $DCBA$ appartenant à une courbe $X = x$ *positive* et présentant un sommet *inverse* C et un fond *inverse* B, de telle façon que A soit au dessus de D, tandis que C et B sont à une altitude intermédiaire; cet arc est parcouru dans le sens de la flèche. On peut construire alors le transformé $D'C'B'A'$, qui est disposé comme sur la figure, et fermer par les horizontales AA' et $D'D$. Il est clair alors que le contour $DCBAA'B'C'D'D$ est positif et l'arc $DCBA$ est dit *positif par compensation*. Nous ne ferons toutefois aucun usage, dans ce qui va suivre, des arcs positifs par compensation.

Passons aux arcs $X = c$. Soit AMB un de ces arcs parcouru dans le sens AMB.

Considérons sur l'image rectifiée la corde BA de cet arc, elle appartiendra à l'horizontale $x = c$, si, comme nous le supposerons, les deux extrémités A et B sont deux points d'intersection de $X = c$ et de $x = c$. Considérons le contour $AMBA$ formé par cet arc et sa corde. L'arc sera dit *défini*, *positif* ou *négatif*, si ce contour est lui-même défini, positif ou négatif.

Les arcs élémentaires sont toujours *définis*; le signe de l'arc AMB sera celui du produit

$$\alpha\beta\gamma,$$

où :

$\alpha = +1$ si le numéro et le rang de A sont impairs, et -1 s'ils sont pairs;

$\beta = +1$ si le rang de A est plus petit que celui de B, et -1 dans le cas contraire;

$\gamma = +1$ si le numéro de A est plus petit que celui de B, et -1 dans le cas contraire; et en effet l'arc AMB est parcouru de gauche à droite si $\beta = +1$, et il est au dessus de sa corde si $\alpha\gamma = +1$.

Comme second exemple, nous prendrons celui d'un arc AMB tel que les rangs de A et B soient consécutifs au niveau considéré; un pareil arc est toujours *défini*; son signe sera encore celui du produit $\alpha\beta\gamma$.

§ 10.

Le contour C.

Imaginons un contour C, fermé au sens large et formé exclusivement d'arcs $X = x$ et d'arcs $X = c$, soit *tous positifs*, soit *tous négatifs*; le sens dans lequel C est parcouru est donné. Soit C' le transformé de C, il sera formé d'arcs $(X) = x$ et d'arcs $x = c$.

Je dis que pour établir le théorème qui est l'objet de ce Mémoire, il suffirait d'établir l'existence de ce contour C.

Pour cela je m'en vais déterminer les coefficients du contour $C - C'$ par rapport à un point du plan, mais je me servirai de l'image circulaire afin que les contours C et C' soient fermés.

Soit alors

$$A_1 B_1 M_1 A_2 B_2 M_2 \ldots A_n B_n M_n A_1$$

le contour C, et

$$A'_1 B'_1 M'_1 \ldots M'_n A'_1$$

son transformé C'; les arcs $A_i B_i$ seront des arcs $X = x$ tous *positifs*, pour fixer les idées, les arcs $B_i M_i A_{i+1}$ seront des arcs $X = \text{const.}$ tous positifs également; les arcs $A'_i B'_i$ seront des arcs $(X) = x$, et les arcs $B'_i M'_i A'_{i+1}$ des arcs $x = c$. Les points A_i et A'_i (ou bien B_i et B'_i) seront à une même altitude sur l'image rectifiée, de sorte que nous pourrons tracer des arcs $A_i A'_i$ et $B_i B'_i$ qui seront des arcs $x = c$, c'est-à-dire des horizontales sur l'image rectifiée et des circonférences sur l'image circulaire. Nous aurons alors:

$$\begin{aligned} C - C' = {} & A_1 B_1 B'_1 A'_1 A_1 + B_1 M_1 A_2 A'_2 M'_1 B'_1 B_1 + A_2 B_2 B'_2 A'_2 A_2 \\ & + B_2 M_2 A_3 A'_3 M'_2 B'_2 B_2 + \cdots + B_n M_n A_1 A'_1 M'_n B'_n B_n . \end{aligned}$$

Si nous envisageons en effet les divers termes du 2[d] membre, nous voyons que l'arc $B_1 B'_1$ du premier est détruit par l'arc $B'_1 B_1$ du second, l'arc $A_2 A'_2$ du second par l'arc $A'_2 A_2$ du troisième, ..., et enfin l'arc $A_1 A'_1$ du dernier par l'arc $A'_1 A_1$ du premier.

Le contour $A_1 B_1 B'_1 A'_1 A_1$ est analogue (si l'on revient à l'image rectifiée) au contour de la figure; le contour $B_1 M_1 A_2 A'_2 M'_1 B'_1 B_1$ est formé par l'arc $B_1 M_1 A_2$ et sa corde (toujours sur l'image rectifiée), etc. *Tous ces contours sont positifs,* puisque les arcs $A_1 B_1$, $B_1 M_1 A_2$, etc. sont positifs.

Donc le contour $C - C'$ est positif. Je dis que cela prouve qu'*il ne peut pas y avoir d'invariant intégral positif.* Soit en effet I un pareil invariant. Soit $I(R)$ ce que donne cet invariant quand l'intégration est étendue à la région R.

Les contours C et C' partageront le plan (sur l'image circulaire) en un certain nombre de régions R_k; nous poserons:

$$I(C) = \sum N_k I(R_k), \quad I(C') = \sum N'_k I(R_k),$$

N_k étant le coefficient du contour C, et N'_k celui du contour C' par rapport à un point quelconque de la région R_k (il est clair que ces coefficients sont les mêmes pour deux points appartenant à une même région R_k). Comme I est un invariant, on devra avoir:

$$I(C) = I(C').$$

D'autre part, comme le contour $C - C'$ est positif, on aura:

$$N_k \geqq N'_k$$

sans que l'égalité puisse subsister pour toutes les régions, puisque les deux contours ne coïncident pas; d'autre part, comme l'invariant est positif, on aura:

$$I(R_k) > 0$$

et, par conséquent,

$$I(C) > I(C'),$$

ce qui est une contradiction.

Si en particulier le contour C est sans point double (sur l'image circulaire), il ne pourra couper son transformé C', de telle sorte que l'un de ces contours sera tout entier à l'intérieur de l'autre; c'est ce qui arrivera dans la plupart des exemples que nous envisagerons dans la suite.

Outre les contours C et C' nous envisagerons d'autres contours C'' et C''', définis comme il suit. Le contour C'' se déduira du contour C en y remplaçant chacun des arcs $X=c$ par sa corde (sur l'image rectifiée); le contour C''' sera son transformé, de sorte que

C	sera	formé	d'arcs	$X=x$	et	d'arcs	$X=c,$
C'	»	»	»	$(X)=x$	»	»	$x=c,$
C''	»	»	»	$X=x$	»	»	$x=c,$
C'''	»	»	»	$(X)=x$	»	»	$(X)=c.$

Les contours C''' et C'' sont donc à la transformation inverse T^{-1} ce que C et C' sont à T. On passe en effet d'un cas à l'autre en faisant jouer à (X) le rôle de X, et inversement.

Je dis maintenant que si les arcs dont est formé C sont tous de même signe, tous positifs par exemple, ceux dont va être formé C''' seront aussi tous de même signe, je veux dire tous négatifs.

Si A est un arc de C appartenant par exemple à une courbe $X=x$ positive et parcourue en montant, son transformé A' fera partie de C''', il sera aussi parcouru en montant; mais par rapport à T^{-1}, il appartiendra à une courbe $(X)=x$ négative; si en effet A', transformé de A par T, est à droite de A, c'est que A, transformé de A' par T^{-1}, est à gauche de A'.

Soit maintenant AMB un arc $X=c$ faisant partie de C, et AB sa corde qui fait partie de C''; soient $A'M'B'$ et $A'B'$ leurs transformés qui font respectivement partie de C' et de C'''. Alors AB et $A'M'B'$ feront partie de $x=c$, et $A'B'$ de $(X)=c$, de sorte que sur l'image rectifiée AB sera la corde de AMB, tandis que $A'M'B'$ sera le corde de $A'B'$. Si alors le contour $AMBA$ formé par AMB et sa corde est positif, son transformé $A'M'B'A'$ sera positif, et le contour inverse $A'B'M'A'$ formé par l'arc $A'B'$ et sa corde sera négatif. C. Q. F. D.

On voit donc que si $C-C'$ est positif, il en est de même de $C''-C'''$; il est donc indifférent d'envisager C, C' et T, ou bien C''', C'' et T^{-1}

§ 11.

Le réseau.

Imaginons un réseau construit de la façon suivante: Envisageons l'image circulaire; traçons, outre les circonférences extrêmes, les circonférences $x=c$ qui sont tangentes (soit en un sommet, soit en un fond) à une courbe $X=x$. Chacune de ces circonférences coupera les diverses courbes $X=x$ et touchera l'une d'elles. A chacun des points d'intersection ou de contact correspondra une *station* du réseau. Nous joindrons ces stations par des voies correspondant aux arcs définis, dont nous avons parlé au § 9. Considérons par exemple l'une des circonférences $x = c$ que nous venons de tracer; nous tracerons des voies correspondant à tous les arcs positifs et négatifs de la courbe $X = c$ correspondante. (Il y aura donc des voies correspondant à tous les arcs élémentaires de cette courbe qui, nous l'avons dit, sont tous définis; il y en aura qui correspondront a tous les arcs de cette courbe dont les extrémités ont des numéros consécutifs au niveau considéré; mais il y en aura encore d'autres, puisqu'il y a en général d'autres arcs définis). Ce sont les *voies horizontales* du réseau. Nous joindrons en outre les stations de $x = c$ à celles de la circonférence immédiatement extérieure, ou immédiatement intérieure, par des *voies inclinées* et qui correspondront aux arcs définis des courbes $X = x$ dont une des extrémités se trouve en l'une de ces stations.

Nous conviendrons que chacune de ces voies ne peut être parcourue que dans un seul sens; à savoir: ou bien *toutes* dans le sens où elles correspondent à un arc positif, ou bien *toutes* dans le sens opposé. Voici comment nous ferons le choix entre ces deux conventions: les branches $X = x$ qui aboutissent à la circonférence extrême extérieure $x = a$ sont toutes de même signe (cfr. § 3), tandis que celles qui aboutissent à $x = b$ sont toutes du signe opposé. Si les premières sont toutes positives, nous conviendrons que toutes les voies doivent être parcourues dans le sens des arcs positifs; ce sera le contraire dans le cas opposé.

Donc, toute voie inclinée aboutissant à $x = b$ (qui correspond sur l'image rectifiée au niveau le plus bas, et sur l'image circulaire à la circonférence extrême intérieure) devra être parcourue en montant; toute voie inclinée aboutissant à $x = a$ devra être parcourue en descendant.

Pour que notre théorème soit vrai, c'est-à-dire pour que le contour C existe, *il suffit que l'on puisse revenir au point de départ en parcourant des voies du réseau dans le sens prescrit.*

D'où la régle suivante: Appelons *cul de sac convergent* toute station du réseau où aboutissent certaines voies, mais *d'où ne part aucune voie.* Supprimons dans notre réseau tous les culs de sac convergents, ainsi que toutes les voies qui y aboutissent. Il peut se faire que le réseau ainsi modifié admette des culs de sac convergents qui n'appartenaient pas au réseau primitif. Nous opérerons sur ces culs de sac *induits* comme nous avons opéré sur les culs de sac *primitifs* et nous poursuivrons l'opération jusqu'à ce que nous soyons arrêtés, ce qui pourra se faire de deux manières:

1° Ou bien nous serons arrêtés parce que nous arriverons à un réseau modifié ne présentant plus de cul de sac convergent, ni induit ni primitif. Dans ce cas, notre théorème sera vrai pour la transformation T considérée. Partons en effet d'une station quelconque; cela est possible, puisque ce n'est pas un cul de sac; nous arriverons à une seconde station d'où nous pourrons également partir; nous continuerons ainsi jusqu'à ce que nous revenions à une station déjà visitée, ce qui arrivera, puisque ces stations sont en nombre fini. Nous aurons ainsi décrit un contour fermé, en parcourant les voies dans le sens prescrit, et ce contour sera le contour C.

2° Ou bien nous serons arrêtés parce que nous aurons supprimé toutes les stations. On pourrait alors démontrer que l'on peut construire des transformations T pour lesquelles notre théorème n'est pas vrai.

Voici donc comment nous devrons opérer: Nous construirons de toutes les manières possibles les courbes $X = x$ *en nous assujettissant aux conditions du* § 8; nous construirons ensuite le réseau que nous venons de définir, et nous opérerons sur ce réseau comme nous venons de le dire. Si, dans tous les cas, nous sommes arrêtés de la première manière, notre théorème est vrai; un seul cas d'exception suffirait pour qu'il fût faux.

§ 12.

Cas particuliers.

Premier cas particulier. — Le premier cas particulier que nous examinerons est celui où la *distribution est normale,* c'est-à-dire celui où les points d'intersection de chacune des courbes $x = c$ avec la courbe $X = c$ correspondante sont distribués d'une façon normale au sens du § 4; ou, ce qui revient au même, celui où le numéro de chaque branche est égal à son rang (et où il n'y a, par conséquent, ni fond inverse ni sommet inverse).

Dans ce cas, je dis que notre réseau ne comporte pas de cul de sac convergent, et qu'on peut, par conséquent, former le contour C. En effet, si nous envisageons une courbe $X = c$, cette courbe ne comportera d'autre arc défini que les arcs élémentaires qui seront à la fois primaires et ultimes, et qui seront alternativement positifs et négatifs (si l'on convient de parcourir $X = c$ dans le sens des Y croissants). Il y aura exception quand la courbe $x = c$ *touchera* la courbe $X = c$ et par conséquent la courbe $X = x$ en un fond ou en un sommet. Dans ce cas, en effet, deux des points d'intersection se confondront, l'arc élémentaire qui allait de l'un à l'autre disparaitra, de sorte que nous aurons deux arcs consécutifs de même signe; ce qui veut dire que, des deux voies horizontales qui aboutissent à un fond ou à un sommet, l'une s'en éloigne et l'autre s'en approche.

Il ne peut donc y avoir de cul de sac convergent ni dans une station qui n'est ni fond ni sommet, parce que une des deux voies inclinées qui y aboutissent s'en éloigne; ni en un fond ou en un sommet, parce qu'une des deux voies horizontales qui y aboutissent s'en éloigne. C. Q. F. D.

Deuxième cas particulier. — Supposons que nous n'ayons que deux sortes de courbes $X = x$, les courbes L aboutissant à la circonférence extérieure $x = a$, et les courbes K aboutissant à $x = b$.

Supposons qu'en parcourant les courbes L d'un bout à l'autre, on rencontre des branches de rang sans cesse croissant, et qu'il en soit de même quand on parcourt les courbes K. (Cela arrivera en particulier si nous supposons qu'en aucun point des courbes L et K la tangente ne soit verticale sur l'image rectifiée).

Cela posé, voici comment nous pourrons construire le contour C'; soient L' et K' les transformées des courbes L et K; quand on parcourra une courbe L de gauche à droite (sur l'image rectifiée), toutes les branches que l'on parcourra en descendant seront, par exemple, paires (c'est-à-dire de numéro et de rang pair), et toutes celles que l'on parcourra en montant seront impaires; ce sera le contraire pour les courbes K.

Les courbes L ne pourront avoir que des fonds pairs et des sommets impairs; elles n'auront donc ni fond inverse, ni sommet inverse, c'est-à-dire que les numéros s'y succéderont dans le même ordre que les rangs. Si, au contraire, c'est sur les courbes L que les branches descendantes sont impaires et sur les courbes K qu'elles sont paires, ce sont les courbes K pour lesquelles les numéros se succéderont dans le même ordre que les rangs; mais nous nous placerons dans le premier cas.

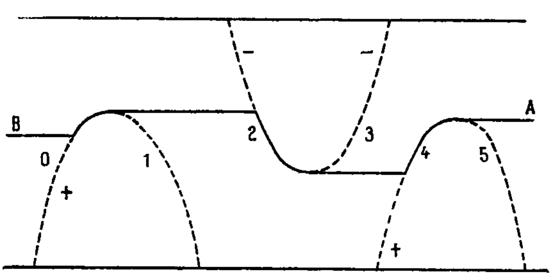
Je suppose alors (toujours sur l'image rectifiée) que les courbes L' soient lumineuses et les courbes K' opaques; les courbes L' sont lumineuses, mais chacun de leurs points ne peut pas envoyer de lumière dans tous les sens; il ne peut en envoyer qu'horizontalement (vers la droite si les courbes L sont négatives et les courbes K positives, vers la gauche dans le cas contraire). Tout se passe comme si en chacun de ces points il y avait un petit réflecteur parabolique émettant un faisceau de rayons parallèles. Dans ces conditions une partie du plan sera éclairée, une partie dans l'ombre. *La limite de l'ombre ne sera autre chose que le contour C'.* Je ne donne pas la démonstration qui est longue.

Troisième cas particulier. — Il n'y a que deux sortes de courbes $X = x$: les courbes L aboutissant a $x = a$, les courbes K aboutissant à $x = b$; sur chacune de ces courbes, parcourue de gauche à droite, on rencontre des branches de *numéro* sans cesse croissant.

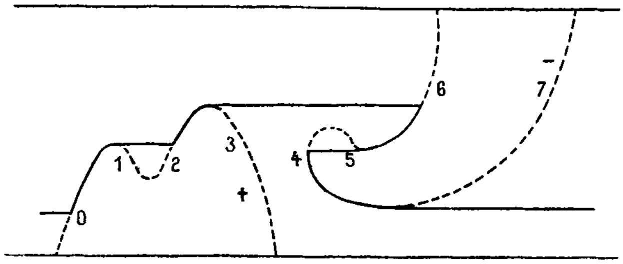
Ce troisième cas est à T^{-1} ce que le deuxième était à T. On construira donc le contour C'' (d'où on peut déduire C et C') en envisageant les courbes K par exemple comme opaques, tandis que les courbes L émettent des rayons lumineux horizontaux *dans un sens convenable.* La limite de l'ombre sera le contour C''.

§ 13.

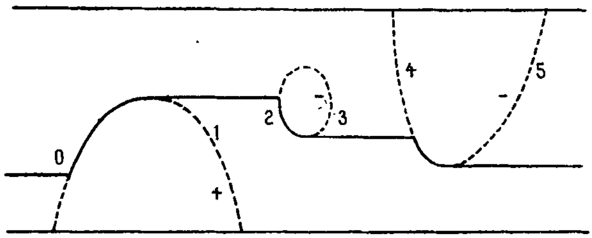
Explication des figures.



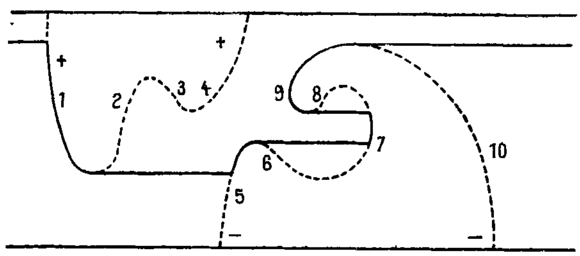
(*Fig. 5*).



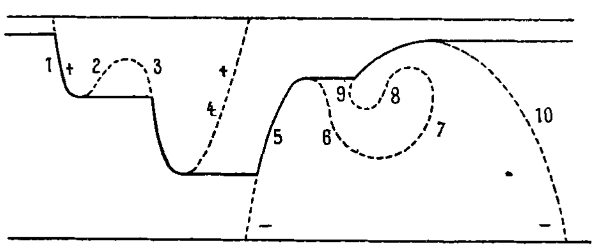
(*Fig. 6*).



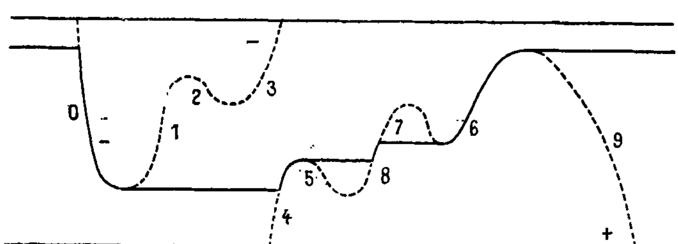
(*Fig. 7*).



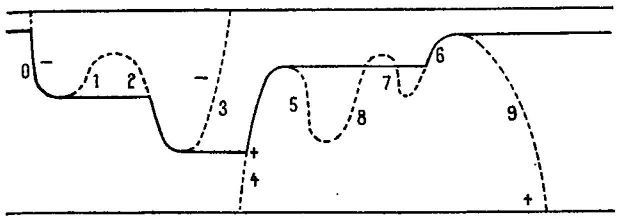
(*Fig. 8*).



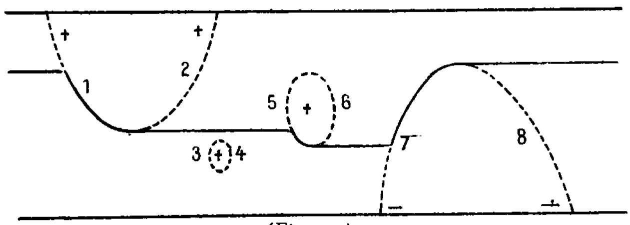
(*Fig. 9*).



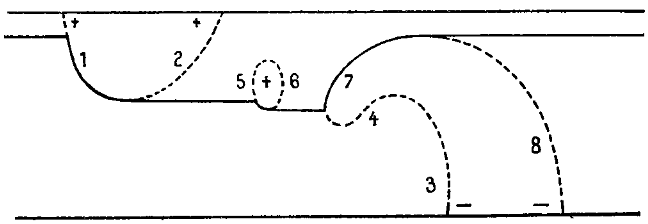
(*Fig. 10*).



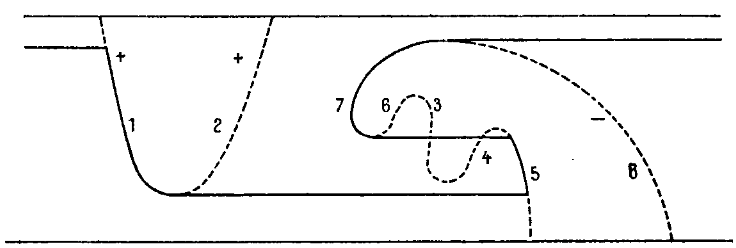
(*Fig.* 11).



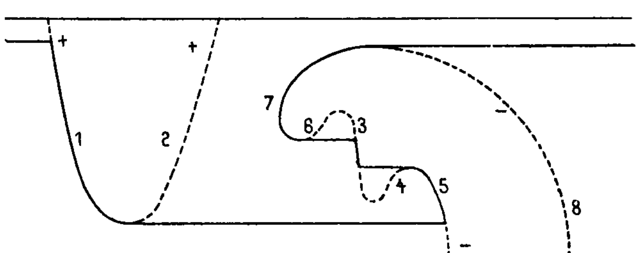
(*Fig.* 12).



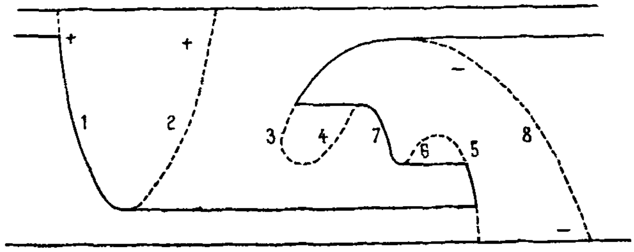
(*Fig.* 13).



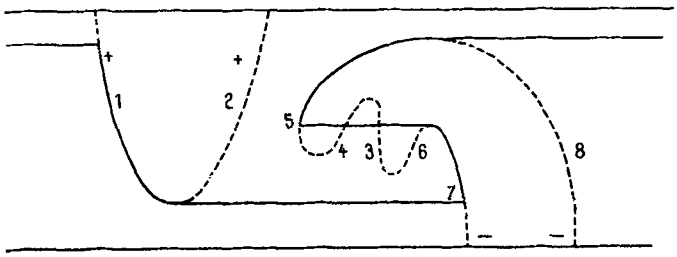
(*Fig.* 14).



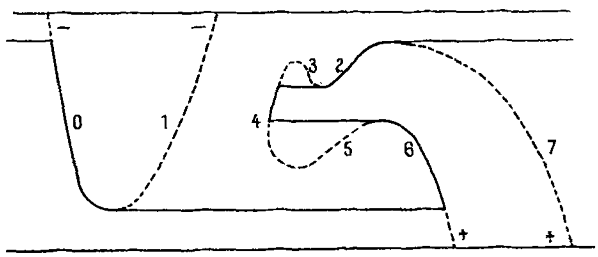
(*Fig.* 15).



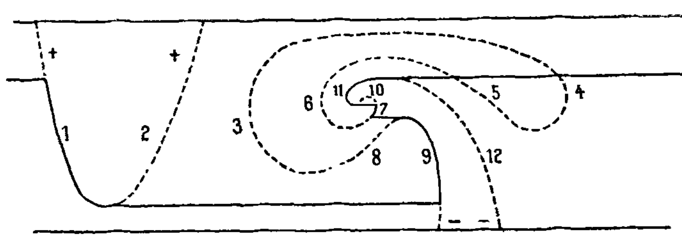
(Fig. 16).



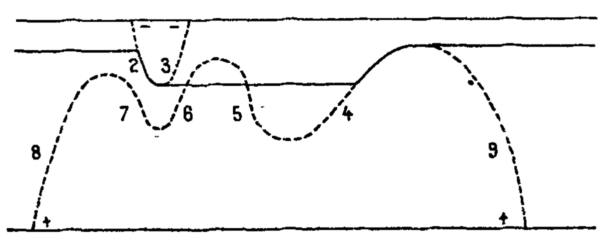
(Fig. 17).



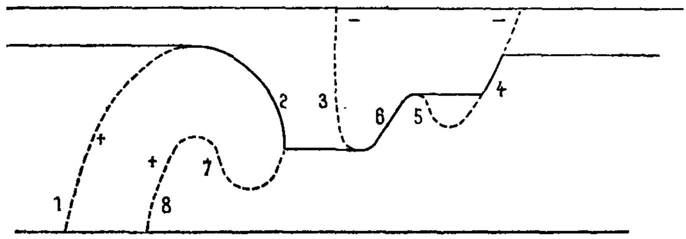
(Fig. 18).



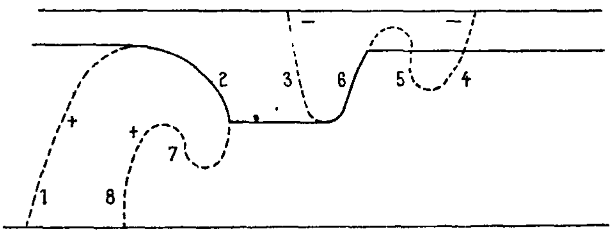
(Fig. 19).



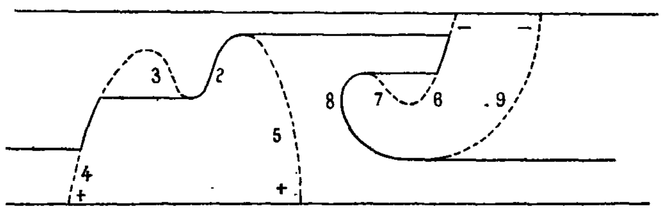
(Fig. 20).



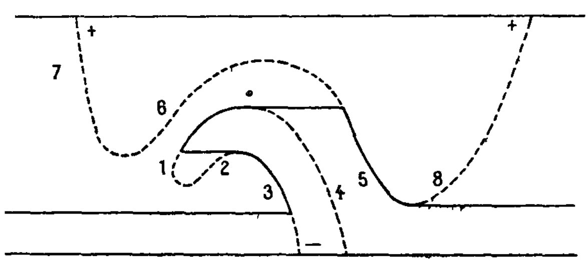
(Fig. 21).



(Fig. 22).



(Fig. 23).



(Fig. 24).

Outre les trois cas examinés dans le § précédent et qui présentent un certain caractère de généralité, j'ai étudié un grand nombre de cas particuliers et je suis toujours arrivé à former les contours C, C', C'', C'''. Je ne puis songer à les reproduire ici tous; j'en donne quelques exemples dans les figures ci-jointes qui nécessitent quelques explications.

Je m'y suis servi de l'image rectifiée; on sait que sur cette image les courbes se reproduisent périodiquement, puisqu'on retrouve les mêmes figures quand y se change en $y + 2\pi$; *je n'ai représenté qu'une période,* et il est aisé de suppléer aux autres.

Le contour représenté sur chaque figure est le contour C'', formé d'arcs $X = x$ et d'arcs $x = c$ représentés par des segments horizontaux. Les horizontales extrêmes $x = a$ et $x = b$ sont en trait plein *ainsi que le contour* C''; au contraire, la portion des courbes $X = x$ qui ne fait pas partie de C'' est en trait pointillé. Le chiffre qui se trouve à côté de chaque branche $X = x$ est son numéro. A côté de chaque courbe $X = x$ se trouve le signe $+$ ou le signe $-$ suivant qu'elle est positive ou négative.

Il est aisé de vérifier sur chaque figure que les six conditions du § 8 sont satisfaites; en ce qui concerne la première, on coupera par une horizontale quelconque, et on obtiendra ainsi une suite de numéros dans un certain ordre, en ne tenant compte que des branches coupées par cette horizontale; on verra ensuite que si l'on trace une courbe qui va couper l'horizontale aux points d'intersection en suivant l'ordre numérique de ces numéros, cette courbe ne se recoupe pas elle même.

En ce qui concerne la seconde, on constatera, par exemple sur la figure 14, qu'au sommet 63 se raccordent les branches 6 et 3, mais que le sommet 45 étant d'altitude plus basse, l'horizontale du sommet 63 ne rencontre pas les branches 4 et 5 de sorte qu'à ce niveau les numéros 6 et 3 sont consécutifs.

Pour la 3[e], on verra sur la figure 8, par exemple, que le fond 98, qui est inverse, est impair, tandis que le sommet 87, qui est inverse, est pair.

Je n'insisterai ni sur la 4[e] ni sur la 5[e] dont la vérification est aisée. Pour la 6[e], nous prendrons pour exemple la figure 21; nous voyons que les branches 8 et 7 sont positives, et les branches 3, 6, 5, 4 négatives; le rang des deux premières est plus petit; mais, comme ce sont les branches dont le numéro est le plus grand (et le rang le plus petit) qui sont positives, la condition est remplie.

Nous supposerons notre contour parcouru de gauche à droite; dans ces conditions les arcs $X = x$ qui font partie de C'', et les arcs $x = c$ de ce même contour, ou plutôt les arcs $X = c$ correspondants, sont tous définis et de même signe à savoir:

positifs sur les figures 5 à 7, 10 à 11, 18, 20, 23;
négatifs sur les figures 8 à 9, 12 à 17, 19, 21 à 22, 24.

On voit en effet sur la figure 5, par exemple, que les branches $X = x$ positives sont parcourues en montant et les branches négatives en descendant.

D'autre part, les arcs $x = c$, ou plutôt les arcs $X = c$ correspondants sont tous définis; considérons par exemple la figure 5, nous y voyons trois horizontales; la première, que j'appellerai 12, va de la branche 1 à la branche 2, la seconde de 3 à 4, la troisième part de la branche 5, et si on la prolongeait elle irait à une branche numérotée 6 (qui n'est pas représentée sur la figure), qui différerait d'une période de la branche numérotée 0, que l'on voit sur la figure; cette horizontale est arrêtée en A sur la figure, mais il faudrait la compléter par un segment horizontal qui différerait d'une période de celui qui est représenté sur la figure et qui va du point B à la branche 0. Toutes ces horizontales correspondent à des arcs élémentaires et par conséquent définis, puisque les numéros de leurs extrémités sont consécutifs. Il en serait encore de même pour la figure 8, par exemple pour l'horizontale 25, car les numéros 2 et 5 sont consécutifs au niveau de cette horizontale qui ne coupe pas les branches 3 et 4.

Considérons maintenant sur la figure 9, l'horizontale 69; si on la prolonge, elle coupe certaines branches $X = x$, mais aucun point d'intersection ne se trouve entre 6 et 9; les *rangs* des extrémités sont donc consécutifs au niveau considéré; l'arc correspondant est donc encore défini. Sur la figure 19, l'horizontale 10.13 qui va de la branche 10 à une branche 13, différant d'une période de la branche 1, correspond encore à un arc défini; en effet entre les extrémités 10 et 13 se trouvent les points d'intersection 5 et 4, mais leurs numéros ne sont pas compris entre 10 et 13; il en résulte que l'arc $X = c$ correspondant ne coupe pas sa corde (sur l'image rectifiée).

Il reste à déterminer le signe de ces divers arcs. Je prendrai pour exemple la figure 8; l'arc 25 est négatif parce qu'il est parcouru de gauche à droite, et que 2 est pair et < 5; 67 est négatif parce qu'il est parcouru vers la droite, et que 6 est pair et < 7; 78 est négatif parce qu'il est parcouru vers la *gauche* et que 7 est *impair* et < 8; enfin 10.11 est négatif pour les mêmes raisons que 25 et 67.

Les figures 5 à 7 correspondent au 1^er^ cas particulier du § 12 (distribution normale); les figures 8 et 9 au 3^e^ cas du § 12; on y reconnait aisément les contours d'ombre définis dans ce §; les figures 10, 11 et 20 correspondent au 2^e^ cas du § 12; les figures 10 et 11 se déduisent de 8 et 9 en passant de T à la transformation inverse T^{-1}. Enfin, les figures 12 et 13 montrent comment les contours d'ombre du § 12 doivent être modifiés quand interviennent des *iles*, c'est-à-dire des courbes $X = x$ fermées au sens étroit.

Paris, 7 mars 1912.

H. POINCARÉ.

TABLE DES MATIÈRES.