POURQUOI L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

1. — L'Analysis Situs et le Continu.

Les géomètres distinguent d'ordinaire deux sortes de géométries, qu'ils qualifient la première de métrique et la seconde de projective; la géométrie métrique est fondée sur la notion de distance; deux figures y sont regardées comme équivalentes, lorsqu'elles sont « égales » au sens que les mathématiciens donnent à ce mot; la géométrie projective est fondée sur la notion de ligne droite. Pour que deux figures y soient considérées comme équivalentes, il n'est pas nécessaire qu'elles soient égales, il suffit qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une transformation projective, c'est-à-dire que l'une soit la perspective de l'autre. On a souvent appelé ce second corps de doctrine, la géométrie qualitative; elle l'est en effet si on l'oppose à la première, il est clair que la mesure, que la quantité y jouent un rôle moins important. Elle ne l'est pas entièrement cependant. Le fait pour une ligne d'être droite n'est pas purement qualitatif; on ne pourrait s'assurer qu'une ligne est droite sans faire des mesures, ou sans faire glisser sur cette ligne un instrument appelé règle qui est une sorte d'instrument de mesure.

Mais il est une troisième géométrie d'où la quantité est complètement bannie et qui est purement qualitative; c'est l'*Analysis Situs*. Dans cette discipline, deux figures sont équivalentes toutes les fois qu'on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue, quelle que soit d'ailleurs la loi de cette déformation pourvu qu'elle respecte la continuité. Ainsi un cercle est équivalent à une ellipse ou même à une courbe fermée quelconque, mais elle n'est pas équivalente à un segment de droite parce que ce segment n'est pas fermé; une sphère est équivalente à une surface convexe quelconque; elle ne l'est pas à un tore parce que dans un tore il y a un trou et que dans une sphère il n'y en a pas. Supposons un modèle quelconque et la copie de ce même modèle exécutée par un dessinateur maladroit; les proportions sont altérées, les droites tracées d'une main tremblante ont subi de fâcheuses déviations et présentent des courbures malencontreuses. Du point de vue de la géométrie métrique, de celui même de la géométrie projective, les deux figures ne sont pas équivalentes; elles le sont au contraire du point de vue de l'Analysis Situs.

L'Analysis Situs est une science très importante pour le géomètre; elle donne lieu à une série de théorèmes, aussi bien enchaînés que ceux d'Euclide; et c'est sur cet ensemble de propositions que Riemann a construit une des théories les plus remarquables et les plus abstraites de l'analyse pure. Je citerai deux de ces théorèmes pour en faire comprendre la nature : deux courbes fermées planes se coupent en un nombre pair de points; si un polyèdre est convexe, c'est-à-dire si on ne peut tracer une courbe fermée sur sa surface sans la couper en deux, le nombre des arêtes est égal à celui des sommets, plus celui des faces, moins deux; et cela reste vrai quand les faces et les arêtes de ce polyèdre sont courbes.

Et voici ce qui fait pour nous l'intérêt de cette Analysis Situs; c'est que c'est là qu'intervient vraiment l'intuition géométrique. Quand, dans un théorème de géométrie métrique, on fait appel à cette intuition, c'est parce qu'il est impossible d'étudier les propriétés métriques d'une figure en faisant abstraction de ses propriétés qualitatives, c'est-à-dire de celles qui sont l'objet propre de l'Analysis Situs. On a dit souvent que la géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites. Ce n'est pas là une boutade, c'est une vérité qui mérite qu'on y réfléchisse. Mais qu'est-ce qu'une figure mal faite; c'est celle que peut exécuter le dessinateur maladroit dont nous parlions tout à l'heure; il altère les proportions plus ou moins grossièrement; ses lignes droites ont des zigzags inquiétants; ses cercles présentent des bosses disgracieuses; tout cela ne fait rien, cela ne troublera nullement le géomètre, cela ne l'empêchera pas de bien raisonner.

Mais il ne faut pas que l'artiste inexpérimenté représente une courbe fermée par une courbe ouverte, trois lignes qui se coupent en un même point, par trois lignes qui n'aient aucun point commun, une surface trouée par une surface sans trou. Alors on ne pourrait plus se servir de sa figure et le raisonnement deviendrait impossible. L'intuition n'aurait pas été gênée par les défauts de dessin qui n'intéressaient que la géométrie métrique ou projective; elle deviendra impossible dès que ces défauts se rapporteront à l'Analysis Situs.

Cette observation très simple nous montre le véritable rôle de l'intuition géométrique; c'est pour favoriser cette intuition que le géomètre a besoin de dessiner des figures, ou tout au moins de se les représenter mentalement. Or s'il fait bon marché des propriétés métriques ou projectives de ces figures, s'il s'attache seulement à leurs propriétés purement qualitatives, c'est que c'est là seulement que l'intuition géométrique intervient véritablement. Non que je veuille dire que la géométrie métrique repose sur la logique pure, qu'il n'y intervienne aucune vérité intuitive; mais ce sont des intuitions d'une autre nature, analogues à celles qui jouent le rôle essentiel en arithmétique et en algèbre.

La proposition fondamentale de l'Analysis Situs, c'est que l'espace est un continu à trois dimensions. Quelle est l'origine de cette proposition, c'est ce que j'ai examiné ailleurs, mais d'une façon très succincte et il ne me semble pas inutile d'y revenir avec quelques détails afin d'éclaircir certains points.

L'espace est relatif; je veux dire par là, non seulement que nous pourrions être transportés dans une autre région de l'espace sans nous en apercevoir (et c'est effectivement ce qui arrive puisque nous ne nous apercevons pas de la translation de la Terre), non seulement que toutes les dimensions des objets pourraient être augmentées dans une même proportion, sans que nous puissions le savoir, pourvu que nos instruments de mesure participent à cet agrandissement; mais je veux dire encore que l'espace pourrait être déformé suivant une loi arbitraire pourvu que nos instruments de mesure soient déformés précisément d'après la même loi.

Cette déformation pourrait être quelconque, elle devrait cependant être continue, c'est-à-dire être de celles qui transforment une figure en une autre figure équivalente au point de vue de l'Analysis Situs. L'espace, considéré indépendamment de nos instruments de mesure, n'a donc ni propriété métrique, ni propriété projective; il n'a que des propriétés topologiques (c'est-à-dire de celles qu'étudie l'Analysis Situs). Il est *amorphe*, c'est-à-dire qu'il ne diffère pas de celui qu'on en déduirait par une déformation continue quelconque. Je m'explique en employant le langage mathématique Voici deux espaces E et E'; le point M de E correspond au point M' de E'; le point M a pour coordonnées rectangulaires x, y et z; le point M' a pour coordonnées rectangulaires trois fonctions continues quelconque de x, d'y et de z. Ces deux espaces ne diffèrent pas au point de vue qui nous occupe.

Comment l'intervention de nos instruments de mesure, et en particulier des corps solides donne à l'esprit l'occasion de déterminer et d'organiser plus complètement cet espace amorphe; comment elle permet à la géométrie projective d'y tracer un réseau de lignes droites, à la géométrie métrique de mesurer les distances de ses points; quel rôle essentiel joue dans ce processus la notion fondamentale de groupe, c'est ce que j'ai expliqué longuement ailleurs. Je regarde tous ces points comme acquis et je n'ai pas à y revenir.

Notre seul objet ici est l'espace amorphe qu'étudie l'Analysis Situs, le seul espace qui soit indépendant de nos instruments de mesure, et sa propriété fondamentale, j'allais dire sa seule propriété, c'est d'être un continu à trois dimensions.

2. — Le Continu et les Coupures.

Mais qu'est-ce qu'un continu à n dimensions; en quoi diffère-t-il d'un continu dont le nombre des dimensions est plus grand ou plus petit? Rappelons d'abord quelques résultats obtenus récemment par les élèves de Cantor. Il est possible de faire correspondre un à un les points d'une droite à ceux d'un plan, ou, plus généralement, ceux d'un continu à n dimensions à ceux d'un continu à p dimensions. Ceci est possible, pourvu qu'on ne s'astreigne pas à la condition qu'à deux points infiniment voisins de la droite correspondent deux points infiniment voisins du plan, c'est-à-dire à la condition de continuité.

On peut donc *déformer* le plan de façon à obtenir une droite, pourvu que cette déformation ne soit pas continue. Cela serait impossible au contraire avec une déformation continue. Ainsi la question du nombre des dimensions est intimement liée à la notion de continuité et elle n'aurait aucun sens pour celui qui voudrait faire abstraction de cette notion.

Pour définir le continu à n dimensions nous avons d'abord la définition analytique; un continu à n dimensions est un ensemble de n coordonnées, c'est-à-dire un ensemble de n quantités susceptibles de varier *indépendamment* l'une de l'autre et de prendre toutes les valeurs réelles satisfaisant à certaines inégalités. Cette définition, irréprochable au point de vue mathématique, ne saurait pourtant nous satisfaire entièrement. Dans un continu les diverses coordonnées ne sont pas pour ainsi dire juxtaposées les unes aux autres, elles sont liées entre elles de façon à former les divers aspects d'un tout. A chaque instant en étudiant l'espace, nous faisons ce qu'on appelle un changement de coordonnées, par exemple nous faisons un changement d'axes rectangulaires; ou bien nous passons aux coordonnées curvilignes. En étudiant un autre continu, nous faisons aussi des changements de coordonnées, c'est-à-dire que nous remplaçons nos n coordonnées par n fonctions continues quelconques de ces n coordonnées. Pour nous qui tirons la notion du continu à n dimensions, non de la définition analytique précitée, mais de je ne sais quelle source plus profonde, cette opération est toute naturelle; nous sentons qu'elle n'altère pas ce qu'il y a d'essentiel dans le continu. Pour ceux, au contraire, qui ne connaîtraient le continu que par la définition analytique, l'opération serait licite sans doute, mais baroque et mal justifiée.

Enfin cette définition fait bon marché de l'origine intuitive de la notion de continu, et de toutes les richesses que recèle cette notion. Elle rentre dans le type de ces définitions qui sont devenues si fréquentes dans la Mathématique, depuis qu'on tend à « arithmétiser » cette science. Ces définitions, irréprochables, nous l'avons dit, au point de vue mathématique, ne sauraient satisfaire le philosophe. Elles remplacent l'objet à définir et la notion intuitive de cet objet par une construction faite avec des matériaux plus simples; on voit bien alors qu'on peut effectivement faire cette construction avec ces matériaux, mais on voit en même temps qu'on pourrait en faire tout aussi bien beaucoup d'autres; ce qu'elle ne laisse pas voir c'est la raison profonde pour laquelle on a assemblé ces matériaux de cette façon et non pas d'une autre. Je ne veux pas dire que cette « arithmétisation » des mathématiques soit une mauvaise chose, je dis qu'elle n'est pas tout.

Je fonderai la détermination du nombre des dimensions sur la notion de *coupure*. Envisageons d'abord une courbe fermée, c'est-à-dire un continu à *une* dimension; si, sur cette courbe nous marquons deux points quelconques par lesquels nous nous interdirons de passer, la courbe se trouvera découpée en deux parties, et il deviendra impossible de passer de l'une à l'autre en restant sur la courbe et sans passer par les points interdits. Soit au contraire une surface fermée, constituant un continu à *deux* dimensions; nous pourrons marquer sur cette surface, un, deux, un nombre quelconque de points interdits; la surface ne sera pas pour cela décomposée en deux parties, il restera possible d'aller d'un point à l'autre de cette surface sans rencontrer d'obstacle, parce qu'on pourra toujours *tourner* autour des points interdits.

Mais si nous traçons sur la surface une ou plusieurs courbes fermées et si nous les considérons comme des *coupures* que nous nous interdirons de franchir, la surface pourra se trouver découpée en plusieurs parties.

Venons maintenant au cas de l'espace; on ne peut le décomposer en plusieurs parties, ni en interdisant de passer par certains points, ni en interdisant de franchir certaines lignes; on pourrait toujours tourner ces obstacles. Il faudra interdire de franchir certaines surfaces, c'est-à-dire certaines coupures à deux dimensions; et c'est pour cela que nous disons que l'espace a trois dimensions.

Nous savons maintenant ce que c'est qu'un continu à n dimensions. Un continu a n dimensions quand on peut le décomposer en plusieurs parties en y pratiquant une ou plusieurs coupures qui soient elles-mêmes des continus à n-1 dimensions. Le continu à n dimensions se trouve ainsi défini par le continu à n-1 dimensions; c'est une définition par récurrence.

Ce qui me donne confiance dans cette définition, ce qui me montre que c'est bien ainsi que les choses se présentent naturellement à l'esprit, c'est d'abord que beaucoup d'auteurs de traités élémentaires, qui n'y entendaient pas malice, ont fait au début de leurs ouvrages quelque chose d'analogue. Ils définissent les volumes comme des portions de l'espace, les surfaces comme les frontières des volumes, les lignes comme celles des surfaces, les points comme celles des lignes; après quoi ils s'arrêtent et l'analogie est évidente. C'est ensuite que dans les autres parties de l'Analysis Situs, nous retrouvons le rôle important de la coupure; c'est sur la coupure que tout repose. Qu'est-ce qui, d'après Riemann, distingue, par exemple, le tore de la sphère; c'est qu'on ne peut pas tracer sur une sphère une courbe fermée sans couper cette surface en deux; tandis qu'il y a des courbes fermées qui ne coupent pas le tore en deux, et qu'il faut y pratiquer deux coupures fermées n'ayant aucun point commun pour être sûr de l'avoir divisé.

Il reste encore un point à traiter. Les continus dont nous venons de parler sont des continus mathématiques, chacun de leurs points est un individu absolument distinct des autres et, d'ailleurs, absolument indivisible. Les continus que nous révèlent directement nos sens, et que j'ai appelés les continus physiques, sont tout différents. La loi de ces continus est la loi de Fechner, que je dépouillerai du pompeux appareil mathématique qui l'entoure d'ordinaire pour la réduire au simple énoncé des données expérimentales sur lesquelles elle repose. On sait distinguer au jugé, un poids de 10 grammes d'un poids de 12 grammes; on ne pourrait distinguer un poids de 11 grammes, ni de celui de 10 grammes, ni de celui de 12 grammes. Plus généralement il peut y avoir deux ensembles de sensations que nous distinguons l'un de l'autre, sans que nous puissions distinguer ni l'un, ni l'autre d'un même troisième. Cela posé, nous pouvons imaginer une chaîne continue d'ensembles de sensations de telle sorte que chacun d'eux ne se distingue pas du suivant, bien que les deux extrémités de la chaîne se discernent aisément; ce sera là un continu physique à une dimension. Nous pouvons également imaginer des continus physiques plus complexes. Les *éléments* de ces continus physiques seront encore des ensembles de sensations (mais je préfère employer le mot élément qui est plus simple). Quand dirons-nous alors qu'un système S de semblables éléments est un continu physique? C'est quand on peut considérer deux quelconques de ses éléments comme les extrémités d'une chaîne continue analogue à celle dont je viens de parler et dont tous les éléments appartiennent à S. C'est ainsi qu'une surface est continue, si on peut joindre deux quelconques de ses points par une ligne continue qui ne sorte pas de la surface.

Pouvons-nous étendre la notion de coupure aux continus physiques et déterminer par là le nombre de leurs dimensions? Évidemment oui. Supposons que l'on s'interdise certains éléments de S, et tous ceux qu'on n'en peut discerner. Ces éléments interdits pourront d'ailleurs être en nombre fini, ou former par leur réunion un ou plusieurs continus. L'ensemble de ces éléments interdits constituera une *coupure*; et il pourra se faire qu'après avoir pratiqué cette coupure, on ait partagé le continu S en plusieurs autres, de façon qu'il ne soit plus possible de passer d'un élément quelconque de S à un autre élément quelconque par une chaîne continue, aucun élément de cette chaîne n'étant indiscernable d'aucun élément de la coupure.

Alors un continu physique que l'on peut découper ainsi en s'interdisant un nombre fini d'éléments aura *une* dimension; un continu physique aura n dimensions, si on peut le découper en y pratiquant des coupures qui soient elles-mêmes des continus physiques à n-1 dimensions.

3. — L'Espace et les Sens.

La question semble résolue; nous n'avons, semble-t-il, qu'à appliquer cette règle, soit au continu physique qui est l'image grossière de l'espace, soit au continu mathématique correspondant qui en est l'image épurée et qui est l'espace du géomètre. C'est là une illusion; cela irait bien si le continu physique d'où nous tirons l'espace nous était directement donné par les sens, mais il est loin d'en être ainsi.

Voyons, en effet, comment on peut, de la masse de nos sensations, déduire un continu physique. Chaque élément d'un continu physique est un ensemble de sensations; et le plus simple est de considérer d'abord un ensemble de sensations simultanées, un état de conscience. Mais chacun de nos états de conscience est quelque chose d'excessivement complexe, si bien qu'on ne peut espérer voir jamais deux états de conscience devenir indiscernables et cependant pour construire un continu physique, il est essentiel, d'après ce qui précède, que deux de ses éléments puissent, dans certains cas, être regardés comme indiscernables. Or il n'arrivera jamais que nous puissions dire : je ne puis discerner mon état d'âme actuel de mon état d'âme d'avant-hier à pareille heure.

Il faut donc que par une opération active de l'esprit, nous convenions de considérer comme identiques deux états de conscience en faisant *abstraction* de leurs différences. Nous pourrons, par exemple, et c'est le plus simple, faire abstraction des données de certains sens. J'ai dit que je ne pouvais distinguer un poids de 10 grammes d'un poids de 11 grammes; il est probable pourtant que si j'ai jamais fait l'expérience, la sensation de pression causée par le poids de 10 grammes était accompagnée de sensations olfactives ou auditives diverses, que quand le poids de 10 grammes a été remplacé par celui de 11, ces sensations diverses avaient varié; c'est parce que je fais abstraction de ces sensations étrangères, que je puis dire que les deux états de conscience étaient indiscernables.

On peut faire d'autres conventions plus compliquées; on peut aussi envisager comme éléments de notre continu, non seulement des ensembles de sensations simultanées, mais des ensembles de sensations successives, des *suites* de sensations. Il faudra ensuite faire la convention fondamentale et dire quels sont les caractères communs que doivent posséder deux éléments du continu (qu'ils soient deux ensembles de sensations simultanées ou successives), pour qu'on doive les regarder comme identiques.

Ainsi, pour la définition d'un continu physique, il faut faire un double choix : 1° choisir les ensembles de sensations simultanées ou successives qui doivent servir d'éléments à ce continu; 2° choisir la convention fondamentale qui définira les cas où deux éléments doivent être regardés comme identiques.

Comment faut-il faire ce double choix pour obtenir l'espace? Pouvons-nous nous contenter d'envisager un ensemble de sensations simultanées ou bien faut-il envisager une suite de sensations. Pouvons-nous, en particulier, nous contenter de la convention fondamentale la plus simple, la plus naturelle, qui consisterait à faire abstraction des données de certains sens? Non.

Une semblable abstraction est impossible, nous ne pouvons pas choisir parmi nos sens ceux qui nous donneront tout l'espace et ne nous donneront que cela; il n'en est pas un qui puisse nous donner l'espace sans le secours des autres; il n'en est pas un non plus qui ne nous donne une foule de choses qui n'ont rien à faire avec l'espace.

Si nous analysons, par exemple les données du toucher proprement dit, voici ce que nous apercevons; l'expérience nous montre que si l'on touche la peau avec deux pointes, la conscience distingue ces deux pointes si elles sont suffisamment éloignées l'une de l'autre et cesse de les distinguer si elles sont très rapprochées; la distance minima qui permet de les discerner varie d'ailleurs suivant les régions du corps; on dit d'ordinaire que la peau est divisée en départements, dont chacun est le domaine d'un même nerf sensitif; que si les deux pointes tombent dans un même département, un seul nerf est ébranlé et nous ne percevons qu'une pointe; mais que nous en percevons deux au contraire si elles tombent dans deux départements et affectent, par conséquent. deux nerfs. Cela n'est pas entièrement satisfaisant; nous ne retrouverions pas ainsi les caractères du continu physique; supposons que l'on déplace les deux pointes, leur distance, d'ailleurs très petite, étant maintenue constante. Cette distance étant très petite, nous aurons des chances pour qu'elles tombent dans le même département et pour n'avoir qu'une perception unique; mais si nous les déplaçons petit à petit sans changer leur distance, il devra arriver un moment où l'une d'elles se trouvera hors du département et où l'autre n'en sera pas encore sortie. A ce moment on devrait sentir deux pointes; or ce n'est pas ce que l'on observe; nous n'obtiendrions pas ainsi la notion d'un continu physique, mais celle d'un ensemble discret formé d'autant d'individus distincts qu'il y aurait de départements. Il vaut mieux admettre que le contact d'une pointe affecte, non seulement le nerf le plus rapproché, mais aussi les nerfs voisins, et cela avec une intensité qui décroît quand la distance augmente. Supposons alors que l'on compare les effets du contact de deux pointes; si la distance des deux pointes est faible, les mêmes nerfs sont affectés; l'intensité de l'excitation d'un même nerf par l'une et par l'autre pointe sera sans doute différente, mais cette différence sera trop faible pour être discernée, d'après la règle générale de Fechner. Si un nerf est affecté par la pointe A, sans l'être par la pointe B, il ne le sera que très peu par la pointe A et l'excitation sera au-dessous du « seuil de la conscience ». Les effets des deux pointes seront donc indiscernables.

Nous avons là alors tout ce qu'il faut pour construire un continu physique, nous n'avons qu'à promener deux pointes sur la surface de la peau et à noter les cas où notre conscience les distingue. Nous avons fait abstraction (et c'est là ce que j'appelais plus haut notre convention fondamentale) d'une foule de circonstances, de l'intensité de l'ébranlement de chaque filet sensitif, de la pression plus ou moins grande exercée sur la peau par la pointe, de la nature du contact; toutes ces circonstances nous sont révélées par le toucher, mais nous les avons éliminées pour ne conserver que celles dont le caractère est géométrique. Avons-nous ainsi l'espace? Non, d'abord le continu ainsi construit n'a que deux dimensions, comme la surface de la peau elle-même; ensuite nous savons bien que notre peau est mobile, qu'un même point de la peau ne correspond pas toujours à un même point de l'espace; que la distance de deux points de notre peau varie quand notre corps se déforme. C'est sans doute ainsi que les mollusques conçoivent l'espace, mais cela n'a aucun rapport avec le nôtre.

Pour la vue, c'est la même chose; deux faisceaux de lumière frappant deux points de la rétine, nous donneront l'impression de deux taches lumineuses ou d'une seule, selon que ces deux points seront plus ou moins distants. Nous avons l'équivalent de nos deux pointes de tout à l'heure; nous pouvons nous en servir pour construire un continu physique en faisant abstraction de la couleur et de l'intensité de la lumière; ce continu physique aura deux dimensions comme la surface de la rétine. On introduira la troisième dimension en faisant intervenir la convergence des yeux dans la vision binoculaire, et voilà ce que l'on a appelé l'espace visuel. Il est supérieur à l'espace tactile, d'abord parce qu'avec un peu de bonne volonté, on peut lui donner trois dimensions, et ensuite parce que la rétine est mobile sans doute, mais à la façon d'un corps solide, tandis que la peau peut se plier dans tous les sens. On est alors tenté de dire que c'est là le vrai espace où nous cherchons à localiser toutes nos autres sensations. Cela ne va pas encore; non seulement l'œil est mobile, de sorte que, à un même point de la rétine, à un même degré de convergence des yeux, ne correspond pas toujours un même point de l'espace; mais on n'explique pas pourquoi on a introduit une troisième dimension, si manifestement hétérogène aux deux autres; ni pourquoi la géométrie des aveugles est la même que la nôtre.

Si l'on veut combiner l'espace visuel avec l'espace tactile, on va avoir 5 dimensions, au lieu de 3 ou de 2; et il restera à expliquer par quel processus ces 5 dimensions se réduisent à 3; et le nombre des dimensions sera encore accru si l'on veut faire entrer d'autres sens dans la combinaison.

Il reste à expliquer en un mot pourquoi l'espace tactile et l'espace visuel sont un seul et même espace.

4. — L'Espace et les Mouvements.

Il semble donc qu'on ne puisse construire l'espace en envisageant des ensembles de sensations simultanées, qu'il faut considérer des suites de sensations. Il faut toujours en revenir à ce que j'ai dit autrefois. Pourquoi certains changements nous apparaissent-ils comme des changements de position et d'autres comme des changements d'état sans caractère géométrique? Pour cela nous devons distinguer d'abord les changements externes qui sont involontaires et ne sont pas accompagnés de sensations musculaires et les changements internes qui sont les mouvements de notre corps et que nous distinguons des autres parce qu'ils sont volontaires et accompagnés de sensations musculaires. Un changement externe peut être *corrigé* par un changement interne, par exemple quand nous suivons de l'œil un objet mobile de façon à ramener toujours son image en un même point de la rétine. Un changement externe susceptible d'une semblable correction est un changement de position; s'il n'en est pas susceptible, il est un changement d'état.

Deux changements externes, qui au point de vue qualitatif sont tout à fait différents, sont regardés comme correspondant à un *même* changement de position s'ils peuvent être corrigés par un même changement interne. De même deux changements internes peuvent être constitués par des suites de sensations musculaires qui n'ont rien de commun et pourtant correspondre à un *même* changement de position, s'ils peuvent corriger un même changement externe. C'est ce que nous exprimons dans le langage ordinaire en disant qu'il y a plusieurs chemins pour aller d'un point à un autre.

Ce qui importe alors, ce sont les mouvements qu'il faut faire pour atteindre un objet déterminé, la conscience de ces mouvements n'étant autre chose pour nous que l'ensemble des sensations musculaires qui les accompagnent.

Cela posé, un certain objet se trouve au contact d'un de mes doigts, par exemple de l'index de la main droite; j'éprouve de ce fait une sensation tactile T; je reçois en même temps de cet objet les sensations visuelles V; l'objet s'éloigne, la sensation T s'évanouit, les sensations V sont remplacées par les sensations visuelles nouvelles V'; c'est là un changement externe. Je veux corriger en partie ce changement externe en rétablissant la sensation T, c'est-à-dire ramener mon index au contact de l'objet. Pour cela je dois exécuter certains mouvements qui se traduisent pour moi par une certaine suite de sensations musculaires S; cela je le sais, parce que de nombreuses expériences faites, soit par moi-même, soit par mes ancêtres, m'ont appris que quand la sensation T disparaissait, et que les sensations visuelles passaient de V à V', on pouvait rétablir la sensation T par les mouvements correspondant à la suite S. Je sais également que j'aurais pu obtenir le même résultat par d'autres mouvements se traduisant pour moi, non plus par la suite S, mais par une autre suite S′ ou S″.

Toutes ces suites de sensations musculaires S, S′, S″,... n'ont peut-être aucun élément commun, je les rapproche parce que je sais que les unes et les autres me permettent de rétablir la sensation T toutes les fois que les sensations V sont devenues V′. Dans notre langage habituel, à nous qui savons déjà la géométrie, nous dirons que les diverses suites de mouvements qui correspondent aux suites de sensations musculaires S, S′, S″, ont ceci de commun que, dans les unes comme dans les autres, la position initiale, ainsi que la position finale de mon index reste la même. Tout le reste peut différer.

Je suis ainsi conduit à ne pas distinguer ces diverses suites S, S′, S″..., à les regarder comme un individu unique. Je n'en distinguerai pas non plus les suites de sensations musculaires qui en diffèrent trop peu. J'aurai alors de quoi construire un continu physique et j'ai, en effet, choisi les éléments de ce continu qui sont des suites de sensations musculaires et je possède la « convention fondamentale » qui m'apprend dans quels cas deux de ces éléments doivent être regardés comme identiques et *c'est ce continu qui a trois dimensions.*

Mais ce n'est pas tout, nous venons de définir un continu qui est un véritable espace; c'est l'espace considéré comme décrit par un de mes doigts; mais j'ai plusieurs doigts, (et au point de vue qui m'occupe, tous les points de ma peau pourraient me servir de doigts.) Mes différents doigts vont-ils décrire le même espace? Oui, sans doute, mais qu'est-ce que cela veut dire? Cela implique un ensemble de propriétés qu'il ne serait pas aisé d'énoncer dans le langage ordinaire, mais que je puis tenter d'expliquer si on veut bien me permettre d'employer certains symboles. Je considère deux doigts que j'appellerai α et β; le doigt α sera, par exemple, l'index de la main droite dont nous nous sommes servis pour définir les suites S, S′, S″,..., nous écrirons alors :

$$S \equiv S' \pmod{\alpha}$$

et cela voudra dire que si les mouvements correspondant à S rétablissent la sensation tactile éprouvée par le doigt α, il en sera de même des mouvements correspondant à S′ et inversement. J'écrirai de même

$$S_1 \equiv S'_1 \pmod{\beta}$$

pour exprimer que si les mouvements correspondant à S_1 rétablissent la sensation tactile éprouvée par le doigt β, il en sera de même des mouvements correspondant à S'_1.

Cela posé, je suppose qu'il existe deux suites particulières de sensations musculaires s et s_1 qui seront définies de la façon suivante : je suppose que le doigt β éprouve une sensation tactile due au contact d'un objet; faisons les mouvements correspondant à s, cette sensation disparaîtra, mais, finalement, ce sera le doigt α qui éprouvera une sensation de contact; je sais par expérience que cela arrivera toutes les fois qu'avant ces mouvements, le doigt β sentait un contact; ou du moins presque toutes les fois (je dis *presque*, parce que cela exige pour réussir que l'objet n'ait pas bougé dans l'intervalle); dans notre langage ordinaire (qui serait plus clair pour nous, mais que je n'ose pas employer puisque je parle d'êtres qui ne savent pas encore la géométrie), nous dirions que les mouvements correspondant à s ont amené le doigt α à la place primitivement occupée par le doigt β. Pour s_1, ce sera le contraire, les mouvements correspondants amènent le doigt β à la place primitivement occupée par le doigt α.

Si ces deux suites s et s_1 existent, la relation

$$S \equiv S' \pmod{\alpha}$$

entraînera comme conséquence la relation :

$$s + S + s_1 \equiv s + S' + s_1 \pmod{\beta}$$

c'est ce dont on se convainc immédiatement si l'on se rappelle le sens de ces symboles et on en déduirait sans peine que les deux espaces, engendrés par α et par β, sont isomorphes et, en particulier, qu'ils ont le même nombre de dimensions.

Il n'en serait plus de même si les suites s et s_1 n'existaient pas. Supposons, en effet, qu'on ne puisse trouver une suite de mouvements telle qu'à une sensation de contact du doigt β avec un objet, elle fasse succéder une sensation de contact du doigt α avec ce même objet, et cela sinon à coup sûr, du moins presque à coup sûr, comment alors raisonnerions-nous? Nous dirions que le doigt β sent l'objet sans être au même point de l'espace, qu'il le sent à distance; autrement, toutes les fois que le doigt β sentirait l'objet, c'est qu'il serait en un même point A de l'espace; alors il devrait y avoir une suite de mouvements qui amèneraient le doigt α au point A; et comme l'objet est au point A, le doigt α devrait sentir l'objet et cela devrait réussir toujours. Si nous supposons donc qu'il n'y ait pas de suite de mouvements jouissant de cette propriété, il faut admettre que le doigt β sent le contact à distance, c'est-à-dire que le fait d'être senti par ce doigt ne suffit pas pour déterminer la position de l'objet dans l'espace, c'est-à-dire enfin, que l'espace doit posséder *plus* de dimensions que le continu physique engendré par le doigt β de la façon que nous avons dite.

Je suppose par exemple que l'espace ait quatre dimensions, et je désigne par x, y, z, t les quatres coordonnées; je suppose que le doigt β ressente le contact de l'objet, toutes les fois que les 3 coordonnées x, y, z sont les mêmes pour le doigt et l'objet, quelle que soit d'ailleurs la quatrième coordonnée; et d'autre part que le doigt α ressente le contact de l'objet, toutes les fois que les 3 coordonnées x, y, t sont les mêmes pour l'objet et ce doigt, quelle que soit d'ailleurs la coordonnée z. Dans ces conditions, appliquons nos règles pour la construction du continu physique engendré par β; nous lui trouverons 3 dimensions seulement, qui correspondront aux trois coordonnées x, y, z, la coordonnée t ne jouant aucun rôle. De même le continu physique engendré par α aurait 3 dimensions correspondant à x, y *et* t. Mais nous ne pourrions trouver une suite de mouvements correspondant à une suite de sensations musculaires s, telle que la sensation de contact pour α succède, à coup sûr, à la sensation de contact pour β.

Soient en effet, x_1, y_1, z_1, t_1 les coordonnées de l'objet, x_0, y_0, z_0, t_0 celles du doigt β avant le mouvement; x'_0, y'_0, z'_0, t'_0 celles du doigt α après le mouvement. Nous exprimerons que le doigt β ressent le contact avant le mouvement en écrivant :

$$(1)\ x_0 = x_1,\ y_0 = y_1,\ z_0 = z_1.$$

nous exprimerons que α ressent le contact après le mouvement en écrivant :

$$(2)\ x'_0 = x_1,\ y'_0 = y_1,\ t'_0 = t_1.$$

Pour que s existât, il faudrait que nous pussions choisir x_0, y_0, z_0, t_0; x'_0, y'_0, z'_0, t'_0 de telle façon que les relations (1) entraînassent les relations (2) quelles que fussent d'ailleurs x_1, y_1, z_1, t_1. Il est clair que cela est impossible. C'est précisément l'impossibilité de former s qui nous révélerait en pareil cas que l'espace aurait 4 dimensions et non pas 3 comme le continu physique engendré par β.

Et d'ailleurs nous observons effectivement quelque chose d'analogue si nous faisons intervenir le sens de la vue. Considérons un point de la rétine, nous pouvons lui faire jouer le même rôle qu'à nos doigts α ou β. Nous pouvons considérer la suite de mouvements nécessaires pour ramener l'image d'un objet en ce point γ de la rétine, ou la suite correspondante S de sensations musculaires; nous pouvons nous servir de cette suite pour définir un continu physique analogue à celui qui était engendré par α ou par β. *Ce continu n'aura que deux dimensions.* Mais nous ne pouvons construire une suite analogue à s, c'est-à-dire une suite de mouvements faisant succéder, à coup sûr, à la sensation visuelle ressentie au point γ la sensation tactile ressentie sur le doigt α. En d'autres termes, il ne suffit pas que nous constations que l'image de l'objet se fait en γ, pour que nous puissions déterminer les mouvements nécessaires pour amener notre doigt au contact de cet objet; il nous manque une donnée qui est la distance de l'objet. Et c'est pourquoi nous disons que la vue s'exerce à distance, et que l'espace a trois dimensions, une de plus que le continu engendré par γ.

Nous voyons par ce rapide exposé quels sont les faits expérimentaux qui nous ont conduits à attribuer trois dimensions à l'espace. En présence de ces faits, il nous était plus commode de lui en attribuer trois que quatre ou que deux; mais ce mot de commode n'est peut-être pas ici assez fort; un être qui aurait attribué à l'espace deux ou quatre dimensions se serait trouvé dans un monde fait comme le nôtre, en état d'infériorité dans la lutte pour la vie; qu'est-ce à dire en effet? qu'on me permette de reprendre mes symboles et, par exemple, les congruences

$$S \equiv S' \pmod{\alpha}$$

dont j'ai expliqué plus haut le sens. Attribuer deux dimensions à l'espace, ce serait admettre de pareilles congruences que nous autres n'admettons pas; on serait alors exposé à substituer aux mouvements S qui réussissent les mouvements S' qui ne réussiraient pas. Lui attribuer quatre dimensions, ce serait, au contraire, rejeter des congruences, que nous autres, admettons; on se priverait alors de la possibilité de substituer aux mouvements S d'autres mouvements S' qui réussiraient tout aussi bien et qui pourraient présenter, dans certaines circonstances, des avantages particuliers.

5. — L'Espace et la Nature.

Mais la question peut être posée à un tout autre point de vue. Nous nous sommes placés jusqu'ici à un point de vue purement subjectif, purement psychologique ou, si l'on veut, physiologique; nous n'avons envisagé que les rapports de l'espace avec nos sens. On pourrait se placer, au contraire, au point de vue de la physique et se demander s'il serait possible de localiser les phénomènes naturels dans un espace autre que le nôtre et, par exemple, dans un espace à deux ou à quatre dimensions. Les lois que nous révèle la physique s'expriment par des équations différentielles, et dans ces équations figurent les *trois* coordonnées de certains points matériels. Est-il impossible d'exprimer les mêmes lois par d'autres équations où figureraient, cette fois, d'autres points matériels ayant *quatre* coordonnées? Ou bien cela serait-il possible, mais les équations ainsi obtenues seraient-elles moins simples? Ou bien enfin, seraient-elles tout aussi simples et les rejetterions-nous simplement parce qu'elles choquent nos habitudes d'esprit.

Que voulons-nous dire quand nous parlons d'exprimer les *mêmes* lois par *d'autres* équations. Supposons deux mondes M et M'; nous pouvons établir entre les phénomènes qui se passent ou qui pourraient se passer dans ces deux mondes, une correspondance telle qu'à tout phénomène Φ du premier corresponde un phénomène parfaitement déterminé Φ' de l'autre qui en soit pour ainsi dire l'image. Alors, si je suppose que l'effet nécessaire du phénomène Φ, en vertu des lois qui régissent le monde M soit un certain phénomène Φ_1, et que l'effet nécessaire du phénomène Φ', image de Φ, en vertu des lois qui régissent le monde M', soit précisément l'image Φ'_1, du phénomène Φ_1, nous pourrons dire que les deux mondes obéissent aux *mêmes* lois. Peu nous importe la nature qualitative des phénomènes Φ et Φ', il nous suffit que le « parallélisme » soit possible.

Et, en effet, cette nature qualitative des phénomènes n'intéresse que nos sens, et nous sommes convenus de nous placer à un point de vue extra-psychologique, de faire abstraction, par conséquent, des données des sens et de ne faire attention qu'aux rapports mutuels des phénomènes. C'est là, en effet, ce que fait le physicien quand il substitue par exemple, aux gaz que nous révèle l'expérience, et qui nous procurent des sensations de pression et de chaleur, les gaz de la théorie cinétique, où l'on ne voit plus que des points matériels en mouvement, ou bien à la lumière de l'expérience, et aux sensations colorées qu'elle engendre, les vibrations du milieu éthéré.

Il nous suffira de considérer un cas simple, celui des phénomènes astronomiques et de la loi de Newton. Ce que nous observons, ce ne sont pas les coordonnées des astres, mais seulement leurs distances; l'expression naturelle des lois de leurs mouvements, ce sont donc des équations différentielles entre ces distances et le temps. Maintenant la distance de deux points de l'espace est une fonction connue et simple des coordonnées de ces deux points. Transformons nos équations différentielles en y substituant cette fonction à la place de chaque distance; nous aurons alors ces équations sous leur forme habituelle, forme où figurent les coordonnées mêmes des astres.

Mais nous aurions pu remplacer ces distances par d'autres fonctions et nous aurions obtenu ainsi d'autres formes de ces équations; toutes ces formes auraient été également légitimes au point de vue qui nous occupe, puisqu'elles auraient respecté le « parallélisme » entre les phénomènes. Représentons-nous les astres comme placés dans l'espace à quatre dimensions de telle façon que la position de chacun d'eux soit définie, non plus par trois, mais par quatre coordonnées; remplaçons ensuite dans nos équations la quantité que nous considérions jusqu'ici comme représentant la distance de deux astres par une fonction *quelconque* des huit coordonnées de ces deux astres; il n'est nullement nécessaire que cette fonction soit celle qui représente la distance de deux points dans l'espace ordinaire à quatre dimensions; elle peut être tout à fait quelconque puisque le « parallélisme » n'en sera pas altéré.

Nous obtiendrions ainsi une forme de nos équations où figureront les coordonnées des astres dans l'espace à quatre dimensions; ce sera une expression nouvelle des lois astronomiques fondée sur l'hypothèse d'un espace à quatre dimensions et cette expression ne sera pas illégitime puisque la condition de « parallélisme » est respectée. Seulement, il est clair que les équations ainsi obtenues seront beaucoup moins simples que nos équations habituelles.

Et il en serait sans doute de même, avec les autres lois de la Physique. Y a-t-il une raison générale pour qu'il en soit ainsi, pour que dans toutes les parties de la Physique, ce soit l'hypothèse des trois dimensions qui donne aux équations leur forme la plus simple? Cette raison a-t-elle quelque rapport avec celle qui a été développée dans la première partie de ce travail et qui obligeait impérieusement les êtres vivants à croire aux trois dimensions ou à faire comme s'ils y croyaient sous peine d'infériorité dans la lutte pour la vie?

Ici, une courte digression est nécessaire. Revenons, pour un instant, à notre vieil espace ordinaire. Nous disons qu'il est relatif et cela veut dire que les lois de la Physique sont les mêmes dans toutes les parties de cet espace, ou dans le langage mathématique, que les équations différentielles qui expriment ces lois ne dépendent pas du choix des axes de coordonnées.

Si on considère un système parfaitement isolé, cela n'a aucun sens, on ne pourra observer les coordonnées des points de ce système, mais seulement leurs distances mutuelles, l'observation ne pourra pas nous apprendre si les propriétés de ce système dépendent de la position absolue du système dans l'espace, puisque cette position est inobservable.

Si le système n'est pas isolé, cela ne marchera pas non plus (si l'on veut raisonner en toute rigueur), puisqu'il deviendra impossible d'exprimer les lois qui régissent ce système, sans tenir compte de l'action des corps extérieurs. Mais il y a des systèmes *à peu près* isolés, environnés de corps assez rapprochés pour qu'on puisse les *voir*, trop éloignés pour que leur action soit sensible; c'est ce qui arrive pour notre monde terrestre vis-à-vis des étoiles. Nous pouvons alors énoncer les lois de ce monde terrestre comme si les étoiles n'existaient pas, et pourtant rapporter ce monde à un système d'axes de coordonnées parfaitement défini et invariablement lié à ces étoiles. L'expérience nous montre alors que le choix de ces axes n'intervient pas, que les équations ne sont pas altérées quand on fait un changement d'axes. L'ensemble des changements d'axes possibles forment, comme on le sait, un groupe à six dimensions.

Renonçons maintenant à notre espace ordinaire, remplaçons nos équations par d'autres qui seront équivalentes, en ce sens qu'elles respecteront le « parallélisme » des phénomènes. Toutes les fois que nous aurons affaire à un système à peu près isolé, il y aura un fait extrêmement général, une propriété d'invariance qui subsistera; il y aura un groupe de transformations qui n'altèrera pas les équations; ces transformations n'auront plus la signification d'un changement d'axes, leur signification pourra être quelconque, mais le groupe formé par ces transformations devra toujours rester isomorphe au groupe à six dimensions dont nous venons de parler; sans quoi il n'y aurait plus de parallélisme.

Et c'est parce que ce groupe joue dans tous les cas un rôle important, parce qu'il est isomorphe au groupe des changements d'axes dans l'espace ordinaire, parce qu'il est ainsi étroitement apparenté à notre espace à trois dimensions, c'est pour cette raison que nos équations prendront leur forme la plus simple quand on mettra ce groupe en évidence de la façon la plus naturelle, c'est-à-dire en introduisant un espace à trois dimensions.

Et comme ce groupe est isomorphe lui-même à celui des déplacements de chacun de nos membres regardés comme un corps solide, comme cette propriété des corps solides de se mouvoir en obéissant aux lois de ce groupe, n'est, en dernière analyse, qu'un cas particulier de cette propriété d'invariance sur laquelle je viens d'attirer l'attention, on voit qu'il n'y a pas de différence essentielle entre la raison *physique* qui nous porte à attribuer à l'espace trois dimensions, et les raisons psychologiques développées dans les premiers paragraphes de cet article.

6. — L'Analysis Situs et l'Intuition.

Je voudrais ajouter une remarque qui ne se rapporte qu'indirectement à ce qui précède; nous avons vu plus haut quelle est l'importance de l'Analysis situs et j'ai expliqué que c'est là le véritable domaine de l'intuition géométrique. Cette intuition existe-t-elle; je rappellerai qu'on a essayé de s'en passer et que M. Hilbert a cherché à fonder une géométrie qu'on a appelée rationnelle parce qu'elle est affranchie de tout appel à l'intuition. Elle repose sur un certain nombre d'axiomes ou de postulats qui sont regardés, non comme des vérités intuitives, mais comme des définitions déguisées. Ces axiomes sont répartis en cinq groupes. Pour quatre de ces groupes, j'ai eu l'occasion de dire dans quelle mesure il est légitime de les regarder comme ne renfermant que des définitions déguisées.

Je voudrais insister ici sur un de ces groupes, le deuxième, celui des « axiomes de l'ordre. » Pour bien faire comprendre de quoi il s'agit, j'en citerai un. Si sur une ligne quelconque le point C est entre A et B, et le point D entre A et C, le point D sera entre A et B. Pour M. Hilbert, il n'y a pas là une vérité intuitive, nous convenons de dire que dans certains cas C est entre A et B, mais nous ne savons pas ce que cela veut dire, pas plus que nous ne savons ce que c'est qu'un point ou qu'une ligne. Nous pourrons, d'après nos conventions, employer cette expression *entre* pour désigner une relation quelconque entre trois points, pourvu que cette relation satisfasse aux axiomes de l'ordre. Ces axiomes nous apparaissent ainsi comme la définition du mot *entre*.

On peut alors se servir de ces axiomes, à la condition d'avoir démontré qu'ils ne sont pas contradictoires, et on pourra construire sur eux une géométrie où l'on n'aura pas besoin de figures et qui pourrait être comprise d'un homme qui n'aurait ni vue, ni toucher, ni sens musculaire, ni aucun sens, et qui serait réduit à un pur entendement.

Oui, cet homme comprendrait peut-être, en ce sens qu'il verrait bien que les propositions se déduisent logiquement les unes des autres; mais l'assemblage de ces propositions lui paraîtrait artificiel et baroque et il ne verrait pas pourquoi on l'aurait préféré à une foule d'autres assemblages possibles.

Si nous n'éprouvons pas les mêmes étonnements, c'est que les axiomes ne sont pas, en réalité, pour nous de simples définitions, des conventions arbitraires, mais bien des conventions justifiées. Pour les axiomes des autres groupes, je tiens qu'elles sont justifiées parce que ce sont celles qui s'accordent le mieux avec certains faits expérimentaux qui nous sont familiers et qu'elles nous sont, par là, les plus commodes; pour les axiomes de l'ordre, il me semble qu'il y a quelque chose de plus, que ce sont de véritables propositions intuitives, se rattachant à l'Analysis situs; nous voyons que le fait pour un point C d'être *entre* deux autres points d'une ligne, se rattache à la façon de *découper* un continu à une dimension à l'aide de *coupures* formées de points infranchissables.

Mais alors une question se pose; ces vérités, telles que les axiomes de l'ordre, nous sont révélés par l'intuition; mais s'agit-il de l'intuition de l'espace lui-même, ou de l'intuition du continu mathématique ou physique en général. Ce qui pourrait faire pencher vers la première solution, c'est que nous raisonnons facilement sur l'espace et beaucoup plus difficilement sur des continus plus compliqués, sur des continus à plus de 3 dimensions non susceptibles d'être représentés dans l'espace.

Et si cette première solution était adoptée, toute cette discussion deviendrait inutile; nous attribuerions à l'espace trois dimensions tout simplement, parce que le continu à trois dimensions serait le seul dont nous aurions une intuition nette.

Mais il y a une Analysis situs à plus de trois dimensions; je ne dis pas que ce soit une science facile, j'y ai consacré trop d'efforts pour ne pas m'être rendu compte des difficultés qu'on y rencontre; mais enfin cette science est possible et elle ne repose pas exclusivement sur l'analyse; on ne saurait la cultiver avec fruit sans de continuels appels à l'intuition. Il y a donc bien une intuition des continus à plus de trois dimensions et si elle exige une attention plus soutenue que l'intuition géométrique ordinaire, c'est sans doute une affaire d'habitude, et aussi l'effet de la complication rapidement croissante des propriétés des continus quand augmente le nombre des dimensions. Ne voyons-nous pas dans les Lycées des élèves qui sont forts en géométrie plane et qui « ne voient pas dans l'espace. » Ce n'est pas que l'intuition de l'espace à trois dimensions leur fasse défaut, mais ils n'ont pas l'habitude de s'en servir et il leur faut pour cela un effort. Et d'ailleurs pour nous représenter une figure de l'espace, ne nous arrive-t-il pas à tous de nous représenter successivement les diverses perspectives possibles de cette figure.

Je conclurai que nous avons tous en nous l'intuition du continu d'un nombre quelconque de dimensions, parce que nous avons la faculté de construire un continu physique et mathématique; que cette faculté préexiste en nous à toute expérience parce que sans elle, l'expérience proprement dite serait impossible et se réduirait à des sensations brutes, impropres à toute organisation, que cette intuition n'est que la conscience que nous avons de cette faculté. Cependant cette faculté pourrait s'exercer dans des sens divers; elle pourrait nous permettre de construire un espace à quatre, tout aussi bien qu'un espace à 3 dimensions. C'est le monde extérieur, c'est l'expérience qui nous détermine à l'exercer dans un sens plutôt que dans l'autre.

Henri Poincaré.