Là, autant qu'ailleurs, le plaisir du lecteur qui se laisse conduire par M. Poincaré, c'est qu'il arrive très rapidement au but, comme sans effort et par un chemin tout droit.

A. LAMBERT.

MÉLANGES.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA.

PRIX BOLYAI [1].

Procès-verbal des séances de la Commission internationale de 1910.

A l'occasion du centième anniversaire de la naissance de Jean *Bolyai*, l'Académie hongroise des Sciences, voulant perpétuer le souvenir de cet illustre savant, ainsi que celui du profond penseur que fut Farkas Bolyai, son père et son maître, avait décidé de fonder un prix international qui devait porter le nom de *Prix Bolyai*. Ce prix devait être décerné pour la première fois en 1905, puis de cinq en cinq ans à l'auteur du meilleur Ouvrage de Mathématiques paru au cours des cinq années précédentes, en prenant en considération toute son œuvre antérieure.

D'après le règlement du prix, l'Académie avait confié le soin de le décerner pour les années 1905-1909 à une Commission composée de deux membres résidants : M. Jules König, secrétaire de la classe des Sciences; M. Gustave Rados, membre de la Classe, et deux membres étrangers : M. Gösta Mittag-Lefler, membre de l'Académie des Sciences suédoise; M. Henri Poincaré, membre de l'Institut de France.

La Commission s'est réunie à Budapest les 17 et 18 octobre 1910 et elle a désigné comme président M. Jules König et comme rapporteur M. Henri Poincaré.

---

[1] Voir *Bulletin*, 1906, p. 103, pour la première attribution du prix international.

Parmi les travaux les plus dignes d'attention publiés dans les cinq dernières années, la Commission a particulièrement remarqué ceux de M. David Hilbert, qui, par la profondeur de la pensée, l'originalité des méthodes, la rigueur logique des démonstrations, ont déjà exercé une influence considérable sur les progrès des sciences mathématiques.

Après avoir examiné les titres divers de cet auteur, et prenant en considération non seulement ses travaux des cinq dernières années, mais ses recherches antérieures et l'ensemble de sa carrière scientifique, la Commission a unanimement décidé de décerner le prix Bolyai de l'Académie des Sciences hongroise, pour les années 1905-1909, à

M. David Hilbert.

Les motifs de cette décision seront exposés dans le Rapport de M. Poincaré.

Ce procès-verbal a été accepté à l'unanimité.

Budapest, 18 octobre 1910.

Signé :

KONIG, Président.

POINCARÉ, Rapporteur.
MITTAG-LEFFLER.
RADOS.

Rapport de M. Henri POINCARÉ.

Les problèmes traités par M. Hilbert sont tellement variés et leur importance est si évidente qu'un long préambule ne nous semble pas nécessaire. Je crois préférable d'entrer immédiatement dans l'exposé détaillé de ses principaux Mémoires. Le lecteur, en présence de résultats si considérables, tirera la conclusion de lui-même.

Les invariants. — Les premiers travaux de M. Hilbert sont relatifs à la théorie des invariants. On sait avec quelle passion cette partie des Mathématiques a été cultivée vers le milieu du siècle dernier et combien elle a été délaissée depuis. Il semblait en effet que les Clebsch, les Gordan, les Cayley, les Sylvester eussent épuisé tout ce qu'on pouvait tirer des méthodes anciennes et qu'il n'y eût plus après eux que peu de chose à glaner. Mais les progrès de l'Algèbre et de l'Arithmétique, et en particulier la théorie des nombres entiers algébriques, l'extension qu'on en fit bientôt aux polynomes entiers, la théorie des modules de Kronecker, allaient permettre d'aborder la question par un côté encore inexploré. C'est ce qu'a fait M. Hilbert en s'attaquant tout d'abord au célèbre théorème de Gordan, d'après lequel tous les invariants d'un système de formes peuvent s'exprimer d'une façon rationnelle et entière en fonctions d'un nombre fini d'entre eux. On ne saurait mieux mesurer le progrès accompli qu'en comparant le volume que Gordan avait dû consacrer à sa démonstration aux quelques lignes dont Hilbert a pu se contenter. La méthode gagnait en généralité autant qu'en simplicité et l'on pouvait entrevoir toute une série de généralisations possibles. Un lemme très simple inspiré par les idées de Kronecker avait rendu ce résultat possible :

Considérons une série indéfinie de formes F dépendant de n variables; on peut trouver parmi elles un nombre fini de formes $F_1, \ldots, F_p$ telles qu'une forme quelconque F de la série puisse être égalée à

$$(1) \qquad F \equiv A_1 F_1 + \ldots A_p F_p,$$

les A étant des formes dépendant des mêmes variables. C'est là une conséquence de la notion fondamentale de module introduite par Kronecker dans la Science. Cela veut dire, dans le langage de Kronecker, que les diviseurs communs à plusieurs modules, ceux-ci fussent-ils en nombre infini, sont les sous-multiples de l'un d'entre eux, qui est leur plus grand commun diviseur, et dans le langage géométrique (en supposant 4 variables et les regardant comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace), que l'ensemble des points communs à un nombre infini de surfaces algébriques se compose d'un nombre fini de points isolés et d'un nombre fini de courbes gauches algébriques.

Mais ce n'est pas tout : supposons que les F soient les invariants d'un système de formes et les A des fonctions des coefficients de ces formes. On peut toujours supposer que les A sont aussi des invariants, sans quoi on pourrait effectuer sur les formes une transformation linéaire arbitraire. Alors, dans la relation (1) ainsi transformée, figureraient les coefficients de cette transformation. En appliquant, à la relation (1) transformée, un certain processus de différentiations successives (les différentiations s'effectuant par rapport aux coefficients de la transformation linéaire), on arrive à une relation de même forme que (1) mais où les A sont des invariants. La démonstration du théorème de Gordan s'en déduit immédiatement.

Mais ce n'est pas tout : entre ces invariants fondamentaux, il y a un certain nombre de relations appelées *syzygies*. Toutes les syzygies peuvent se déduire d'un nombre fini d'entre elles par addition et multiplication. Entre ces syzygies fondamentales du premier ordre il y a des syzygies du second ordre, qui peuvent aussi se déduire d'un nombre fini d'entre elles par addition et multiplication, et ainsi de suite.

M. Hilbert déduit ce résultat d'un théorème général d'algèbre. Considérons un système d'équations linéaires de la forme :

$$\sum F_{ik} X_i = 0$$

où les F sont des formes données et les X des formes inconnues homogènes par rapport à certaines variables; l'étude des solutions de ce système et des relations qui les lient conduit à considérer une série de systèmes dérivés jusqu'à ce qu'on arrive à un système dérivé qui n'admet plus aucune solution. C'est ainsi d'ailleurs que M. Hilbert fut amené à déterminer et à étudier le nombre $\chi(R)$ des conditions distinctes auxquelles doit satisfaire une forme de degré R pour être congrue à zéro par rapport à un module donné.

Mais, pour compléter la théorie, il ne suffisait pas d'établir l'existence d'un système d'invariants fondamentaux, il fallait donner les moyens de le former effectivement, et ce problème a été ramené par l'auteur à une question qui se rattache à la théorie des nombres entiers algébriques étendue aux polynomes entiers.

Le problème est ainsi décomposé en trois autres :

1° Trouver des invariants J_m en fonctions desquels tous les autres puissent s'exprimer sous une forme *entière et algébrique*, c'est-à-dire tels qu'un invariant quelconque J satisfasse à une équation algébrique

$$J^k + G_1 J^{k-1} + G_2 J^{k-2} + \ldots + G_{k-1} J + G_k = 0,$$

les G étant des polynomes entiers par rapport aux J_m;

2° Trouver des invariants en fonctions desquels tous les autres puissent s'exprimer rationnellement;

3° Trouver des invariants en fonctions desquels tous les autres puissent s'exprimer sous forme entière et rationnelle.

De ces trois problèmes le premier est le plus difficile. Si on le suppose résolu, l'ensemble des invariants se présente comme un *corps algébrique*, et le premier pas à faire c'est de déterminer le degré de ce corps; c'est à quoi parvient M. Hilbert, au moins pour les formes binaires, en évaluant de deux manières différentes le nombre $\varphi(\sigma)$ des invariants linéairement indépendants de degré σ, ou plutôt la valeur asymptotique de cette fonction numérique $\varphi(\sigma)$ pour σ très grand.

Une fois le premier problème résolu, la solution des deux autres se ramène à une question classique de l'arithmétique des polynomes et de la théorie des corps algébriques. Il s'agit donc de trouver les invariants fondamentaux à l'aide desquels tous les autres s'expriment sous forme entière et algébrique.

A cet effet M. Hilbert remarque que ce sont ceux qui ne peuvent s'annuler sans que tous les autres s'annulent. On conçoit ainsi que la recherche de ces invariants fondamentaux sera singulièrement facilitée par l'étude des *formes nulles*, c'est-à-dire de celles dont les coefficients numériques sont choisis de telle sorte que les valeurs numériques de tous les invariants soient nulles.

Dans le cas des formes binaires, les formes nulles sont celles qui sont divisibles par une puissance suffisamment élevée d'un facteur linéaire; mais dans les autres cas le problème est plus délicat. L'auteur met d'abord en évidence un certain nombre de théorèmes.

Considérons une forme à coefficients numériques et sa transformée par une substitution linéaire quelconque; les coefficients de cette transformée seront des polynomes entiers par rapport aux coefficients de la substitution. Si le déterminant de la substitution est une fonction *algébrique et entière* de ces polynomes entiers, la forme proposée n'est pas une forme nulle. Dans le cas contraire, c'est une forme nulle.

Considérons d'autre part les transformées d'une forme par une substitution linéaire dépendant d'un paramètre arbitraire t et de telle façon que les coefficients de cette substitution soient des séries développables suivant les puissances entières, positives ou négatives mais croissantes, de ce paramètre. S'il s'agit d'une forme nulle, on peut choisir une substitution de cette nature de telle sorte que son déterminant devienne infini pour $t = 0$, tandis que les coefficients de la forme transformée restent finis. M. Hilbert montre que cette condition est nécessaire pour que la forme proposée soit nulle, et il est d'ailleurs évident qu'elle est suffisante. A chaque forme nulle correspond donc une et peut-être plusieurs substitutions linéaires jouissant de la propriété énoncée. Cela posé, l'auteur démontre que, partant d'une forme nulle quelconque, on peut, par une transformation linéaire, la transformer en une forme nulle *canonique*. Une forme est dite *canonique* quand la substitution linéaire qui lui correspond et qui jouit par rapport à elle de la propriété que nous venons d'énoncer est de la forme simple :

$$\begin{vmatrix} t^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{\lambda_3} \end{vmatrix}$$

La recherche des formes nulles est ainsi ramenée à celle des formes nulles canoniques, qui est beaucoup plus simple. On trouve que les formes nulles canoniques sont celles auxquelles il manque certains termes; et la détermination des termes qui doivent manquer peut se faire aisément, grâce à un schéma géométrique simple. On voit sous quel aspect nouveau et élégant se présentent aujourd'hui, grâce à M. Hilbert, des problèmes qui avaient tenté tant de géomètres il y a cinquante ans.

Le nombre e. — M. Hermite a le premier démontré que le nombre e est transcendant et peu de temps après M. Lindemann étendait ce résultat au nombre π. C'était là une conquête importante pour la Science, mais les méthodes d'Hermite étaient encore susceptibles de perfectionnements; quelque ingénieuses et quelque originales qu'elles fussent, on sentait qu'elles ne conduisaient pas au but par le plus court. Ce chemin le plus court, M. Hilbert l'a trouvé et il semble qu'on ne puisse plus apporter désormais à la démonstration de simplification nouvelle.

C'était la seconde fois que M. Hilbert donnait d'un théorème connu, mais qu'on ne pouvait établir que par des considérations ardues, une démonstration d'une étonnante simplicité. Cette faculté de simplifier ce qui avait d'abord semblé complexe se présentait ainsi comme un des caractères de son talent.

Arithmétique. — Les travaux arithmétiques de M. Hilbert ont principalement porté sur les corps algébriques. L'ensemble des nombres qui peuvent s'exprimer rationnellement en fonctions d'un ou de plusieurs nombres algébriques constitue un domaine de rationalité, et l'ensemble des nombres de ce domaine qui sont des entiers algébriques constitue un corps. Si l'on envisage ensuite tous les nombres algébriques d'un corps qui peuvent être mis sous la forme :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p$$

où les α sont des nombres *donnés* du corps, et les x des nombres indéterminés de ce même corps, l'ensemble de ces nombres est ce qu'on appelle un *idéal*. Ce qui fait l'intérêt de cette considération c'est que les idéaux obéissent, en ce qui concerne leur divisibilité, aux lois habituelles de l'Arithmétique et qu'en particulier tout idéal est décomposable d'une manière et d'une seule en idéaux premiers. C'est là le *théorème fondamental de Dedekind*.

D'autre part, nous pouvons considérer des nombres qui satisfont à une équation algébrique dont les coefficients appartiennent à un domaine D de rationalité. Ces nombres et ceux qui peuvent s'exprimer rationnellement par leur moyen définiront un nouveau domaine de rationalité D′, plus étendu que D, et un corps algébrique K′, plus étendu que le corps K qui correspond à D. On peut alors rapporter le corps K′, non pas aux nombres rationnels vulgaires et au corps des entiers de l'Arithmétique ordinaire, mais au domaine D et au corps algébrique K. On pourra alors parler du degré *relatif* de K′ par rapport à K, de la *norme relative* d'un nombre algébrique de K′ par rapport à K, etc. Il y aura des corps relativement quadratiques obtenus par l'adjonction au domaine D d'un radical $\sqrt{\mu}$, μ étant un nombre du domaine D, et des corps relativement abéliens, obtenus par l'adjonction à D des racines d'une équation abélienne. Il y a là une sorte de généralisation des idées de Dedekind, que Hilbert n'est sans doute pas le premier à avoir entrevue, mais dont il a tiré un parti inattendu.

Nous devons aussi parler des corps *galoisiens*, dont l'équation génératrice est une équation de Galois. Un corps quelconque est contenu dans un corps galoisien, de la même façon que le corps K dont nous parlions tout à l'heure est contenu dans le corps K′; et ce corps galoisien s'obtient sans peine en adjoignant, au domaine de rationalité, non seulement l'une des racines de l'équation algébrique génératrice de K, mais *toutes* ses racines. Les questions relatives à un corps quelconque sont ainsi ramenées aux problèmes analogues pour les corps galoisiens.

Après avoir montré comment on pouvait, par la discussion d'une congruence, former tous les idéaux de norme donnée, M. Hilbert a cherché une démonstration nouvelle du théorème fondamental de Dedekind; il l'a établi d'abord pour les corps galoisiens et l'a étendu ensuite sans peine à un corps quelconque.

M. Hilbert fut ainsi conduit à étudier la théorie générale des corps galoisiens, et il introduisit une foule de notions nouvelles, en définissant une série de sous-corps, correspondant à divers sous-groupes du groupe de Galois de l'équation génératrice; ces sous-groupes sont définis par certaines relations qu'ils ont avec un idéal premier quelconque du corps, et l'étude de ces sous-corps nous ouvre des aperçus nouveaux et intéressants sur la structure du corps.

L'auteur donna en 1896 une démonstration nouvelle du théorème de Kronecker d'après lequel les racines des équations abéliennes peuvent s'exprimer par les racines de l'unité. Cette démonstration purement arithmétique met en évidence la façon de construire tous les corps abéliens d'un groupe et d'un discriminant donné.

Mais les travaux de M. Hilbert ont eu pour objet principal l'étude des corps relativement quadratiques et relativement abéliens. Un des points essentiels de la théorie des nombres est la loi de réciprocité de Gauss au sujet des résidus quadratiques; on sait avec quelle prédilection le grand géomètre est revenu sur cette question et combien il a multiplié les démonstrations.

Cette loi de réciprocité est susceptible de généralisations intéressantes lorsqu'on passe du domaine des nombres rationnels ordinaires à un domaine de rationalité quelconque. M. Hilbert a pu réaliser cette généralisation dans le cas où le corps k est imaginaire et a un nombre de classes impair. Il a introduit un symbole analogue à celui de Legendre, et la loi de réciprocité à laquelle il est parvenu se présente sous une forme simple; le produit d'un certain nombre de pareils symboles doit être égal à 1. Cette généralisation présente d'autant plus d'intérêt que l'auteur a pu montrer qu'il y a des genres correspondant à la moitié de tous les systèmes imaginables de caractères, résultat qui doit être rapproché de celui de Gauss et qui permet l'extension à un domaine de rationalité quelconque de cette notion du genre des formes quadratiques qui fait l'objet d'un des chapitres les plus attrayants des *Disquisitiones Arithmeticæ*.

Pour aller plus loin, M. Hilbert est obligé d'introduire une notion nouvelle et de modifier la définition de la classe. Deux idéaux appartiennent à la même classe au sens large ou ancien si leur rapport est un nombre algébrique existant quelconque; ils appartiennent à la même classe au sens étroit ou nouveau si leur rapport est un nombre algébrique existant *qui est positif ainsi que tous ses conjugués*. Les nombres de classes, entendus soit au sens large, soit au sens étroit, sont évidemment en relation intime et l'auteur explique quelle est la nature de cette relation. Mais cette définition nouvelle permet à M. Hilbert d'exprimer dans un langage plus simple les théorèmes qu'il avait en vue. Ces théorèmes, énoncés sous leur forme la plus générale, sont, comme le dit M. Hilbert, d'une remarquable simplicité et d'une beauté cristalline; leur démonstration complète apparaissait à l'auteur comme le but final de ses études sur les corps algébriques. C'est sous cette forme générale que nous les énoncerons.

Si k est un corps quelconque, il existe un groupe $\mathrm{K}k$ qu'on peut appeler son *Klassenkörper*. Son degré relatif est égal au nombre des classes au sens étroit. Il est non ramifié, c'est-à-dire qu'aucun idéal premier de k n'est divisible par le carré d'un idéal premier de Kk et il contient tous les corps non ramifiés relativement abéliens par rapport à k.

Son groupe relatif est isomorphe au groupe abélien qui définit la composition des classes d'idéaux de k.

Les idéaux premiers de k, quoique premiers par rapport à k, ne le sont pas en général par rapport à Kk; ils peuvent donc être décomposés en facteurs idéaux premiers par rapport à Kk; le nombre de ces facteurs et la puissance à laquelle ils sont élevés, en un mot le mode de décomposition, dépendent uniquement de la classe à laquelle appartient dans le corps k l'idéal envisagé.

Appelons *ambige* un nombre de Kk qui est positif, ainsi que tous ses conjugués et qui ne diffère de ces conjugués que par un facteur, qui est une unité complexe.

Chaque ambige de Kk correspond à un idéal de k et réciproquement. Cette propriété est caractéristique du corps Kk parmi tous les corps relativement abéliens par rapport à k.

On voit quelle est la portée de ces théorèmes et quelle lumière elle jette sur la notion de classe, puisque les relations mutuelles des classes d'idéaux sont reproduites comme par une image fidèle par celles des entiers algébriques d'un corps.

A la vérité, M. Hilbert n'a démontré complètement ces théorèmes que dans des cas particuliers, mais ces cas particuliers sont très nombreux, très variés et très étendus. Il est d'ailleurs, dit-il, persuadé que ses méthodes sont applicables au cas général. Tout en partageant sa conviction, nous sommes obligés de faire des réserves, tant que cet espoir, si légitime qu'il soit, n'a pas été effectivement réalisé.

Nous avons parlé plus haut de la loi de réciprocité relative aux restes quadratiques; nous aurions dû ajouter que M. Hilbert a donné une loi analogue pour ses restes de puissances quelconques, au moins pour certains corps particuliers.

En résumé, l'introduction des idéaux par Kummer et Dedekind a été un progrès considérable, elle a généralisé et éclairé en même temps les résultats classiques de Gauss sur les formes quadratiques et leur composition. Les travaux de M. Hilbert que nous venons d'analyser constituent un nouveau pas en avant et qui n'est pas moins important que le premier.

THÉORÈME DE WARING. — Parlons maintenant d'un autre travail arithmétique entièrement différent. Il s'agit de démontrer le théorème de Waring d'après lequel tout entier peut être décomposé en une somme de N puissances n^{iemes}, N ne dépendant que de n, de même qu'il peut par exemple être toujours décomposé en une somme de quatre carrés. Inutile de rappeler que ce théorème avait jusqu'ici été simplement énoncé.

Ce qui mérite surtout d'attirer l'attention dans la démonstration de M. Hilbert, c'est qu'elle repose sur une façon nouvelle d'introduire les variables continues dans la théorie des nombres.

On part d'une identité où une intégrale 25^{uple} est égalée à la puissance $m^{\text{ième}}$ de la somme de cinq carrés. Décomposant le domaine d'intégration en domaines plus petits de façon à avoir une série de valeurs approchées de l'intégrale, comme s'il s'agissait de l'évaluer par quadratures mécaniques, et par les méthodes de passage à la limite familières à l'auteur, on arrive à une autre identité :

$$(x_1^2 + \ldots + x_5^2)^m = \sum r_h Y_h^{2m}$$

où les r_h sont des nombres positifs rationnels et les Y des fonctions linéaires des x à coefficients entiers. Les coefficients r et ceux des Y, ainsi que le nombre de ces fonctions linéaires, ne dépendent que de m.

Jusqu'ici nous ne sommes pas sortis de l'Algèbre, si ce n'est pour montrer que les coefficients r et ceux de Y sont rationnels. Pour aller plus loin l'auteur établit une série de lemmes dont l'énoncé est trop compliqué pour pouvoir être reproduit ici et qui l'amènent finalement à la démonstration complète du théorème. Nous ne devons pas douter que ces considérations, qui permettent ainsi d'obtenir des relations arithmétiques en les faisant sortir d'identités où figurent des intégrales définies, ne puissent un jour, quand on en aura bien compris le sens, être appliquées à des problèmes bien plus étendus que celui de Waring.

GÉOMÉTRIE. — J'arrive aux travaux si originaux de M. Hilbert sur les fondements de la Géométrie. Il y a, dans l'histoire de cette philosophie géométrique, trois époques principales : la première est celle où des penseurs, à la tête desquels nous devons citer

Bolyai, ont fondé la Géométrie non euclidienne; la deuxième est celle où Helmholtz et Lie ont montré le rôle en Géométrie de la notion de mouvement et de groupe; la troisième a été ouverte par Hilbert. L'auteur allemand se place au point de vue logique : quels sont les axiomes que l'on énonce et ceux que l'on sous-entend; quel en est le véritable contenu logique et qu'en pourrait-on tirer par la simple application des règles logiques et sans nouvel appel à l'intuition; sont-ils enfin indépendants, ou pourrait-on au contraire les déduire les uns des autres? Voilà quelles sont les questions à traiter.

M. Hilbert commence donc par établir la liste complète des axiomes, en s'efforçant de n'en pas oublier un; cela n'est pas aussi facile qu'on pourrait croire et Euclide lui-même en applique qu'il n'énonce pas. L'intuition géométrique nous est tellement familière que nous faisons usage des vérités intuitives pour ainsi dire sans nous en apercevoir. De là, pour atteindre le but que se proposait Hilbert, la nécessité de ne pas accorder à l'intuition la plus petite place.

Le savant professeur répartit les axiomes en cinq groupes :

I. *Axiome der Verknüpfung* (je traduirai par *axiomes projectifs* au lieu de chercher une traduction littérale, comme par exemple *axiomes de la connexion*, qui ne saurait être satisfaisante).

II. *Axiome der Anordnung* (axiomes de l'ordre).

III. Axiomes de la Congruence, ou axiomes métriques.

IV. Axiome d'Euclide.

V. Axiome d'Archimède.

Parmi les axiomes projectifs, nous distinguerons ceux du plan et ceux de l'espace; les premiers sont ceux qui dérivent de la proposition bien connue : *par deux points passe une droite et une seule*.

Passons au second groupe, celui des axiomes de l'ordre. Voici l'énoncé des deux premiers :

« Si trois points sont sur une même droite, il y a entre eux une certaine relation que nous exprimons en disant que l'un des points, et un seulement, est entre les deux autres. Si C est entre A et B, si D est entre A et C, D sera aussi entre A et B, etc. »

Ici encore on remarquera que nous ne faisons pas intervenir l'intuition; nous ne cherchons pas à approfondir le sens du mot *entre*, toute relation satisfaisant aux axiomes pourrait être désignée par le même mot.

Le troisième groupe comprend les axiomes métriques, où nous distinguerons trois sous-groupes, relatifs respectivement aux longueurs, aux angles, et aux triangles.

Un point important ici n'est pas traité; il aurait fallu compléter la liste des axiomes en disant que le segment AB est congruent au segment inverse BA. Cet axiome implique la symétrie de l'espace et l'égalité des angles à la base dans un triangle isoscèle. M. Hilbert ne traite pas ici cette question, mais il en a fait l'objet d'un Mémoire sur lequel nous reviendrons plus loin.

Le quatrième groupe ne comprend que le postulatum d'Euclide.

Le cinquième groupe comprend deux axiomes; le premier et le plus important est celui d'Archimède :

Soient deux points quelconques A et B sur une droite D; soit a un segment quelconque; construisons sur D, à partir du point A, et dans la direction AB, une série de segments tous égaux entre eux et égaux à a : AA_1, A_1A_2, ... $A_{n-1}A_{n}^{\text{ième}}$; on pourra toujours prendre n assez grand pour que le point B se trouve sur l'un de ces segments.

C'est-à-dire que, si l'on se donne deux longueurs quelconques l et L, on peut toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que, en ajoutant n fois à elle-même la longueur l, on obtienne une longueur totale plus grande que L.

Le second est l'*Axiom der Vollständigkeit*, dont j'expliquerai plus loin le sens.

Indépendance des axiomes. — La liste des axiomes une fois dressée, il faut voir si elle est exempte de contradictions. Nous savons bien que oui, puisque la Géométrie existe; et M. Hilbert avait d'abord répondu *oui* en construisant une Géométrie. Mais, chose étrange, cette Géométrie n'est pas tout à fait la nôtre, son espace n'est pas le nôtre, ou du moins ce n'en est qu'une partie. Dans l'espace de M. Hilbert, il n'y a pas tous les points qui sont dans le nôtre, mais ceux seulement qu'on peut, en partant de deux points donnés, construire par le moyen de la règle et du compas. Dans cet espace, par exemple, il n'existerait pas d'angle de 10°.

Dans sa seconde édition, M. Hilbert a voulu compléter sa liste de façon à retrouver notre Géométrie et à n'en pas retrouver d'autre, c'est pour cela qu'il introduisit l'*Axiom der Vollständigkeit* qu'il énonce comme il suit :

Au système des points, droites et plans, il est impossible d'adjoindre un autre système d'objets tel que le système complet satisfasse à tous les autres axiomes.

Il est clair alors que cet espace dont je parlais, qui ne contient pas tous les points de notre espace, ne satisfait pas à ce nouvel axiome, car on peut lui adjoindre ceux des points de notre espace qu'il ne contenait pas, sans cesser de satisfaire à tous les axiomes.

Il y a donc une infinité de Géométries qui satisfont à tous les axiomes, moins l'*Axiom der Vollständigkeit*, mais il n'y en a qu'une, la nôtre, qui satisfasse en outre à ce dernier axiome.

On doit se demander ensuite si les axiomes sont indépendants, c'est-à-dire si l'on peut sacrifier l'un des cinq groupes en conservant les quatre autres et obtenir néanmoins une Géométrie cohérente. C'est ainsi qu'en supprimant le groupe IV (postulatum d'Euclide) on obtient la Géométrie non euclidienne de Bolyai.

On peut également supprimer le groupe III. M. Hilbert a réussi à conserver les groupes I, II, IV et V, ainsi que les deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles, tout en rejetant l'axiome métrique des triangles, c'est-à-dire la proposition III, 6.

La Géométrie non archimédienne. — Mais la conception la plus originale de M. Hilbert, c'est celle de la Géométrie non archimédienne, où tous les axiomes restent vrais, sauf celui d'Archimède. Pour cela il fallait d'abord construire un *système de nombres non archimédiens*, c'est-à-dire un système d'éléments entre lesquels on pût concevoir des relations d'égalité et d'inégalité et auxquels on pût appliquer des opérations correspondant à l'addition et à la multiplication arithmétiques, et cela de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Les règles arithmétiques de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité, etc.; *Arithmetische Axiome der Verknüpfung*) subsistent sans changement;

2° Les règles du calcul et de la transformation des inégalités (*Arithmetische Axiome der Anordnung*) subsistent également.

3° L'axiome d'Archimède n'est pas vrai.

On peut arriver à ce résultat en choisissant pour éléments, des séries de la forme suivante :

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \ldots,$$

où m est un entier positif ou négatif et où les coefficients A sont réels, et en convenant d'appliquer à ces séries les règles ordinaires de l'addition et de la multiplication. Il faut ensuite définir les conditions d'inégalité de ces séries, de façon à *ranger* nos éléments dans un ordre déterminé. Nous y arriverons par la convention suivante : nous attribuerons à notre série le signe de A_0 et nous dirons qu'une série est plus petite qu'une autre quand, retranchée de celle-ci, elle donne une différence positive.

Il est clair qu'avec cette convention les règles du calcul des inégalités subsistent; mais l'axiome d'Archimède n'est plus vrai.

Nos nombres vulgaires rentrent comme cas particuliers parmi ces *nombres non archimédiens*. Les nouveaux nombres viennent s'intercaler pour ainsi dire dans la série de nos nombres vulgaires, de telle façon qu'il y ait, par exemple, une infinité de nombres nouveaux plus petits qu'un nombre vulgaire donné A et plus grands que tous les nombres vulgaires inférieurs à A.

Cela posé, imaginons un espace à trois dimensions où les coordonnées d'un point seraient mesurées, non pas par des nombres vulgaires, mais par des nombres non archimédiens, mais où les équations habituelles de la droite et du plan subsisteraient, de même que les expressions analytiques des angles et des longueurs. Il est clair que dans cet espace tous les axiomes resteraient vrais, sauf celui d'Archimède.

Sur une droite quelconque, entre nos points vulgaires, viendraient s'intercaler des points nouveaux. Il y aura également sur cette droite une infinité de points nouveaux qui seront à droite de tous les points vulgaires. En résumé, notre espace vulgaire n'est qu'une partie de l'espace non archimédien.

On voit quelle est la portée de cette invention et en quoi elle constitue dans la marche de nos idées un pas presque aussi hardi que celui que Bolyai nous a fait faire; la Géométrie non euclidienne respectait pour ainsi dire notre conception qualitative du continu géométrique tout en bouleversant nos idées sur la mesure de ce continu. La Géométrie non archimédienne détruit cette conception; elle dissèque le continu pour y introduire des éléments nouveaux.

Dans cette conception si audacieuse Hilbert avait eu un précurseur. Dans ses *Fondements de la Géométrie*, Veronèse avait eu une idée analogue. Le Chapitre VI de son Introduction est le développement d'une véritable Arithmétique et d'une véritable Géométrie non archimédiennes où les nombres transfinis de Cantor jouent un rôle prépondérant. Toutefois par l'élégance et la simplicité de son exposition, par la profondeur de ses vues philosophiques, par le parti qu'il a tiré de l'idée fondamentale, Hilbert a bien fait sa chose de la nouvelle Géométrie.

La Géométrie non arguésienne. — Le théorème fondamental de la Géométrie projective est le théorème de Desargues. Deux triangles sont dits *homologues* lorsque les droites qui joignent chacun à chacun les sommets correspondants se coupent en un même point. Desargues a démontré que les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles homologues sont sur une même ligne droite; la réciproque est également vraie.

Le théorème de Desargues peut s'établir de deux manières :

1° En se servant des axiomes projectifs du plan et des axiomes métriques du plan;

2° En se servant des axiomes projectifs du plan et de ceux de l'espace.

Le théorème pourrait donc être découvert par un animal à deux dimensions, à qui une troisième dimension paraîtrait aussi inconcevable qu'à nous une quatrième, qui par conséquent ignorerait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui aurait vu se déplacer, dans le plan qu'il habite, des figures invariables analogues à nos corps solides, et qui, par conséquent, connaîtrait les axiomes métriques.

Le théorème pourrait être découvert également par un animal à trois dimensions qui connaîtrait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui, n'ayant jamais vu se déplacer de corps solides, ignorerait les axiomes métriques.

Mais pourrait-on établir le théorème de Desargues sans se servir ni des axiomes projectifs de l'espace, ni des axiomes métriques, mais seulement des axiomes projectifs du plan? On pensait que non, mais on n'en était pas sûr. M. Hilbert a tranché la question en construisant une *Géométrie non arguésienne*, qui est, bien entendu, une Géométrie plane.

La Géométrie non pascalienne. — M. Hilbert ne s'arrête pas là et il introduit encore une nouvelle conception. Pour bien la comprendre, il nous faut d'abord retourner un instant dans le domaine de l'Arithmétique. Nous avons vu plus haut s'élargir la notion de nombre, par l'introduction des *nombres non archimédiens.* Il nous faut une classification de ces nombres nouveaux, et pour l'obtenir nous allons classer d'abord les axiomes de l'Arithmétique en quatre groupes qui seront :

1° Les lois d'associativité et de commutativité de l'addition, la loi d'associativité de la multiplication, les deux lois de distributivité de la multiplication ; ou en résumé toutes les règles de l'addition et de la multiplication, sauf la loi de commutativité de la multiplication ;

2° Les axiomes de l'ordre, c'est-à-dire les règles du calcul des inégalités ;

3° La loi de commutativité de la multiplication, d'après laquelle on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit ;

4° L'axiome d'Archimède.

Les nombres qui admettront les deux premiers groupes seront dits *arguésiens;* ils pourront être *pascaliens* ou *non pascaliens*, selon qu'ils satisferont ou ne satisferont pas à l'axiome du troisième groupe ; ils seront *archimédiens* ou *non archimédiens*, suivant qu'ils satisferont ou non à l'axiome du quatrième groupe. Nous ne tarderons pas à voir la raison de ces dénominations.

Les nombres ordinaires sont à la fois arguésiens, pascaliens et archimédiens. On peut démontrer la loi de commutativité en partant des axiomes des deux premiers groupes et de l'axiome d'Archimède; il n'y a donc pas de nombres arguésiens, archimédiens et non pascaliens.

Il est aisé de former, en revanche, un système de nombres arguésiens, non pascaliens et non archimédiens. Les éléments de ce système seront des séries de la forme :

$$S = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \ldots,$$

où s est un symbole analogue à t, n un entier positif ou négatif, et T_0, T_1, ..., des nombres du système T; si donc on remplaçait les coefficients T_0, T_1, ... par les séries en t correspondantes, on aurait une série dépendant à la fois de t et de s. On additionnera les séries S d'après les règles ordinaires, et de même pour la multiplication de ces séries, on admettra les règles de distributivité et d'associativité, mais on admettra que la loi de commutativité n'est pas vraie et qu'au contraire $st = -ts$.

Il reste à *ranger* les séries dans un ordre déterminé pour satisfaire aux axiomes de l'ordre. Pour cela, on attribuera à la série S le signe du premier coefficient T_0; on dira qu'une série est plus petite qu'une autre quand, retranchée de celle-ci, elle donnera une différence positive. C'est donc toujours la même règle : t est regardé comme très grand par rapport à un nombre réel ordinaire quelconque, et s est regardé comme très grand par rapport à un nombre quelconque du système T.

La loi de commutativité n'étant pas vraie, ce sont bien des nombres non pascaliens.

Avant d'aller plus loin, je rappelle que Hamilton a depuis longtemps introduit un système de nombres complexes où la multiplication n'est pas commutative; ce sont les *quaternions*, dont les Anglais font un si fréquent usage en Physique mathématique. Mais, pour les quaternions, les axiomes de l'ordre ne sont pas vrais; ce qu'il y a donc d'original dans la conception de M. Hilbert, c'est que ses nouveaux nombres satisfont aux axiomes de l'ordre, sans satisfaire à la règle de commutativité.

Revenons à la Géométrie. Admettons les axiomes des trois premiers groupes, c'est-à-dire les axiomes projectifs du plan et de l'espace, les axiomes de l'ordre et le postulat d'Euclide; le théorème de Desargues s'en déduira, puisqu'il est une conséquence des axiomes projectifs de l'espace.

Nous voulons constituer notre Géométrie *sans nous servir des axiomes métriques;* le mot de *longueur* n'a donc encore pour nous aucun sens; nous n'avons pas le droit de nous servir du compas; en revanche, nous pouvons nous servir de la règle, puisque nous admettons que par deux points on peut faire passer une droite, en vertu de l'un des axiomes projectifs; nous savons également mener par un point une parallèle à une droite donnée, puisque nous admettons le postulatum d'Euclide. Voyons ce que nous pouvons faire avec ces ressources.

Nous pouvons définir l'homothétie de deux figures et, par elle, les proportions. Nous pouvons aussi définir l'égalité dans une certaine mesure.

Les deux côtés opposés d'un parallélogramme seront égaux *par définition,* nous savons ainsi reconnaître si deux segments sont égaux entre eux, *pourvu qu'ils soient parallèles.*

Grâce à ces conventions, nous sommes maintenant en mesure de comparer les longueurs de deux segments, mais *pourvu que ces segments soient parallèles.* La comparaison de deux longueurs dont la direction est différente n'a aucun sens, et il faudrait pour ainsi dire une unité de longueur différente pour chaque direction. Inutile d'ajouter que le mot *angle* n'a aucun sens.

Les longueurs seront ainsi exprimées par des nombres; mais ce ne seront pas forcément des nombres ordinaires. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que, si le théorème de Desargues est vrai, comme nous l'admettons, ces nombres appartiendront à un *système arguésien.* Inversement, étant donné un système quelconque S de nombres arguésiens, on peut construire une Géométrie telle que les longueurs des segments d'une droite soient justement exprimées par ces nombres.

L'équation du plan sera une équation linéaire comme dans la Géométrie analytique ordinaire; mais, comme dans le système S, la multiplication ne sera pas commutative, en général; il importe de faire une distinction et de dire que dans chacun des termes de cette équation linéaire, ce sera la coordonnée qui jouera le rôle de multiplicande et le coefficient constant qui jouera le rôle de multiplicateur.

Ainsi, à chaque système de nombres arguésiens, correspondra une Géométrie nouvelle satisfaisant aux axiomes projectifs, à ceux de l'ordre, au théorème de Desargues et au postulatum d'Euclide. Quelle est maintenant la signification géométrique de l'axiome arithmétique du troisième groupe, c'est-à-dire de la règle de commutativité de la multiplication? *La traduction géométrique de cette règle, c'est le théorème de Pascal;* je veux parler du théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique, en supposant que cette conique se réduit à deux droites.

Ainsi le théorème de Pascal sera vrai ou faux, selon que le système S sera pascalien ou non pascalien; et, comme il y a des systèmes non pascaliens, *il y aura également des Géométries non pascaliennes.*

Le théorème de Pascal peut se démontrer en partant des axiomes métriques; il sera donc vrai, si l'on admet que les figures peuvent se transformer non seulement par homothétie et translation, comme nous venons de le faire, mais encore par rotation.

Le théorème de Pascal peut également se déduire de l'axiome d'Archimède, puisque nous venons de voir que tout système de nombres arguésiens et archimédiens est en même temps pascalien; *toute Géométrie non pascalienne est donc en même temps non archimédienne.*

Le Streckenübertrager. — Citons encore une autre conception de Hilbert. Il étudie les constructions qu'on pourrait faire, non pas à l'aide de la règle et du compas, mais par le moyen de la règle et d'un instrument particulier, qu'il appelle *Streckenübertrager*, et qui permettrait de porter sur une droite un segment égal à un autre segment pris sur une autre droite. Le *Streckenübertrager* n'est pas l'équivalent du compas; ce dernier instrument permettrait de construire l'intersection de deux cercles, ou d'un cercle et d'une droite quelconque; le *Streckenübertrager* nous donnerait seulement l'intersection d'un cercle et d'une droite *passant par le centre de ce cercle.* M. Hilbert cherche donc quelles sont les constructions qui seront possibles avec ces deux instruments, et il arrive à une conclusion bien remarquable.

Les constructions qui peuvent se faire par la règle et le compas peuvent se faire également par la règle et le *Streckenübertrager*, *si ces constructions sont telles que le résultat en soit toujours réel.* Il est clair, en effet, que cette condition est nécessaire, car un cercle est toujours coupé *en deux points réels* par une droite menée par son centre. Mais il était difficile de prévoir que cette condition serait également suffisante.

Mais ce n'est pas tout; dans toutes ces constructions, comme l'a remarqué le premier M. Kürschák, il serait possible de remplacer le *Streckenübertrager* par l'*Eichmass*, instrument qui permet de porter, sur une droite quelconque à partir d'un point quelconque, non plus une longueur quelconque, mais une longueur égale à l'unité.

Une question analogue est traitée dans un autre article de M. Hilbert : *Über die Gleichheit des Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck*.

Dans la Géométrie plane ordinaire, le plan est symétrique, ce qui se traduit par l'égalité des angles à la base du triangle isoscèle.

On doit faire figurer cette *symétrie du plan* dans la liste des axiomes métriques. Dans toutes les Géométries plus ou moins étranges dont nous avons parlé jusqu'ici, dans celles du moins où l'on admet les axiomes métriques, dans la Géométrie métrique non archimédienne, dans les Géométries nouvelles de M. Dehn, dans celles qui ont fait l'objet du Mémoire *Über eine neue Begründung*..., cette symétrie du plan est toujours supposée. Est-elle une conséquence des autres axiomes métriques? Oui, comme le montre M. Hilbert, si l'on admet l'axiome d'Archimède. Non, dans le cas contraire. Il y a des Géométries non archimédiennes où tous les axiomes métriques sont vrais, à l'exception de celui de la symétrie du plan.

Dans cette Géométrie, il n'est pas vrai que les angles à la base d'un triangle isoscèle soient égaux; il n'est pas vrai que dans un triangle un côté soit plus petit que la somme des deux autres; le théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse n'est pas vrai. C'est pour cette raison que cette Géométrie s'appelle *non pythagoricienne*.

J'arrive à un important Mémoire de M. Hilbert, qui est intitulé : *Grundlagen der Geometrie*, qui porte par conséquent le même titre que sa *Festschrift*, mais où il se place cependant à un point de vue tout différent. Dans sa *Festschrift*, en effet, comme on l'a vu par l'analyse qui précède, les rapports de la notion d'espace et de la notion du groupe, tels qu'ils résultent des travaux de Lie, sont laissés de côté ou relégués au second plan. Les propriétés générales des groupes n'apparaissent pas dans la liste des axiomes fondamentaux. Il n'en est pas de même dans le Mémoire dont nous allons parler.

Par rapport aux idées de Lie, le progrès réalisé est considérable. Lie supposait que ses groupes étaient définis par des équations analytiques. Les hypothèses de M. Hilbert sont beaucoup plus générales. Sans doute cela n'est pas encore entièrement satisfaisant, puisque si la *forme* du groupe est supposée quelconque, sa *matière*, c'est-à-dire le plan qui subit les transformations, reste assujetti à être une *Zahlenmannigfaltigkeit* au sens de Lie. Ce n'est pas moins un pas en avant, et d'ailleurs M. Hilbert analyse mieux qu'on ne l'avait fait avant lui l'idée de *Zahlenmannigfaltigkeit* et donne des aperçus qui pourront devenir le germe d'une théorie axiomatique de l'*Analysis situs*.

Il est impossible de n'être pas frappé du contraste entre le point de vue où se place ici M. Hilbert et celui qu'il avait adopté dans sa *Festschrift*. Dans cette *Festschrift* les axiomes de continuité occupaient le dernier rang et la grande affaire était de savoir ce que devenait la Géométrie quand on les mettait de côté. Ici au contraire, c'est la continuité qui est le point de départ et M. Hilbert s'est surtout préoccupé de voir ce qu'on tire de la continuité seule, jointe à la notion du groupe.

Il nous reste à parler d'un Mémoire intitulé : *Flächen von konstanter Krümmung*. On sait que Beltrami a montré qu'il y a dans l'espace ordinaire des surfaces qui sont l'image du plan non euclidien, ce sont les surfaces à courbure constante négative; on sait quelle impulsion cette découverte a donnée à la Géométrie non euclidienne. Mais est-il possible de représenter le plan non euclidien tout entier sur une surface de Beltrami sans point singulier? M. Hilbert démontre que non.

En ce qui concerne les surfaces à courbure constante positives auxquelles se rapporte la Géométrie de Riemann, M. Hilbert démontre que, à part la sphère, il n'y a pas d'autre surface fermée de cette sorte.

Équations intégrales. — Dans ces dernières années, M. Hilbert s'est surtout occupé de perfectionner la théorie des équations intégrales. On sait que les fondements de cette théorie ont été jetés il y a quelques années par M. Fredholm; depuis, la fécondité de sa méthode et la facilité avec laquelle elle s'applique à tous les problèmes de la Physique mathématique se sont affirmées chaque jour avec plus d'éclat. C'est là certainement une des découvertes les plus remarquables qui aient été faites en Mathématiques, et, à elle seule, elle mériterait les plus hautes récompenses; si aujourd'hui, cependant, ce n'est pas au premier inventeur, mais à l'auteur de perfectionnements importants que nous avons décidé de décerner le prix Bolyai, c'est que nous avons dû prendre en considération, non seulement les travaux de M. Hilbert sur les équations intégrales, mais l'ensemble de son œuvre qui intéresse les branches les plus diverses de la Science mathématique et dont les autres parties de ce Rapport permettent d'apprécier l'intérêt. Mais nous ne pouvions aborder ce sujet sans rendre hommage au service immense que M. Fredholm a rendu à la Science.

La théorie de M. Fredholm est une généralisation des propriétés élémentaires des équations linéaires et des déterminants. Cette généralisation pouvait être poursuivie de deux façons différentes : soit en envisageant une infinité *discrète* de variables liées par une infinité d'équations linéaires, ce qui conduit aux déterminants d'ordre infini; soit en considérant une fonction inconnue $\varphi(x)$ (c'est-à-dire en dernière analyse une infinité *continue* d'inconnues) et cherchant à la déterminer à l'aide d'équations où cette fonction figure dans des intégrales sous le signe $\int$. C'est cette seconde voie où s'est engagé M. Fredholm.

Soit $K(x, y)$ une fonction qu'on appelle le *noyau;* l'intégrale

$$\psi(x) = \int K(x, y)\,\varphi(y)\,dy,$$

prise entre des limites fixes, peut être regardée comme une transformée de $\varphi(x)$ par une sorte de transformation linéaire et être représentée par $S\varphi(x)$.

Les équations intégrales peuvent alors se mettre sous la forme

$$a\,\varphi(x) + \lambda S\varphi(x) = f(x) \tag{1}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée; l'équation est dite *de la première sorte* si le coefficient a est nul, et *de la seconde sorte* si ce coefficient est égal à 1.

La relation (1) doit être satisfaite pour toutes les valeurs de y comprises dans le champ d'intégration; elle équivaut donc à une infinité *continue* d'équations linéaires.

Fredholm a traité le cas des équations de la seconde sorte; la solution peut se mettre alors sous la forme du quotient de deux expressions analogues aux déterminants et qui sont des fonctions entières de λ. Pour certaines valeurs de λ, le dénominateur s'annule. On peut alors trouver des fonctions $\varphi(x)$ (appelées *fonctions propres*) qui satisfont à l'équation (1) quand on y remplace $f(x)$ par 0.

Le résultat suppose que le noyau $K(x, y)$ est limité; s'il n'en était pas ainsi on serait amené à envisager les noyaux *réitérés;* si l'on répète n fois la substitution linéaire S, on obtient une substitution de même forme avec un noyau différent $K_n(x, y)$; il suffit qu'un de ces noyaux réitérés K_n soit limité pour que la méthode reste applicable moyennant un artifice très simple. Or cela arrive dans un grand nombre de cas, comme l'a montré Fredholm. La généralisation, pour le cas où la fonction inconnue dépend de plusieurs variables et pour celui où il y a plusieurs fonctions inconnues, se fait sans difficulté.

Fredholm a appliqué ensuite sa méthode à la résolution du problème de Dirichlet et à celle d'un problème d'élasticité, montrant ainsi par quelle voie on peut aborder toutes les questions de Physique mathématique.

Telle est la part du premier inventeur; quelle est maintenant celle de M. Hilbert? Considérons d'abord un nombre fini d'équations linéaires; si le déterminant de ces équations est symétrique, leurs premiers membres peuvent être regardés comme les dérivées d'une forme quadratique, et il en résulte pour les équations de cette forme une série de propriétés bien dignes d'intérêt et bien connues des géomètres. Le cas correspondant pour les équations intégrales est celui où le noyau est symétrique, c'est-à-dire où

$$K(x, y) = K(y, x).$$

C'est celui auquel s'attache M. Hilbert. Les propriétés des formes quadratiques d'un nombre fini de variables peuvent être généralisées de façon à s'appliquer aux équations intégrales de cette forme symétrique. La généralisation se fait par un simple passage à la limite; mais ce passage présentait des difficultés dont M. Hilbert s'est tiré par une méthode dont on doit admirer la simplicité, la sûreté et la généralité. Les développements auxquels on parvient sont *uniformément* convergents; mais cette uniformité se présente sous une forme nouvelle qui mérite d'attirer l'attention. Dans les développements figure une fonction arbitraire $u(x)$ (ou plusieurs), et le reste de la série quand on y a pris n termes est inférieur à une limite qui ne dépend que de n et ne dépend pas de la fonction arbitraire pourvu que cette fonction soit assujettie à l'inégalité

$$\int u^2(x)\,dx < 1,$$

l'intégrale étant prise entre des limites convenables. C'est là une considération entièrement nouvelle, utilisable dans des problèmes bien différents.

Hilbert retrouve ainsi quelques-uns des théorèmes de Fredholm par une voie nouvelle; mais j'insisterai surtout sur les résultats les plus originaux.

Tout d'abord le dénominateur des expressions de Fredholm est une fonction de λ qui n'admet que des zéros réels et c'est là une généralisation du théorème élémentaire relatif à « l'équation en S ». Vient ensuite une formule où figurent sous le signe $\int$ deux fonctions arbitraires $x(s)$ et $y(s)$ et que l'on doit considérer comme la généralisation des formules élémentaires qui permettent la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés.

Mais j'ai hâte d'arriver à la question du développement d'une fonction arbitraire procédant suivant les fonctions propres. Ce développement, analogue à la série de Fourier, ou à tant d'autres séries qui jouent un rôle capital en Physique mathématique, est-il possible dans le cas général? La condition suffisante pour qu'une fonction soit susceptible d'un tel développement, c'est qu'on puisse la mettre sous la forme $Sg(x)$, $g(x)$ étant continue. C'est là la forme définitive du résultat, tel qu'Hilbert l'énonce dans sa cinquième Communication. Dans la première il avait dû lui imposer certaines restrictions; nous devons ici citer le nom de M. Schmidt qui, dans l'intervalle, avait fait paraître un travail qui a aidé M. Hilbert à s'affranchir de ces restrictions. La seule condition imposée à notre fonction est de pouvoir se mettre sous la forme $Sg(x)$, et au premier abord elle paraît assez complexe, mais dans un grand nombre de cas et par exemple si le noyau est une fonction de Green, elle exige seulement que la fonction possède un certain nombre de dérivées.

M. Hilbert fut conduit ensuite à développer ses vues de la manière suivante : il considère cette fois une forme quadratique à un nombre infini de variables et il en étudie les transformations orthogonales; c'est comme s'il voulait étudier les diverses formes de l'équation d'une surface du second degré dans l'espace à un nombre infini de dimensions lorsqu'on la rapporte à divers systèmes d'axes rectangulaires. Il forme à cet effet ce qu'il appelle la *forme résolvante* de la forme donnée. Soit $K(x)$ la forme donnée, $K(\lambda, x, y)$ la forme résolvante cherchée; elle sera définie par l'identité

$$K(\lambda, x, y) - \frac{1}{2}\lambda\, \Sigma_r \frac{dK(x)}{dx_r}\, \frac{dK(\lambda, x, y)}{dx_r} = \sum x_r y_r.$$

Lorsque la forme $K(x)$ ne dépend que d'un nombre fini de variables, la forme résolvante se présente comme le quotient de deux déterminants qui sont des polynomes entiers en λ. L'auteur applique à ce quotient les procédés de passage à la limite qui lui sont familiers; la limite du quotient existe même quand celles du numérateur et du dénominateur n'existent pas.

Dans le cas d'un nombre fini de variables, $K(\lambda, x, y)$ est une fonction rationnelle de λ et cette fonction rationnelle peut être décomposée en fractions simples. Qu'advient-il de cette décomposition quand le nombre des variables devient infini? Les pôles de la fonction rationnelle en λ peuvent, dans ce cas, ou bien tendre vers certains points limites en nombre infini, mais discrets. L'ensemble de ces points constitue ce que l'auteur appelle le *spectre discontinu* de sa forme. Ils peuvent aussi admettre comme points limites tous les points d'un ou de plusieurs segments de l'axe réel. L'ensemble de ces segments constitue le *spectre continu* de la forme.

Les fractions simples correspondant au spectre discontinu formeront par leur ensemble une série convergente; celles qui correspondent au spectre continu se changeront à la limite en une intégrale de la forme

$$\int \frac{\sigma\, d\mu}{\lambda - \mu}$$

où l'on fait varier la variable d'intégration μ tout le long des segments du spectre continu, et où σ est une fonction convenable de μ. La fonction rationnelle $K(\lambda, x, y)$ n'a donc pas alors pour limite une fonction méromorphe, mais une fonction uniforme avec des coupures. La décomposition en éléments simples ainsi transformée reste valable. Si la forme donnée est *limitée*, c'est-à-dire si elle ne peut dépasser une certaine valeur quand la somme des carrés des variables est inférieure à 1, on peut déduire de là une manière de simplifier cette forme par une transformation orthogonale analogue à la simplification qu'éprouve l'équation d'un ellipsoïde quand on rapporte cette surface à ses axes.

Parmi les formes quadratiques nous distinguerons celles qui sont *proprement continues* (vollstetig) c'est-à-dire celles dont l'accroissement tend vers zéro, quand les accroissements des variables tendent simultanément vers zéro d'une manière quelconque. Une pareille forme ne possède pas de spectre continu et il en résulte des simplifications considérables dans les formules.

D'autres théorèmes sur les systèmes de formes quadratiques simultanées, sur les formes bilinéaires, sur la forme d'Hermite, s'étendent également au cas d'un nombre infini de variables.

Il y avait dans cette théorie le germe d'une extension de la méthode de Fredholm à des noyaux auxquels l'analyse du géomètre suédois n'était pas applicable, et des élèves de M. Hilbert devaient mettre ce fait en évidence. Quoi qu'il en soit, M. Hilbert s'occupa d'abord d'étendre sa façon d'envisager les équations intégrales aux cas où le noyau est dissymétrique. A cet effet il introduit un système quelconque de fonctions orthogonales, suivant lesquelles il est possible de développer une fonction arbitraire par des formules analogues à celle de Fourier. Au lieu d'une fonction inconnue, il prend comme inconnues les coefficients du développement de cette fonction; une équation intégrale peut ainsi être remplacée par un système d'une infinité *discrète* d'équations linéaires entre une infinité *discrète* de variables. La théorie des équations intégrales se trouve ainsi rattachée d'une part aux idées de M. von Koch sur les déterminants infinis, et d'autre part aux recherches de M. Hilbert que nous venons d'analyser et où le rôle essentiel est joué par des fonctions dépendant d'une infinité discrète de variables.

A chaque noyau correspondra ainsi une forme bilinéaire dépendant d'une infinité de variables. Si le noyau est symétrique, cette forme bilinéaire est symétrique et peut être regardée comme dérivant d'une forme quadratique. Si le noyau satisfait aux conditions énoncées par Fredholm, on voit que cette forme quadratique est proprement continue et par conséquent ne possède pas de spectre continu. C'est là une manière de retrouver les résultats de Fredholm, et, si indirecte qu'elle soit, elle ouvre des vues entièrement neuves sur les raisons profondes de ces résultats et par là sur la possibilité de nouvelles généralisations.

Les équations intégrales se prêtent à la résolution de certaines équations différentielles dont les intégrales sont assujetties à certaines conditions aux limites et c'est là un problème fort important pour la Physique mathématique. Fredholm l'avait résolu dans quelques cas particuliers et M. Picard avait généralisé ses méthodes. M. Hilbert devait faire de la question une étude systématique. Considérons une équation différentielle

$$\Delta u = f$$

où u est une fonction inconnue d'une ou de plusieurs variables, f une fonction connue et Δ une expression différentielle linéaire quelconque. Cette équation peut être considérée au même titre qu'une équation intégrale comme un système infini d'équations linéaires liant une infinité continue de variables, comme une sorte de transformation linéaire d'ordre infini permettant de passer de f à u. Si l'on résout cette équation, on trouve

$$u = Sf$$

$S(f)$ se présentant cette fois sous la forme d'une expression intégrale. Alors Δ et S sont les symboles de deux transformations linéaires d'ordre infini inverses l'une de l'autre. Le noyau de cette expression intégrale $S(f)$ est ce qu'on appelle une *fonction de*

Green. Cette fonction avait été rencontrée pour la première fois dans le problème de Dirichlet, c'était alors la fonction de Green proprement dite, trop connue pour que j'insiste; on en avait déjà obtenu des généralisations diverses. Il appartenait à Hilbert de donner une théorie complète. A chaque expression différentielle Δ, supposée du second ordre et de type elliptique, à chaque système de conditions aux limites, correspond une fonction de Green. Citons la formation des fonctions de Green dans le cas où l'on n'a qu'une variable indépendante et où elles se présentent sous une forme particulièrement simple, et la discussion des diverses formes que peuvent affecter les conditions aux limites. Cela posé, imaginons qu'on ait résolu le problème dans le cas d'une équation différentielle auxiliaire peu différente de celle qui est proposée, n'en différant pas en tout cas par les termes du second ordre; on pourra alors, par une transformation simple, ramener le problème à la résolution d'une équation de Fredholm, où le rôle du noyau est joué par la fonction de Green relative à l'équation différentielle auxiliaire.

Toutefois la considération de cette équation auxiliaire, la nécessité de la choisir et de la résoudre pouvait encore constituer un embarras. M. Hilbert s'en est affranchi dans sa sixième Communication. L'équation différentielle est encore transformée en une équation de Fredholm, où le rôle du noyau est joué par une fonction que l'auteur appelle *Paramétrix*. Elle est assujettie à toutes les conditions qui définissent la fonction de Green, une seule exceptée, la plus gênante il est vrai : elle n'est pas astreinte à satisfaire à une équation différentielle; elle reste donc arbitraire dans une très large mesure. La transformation subie par l'équation différentielle est comparable à celle qu'éprouverait un système d'équations linéaires si l'on remplaçait les variables primitives par des combinaisons linéaires convenablement choisies de ces variables. La méthode n'est nullement restreinte au cas où l'équation différentielle envisagée est adjointe à elle-même.

M. Hilbert a examiné en passant une foule de questions relatives aux équations intégrales et montré la possibilité de leur application dans les domaines les plus variés. Il a, par exemple, étendu la méthode au cas d'un système de deux équations aux dérivées partielles de premier ordre du type elliptique, aux équations intégrales *polaires*, c'est-à-dire où le coefficient a dans l'équation intégrale (1), au lieu d'être constamment égal à 1, est une fonction de x et en particulier est égal tantôt à $+1$, tantôt à -1.

Il l'a appliquée au problème de Riemann pour la formation des fonctions d'une variable complexe assujetties à certaines conditions aux limites, au théorème des oscillations de Klein, à la formation des fonctions fuchsiennes, et en particulier au problème suivant :

Déterminer λ *de façon que l'équation*

$$\frac{d}{dx}\left[(x-a)(x-b)(x-c)\frac{dy}{dx}\right]+(x+\lambda)y=0$$

soit une équation fuchsienne.

Une des applications les plus inattendues est celle que fait M. Hilbert à la théorie des volumes et des surfaces de Minkowski, et par laquelle il rattache à la méthode de Fredholm une question importante pour ceux qui s'intéressent à l'analyse philosophique des notions fondamentales de la Géométrie.

Principe de Dirichlet. — On sait que Riemann avait démontré d'un trait de plume les théorèmes fondamentaux sur le problème de Dirichlet et la représentation conforme en s'appuyant sur ce qu'il appelait le principe de Dirichlet; envisageant une certaine intégrale dépendant d'une fonction arbitraire U, et que nous appellerons l'intégrale de Dirichlet, il montrait que cette intégrale ne peut s'annuler et il en concluait qu'elle devait avoir un minimum, et que ce minimum ne pouvait être atteint que quand la fonction U était harmonique. Ce raisonnement était fautif, comme on l'a montré depuis, car il n'est pas certain que le minimum puisse être effectivement atteint, et, s'il l'est, qu'il puisse l'être pour une fonction continue.

Les résultats étaient exacts cependant; on a beaucoup travaillé sur cette question, on a montré que le problème de Dirichlet peut toujours être résolu; et on l'a même effectivement résolu; il en est de même pour un grand nombre d'autres problèmes de Physique mathématique qui auraient pu autrefois paraître abordables par la méthode de Riemann. Ce n'est pas ici le lieu de faire le long historique de ces travaux; je me bornerai à mentionner le point final d'aboutissement qui est la méthode de Fredholm.

Il semblait que ce succès eût rejeté pour jamais dans l'oubli l'aperçu de Riemann et le principe de Dirichlet lui-même. Beaucoup le regrettaient cependant; ils sentaient qu'on était privé ainsi d'un instrument puissant et ils ne pouvaient croire que la force de persuasion que conservait malgré tout l'argument de Riemann, et qui semblait reposer sur je ne sais quelle adaptation de la pensée mathématique à la réalité physique, ne fût en réalité qu'une pure illusion due à de mauvaises habitudes d'esprit. M. Hilbert voulut rechercher s'il ne serait pas possible, avec les nouvelles ressources de l'Analyse mathématique, de transformer l'aperçu de Riemann en une démonstration rigoureuse.

Voici comment il y est parvenu : considérons l'ensemble des fonctions U satisfaisant aux conditions proposées; choisissons dans cet ensemble une suite indéfinie S de fonctions telles que les intégrales de Dirichlet correspondantes tendent en décroissant vers leur limite inférieure. Il n'est pas certain qu'en chaque point du domaine envisagé cette suite S converge; elle pourrait osciller entre certaines limites. Mais on peut détacher dans S une suite partielle S_1 qui converge en un point M_1 du domaine; dans S_1, détachons une autre suite partielle S_2 qui convergera toujours en M_1, mais qui de plus convergera encore en M_2. En continuant de la sorte nous obtiendrons une suite qui convergera en autant de points que nous voudrons; et, par un artifice simple, nous en déduirons une autre suite qui convergera en tous les points d'un ensemble dénombrable, par exemple en tous les points dont les coordonnées sont rationnelles. Si l'on pouvait alors démontrer que les dérivées de toutes les fonctions de la suite sont inférieures en valeur absolue à une limite donnée, on pourrait conclure immédiatement que la suite converge uniformément dans tout le domaine, et l'application des règles du calcul des variations ne présenterait plus de difficulté spéciale.

Pour établir le point qui reste à démontrer, M. Hilbert a employé deux artifices différents, il n'a pas développé le premier autant qu'il serait désirable, et il s'est surtout attaché au second. Celui-ci consiste à remplacer la fonction u proposée par la fonction v qui s'en déduit par une double quadrature et dont elle est la dérivée seconde par rapport aux deux variables indépendantes. Les dérivées de v étant les intégrales premières de u, on peut leur assigner une limite supérieure, à l'aide de quelques inégalités faciles à démontrer. Seulement il faut se résigner à un détour nouveau et à un artifice d'ailleurs simple pour appliquer à cette nouvelle fonction inconnue v les règles du calcul des variations qui s'appliquaient tout naturellement à la fonction u.

Il est inutile d'insister sur la portée de ces découvertes, qui dépasse de beaucoup le problème spécial de Dirichlet. Nous ne devons pas nous étonner que de nombreux chercheurs se soient engagés sur la voie ouverte par M. Hilbert. Nous devons citer MM. Levi, Zaremba et Fubini; mais je crois avant tout devoir signaler M. Ritz qui, s'écartant un peu de la route commune, a imaginé une méthode de calcul numérique applicable à tous les problèmes de Physique mathématique, mais qui y a utilisé plusieurs des procédés ingénieux créés par son maître M. Hilbert.

M. Hilbert a récemment appliqué sa méthode à la question de la représentation conforme. Je n'analyserai pas ce Mémoire dans le détail. Je me bornerai à dire qu'il fournit le moyen de faire cette représentation pour un domaine limité par un nombre infini de courbes ou pour une surface de Riemann simplement connexe d'une infinité de feuillets. C'est donc une solution nouvelle du problème de l'uniformisation des fonctions analytiques.

Divers. — Nous avons passé en revue les principaux sujets d'études où M. Hilbert a marqué sa trace, ceux pour lesquels il montrait une sorte de prédilection et où il est revenu à diverses reprises; nous devons signaler encore d'autres problèmes dont il s'est occupé occasionnellement et sans y insister. Je crois devoir me borner à énoncer dans un ordre chronologique les résultats les plus saillants qu'il a obtenus de la sorte.

Si l'on excepte les formes binaires, les formes quadratiques, et les formes ternaires biquadratiques, la forme définie la plus générale de son degré n'est pas décomposable en une somme de carrés d'autres formes en nombre fini.

On peut trouver par des procédés élémentaires les solutions en nombres entiers d'une équation diophantine de genre nul.

Si un polynome entier dépendant de plusieurs variables et de plusieurs paramètres est irréductible quand ces paramètres restent arbitraires, on peut toujours attribuer à ces paramètres des valeurs entières telles que le polynome reste irréductible.

Par conséquent il existe toujours des équations d'ordre n à coefficients entiers et admettant un groupe donné.

Le théorème fondamental de Dedekind sur les nombres complexes à multiplication commutative peut s'établir aisément en s'appuyant sur l'un des lemmes fondamentaux de la théorie des invariants de M. Hilbert.

L'équation diophantine, obtenue en égalant à ± 1 le discriminant d'une équation algébrique de degré n, possède toujours des solutions rationnelles, mais sauf pour le second et le troisième degré ne possède pas de solutions entières.

Parmi les surfaces réelles du quatrième ordre, certaines formes, logiquement concevables, ne sont pas possibles; par exemple il ne peut pas y en avoir qui soient composées de douze surfaces fermées simplement connexes ou d'une surface unique avec onze trous.

Conclusions. — Après cet exposé, un long commentaire serait inutile. On voit quelle a été la variété des recherches de M. Hilbert, l'importance des problèmes auxquels il s'est attaqué. Nous signalerons l'élégance et la simplicité des méthodes, la clarté de l'exposition, le souci de l'absolue rigueur. En cherchant à être parfaitement rigoureux, on risque parfois d'être long, et ce n'est pas là acheter trop cher une correction sans laquelle les Mathématiques ne seraient rien. Mais M. Hilbert a su éviter ce que ces longueurs auraient pu avoir d'un peu pénible pour ses lecteurs, en ne leur laissant jamais perdre de vue le fil conducteur qui lui a servi à s'orienter. On voit toujours aisément par quel enchaînement d'idées il a été amené à se poser un problème et à en trouver la solution. On sent que, plus analyste que géomètre au sens ordinaire du mot, il a néanmoins aperçu l'ensemble de son travail d'un coup d'œil, avant d'en distinguer les détails, et il sait faire profiter le lecteur de cette vue d'ensemble.

M. Hilbert a exercé une influence considérable sur les progrès récents des Sciences mathématiques, non seulement par ses travaux personnels, mais par son enseignement, par les conseils qu'il donnait à ses élèves et qui leur permettaient de contribuer à leur tour à ce développement de nos connaissances en se servant des méthodes créées par leur maître.

Il n'est pas besoin, ce semble, d'en dire davantage pour justifier le choix de la Commission, qui a été unanime à attribuer à M. Hilbert le prix Bolyai pour la période 1905-1909.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

CHWOLSON (O.-D.). — *Traité de Physique*, trad. par *Édouard Davaux*, notes de *Eug.* et *Fr. Cosserat*. T. III, fasc. 2 : Thermodynamique générale. Fusion et vaporisation. In-8, 350 p. avec 206 fig. Paris, A. Hermann et fils. 11 fr.

CURIE (Mme P.). — *Traité de Radioactivité*, 2 vol. in-8, XII-428 et IV-548 p., avec 193 fig. et 7 pl. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

ENNIS (W.-Duane). — *Applied thermodynamics for engineers*. VIII-438 p. with 316 illustrations, diagrs. New-York, Van Nostrand. 4 $ 50.

KOHLRAUSCH (Frdr.). — *Gesammelte Abhandlungen*. Hrsg. v. *Wilh. Hallwachs*, *Adf. Heydweiller*, *Karl Strecker* u. *Otto Wiener*. I. Bd. Elastizität, Wärme, Optik, absolute elektr. Messgn. u. Verschiedenes. Gr. in-8, XXXV-1108 p. avec 1 portrait, 1 planche et 117 fig. Leipzig, J.-A Barth. 25 m.; relié, 27 m.

SCHWARZSCHILD (K.). — *Aktinometrie der Sterne B. D. bis zur Grösse 7.5 in der Zone* 0°-20° *Deklination* : Tl. A. Unter Mitwirkg. v. Br. Meyermann, A. Kohlschütter u. O. Birck. (*Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse.* Neue Folge. VI. Bd. N° 6.) In-8, hrsg, VII-115 p. avec 2 fig. et 1 planche. Berlin, Weidmann. 12 m.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEHMER (DEBRICK-NORMAN). — FACTOR TABLE FOR THE FIRST TEN MILLIONS CONTAINING THE SMALLEST FACTOR OF EVERY NUMBER NOT DIVISIBLE BY 2, 3, 5 OR 7 BETWEEN THE LIMITS 0 AND 10 017 000. Format $31^{cm},5 \times 43^{cm},5$, IX-476 pages. Washington, D. C., Carnegie Institution of Washington, Publication nº 105, 1909.

M. Lehmer a pris une disposition qui avait été proposée en 1864 par un mathématicien français, V.-A. Lebesgue, Correspondant de l'Institut, dans un Opuscule intitulé : *Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers* (Paris, Gauthier-Villars, 1864, gr. in-8). On sait que, pour faciliter la construction des Tables de facteurs premiers des nombres, Euler a proposé d'employer la progression arithmétique dont les termes ont pour forme générale $30q + r$ [(*De Tabula numerorum usque*... (*Novi Commentarii*..., XIX, 1774, in-4, p. 132)]. La méthode suivie par Lebesgue est fondée sur la même idée; en effet, il emploie la progression arithmétique dont les termes ont pour forme générale $210q + r$.

M. Lehmer n'a pas adopté la représentation, faite par Lebesgue, des dizaines des facteurs premiers par des lettres, pour réduire l'espace occupé par sa Table, ni l'écriture explicite des nombres dont on inscrit le moindre facteur premier. Il a remplacé ces derniers nombres par les quotients obtenus en les divisant par 210, mais sans faire remarquer que l'idée de la construction d'une Table de facteurs premiers où sont inscrits le quotient et le reste obtenus en divisant un nombre par 210 avait été émise plusieurs années avant l'apparition de sa *Factor Table*.

M. Lehmer a écrit les deux membres de phrase suivants, à la page VI de son *Introduction* : « In the new form of arrangement... » et « This simple plan, which seems not to have been used before... », qui font penser au lecteur que M. Lehmer a imaginé l'arrangement qu'il a adopté. Cependant M. Lehmer connaît l'Opuscule de Lebesgue, puisqu'il écrit à la page VIII de son *Introduction* : « In a tract published in 1864, entitled *Tables diverses*, etc., Lebesgue has given a small table in which the arrangement is practically the same as that adopted in the tables herewith published ».

La *Factor Table* de M. Lehmer a une hauteur de $3^{dm},15$. Lorsqu'elle est fermée, sa largeur est de $4^{dm},35$; lorsqu'elle est ouverte, sa largeur est de 9^{dm} : elle est donc d'un emploi peu commode. Les chiffres de cette Table, petits et gras, ont été obtenus par la photographie et n'ont pas la netteté des caractères d'imprimerie des anciennes Tables publiées par Burckhardt, Dase, Rosenberg et M. J. Glaisher. On sait que ces Tables forment un ensemble de 1008 Tableaux in-4 qui sont imprimés sur papier fort, et où l'on trouve immédiatement le moindre facteur premier d'un nombre non divisible par 2, 3 ou 5 et inférieur à 9 millions. La *Factor Table* de M. Lehmer contient 476 Tableaux dont chacun occupe une page. Le papier employé est mince et il fléchit quand on tourne les pages. Elle coûte 104^{fr} : ce prix paraît élevé quand on pense qu'elle a été publiée grâce à la libéralité d'un des Mécènes américains, M. Carnegie.

M. Lehmer a fait consciencieusement l'important travail qu'il présente aux mathématiciens; il a relevé des fautes dans les anciennes Tables de facteurs premiers et il a vérifié les résultats de ses calculs avec le Manuscrit de Kulik qui contient la décomposition en facteurs premiers des nombres non divisibles par 2, 3 et 5, jusqu'à 100 330 201. (Ce Manuscrit est, depuis 1867, dans la Bibliothèque de l'Académie royale de Vienne.) Aussi, M. Lehmer mérite-t-il d'être louangé à ce sujet. Mais il y a des réserves à faire en ce qui concerne la publication relative aux nombres des 9 premiers millions.

M. Lehmer résume l'historique de la construction des Tables de facteurs premiers des nombres d'après l'exposition magistrale que M. J. Glaisher en a faite dans sa *Factor Table*. Mais il a oublié de parler des travaux les plus récents relatifs à cette construction et dus notamment à MM. L. Saint-Loup, C.-A. Laisant, E. Lebon, G. Tarry et J. Deschamps. Ils ont cependant été publiés dans des Recueils périodiques bien connus.

M. Saint-Loup a publié en 1890, dans les *Ann. sc. de l'Éc. Norm. sup.* (3^e série, t. VII, p. 89), un Mémoire intitulé *Sur la représentation graphique des diviseurs des nombres.*

M. Laisant a exposé, le 19 septembre 1891, à la Session de Marseille de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, un Mémoire intitulé : *Sur une méthode pour la construction d'une Table de nombres premiers* (*Compte rendu de la* 20^e *Session*, 2^e Partie, 1891, p. 165).

M. Lebon a d'abord envoyé, pour prendre date, une Note à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, Paris, t. CXLI, 3 juillet 1905, p. 78); il a publié un Mémoire dans le *Jornal de Sciencias mathematicas, physicas et naturaes* de l'Académie R. des Sciences de Lisbonne (3^{me} série, t. VII, 27 Abril 1906, p. 209, Mémoire daté du 1er août 1905), et un Opuscule intitulé : *Tables de Caractéristiques relatives à la base* 2310 *des facteurs premiers d'un nombre inférieur à* 30030, *non divisible par* 2, 3, 5, 7 *ou* 11 (Paris, Delalain frères, 1er mars 1906, in-8), qui a été honoré d'une Subvention de l'Association française pour l'Avancement des Sciences; il a fait, sur les Tables de Caractéristiques, des Communications aux Congrès des Sociétés savantes réunies à Paris en 1906 et en 1908 par le Ministère de l'Instruction publique, et aux Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences tenus à Reims en 1907 et à Clermont-Ferrand en 1908 (*Comptes rendus*); il a publié des Mémoires dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (28 avr. 1906, p. 168; 24 nov. 1906, p. 270; 11 janv. 1908, p. 4; 25 avr. 1908, p. 60); dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Scienze fisiche, matematiche e naturali*, (Roma, 22 Apr. 1906, p. 439); dans le *Bulletin of the American mathematical Society* (Lancaster and New York, Nov. 1906, p. 74), qui, en outre, contient une analyse de la *Table de Caractéristiques* (déc. 1908, p. 139); le *Bulletin de la Société des Gens de Sciences* (Paris, août 1906, p. 1); dans *Il Pitagora* (Palermo, Marzo-Apr., 1907, p. 81); dans l'*Enseignement mathématique* (Genève et Paris, 15 mai 1907). La plupart de ces Écrits ont été cités ou analysés par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (Berlin) et par la *Revue semestrielle des Publications mathématiques* (Amsterdam).

Les Mémoires de M. Tarry sur les facteurs premiers des nombres ont été publiés dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (26 mai 1906, p. 174; 9^e série, t. IX, n^o 2, 1907, p. 56), et dans les *Comptes rendus* du Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences tenu à Reims en 1907. On doit aussi à M. Tarry un Opuscule intitulé : *Tablettes des cotes relatives à la base* 20580 *des facteurs premiers d'un nombre inférieur à* 100489 *et non divisible par* 2, 3, 5 *ou* 7 (Gauthier-Villars, 1906, in-8 jésus). Un article sur cet Opuscule a été publié par le Journal *Mathesis* (Gand et Paris, 1907, p. 178).

M. Deschamps a publié ses recherches dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (9^e série, t. IX, n^o 4, 1907; t. X, n^o 1, 1908), et il les a communiquées au Congrès des Sociétés savantes réunies à Paris en 1908 par le Ministère de l'Instruction publique.

Les Auteurs de toutes les publications précédentes ont eu pour but de proposer des modes de construction de Tables de facteurs premiers d'une étendue moindre que les Tables imprimées existantes. Supposons que des Tables analogues à ces dernières soient construites jusqu'à 100 millions, et admettons qu'il n'y ait pas d'accroissement de surface en rapport avec l'accroissement de la valeur du nombre, ce qui est douteux, car, dans ce genre de Tables, les nombres sont explicitement inscrits : l'ensemble des Tables déjà construites de 1 à 8999999 et des Tables que l'on construirait dans le même genre de 9 millions à 100 millions formerait 100 Volumes in-4 d'environ 112 Tableaux chacun. L'expérience faite par M. Lehmer montre que les 49 Tableaux contenant les moindres facteurs premiers des nombres du 10^e million font gagner par million 19 Tableaux des Tables anciennes, ce qui réduit à 83, au lieu de 100, le nombre des volumes in-4 contenant les facteurs premiers des nombres de 1 à 100 millions. Il me semble que cette réduction du nombre de Volumes paraîtra trop faible pour qu'on pense à continuer dans la voie où M. Lehmer s'est engagé.

En résumé, il est nécessaire d'étudier les diverses propositions qui ont été faites, même d'en imaginer d'autres, avant de commencer la publication d'une nouvelle Table donnant les facteurs premiers des nombres jusqu'à une limite très élevée.

Sans faire allusion aux Écrits cités plus haut, sans même les critiquer, M. Lehmer a publié une *Factor Table* dont 59 Tableaux seulement sur 476 contiennent des renseignements inédits. Afin qu'il puisse juger de l'opportunité de son immense publication, n'y aurait-il pas lieu qu'il la divisât en deux Volumes se vendant séparément? Le premier Volume comprendrait les 427 Tableaux relatifs aux facteurs premiers des nombres de 1 à 9 millions; le second, les 49 Tableaux relatifs aux facteurs premiers des nombres du 10^e million. Ce petit Volume, qui renfermerait la partie originale du travail de M. Lehmer, serait, je pense, favorablement accueilli par les mathématiciens.

Er. L.

LANGE (MAX). — DAS SCHACHSPIEL UND SEINE STRATEGISCHEN PRINZIPIEN, mit den Bildnissen E. Laskers und P. Morphys, 1 Schachbrett-Tafel und 43 Diagrammen. 1 volume in-8, IV-107 pages. Leipzig, Teubner, 1910.

Ce petit Volume, qui est le 281e de la Collection *Aus Natur und Geisteswelt*, est une introduction fort intéressante à la théorie du noble jeu des échecs. Un premier Chapitre fait connaître les règles du jeu, la disposition du damier, le mouvement des différentes pièces. Le second traite des applications et de quelques parties destinées à servir d'illustration aux règles posées. C'est dans le troisième que sont développées la stratégie et les finesses du jeu. Un dernier article contient enfin ce qu'on peut appeler les parties finales : tour et roi contre roi, le roi et deux fous contre le roi, le roi, un fou et un cavalier contre le roi, enfin le roi et un pion contre le roi. Ce petit Opuscule, qui sera bien accueilli des joueurs d'échecs, se termine par des indications bibliographiques relatives aux Ouvrages et aux Journaux qui traitent des échecs. Nous y avons appris qu'il n'y a pas moins de six périodiques, hebdomadaires ou mensuels, destinés aux joueurs d'échecs : deux allemands, un autrichien, un anglais, un italien et un français.

J. G.

STURM (R.). — MAXIMA UND MINIMA IN DER ELEMENTAREN GEOMETRIE. 1 volume in-8, VI-138 pages, avec 32 figures dans le texte. Leipzig et Berlin, Teubner, 1910.

Ce petit Volume doit évidemment son origine et son inspiration aux profondes études qu'a faites l'auteur sur ceux des travaux de Steiner qui se rapportent à la Géométrie élémentaire et, en particulier, sur le célèbre Mémoire relatif aux problèmes de maximum et de minimum dans le plan, sur la sphère et dans l'espace. Ces études ont donné naissance à quelques leçons, que M. Sturm a faites à l'Université de Breslau et qu'il a réunies ici pour le plus grand profit des maîtres et des élèves des Écoles supérieures. Il nous suffira évidemment de donner une analyse des différents Chapitres de l'Ouvrage.

Après une Introduction qui contient les deux théorèmes fondamentaux d'Arithmétique sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs dont la somme est constante et sur le minimum d'une somme de facteurs dont le produit est constant, M. Sturm traite successivement des maxima et minima dans le triangle, dans le quadrilatère, dans le cercle, dans les polygones, dans le segment de cercle, etc.

La seconde Partie, consacrée à la Géométrie de l'espace, traite plus particulièrement des prismes, des pyramides, des pyramides doubles, des angles polyèdres.

Nos collègues des lycées de France, si désireux de perfectionner et de renouveler leur enseignement, tireront grand profit du nouvel Ouvrage du savant géomètre de Breslau. G. J.

MÉLANGES.

SUR LES TRAJECTOIRES DE LIOUVILLE;

Par M. HADAMARD.

1. On sait (1), depuis Liouville, que le mouvement d'un système à n paramètres $q_1, \ldots, q_n$, pour lequel la force vive a l'expression

$$(1) \qquad 2T = (f_1 + \ldots + f_n)(\varphi_1^2 q_1'^2 + \ldots + \varphi_n^2 q_n'^2)$$

et la fonction de forces

$$(1') \qquad U = \frac{\psi_1 + \ldots + \psi_n}{f_1 + \ldots + f_n}$$

(f_i, φ_i, ψ_i étant, pour chaque valeur de i depuis 1 jusqu'à n, des fonctions du seul paramètre q_i) se détermine à l'aide de quadra-

(1) *Voir*, par exemple, Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, Chap. XXV, n° 474.

tures. Pour nous borner au cas le plus simple [1], les géodésiques d'une surface rapportée aux paramètres q_1, q_2 et ayant pour élément linéaire

$$(f_1+f_2)(\varphi_1^2\,dq_1^2+\varphi_2^2\,dq_2^2) \tag{2}$$

(f_i, φ_i étant toujours des fonctions de q_i seul), sont définies par l'équation générale

$$\int\frac{\varphi_1\,dq_1}{\sqrt{f_1-a}}-\int\frac{\varphi_2\,dq_2}{\sqrt{f_2+a}}=b, \tag{3}$$

a, b étant des constantes arbitraires et l'arc s de la courbe étant donné par la relation

$$\int\frac{f_1\varphi_1\,dq_1}{\sqrt{f_1-a}}+\int\frac{f_2\varphi_2\,dq_2}{\sqrt{f_2-a}}=s, \tag{3'}$$

les formules pour le cas général ayant une forme toute semblable, qu'on trouvera à l'endroit cité de la *Mécanique* de M. Appell.

Formellement, le problème est résolu par les formules (3), (3'). M. Staude [2] a montré l'intérêt qu'il y avait à examiner de plus près les expressions de q_1, q_2 en fonction de s auxquelles on est ainsi conduit, et cela surtout dans le cas le plus usuel, celui où les intervalles de variation de q_1, q_2 (définis respectivement par les inégalités $f_1-a\geqq 0$, $f_2+a\geqq 0$) sont limités dans les deux sens, de sorte qu'on ait $\alpha_1\leqq q_1\leqq\beta_1$ pour le premier, $\alpha_2\leqq q_2\leqq\beta_2$ pour le second. Généralisant une marche suivie par Weierstrass pour le cas d'une seule variable, il pose

$$q_1=\alpha_1\cos^2\frac{u_1}{2}+\beta_1\sin^2\frac{u_1}{2},\qquad q_2=\alpha_2\cos^2\frac{u^2}{2}+\beta_2\sin^2\frac{u_2}{2}, \tag{4}$$

ce qui met les équations (3), (3') sous la forme

$$\left\{\begin{aligned}&\int h_{11}(u_1)\,du_1+\int h_{12}(u_2)\,du_2=\mathrm{H}_{11}(u_1)+\mathrm{H}_{12}(u_2)=b,\\&\int h_{21}(u_1)\,du_1-\int h_{22}(u_2)\,du_2=\mathrm{H}_{21}(u_1)-\mathrm{H}_{22}(u_2)=s.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

---

(1) *Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, Chap. I, p. 10.

(2) *Math. Ann.*, t. XXIX, p. 468; *Ibid.*, t. XLI, p. 219; *Journal de Crelle*, t. CV, p. 298.

où, cette fois, *les variables u_1, u_2 prennent chacune toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$* et où, d'autre part, h_{11}, h_{21}, h_{12}, h_{22} sont des fonctions *périodiques* (toujours finies), les deux premières de u_1, les deux dernières de u_2, H_{ik} étant la primitive de h_{ik}.

Le résultat est tout analogue pour le problème général dont nous avons parlé en commençant : on aboutit à des relations de la forme

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} H_{11}(u_1) \quad +\ldots+ H_{1n}(u_n) \quad = b_1, \\ H_{21}(u_1) \quad +\ldots+ H_{2n}(u_n) \quad = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{n-1,1}(u_1)+\ldots+ H_{n-1,n}(u_n) = b_{n-1}, \\ H_{n1}(u_1) \quad +\ldots+ H_{nn}(u_n) \quad = t. \end{array}\right.$$

$b_1, \ldots, b_{n-1}$ désignant des constantes arbitraires et t le temps, pendant que H_{ik} est une fonction de u_k dont la dérivée $H'_{ik} = h_{ik}$ est périodique, et que les q_1 sont exprimés en fonctions des u par des formules analogues à (4).

Supposons que les équations (5) *puissent être résolues par rapport aux u*, et donnent pour ces quantités des valeurs bien déterminées et continues en fonction des deux seconds membres. En reportant ces valeurs dans les formules (4), on constate que q_1 et q_2 peuvent être considérés comme des fonctions de deux variables de la forme

$$\lambda_1 s + \mu_1 b, \qquad \lambda_2 s + \mu_2 b \qquad (\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \text{ constants})$$

périodiques séparément par rapport à chacune de ces variables.

Considérés comme fonctions de s seul (b étant laissé constant) q_1, q_2 appartiennent dès lors à un type d'une importance capitale en Mécanique céleste, que M. Staude appelle *bedingt periodische Functionen* et auquel nous donnerons, avec M. Esclangon [1], le nom de fonctions *quasi-périodiques*.

M. Stäckel [2], à qui l'on doit une importante généralisation de la méthode de Liouville, a repris également l'analyse de M. Staude

(1) *Thèse*, Paris, 1904.

(2) *Habilitationsschrift*, Halle, 1891 (*Math. Ann.*, t. XLII, p. 537); *Journal de Crelle*, t. CXXVIII, p. 222; *Ibid.*, t. CXXX, p. 89.

et montré que si l'on peut résoudre les équations (6), on obtient encore pour les q des expressions quasi-périodiques par rapport au temps.

Mais tout ceci est subordonné à l'inversion des équations (5) *ou* (6), c'est-à-dire à leur résolution par rapport aux u en fonction de s, b (ou de t et des b).

Or, l'inversion d'un système de relations à plusieurs variables offre des difficultés particulières. Pour affirmer que cette inversion est possible, il ne suffit pas, contrairement à ce qu'on a parfois supposé un peu hâtivement, de s'assurer, sans autre précaution, que le déterminant fonctionnel des premiers membres des équations en question (ici le déterminant des h_{ik}) est toujours différent de zéro.

En raison de cette circonstance, la résolution dont il s'agit occasionna aux auteurs des Mémoires précédemment cités de sérieuses complications et exigea de leur part des discussions des plus délicates auxquelles certains de ces Mémoires sont consacrés à peu près intégralement. En même temps, ils durent introduire des hypothèses supplémentaires assez restrictives.

Or, il est aisé de voir que les difficultés dont il s'agit disparaissent toutes, ainsi que les hypothèses accessoires, dès qu'on fait usage d'un théorème que j'ai établi précédemment ([1]) relativement aux correspondances ponctuelles en général. D'après ce théorème, étant donné un système d'équations qui expriment n variables v en fonctions continues de n autres variables u, il suffit, pour que l'inversion soit possible et univoque, que :

(A) Cette propriété ait lieu au voisinage d'un point déterminé quelconque de l'espace (u) : autrement dit, qu'autour de ce point on puisse décrire une sphère s, et autour du point correspondant (v) une sphère S, telles qu'à tout point intérieur à S corresponde un point ([2]) et un seul intérieur à s;

([1]) *Bull. Soc. math. Fr.*, t. XXXIV, p. 71.

([2]) Il faut noter que cette hypothèse (A) peut être, à son tour, simplifiée, si l'on veut utiliser le théorème de M. Schonflies, qui permet de réduire la première partie de cette hypothèse à la seconde. On pourra donc, en d'autres termes, se contenter d'admettre que tout point (u) est le centre d'une sphère s telle que deux points distincts pris à l'intérieur de cette sphère ne puissent avoir la même image (v). Jointe à (B) cette hypothèse est suffisante pour affirmer la conclusion cherchée.

(B) Une ligne continue de l'espace (u) s'en allant à l'infini ne puisse donner comme correspondante, dans l'espace (v), une ligne de longueur finie.

La condition (A) est toujours vérifiée si, les dérivées partielles du premier ordre étant continues, le déterminant fonctionnel est constamment différent de zéro.

Il en est de même pour la condition (B), *dans le cas actuellement étudié* (les variables v étant ici le temps et les b constantes).

Cela résulte de ce que les dérivées partielles (fonctions h de Staude) sont ici n fois périodiques, à savoir périodiques et de période 2π par rapport à chacune des n variables u. Le minimum de la quantité appelée μ dans mon Mémoire cité [1] (autrement dit, le *minimum minimorum* du rapport de deux éléments linéaires correspondants dans les deux espaces) est donc, dans tout l'espace, le même que dans le prismatoïde des périodes obtenu en ne donnant aux u que des valeurs comprises entre 0 et 2π. Il est, dès lors, différent de zéro, puisque μ est continu et ne peut s'annuler qu'avec le déterminant fonctionnel D des équations considérées.

Donc, *la condition* $D \neq 0$ *est entièrement suffisante pour l'inversion considérée.*

2. Mais M. Stäckel a remarqué [2] que, dans le problème de Liouville, cette condition n'est pas réalisée. Le déterminant fonctionnel s'annule lorsque les fonctions inconnues atteignent simultanément les valeurs extrêmes (maxima ou minima) que chacune d'elles est susceptible de prendre : autrement dit, lorsque le point qui a ces quantités pour coordonnées vient en un des sommets du rectangle dans lequel il est assujetti à rester.

Il va nous être très aisé de compléter le raisonnement de manière à tenir compte de cette circonstance.

Tout d'abord, la condition (A) ne peut cesser d'être vérifiée qu'en un point où D s'annule. Nous continuons à supposer que cela a lieu sans changement de signe.

Admettons, en outre, que l'une au moins des quatre dérivées

---

[1] *Bull. Soc. math. Fr., loc. cit.*, p. 72.
[2] *Journal de Crelle*, t. CXXX, p. 94.

partielles, si le nombre n des variables est égal à 2, ou l'un au moins des mineurs de D, pour $n > 2$, ne s'annule pas au point en question.

Alors une démonstration classique du théorème fondamental sur les fonctions implicites [1] continuera à s'appliquer. En effet, le fait qu'un mineur de D est différent de zéro montre qu'on peut exprimer $n - 1$ des variables u, les $n - 1$ premières par exemple, en fonction de la variable u_n restante et de $n - 1$ variables v (que nous supposerons être les $n - 1$ premières). D'autre part, le changement de variables une fois effectué, la dérivée $\frac{\partial v_n}{\partial u_n}$, tout en étant nulle au point considéré, n'y changera pas de signe (en vertu de l'hypothèse faite sur D).

Donc, dans ces conditions nouvelles, (A) continuera à avoir lieu.

Un seul cas fait exception : celui où la dérivée $\frac{\partial v_n}{\partial u_n}$ dont il vient d'être question serait constamment nulle. Dans ce cas, il existerait une ligne de l'espace (u) le long de laquelle tous les v resteraient constants.

Supposons que cette circonstance ne se présente pas et que, par conséquent, (A) soit bien vérifiée. En un point où $D = 0$, il existera une direction de l'espace (u) suivant laquelle tous les dv seront nuls. Cette direction ne sera pas, en général, tangente à la multiplicité définie par l'équation $D = 0$. S'il en était autrement, en effet, cette dernière contiendrait une ligne satisfaisant aux équations différentielles $dv = 0$ et, par conséquent, telle que les v soient constants, contrairement à ce qui vient d'être supposé.

On en déduirait facilement que la condition (B) est encore remplie (grâce à ce fait que le rapport de deux axes correspondants dans les deux espaces ne peut pas être nul en général, soit que la ligne à laquelle le premier d'entre eux est empruntée sorte de la multiplicité $D = 0$, en dehors de laquelle on a $\mu \neq 0$; soit qu'elle y reste et, par conséquent, ne soit pas, en général, tangente à la direction qui correspond à un rapport nul).

---

[1] *Voir*, par exemple, la première édition du *Cours d'Analyse* de M. Goursat (t. I).

Mais nous n'entrerons pas dans le détail de cette démonstration, parce que, pour les trajectoires de Liouville proprement dites (Stäckel, *loc. cit.*), les choses se passent beaucoup plus simplement.

Le déterminant D ne s'annule, en effet, dans ce cas, qu'en des points *isolés* du plan (ceux qui correspondent aux sommets du rectangle mentionné tout à l'heure). Si nous isolons ces points par de petits cercles (tous de même rayon), la quantité μ aura, en dehors de ces cercles, un minimum positif μ_1. Si, d'autre part, nous imaginons que, de toute ligne tracée dans le plan des u et s'en allant à l'infini, on supprime, par la pensée, toutes les portions intérieures aux cercles en question, la partie restante aura encore une longueur infinie, et il en sera de même de son image dans le second espace, en vertu de l'inégalité $\mu > \mu_1$.

3. Je terminerai par une remarque relative à la forme des équations différentielles qui s'intègrent par la méthode de Liouville, telle que l'étudie M. Stäckel dans l'*Habilitationsschrift* citée en commençant.

L'auteur détermine le type le plus général de problèmes possédant la propriété cherchée pour le cas où le premier membre de l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi est une somme de carrés sans termes rectangles, et opère, à cet effet, par différentiation. Le calcul est notablement plus simple si, au contraire, on laisse aux équations leur forme finie.

Donnons, en effet, aux constantes (¹) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ qui figurent dans l'intégrale complète, $n+1$ systèmes de valeurs, et écrivons ainsi $n+1$ fois l'équation (4) de Stäckel (²). Nous aurons $n+1$ équations linéaires pour déterminer les $n+1$ quantités A_1, $A_2, \ldots, A_n$, H.

Ces équations seront distinctes, au moins pour un choix convenable des différents systèmes de valeurs données aux α : sans quoi, quelles que soient ces valeurs, elles admettraient au moins deux solutions communes et l'intégrale ω considérée vérifierait deux équations aux dérivées partielles : ce ne serait pas une intégrale complète (³).

(¹) Notations de Stackel (*Habilitationsschrift*).

(²) STACKEL, *loc. cit.*, p. 12.

(³) GOURSAT. *Équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Chap. IV.

De telles relations déterminent donc les A et H par la règle de Cramer. Si l'on remarque que les quantités $\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)^2$ sont chacune fonction d'une seule variable, on retombe aisément sur l'expression finale de M. Stäckel.

Une marche toute semblable fournit de même la conclusion finale du n° 3 (page 12) du même travail, relative au cas où l'équation aux dérivées partielles renferme des termes rectangles.

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. HADAMARD SUR LES DÉTERMINANTS;

PAR M. TOMMASO BOGGIO.

On connaît le théorème de M. Hadamard [1] relatif au maximum du module d'un déterminant à éléments réels ou complexes.

Ce théorème a été démontré par M. Hadamard en 1893; néanmoins il a été inappliqué pendant une dizaine d'années (de sorte qu'on pouvait y voir une curiosité scientifique, plutôt qu'un résultat utile), et cela jusqu'en 1903, où il a été indispensable à M. Fredholm pour démontrer la convergence de ses célèbres séries, qui donnent la solution des équations intégrales.

Après l'application faite par M. Fredholm, le théorème de M. Hadamard a acquis, tout à coup, une très grande importance [2]; aussi en a-t-il été bientôt publié, par de nombreux auteurs, différentes démonstrations [3].

---

(1) HADAMARD, *Résolution d'une question relative aux déterminants* (*Bulletin des Sciences mathematiques*, 2e série, t. XVII, 1893, p. 240-246).

(2) Si les éléments du déterminant sont réels, ce théorème, comme on le sait bien, est susceptible de l'interprétation géométrique suivante : parmi les parallélépipèdes (dans un hyperespace) dont les arêtes ont des longueurs données, c'est le parallélépipède rectangle qui a le plus grand volume.

(3) WIRTINGER, *Sur le théorème de M. Hadamard, relatif aux déterminants* (*Bulletin des Sciences mathématiques*. 2e série, t. XXXI, 1907, p. 175-179); *Zum Hadamardschen Determinantensatz* (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. XVIII, Jahrgang 1907, p. 158-160. — FISCHER, *Ueber den Hadamardschen*

A cette suite, déjà longue, de démonstrations, je ne crois pas inutile d'en ajouter une autre, qui est très courte et élémentaire.

Elle consiste à transformer le déterminant donné en un autre, dont les lignes horizontales vérifient la condition d'orthogonalité.

De cette manière, le carré du module du nouveau déterminant se calcule immédiatement, et de là suit aisément le théorème de M. Hadamard.

Envisageons les déterminants, à éléments complexes,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad A^0 = \begin{vmatrix} a^0_{11} & a^0_{12} & \dots & a^0_{1n} \\ a^0_{21} & a^0_{22} & \dots & a^0_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^0_{n1} & a^0_{n2} & \dots & a^0_{nn} \end{vmatrix},$$

où le symbole x^0 désigne, d'une façon générale, le nombre complexe conjugué de x.

Transformons ces déterminants en deux autres, ayant la même valeur,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b^0_{11} & b^0_{12} & \dots & b^0_{1n} \\ b^0_{21} & b^0_{22} & \dots & b^0_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^0_{n1} & b^0_{n2} & \dots & b^0_{nn} \end{vmatrix}$$

et qui, en outre, soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que les éléments des lignes horizontales vérifient les conditions d'orthogonalité

$$(2) \qquad \sum_1^n {}_i\, b_{ri} b^0_{si} = 0 \qquad (r \gtrless s;\ r, s = 1, 2, \dots, n).$$

Pour déterminer les éléments b_{ri}, il suffit d'employer les rela-

---

Determinantensatz (*Archiv der Mathematik und Physik*, Band. XIII, 1908, p. 32-40). — SCHUR, *Ueber die charakteristischen Wurzeln einer linearer Substitution*, etc. (*Mathematische Annalen*, Band. LXVI, 1908, p. 488-510, § 5). — TONELLI, *Sul teorema di Hadamard, relativo al valor maggiorante di un determinante* (*Giornale di Matematiche*, 2e série, t. XLVII, 1909, p. 212-218). — HAYASHI, *Demonstration élémentaire du théorème de M. Hadamard sur la valeur maximum du determinant* (*Ibid.*, 3e série, t. XLVIII, 1910, p. 253-258).

tions récurrentes

$$b_{1i} = a_{1i}, \qquad b_{2i} = a_{2i} - m_{21} b_{1i}, \qquad \ldots$$

et en général

$$(3) \qquad b_{ri} = a_{ri} - \sum_{1}^{r-1}{}_k\, m_{rk} b_{ki} \qquad (r, i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les coefficients m_{rk} doivent être déterminés de manière à vérifier les égalités (2) : pour cela il suffit de multiplier (3) par b^0_{si}, et de sommer : on a, ayant égard à (2),

$$(4) \qquad m_{rs} \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{si} b^0_{si} = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_{ri} b^0_{si} \qquad (s < r);$$

de cette manière les coefficients m_{rs} sont déterminés.

Les valeurs de b^0_{ri}, m^0_{rs} découlent immédiatement des formules (3), (4), soit :

$$(3') \qquad b^0_{ri} = a^0_{ri} - \sum_{1}^{r-1}{}_k\, m^0_{rk} b^0_{ki},$$

$$(4') \qquad m^0_{rs} \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{si} b^0_{si} = \sum_{1}^{n}{}_i\, a^0_{ri} b_{si} \qquad (s < r).$$

Remarquons maintenant qu'une ligne horizontale quelconque des déterminants (1) diffère, à cause des (3), (3'), de la correspondante horizontale des déterminants A, A⁰, par une combinaison linéaire des horizontales précédentes; il s'ensuit donc que les deux déterminants (1) ont pour valeur respective A, A⁰.

Ceci posé, en multipliant entre eux les déterminants (1), et ayant égard à (2), on trouve

$$AA^0 = \begin{vmatrix} \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{1i} b^0_{1i} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{2i} b^0_{2i} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots\ldots\ldots\ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sum_{1}^{n}{}_i\, b_{ni} b^0_{ni} \end{vmatrix}$$

ou bien

$$(5)\qquad \mathrm{AA}^0 = \prod_1^n {}_r \sum_1^n {}_i\, b_{ri} b_{ri}^0;$$

calculons le second membre; des (3), (3′) on tire d'abord

$$b_{ri} b_{ri}^0 = a_{ri} a_{ri}^0 - \sum_1^{r-1} {}_s\, m_{rs}^0 a_{ri} b_{si}^0 - \sum_1^{r-1} {}_s\, m_{rs} a_{ri}^0 b_{si} + \sum_1^{r-1} {}_s \sum_1^{r-1} {}_t\, m_{rs} m_{rt}^0 b_{si} b_{ti}^0;$$

donc si l'on somme, et si l'on a égard aux (3), (3′), (2), il en résulte

$$(6)\qquad \sum_1^n {}_i\, b_{ri} b_{ri}^0 = \sum_1^n {}_i\, a_{ri} a_{ri}^0 - \sum_1^{r-1} {}_s\, m_{rs} m_{rs}^0 \sum_1^n {}_i\, b_{si} b_{si}^0;$$

par conséquent

$$\sum_1^n {}_i\, b_{ri} b_{ri}^0 \leqq \sum_1^n {}_i\, a_{ri} a_{ri}^0;$$

donc, en vertu de (5),

$$(7)\qquad \mathrm{AA}^0 \leqq \prod_1^n {}_r \sum_1^n {}_i\, a_{ri} a_{ri}^0.$$

C'est le théorème de M. Hadamard.

De (6) on tire que (7) se transforme dans une égalité seulement si $m_{rs} = 0$ [1], et dans ce cas, comme il résulte des (3), (4), il est nécessaire et suffisant que le déterminant donné A soit, lui-même, orthogonal.

Remarque. — La méthode que je viens d'exposer s'applique, sans modifications, aux matrices.

---

[1] On exclut évidemment le cas où $b_{ii} = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, car alors on aurait $\mathrm{A} = 0$.