des dispositions récemment brevetées, concernant des installations triphasées.

Ces documents ont permis à M. A. Reisset de décrire deux dispositifs différents : des groupes égalisateurs de charge et des groupes tampons proprement dits.

Nous publions cette étude sous le même titre que celle de M. F. Niethammer et nous sommes heureux de donner à nos lecteurs la primeur de la description de ces groupes tampons qui seront utilisés dans l'équipement électrique du Mont Cenis.

M. O. Weisshaar signale l'avantage des *coordonnées logarithmiques*, souvent employées, il est vrai, en physique théorique, à cause de leur élégance, mais dont on n'a peut-être pas assez saisi l'importance vraiment pratique, surtout *en électrotechnique* et *notamment dans les essais de fer*.

MM. M. de Broglie et L. Brizard, continuant leurs recherches sur l'ionisation, ont été amenés à conclure que l'*ionisation des gaz par voie chimique* ne saurait se produire en l'absence de phénomènes secondaires.

Nous décrivons brièvement ensuite, d'après M. Hrabowski, *un nouveau type de réflecteur pour lampes à arc;* puis une application nouvelle du *tube à vapeur de mercure : son emploi comme parafoudre.*

Rapidement encore sont tracées à grands traits les caractéristiques de la prochaine *électrification de la ligne de chemin de fer Dessau-Bitterfeld*, encore exploitée par la vapeur, puis décrit un *dispositif de protection des circuits électriques dans les mines.*

Les applications de la soudure électrique et de la soudure autogène à la réparation des navires ont fait l'objet d'une communication de M. A. Scott, à la Société des Ingénieurs de la marine d'Ecosse, et nous la résumons ici.

Ces deux méthodes de réparation, en grand honneur sur le continent, sont encore peu répandues en Ecosse, et l'auteur s'attache à montrer l'avantage que la marine peut en retirer. Quoique connues en France, ces considérations n'en sont pas moins intéressantes, car elles résument bien la question et de plus l'auteur indique quelques chiffres précis.

Nous reproduisons enfin, presque intégralement, les considérations de M. P. Barreca *sur la puissance rayonnée par une antenne et sa mesure expérimentale dans un cas particulier.*

L'auteur rappelle d'abord les formules données par d'autres auteurs, et notamment R. Rüdenberg; il passe ensuite à la description de son dispositif expérimental et énonce les résultats auxquels l'ont conduit l'examen des diagrammes lumineux qu'il a pu relever.

L'exactitude n'en est pas absolue, sans doute, mais plusieurs des chiffres spécifiés présentent un intérêt technique.

SUR LA DIFFRACTION DES ONDES HERTZIENNES (*Suite*) [1]

§ 5. — Diffraction par une sphère.

Nous allons maintenant commencer l'étude des effets de diffraction produits par la sphère terrestre sur les ondes émanées d'un excitateur. Le *champ extérieur* sera produit par un excitateur rectiligne qui, prolongé, irait passer par le centre de la Terre, de telle façon que les champs soient de révolution. Cet excitateur pourra se considérer comme réduit à un point, que j'appellerai S. Soit O le centre de la Terre, et M le point x, y, z; je désignerai par r la distance SM, par D la distance SO, par ρ la distance OM, par φ l'angle SOM, par $\pi - \xi$ l'angle OMS, par θ l'angle OSM. Il en résulte que ρ et φ représentent ce qui, dans le paragraphe précédent, était appelé x' et y'.

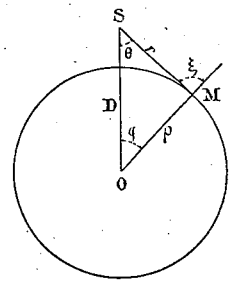

Fig. 1.

Nous avons besoin de la composante radiale du déplacement électrique, c'est-à-dire de ce que, dans le paragraphe précédent, nous appelions f'. Pour le champ extérieur, nous pouvons prendre un potentiel vecteur, dirigé suivant SM et égal en grandeur à

$$e^{i\omega(t-r)}\left(\frac{1}{r}+i\omega\right)\cos\theta;$$

[1] Voir *Lumière Electrique* du 18 juin 1910.

on en tire en affectant d'astérisques les lettres relatives au champ extérieur, c'est-à-dire au champ qui se produirait si la Terre n'existait pas :

$$4\pi f'^* = e^{i\omega(t-r)}\left[\frac{i\omega}{r}\sin\theta\sin\xi + \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{i\omega\, r^3}\right)(\sin\theta\sin\xi - 2\cos\theta\cos\xi)\right]. \quad (1)$$

A l'intérieur de la sphère de rayon D, f'^* peut être développé par la formule (13) du paragraphe précédent, ce qui me permet d'écrire :

$$f'^* = e^{i\omega t}\sum A_n J_n(\omega\rho)\frac{1}{\rho^2}P_n(\cos\varphi). \quad (2)$$

Le coefficient A_n ne dépend que de n et de D.

Passons au champ intérieur que nous représenterons par f', le champ total étant $f' + f'^*$. A l'extérieur de la sphère terrestre, c'est-à-dire pour $\rho > \rho_0$, si ρ_0 représente le rayon de la Terre, nous pourrons appliquer la formule (13 *bis*) du paragraphe précédent et nous aurons :

$$f' = e^{i\omega t}\sum B_n I_n(\omega\rho)\frac{1}{\rho^2}P_n(\cos\varphi). \quad (3)$$

A l'intérieur de la Terre, c'est-à-dire pour $\rho < \rho_0$ la formule (13) nous donnera :

$$f' = e^{i\omega t}\sum C_n J_n(\omega\rho)\frac{1}{\rho^2}P_n(\cos\varphi). \quad (4)$$

Enfin sur la surface nous aurons, pour la densité μ de l'électricité,

$$\mu = e^{i\omega t}\sum D_n\frac{1}{\rho_0^2}P_n(\cos\varphi). \quad (5)$$

Il reste à calculer les coefficients A_n, B_n, C_n et D_n.

Ecrivons les valeurs de F' pour $\rho > \rho_0$, et

$\rho < \rho_0$; nous trouverons, en nous reportant à la formule 12 du paragraphe 5 :

$$F' = e^{i\omega t} \sum \frac{4\pi i\omega}{n(n+1)} B_n I_n(\omega\rho) P_n(\cos\varphi)$$

et

$$F' = e^{i\omega t} \sum \frac{4\pi i\omega}{n(n+1)} C_n J_n(\omega\rho) P_n(\cos\varphi).$$

Rappelons que F′ n'est pas ici le potentiel de Lorentz, de sorte que ce n'est pas un potentiel de simple couche. Les équations (2 *bis*) (3 *bis*) et (1) du paragraphe 4 nous ont donné :

$$4\pi \frac{dg'}{dt} = \frac{d^2 F'}{dx'\,dy'},$$

ou, avec nos notations actuelles,

$$4\pi \frac{dg'}{dt} = 4\pi i\omega g' = \frac{d^2 F'}{d\rho\, d\varphi},$$

ce qui nous donne, pour $\rho > \rho_0$:

$$g' = \omega e^{i\omega t} \sum \frac{B_n}{n(n+1)} I'_n(\omega\rho) \frac{dP_n}{d\varphi}$$

et pour $\rho < \rho_0$:

$$g' = \omega e^{i\omega t} \sum \frac{C_n}{n(n+1)} J'_n(\omega\rho) \frac{dP_n}{d\varphi}.$$

Mais la composante tangentielle g' doit rester continue pour $\rho = \rho_0$, ce qui donne :

$$B_n I'_n(\omega\rho_0) = C_n J_n(\omega\rho_0). \qquad (6)$$

D'autre part, la composante normale f' doit être discontinue et son saut brusque doit être égal à μ, ce qui donne :

$$B_n I_n(\omega\rho_0) = C_n J_n(\omega\rho_0) + D_n. \qquad (7)$$

Enfin, le champ *total*

$$f'^* + f'$$

doit être nul à l'intérieur de la Terre, ce qui donne :

$$A_n + C_n = 0. \qquad (8)$$

Des équations (6), (7) et (8) on peut, en se rappelant que

$$I'_n J_n - J'_n I_n = 1,$$

déduire

$$I'_n(\omega\rho_0) D_n = A_n,$$

d'où

$$\mu = e^{i\omega t} \sum \frac{A_n}{\rho_0^2 I'_n(\omega\rho_0)} P_n(\cos\varphi), \qquad (9)$$

que j'écrirai quelquefois :

$$\mu = e^{i\omega t} \sum \frac{A_n J_n}{\rho_0^2 I'_n J_n} P_n. \qquad (9^{bis})$$

On voit par là comment on peut déterminer les périodes propres des ondes émises par un excitateur sphérique. Ces périodes sont données par les équations

$$I'_n(\omega\rho_0) = 0.$$

Pour aller plus loin, reprenons le triangle précédent SOM, dont les côtés sont D, r et ρ, et les angles φ, θ et $\pi - \xi$, et la formule :

$$4\pi f'^* = e^{i\omega(t-r)} \left[\frac{i\omega}{r} \sin\theta \sin\xi + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{i\omega r^3} \right) (\sin\theta \sin\xi - 2\cos\theta\cos\xi) \right].$$

On remarquera que cette formule présente une symétrie particulière. Supposons que, dans le triangle SOM, on permute les sommets S et M ; les longueurs D et ρ se permuteront, φ se changera en $-\varphi$; r ne changera pas, θ se changera en $\pi - \xi$, et ξ en $\pi - \theta$, de sorte que les produits $\sin\theta \sin\xi$ et $\cos\theta \cos\xi$ ne changeront pas. Il en résulte que f'^* ne changera pas. Donc f'^* est une fonction de D, ρ et φ qui ne change pas quand on change D, ρ et φ en ρ, D et $-\varphi$; et comme d'ailleurs elle ne change pas quand on change φ en $-\varphi$, ce sera une fonction symétrique de D et ρ ; mais les conditions de cette symétrie exigent quelque attention. Nous avons trouvé :

$$f'^* = e^{i\omega t} \sum A_n J_n(\omega\rho) \frac{1}{\rho^2} P_n(\cos\varphi),$$

A_n étant une fonction de D ; on serait tenté, à cause de la symétrie, d'écrire que A_n est égal, à un facteur constant près, à $J_n(\omega D) \frac{1}{D^2}$;

mais la formule précédente n'est vraie que si $\rho < D$; si on avait $\rho > D$, il faudrait la modifier et y remplacer $J_n(\omega\rho)$ par $I_n(\omega\rho)$ (de même que si on veut développer $\frac{1}{r}$ suivant les polynômes P_n, le développement procède suivant les puissances positives de ρ si $\rho < D$, et suivant les puissances négatives si $\rho > D$). Or si l'on a $\rho < D$, on aura inversement $D > \rho$; il faudra donc conclure que A_n est proportionnel non pas à $J(\omega D) \frac{1}{D^2}$, mais à $I_n(\omega D) \frac{1}{D^2}$, et écrire :

$$f'^* = e^{i\omega t} \sum K_n I_n(\omega D) J_n(\omega\rho) \frac{1}{\rho^2 D^2} P_n(\cos\varphi),$$

K_n étant un coefficient indépendant à la fois de D, de ρ et de φ. Pour déterminer ce coefficient, supposons que D et ρ soient très petits ; alors I_n et J_n se réduiront sensiblement à leurs premiers termes ; soient

$$I_n(\omega D) = b_n(\omega D)^{-n}, \qquad J_n(\omega\rho) = c_n(\omega\rho)^{n+1}$$

ces premiers termes ; il viendra, pour $t = 0$,

$$f'^* = \sum K_n b_n c_n \frac{\omega}{\rho D^2} \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n.$$

D'autre part, dans ces conditions r est très petit, de sorte qu'il reste :

$$4\pi f'^* = \frac{1}{i\omega r^3} (\sin\theta \sin\xi - 2\cos\theta\cos\xi).$$

Nous savons que l'on a :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{D} \sum \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n.$$

Si nous différentions cette égalité, d'abord par rapport à D, puis par rapport à ρ, en remarquant que si $d\rho = 0$ on a

$$dr = dD \cos\theta$$

et que si $dD = 0$ on a

$$dr = -d\rho\cos\xi, \qquad r\,d\theta = d\rho\sin\xi,$$

nous trouverons :

$$-\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{1}{D^2} \sum (n+1) \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n,$$

puis

$$\frac{2\cos\theta\cos\xi}{r^3} - \frac{\sin\theta\sin\xi}{r^3} = \frac{1}{\rho D^2} \sum n(n+1) \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n$$

ou, en identifiant les deux valeurs de $4\pi f'^*$,

$$\frac{-1}{i\omega\rho D^2} \sum n(n+1) \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n = 4\pi \sum K_n b_n c_n \frac{\omega}{\rho D^2} \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n$$

ou enfin :

$$K_n = \frac{i}{4\pi\omega^2} \frac{n(n+1)}{b_n c_n}.$$

Or on trouve aisément

$$b_n = (-1)^{1-n} \frac{\Gamma(2n+1)}{2[2^n \Gamma(n+1)]^2}, \qquad c_n = (-1)^n \frac{2.[2^n \Gamma(n+1)]^2}{\Gamma(2n+2)}, \qquad (10)$$

d'où

$$b_n c_n = -\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{-1}{2n+1}$$

et

$$K_n = \frac{-i}{4\pi\omega^2} n(n+1)(2n+1),$$

ce qui me permet d'écrire :

$$A_n = \frac{-i}{4\pi\omega^2} n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{D^2} \qquad (11)$$

et

$$\mu = \frac{-i}{4\pi\omega^2} \frac{1}{\rho^2 D^2} \sum n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)} P_n(\cos\varphi). \qquad (12)$$

§ 6. — Introduction des valeurs non entières de n.

Il s'agit maintenant (en faisant $t = 0$ pour nous débarrasser du facteur $e^{i\omega t}$) de sommer la série

$$\mu\rho_0^2 = \sum \frac{A_n P_n}{I'_n}. \qquad (1)$$

On a assez souvent une première approximation de la somme de la série

$$\sum F(n),$$

en la remplaçant par l'intégrale

$$\int F(n)\,dn;$$

il suffit pour cela que la formule sommatoire d'Euler soit suffisamment convergente.

Si nous cherchons à appliquer cette méthode au cas qui nous occupe, nous serons arrêtés par une première difficulté; en effet nos fonctions A_n, P_n et I'_n ne sont définies que quand n est entier positif; il faut d'abord les définir pour toutes les valeurs de n. Commençons par P_n. On peut établir que :

$$2\pi P_n = \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\omega)^n\,d\omega \quad (2)$$

et nous pouvons conserver la même formule dans le cas où n n'est pas entier positif; il pourrait y avoir une difficulté si

$$\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\omega$$

s'annulait sur le chemin d'intégration; c'est ce qui peut arriver quand le chemin d'intégration est rectiligne, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et pour certaines valeurs imaginaires de φ; mais si on attribue à φ l'une de ces valeurs, il suffira de modifier le chemin d'intégration. Nous observerons que *la fonction* P_n *ainsi définie est une fonction entière de* n.

La fonction P_n jouit d'une autre propriété importante. Posons

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = t;$$

notre relation devient :

$$\pi P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}t^2)^n\,dt}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

Changeons n en $-n-1$; il viendra :

$$\pi P_{-n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+t^2)^n\,dt}{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}t^2)^{n+1}}.$$

Posons

$$t = ue^{i\varphi};$$

il viendra :

$$\pi P_{n-1} = \int \frac{(1+u^2e^{2i\varphi})^n e^{i\varphi}\,du}{e^{i(n+1)\varphi}(1+u^2)^{n+1}} = \int \frac{(e^{-i\varphi} + u^2e^{i\varphi})^n\,du}{(1+u^2)^{n+1}}$$

ou

$$P_{-n-1}(\varphi) = P_n(-\varphi) = P_n(\varphi),$$

car il est aisé de voir que P_n ne change pas quand on change φ en $-\varphi$; il suffit pour cela de changer ω en $\omega+\pi$, dans la formule (2); les limites deviennent 0 et 2π, mais peuvent être ramenées à $-\pi$ et $+\pi$, puisque la fonction sous le signe $\int$ est périodique. *Ainsi la fonction* P_n *ne change pas quand on change* n *en* $-n-1$.

Passons à L_n et I'_n. Rappelons que I_n satisfait l'équation différentielle :

$$I''_n + I_n\left[1 - \frac{n(n+1)}{\xi^2}\right] = 0, \quad (3)$$

où les dérivées sont prises par rapport à ξ et où l'on a posé $\xi = \omega\rho$ (cfr. § 4, équation 10). La fonction I_n ne cessera pas de satisfaire à cette équation quand n ne sera plus entier. De plus, cette fonction I_n sera sensiblement proportionnelle à $e^{-i\xi}$ quand ξ sera très grand. Or cette condition suffit pour déterminer l'intégrale de (4) *à un facteur constant près*. On vérifie aisément que les rapports

$$\frac{I_n(\xi)}{I_n(\eta)}, \quad \frac{I_n(\xi)}{I'_n(\xi)}, \quad \frac{I_n(\xi)}{I'_n(\eta)}$$

qui se trouvent ainsi entièrement définis sont des fonctions méromorphes de n (c'est-à-dire le quotient de deux fonctions entières).

Mais quand on change n en $n-1$, le produit $n(n+1)$ ne change pas. Donc l'équation (4) ne change pas, et celle de ses intégrales qui devient sensiblement proportionnelle à $e^{-i\xi}$ pour ξ très grand reste la même à un facteur constant près. Donc le rapport

$$\frac{I_{-n-1}}{I_n} = \frac{I'_{-n-1}}{I'_n}$$

est indépendant de ξ et ne dépend que de n; il reste à déterminer ce facteur constant.

Si donc nous changeons n en $-n-1$, ces rapports

$$\frac{I_n}{I'_n}, \text{ etc.}$$

ne changent pas. Donc en particulier l'expression

$$\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}$$

qui figure dans la formule (12) du paragraphe précédent est une fonction méromorphe de n qui ne change pas quand on change n en $-n-1$.

Le terme général de la série (12) du paragraphe précédent est

$$\frac{-i}{4\pi\omega^2\rho^2 D^2}\, n(n+1)(2n+1)\,\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}\, P_n(\cos\varphi). \quad (4)$$

On voit d'abord que ce terme général est une *fonction méromorphe* de n. Si maintenant nous changeons n en $-n-1$, je dis que cette fonction changera de signe, c'est-à-dire que ce sera une fonction *impaire* de $n+\frac{1}{2}$. En effet, nous avons vu que P_n est une fonction paire, qu'il en est de même de $\frac{I_n(\omega D)}{I_n(\omega\rho)}$. Il en est de même de $n(n+1)$; tandis que $2n+1$ est une fonction impaire. Donc l'expression (13) est une fonction impaire. Ce qu'il fallait démontrer.

§ 7. — Cas limite de $D = \rho$; emploi des séries divergentes.

Le cas le plus intéressant est celui où D est très voisin de ρ; on pourrait d'abord songer à faire $D = \rho$ dans la série (12) du paragraphe 5; mais cette série deviendrait alors divergente. On peut néanmoins employer l'artifice suivant. Reprenons la série :

$$\mu = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega^2 D^2\rho^2}\,\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}\, P_n,$$

que je puis écrire :

$$\mu = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega^2 D^2\rho^2}\,\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega D)}\,\frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}\, P_n. \quad (1)$$

Tant que $\rho < D$, elle converge; si l'on fait $\rho = D$, le facteur $\frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}$ devient égal à 1 et elle diverge. Ce facteur, pour n très grand, est sensiblement égal à

$$\left(\frac{\rho}{D}\right)^{n+1},$$

de sorte que nous sommes amenés à comparer notre série à la suivante :

$$\mu = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega^2 D^2\rho^2}\,\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega D)}\left(\frac{\rho}{D}\right)^{n+1} P_n. \quad (2)$$

Or on peut démontrer que, quand ρ tend vers D, les deux séries (1) et (2) tendent vers une même limite.

Voici une première conséquence :

Nous trouvons :

$$\frac{d\mu D^2}{dD} = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega\rho^2}\,\frac{I'_n(\omega D)}{(I'_n\omega\rho)}\, P_n. \quad (3)$$

Les considérations précédentes étant applicables à cette nouvelle série, nous avons :

$$\lim \frac{d\mu D^2}{dD} \text{ (pour } \rho = D)$$
$$= \lim \sum \frac{-in(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega\rho^2}\left(\frac{\rho}{D}\right)^{n+1} P_n;$$

ce qui, au facteur $\frac{-i}{4\pi\omega D^2}$ près, peut s'écrire :

$$\sum n(n+1)(2n+1)\,P_n\left(\frac{\rho}{D}\right)^n.$$

Or,

$$\sum P_n\left(\frac{\rho}{D}\right)^n = \frac{1}{r} = (\rho^2 + D^2 - 2D\rho\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\sum n(n+1)(2n+1)\,P_n\left(\frac{\rho}{D}\right)^n = \frac{d^3\frac{1}{r}}{dD^2 d\rho} - \frac{d^3\frac{1}{r}}{dD\,d\rho^2}.$$

Or un calcul direct montre que le second membre de cette égalité s'annule pour $\rho = D$, donc : *quand* D *tend vers* ρ, *la dérivée de* μD^2 *par rapport à* D *tend vers zéro*.

§ 8. — Etude de la fonction méromorphe $\frac{I_n}{I'_n}$.

Pour utiliser les résultats précédents, il importe de se rendre compte de la façon dont se comporte la série divergente

$$4i\pi\omega^2 D^2 \rho^2 \mu = \sum n(n+1)(2n+1)\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega D)} P_n;$$

et pour cela il faut d'abord chercher comment se comporte le rapport $\frac{I_n}{I'_n}$ pour n très grand même par rapport à ωD.

On trouve aisément pour n très grand la formule approximative :

$$n(n+1)(2n+1)\frac{I_n}{I'_n} = -\xi(n+1)(2n+1) - \frac{\xi^3}{2}$$

à des termes près qui s'annulent avec $\frac{1}{n}$. Cette formule est applicable lorsque la partie réelle de n est positive et très grande.

Cette formule nous montre d'abord que :

$\lim \frac{I_n}{I'_n} = 0$ pour partie réelle de n positive et très grande.

Comme $\frac{I_n}{I'_n}$ ne change pas quand on change n en $-n-1$, on aura de même :

$\lim \frac{I_n}{I'_n} = 0$ pour partie réelle de n négative et très grande.

Je voudrais maintenant étudier de plus près l'expression

$$R(n) = n(n+1)(2n+1)\frac{I_n}{I'_n},$$

qui est une fonction méromorphe de n, et rechercher en particulier comment sont distribués les infinis de cette fonction méromorphe et surtout ceux pour lesquels n est très grand. Considérons le développement de I_n suivant les puissances de ξ.

Nous devons surtout nous occuper des coefficients des termes en ξ^{-n} et ξ^{n+1}, que j'appellerai A_n et B_n; ce sont en effet les termes prépondérants, le premier pour $n = +\infty$, l'autre pour $n = -\infty$; on trouve à un facteur constant près

$$A_n = e^{(2n+1)i\frac{\pi}{2}}(e^{4ni\pi} - 1)\Gamma(2n+1),$$

$$B_n = (e^{4ni\pi} - e^{2ni\pi})e^{ni\pi}\frac{\Gamma(n+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}.$$

Il est aisé de vérifier que, si l'on désigne par $\frac{A'_n}{B'_n}$ ce que devient le rapport $\frac{A_n}{B_n}$ quand on y change n en $-n-1$, on a comme il convient :

$$\frac{A_n}{B_n}\frac{A'_n}{B'_n} = 1.$$

Nous pourrons donc écrire, C étant un facteur constant

$$I_n = C(A_n\xi^{-n} + B_n\xi^{n+1})$$

$$\frac{I_n}{I'_n} = \frac{A_n\xi^{-n} + B_n\xi^{n+1}}{-nA_n\xi^{-n-1} + (n+1)B_n\xi^n}.$$

Si la partie réelle de n est positive ou négative et très grande, l'un des termes du numérateur (comme du dénominateur) l'emportera de beaucoup sur l'autre. Si la partie imaginaire de n est très grande sans que sa partie réelle le soit, ces deux termes seront comparables et il pourra se faire que le dénominateur s'annule.

On obtiendra donc les racines du dénominateur en écrivant :

$$\xi^{2n+1} = \frac{A_n}{B_n}\frac{n}{n+1}$$

ou sensiblement

$$\xi^{2n+1} = \frac{A_n}{B_n} = \frac{2^{2n}i}{\pi e^{2i\pi n}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)(e^{2i\pi n}+1)$$

ou, en remplaçant les fonctions eulériennes par leurs valeurs approchées,

$$\xi^{2n+1} = 4i\pi 2^{2n} e^{-2in} n^{2n} e^{-2n} 2\pi n$$

ou, en observant que l'argument de n doit être compris entre $-\pi$ et $+\pi$ (pour que les formules approchées des fonctions eulériennes soient applicables) et par conséquent voisin de $\frac{\pi}{2}$,

$$(2n+1)\log\xi = \log 8i\pi^2 + 2n\log 2 - 1 - 2i\pi) + (2n+1)\log n - 2iK\pi,$$

K étant un entier. Cette formule pour n très grand équivaut sensiblement à

$$n\log n = iK\pi$$

ou encore, plus grossièrement, à

$$n = \frac{iK\pi}{\log K},$$

ce qui nous indique que les infinis de notre fonction méromorphe sont un peu moins « condensés » que les nombres entiers K, mais plus condensés que les puissances $K^{1+\varepsilon}$, quelque petit que soit ε.

Il y a intérêt à connaître le résidu correspondant. Posons

$$\Phi = \frac{B_n}{A_n}\xi^{2n+1}, \qquad \Phi_1 = \frac{B_n}{A_n}\frac{n+1}{n}\xi^{2n+1},$$

d'où

$$\frac{I_n}{I'_n} = \frac{\Phi+1}{\Phi_1-1}\frac{\xi}{n};$$

le résidu sera :

$$\frac{\xi}{n}\frac{1+\Phi}{\Phi_1}\frac{1}{\text{dér}\log\Phi_1},$$

la dérivée logarithmique de Φ_1 étant prise par rapport à n. Mais pour une racine on doit avoir $\Phi_1 = 1$, et comme n est très grand, on a sensiblement $\Phi = \Phi_1$; il reste donc

$$\frac{2\xi}{n}\frac{1}{\text{dér}\log\Phi_1}.$$

Or on trouve sensiblement

$$\text{dér}\log\Phi_1 = -2\log n,$$

d'où

$$\text{résidu de } \frac{I_n}{I'_n} = -\frac{\xi}{n\log n} = \frac{i\xi}{K\pi}.$$

Quant au résidu de R (n) il est sensiblement $\frac{-2\xi n^2}{\log n}$.

Cela nous permet de tirer des conclusions au sujet du développement de la fonction R (n); on voit que $\frac{I_n}{I'_n}$ s'annulant pour n très grand, il en est de même de n^{-3} R (n), et la considération de la distribution des infinis et des résidus nous montre qu'on peut construire dans le plan des n une série de cercles concentriques, de rayons indéfiniment croissants, tels que n^{-3} R (n) tend uniformément vers zéro sur ces cercles, quand le rayon de ces cercles croît indéfiniment. L'application du théorème de Cauchy suffit alors pour montrer que l'on a :

$$n^{-3}R(n) = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \sum\frac{B_K}{(n-\varepsilon_K)\varepsilon_K^3},$$

les α étant des constantes, les ε représentant les différents infinis de n^{-3} R_n et les B_K étant les résidus correspondants de R (n).

J'ai encore une remarque à faire au sujet de la distribution des infinis. Supposons que ξ soit très grand; si n est fini, $\frac{I_n}{I'_n}$ sera sensiblement égal à i et ne pourra pas devenir infini. Donc, tous les infinis auront un module très grand. Si maintenant n est très grand et réel positif, nous trouverons

$$\frac{I_n}{I'_n} = \frac{i\xi}{\sqrt{n^2-\xi^2}},$$

ce qui montre que nous ne pouvons avoir d'infini que pour n voisin de ξ. La conclusion subsiste quand, la partie réelle de n étant positive et très grande, la partie imaginaire est finie, ou simplement est très petite par rapport à ξ.

Si la partie réelle de n est négative et très grande, sa partie imaginaire étant finie ou petite par rapport à ξ, on peut ramener au cas précédent en changeant n en $-n-1$, ce qui, comme on sait, ne change pas $\frac{I_n}{I'_n}$.

En résumé, si l'on fait abstraction des cas où $\frac{n}{\xi}$ est voisin de ± 1, tous les infinis ont leur partie imaginaire très grande de l'ordre de ξ.

Nous avons donc à rechercher les infinis tels que $\frac{n}{\xi}$ soit voisin de ± 1, mettons de $+1$. On peut dans ce cas trouver une valeur approchée de I_n. Soit $F(t)$ une fonction de t définie par l'équation différentielle

$$F''(t) + tF(t) = 0$$

et telle que les deux premiers termes du développement soient

$$F(t) = 3^{-\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + 3^{\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)t + \ldots$$

on aura à un facteur constant près

$$I_n = \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} F\left(te^{\frac{4i\pi}{3}}\right),$$

en posant

$$t = \varepsilon^2\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad n = \xi\cos\varepsilon.$$

Si nous nous rappelons que ξ est très grand, nous verrons que les zéros de I'_n seront très sensiblement donnés par l'équation :

$$F'\left(te^{\frac{4i\pi}{3}}\right) = 0.$$

Si $t = t_0$ est la plus petite racine de cette équation, on posera

$$t = \varepsilon^2\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad n = \xi\cos\varepsilon = \xi - \xi\frac{\varepsilon^2}{2};$$

il viendra donc pour celui des infinis de $R(n)$ dont la partie imaginaire est la plus petite en valeur absolue :

$$n = \xi - t_0\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui montre que la partie imaginaire de cet infini est très grande de l'ordre de $\xi^{\frac{1}{3}}$.

(*A suivre.*)

H. Poincaré.

L'ÉGALISATION DE LA PUISSANCE ABSORBÉE PAR LES MACHINES D'EXTRACTION OU DE LAMINOIRS

On se rappelle qu'un article a été publié récemment sous ce titre dans cette Revue [1].

Cette étude, complète, dans ses grandes lignes, ne pouvait faire mention de toutes les dispositions nouvellement brevetées. Des renseignements intéressants nous sont parvenus sur quelques-uns de ces dispositifs, actuellement en construction à la Société Brown, Boveri et Cie.

Ces dispositifs concernent spécialement les installations à courants triphasés et sont de deux sortes :

I. — *Les groupes égalisateurs de charge*, placés en parallèle sur les réseaux à fortes variations de charge, — réseaux d'usine, de ville ou même de région industrielle, — amortissant les effets dus aux à-coups des machines branchées sur le réseau. Ces groupes viennent automatiquement en aide aux machines génératrices de la centrale, leur rôle étant de couper les pointes de charge instantanées (fig. 1).

Ils comprennent en l'espèce une machine asynchrone triphasée, A ; un moteur triphasé à collecteur, B ; un volant C et enfin un relais P-R, influencé par le réseau, agissant sur

[1] *Lumière Electrique*, 21 mai 1910, p. 241.

l'excitation du moteur triphasé à collecteur.

Le groupe égalisateur de charge est placé en parallèle sur le réseau. Pendant les périodes de faible charge, ce groupe tourne à vide n'absorbant que très peu de courant, la machine asynchrone fonctionnant comme moteur et accumulant dans le volant une certaine quantité d'énergie.

Une pointe de charge vient-elle à se produire — engendrée ici par les à-coups d'un moteur d'extraction triphasé à double collecteur [1] — le relais agit immédiatement sur l'excitation du moteur à collecteur K, le collecteur de ce dernier moteur joue le rôle de transformateur de fréquence et la machine A, qui travaillait un instant auparavant comme moteur, travaille instantanément comme génératrice asynchrone, restituant au réseau l'énergie accumulée précédemment dans le volant.

On obtient de la sorte un équilibrage des charges sur les réseaux soumis aux à-coups d'un ou de plusieurs moteurs.

II. — *Groupes tampons proprement dits.* Ces groupes, placés en série sur le réseau à protéger, sont destinés à parer aux à-coups directs des machines à marche irrégulière, comme les machines d'extraction, de laminoirs, des moteurs de traction.

Comme exemple d'application de ces groupes, nous décrirons ceux que la Société Brown, Boveri a actuellement en construction pour l'Administration des chemins de fer de l'Etat italien.

On sait que, en vue de l'Exposition de Turin, le tunnel du Cenis sera équipé électriquement.

Pour éviter que le réseau de force et lumière de la Centrale de Chiomonte sur laquelle sera branchée la sous-station en question soit influencé par les à-coups du réseau de traction, il a été commandé pour cette installation 3 groupes tampons comprenant chacun (voir schéma fig. 2) :

Un moteur asynchrone triphasé à rotor bo-

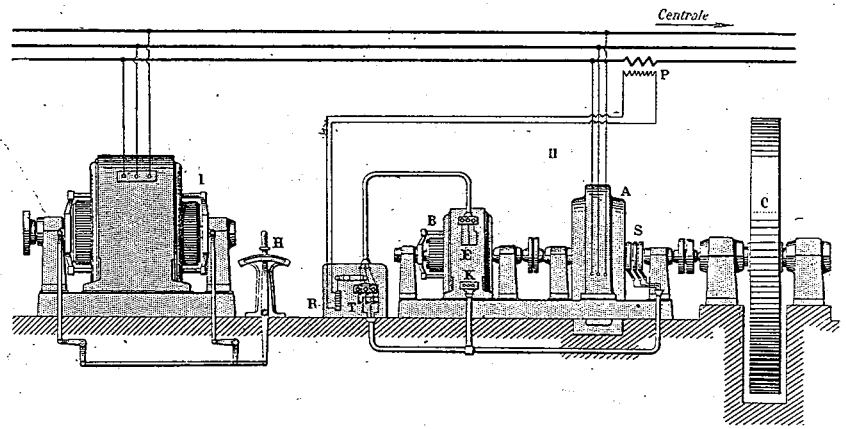

Fig. 1. — I, moteur à double collecteur : le levier H commande le calage des balais mobiles. — II, groupe tampon : le relais R, monté sur le transformateur de courant P, agit sur le transformateur T, qui modifie l'excitation E du moteur à collecteur triphasé B, dont les bornes K sont réunies aux bagues du moteur d'induction A.

[1] Ces moteurs d'une construction nouvelle peuvent être branchés directement sur les réseaux triphasés à haute et basse tension. Ils comportent, comme les moteurs monophasés système Brown, Boveri, Déri des rangées de balais fixes et mobiles. Le démarrage et le réglage de la vitesse s'obtiennent simplement par décalage des balais mobiles.