SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES ET LES FONCTIONS FUCHSIENNES.

Par M. **H. Poincaré** (Paris).

Adunanza del 13 dicembre 1908.

§ 1.

Généralités sur la réduction.

Il est à peine nécessaire de rappeler ici les principes de la théorie de la réduction des intégrales abéliennes. Considérons une courbe algébrique C de genre p admettant p intégrales de 1ère espèce $2p$ fois périodiques. Dans certains cas, il arrive que les périodes de q de ces intégrales ($q < p$) ne sont que des combinaisons linéaires à coefficients entiers de $2q$ périodes seulement. On dit alors que les intégrales abéliennes relatives à cette courbe sont susceptibles de réduction.

Soient

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

ces p intégrales. Soient

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{2p}$$

$2p$ cycles distincts tracés sur la surface de Riemann correspondant à notre courbe. Quand on décrira le cycle C_k, l'intégrale u_i augmentera d'une constante α_{ik}, de sorte que chacune de nos p intégrales admettra $2p$ périodes

$$\alpha_{i1}, \quad \alpha_{i2}, \quad \ldots, \quad \alpha_{i,2p}.$$

Il y a réduction si l'on a

$$(1) \qquad \alpha_{ik} = \sum_j m_{kj} \beta_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, 2p;\ j = 1, 2, \ldots, 2q),$$

les m_{kj} étant $4pq$ nombres entiers et les β_{ij} étant $4q^2$ constantes quelconques. L'un des cas les plus intéressants est celui où $q = 1$, c'est-à-dire où l'une des intégrales u, u_1, par exemple, est réductible aux intégrales elliptiques. Les relations (1) se réduisent alors à

$$(1^{\text{bis}}) \qquad \alpha_{1k} = m_{k1} \beta_{11} + m_{k2} \beta_{12}.$$

Soient alors x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe C. Soient x' et y' deux fonctions doublement périodiques de u_1 admettant pour périodes β_{11} et β_{12}. Si nous regardons x' et y' comme les coordonnées d'un point M', ce point M' va décrire une courbe algébrique C' de genre 1. A chaque point de la courbe C' correspond une valeur de u_1 intérieure au parallélogramme des périodes et une seule, et inversement. Or à chaque point M de C correspond une valeur de u_1 déterminée à une période près et une seule, et par conséquent un seul point M', d'où il suit que x' et y' sont des fonctions rationnelles de x et y; au contraire x et y ne sont pas des fonctions rationnelles de x' et y' sans quoi les deux courbes C et C' seraient de même genre. Les deux courbes C et C' sont donc liées par une transformation *unirationnelle.*

Réciproquement, envisageons deux courbes C et C' de genre p et 1 et telle que l'on passe de la 1ère à la 2de par une transformation unirationnelle. Je dis qu'une des intégrales de C est réductible aux intégrales elliptiques; en effet, la courbe C' étant de genre 1 admet une intégrale elliptique de 1ère espèce

$$u_1 = \int R(x', y')\,dx',$$

R étant rationnel en x' et y'. Or x' et y' sont eux-mêmes, par hypothèse, des fonctions rationnelles de x et y, de sorte que

$$u_1 = \int R_1(x, y)\,dx,$$

R_1 étant rationnelle en x et y. Donc u_1 est l'une des intégrales abéliennes de 1ère espèce de C; et u_1 n'a que deux périodes distinctes. C. Q. F. D.

Cette dernière proposition peut s'étendre au cas de $q > 1$. Supposons deux courbes C et C' de genre p et q $(q < p)$ et telles que l'on puisse passer de C à C' par une transformation unirationnelle. La courbe C' étant de genre q admettra q intégrales abéliennes de 1ère espèce

$$u_i = \int R(x', y')\,dx' \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

qui auront $2q$ périodes distinctes. Comme x' et y' sont rationnels en x et y, nous pourrons écrire

$$u_i = \int R_1(x, y)\,dx,$$

de sorte que les q intégrales u_1 qui ont $2q$ périodes distinctes seront des intégrales abéliennes de 1ère espèce de C. Les intégrales de C sont donc susceptibles de réduction.

La réciproque n'est pas vraie. D'abord s'il y a réduction, il peut se faire que les constantes β ne soient pas les périodes des intégrales abéliennes relatives à une courbe C'. On verrait assez aisément que ces constantes β doivent satisfaire aux conditions nécessaires pour être les périodes d'une fonction abélienne. Mais il peut très bien arriver que les périodes d'une fonction abélienne ne soient pas les périodes d'un système d'intégrales abéliennes relatives à une courbe algébrique. Un système de fonctions abéliennes de genre p dépend de $\frac{p(p+1)}{2}$ constantes; une courbe algébrique de genre p dépend de $3p - 3$ constantes seulement. Les deux nombres ne sont égaux que pour $p = 2$ et pour $p = 3$. Donc, pour $p > 3$ la fonction abélienne engendrée par une courbe algébrique n'est pas la fonction abélienne la plus générale. Elle peut s'appeler une fonction abélienne *spéciale.*

Eh bien, les constantes β seront toujours les périodes d'une fonction abélienne, mais pas toujours celles d'une fonction abélienne spéciale. Mais ce n'est pas tout. Supposons que les β soient les périodes d'une fonction abélienne spéciale, c'est-à-dire qu'il existe une courbe C' dont les intégrales abéliennes de 1ère espèce aient précisément pour périodes les constantes β. Il ne s'en suivra pas nécessairement que l'on puisse passer de C a C' par une transformation unirationnelle; ou tout au moins le raisonnement précédent ne permet pas de l'affirmer.

Reprenons en effet ce raisonnement et considérons q points

$$M'_1, \quad M'_2, \quad \ldots, \quad M'_q$$

de la courbe C'. Soient d'autre part

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_q$$

les q intégrales de 1ère espèce de C'. Soit u'_{ik} la valeur de l'intégrale u_i au point M'_k, et posons

$$u'_{i1} + u'_{i2} + \cdots + u'_{iq} = v'_i.$$

Nous savons que les valeurs de $v'_1, v'_2, \ldots, v'_q$ suffisent pour déterminer (à l'ordre près) l'ensemble des q points M' et que, inversement, quand cet ensemble des q points M' nous est donné, on connaît les v'_i à une période près.

Maintenant ces q intégrales u_i sont aussi des intégrales abéliennes relatives à C, à savoir celles qui, par hypothèse, sont susceptibles de réduction; si donc nous envisageons q points

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_q$$

sur C et que nous désignions par u_{ik} la valeur de l'intégrale u_i en M_k, si nous posons

$$u_{i1} + u_{i2} + \cdots + u_{iq} = v_i,$$

à chaque système de points $M_1, M_2, \ldots, M_q$ correspondra un système de valeurs des v_i déterminé à une période près. Supposons qu'on fasse

$$v_i = v'_i;$$

cette égalité fera correspondre à un système $M_1, M_2, \ldots, M_q$ de points de la courbe C, un système de valeurs des v'_i déterminé à une période près, et par conséquent un système $M'_1, M'_2, \ldots, M'_q$ de points de la courbe C' entièrement déterminé.

Soient x_i, y_i les coordonnées de M_i; x'_i, y'_i celles de M'_i. Il résulte de ce qui précède que toute fonction rationnelle symétrique de

$$(x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; \ldots; x'_q, y'_q)$$

sera une fonction rationnelle et symétrique de

$$(x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_q, y_q).$$

Mais il ne s'en suit pas, sauf dans des cas exceptionnels (et c'est sur ce point que je veux insister), que x'_1, y'_1 soient fonctions rationnelles de x_1, y_1; x'_2, y'_2 de x_2, y_2; etc.

D'autre part, il est presque inutile de rappeler que la transformation est unirationnelle et non birationnelle; et que, par conséquent, toute fonction rationnelle et symétrique des x_i, y_i, n'est pas une fonction rationnelle et symétrique des x'_i, y'_i.

Les cas de réduction peuvent être ramenés à certaines formes canoniques simples par un choix convenable des périodes et des intégrales. Pour le faire bien comprendre, je vais montrer quel est, dans deux cas de réduction, le tableau des périodes normales ramené à sa forme canonique:

1er Exemple:

$$q = 1, \qquad p = 3.$$

	Cycles	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
Intégrale	u_1	$2i\pi$	o	o	b	$\frac{2i\pi}{\alpha}$	o	
	u_2	o	$2i\pi$	o	$\frac{2i\pi}{\alpha}$	a	b	(α entier)
	u_3	o	o	$2i\pi$	o	b	c	

2e Exemple:

$$q = 2, \qquad p = 4.$$

	Cycles	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	
Intégrale	u_1	$2i\pi$	o	o	o	a	b	o	$\frac{2i\pi}{\alpha}$	
	u_2	o	$2i\pi$	o	o	b	c	$\frac{2i\pi}{\alpha\beta}$	o	(α, β entiers)
	u_3	o	o	$2i\pi$	o	o	$\frac{2i\pi}{\alpha\beta}$	a'	b'	
	u_4	o	o	o	$2i\pi$	$\frac{2i\pi}{\alpha}$	o	b'	c'.	

Ces deux exemples suffiront pour faire comprendre quel est le sens du théorème général, et la façon de ramener à la forme canonique. Je renverrai pour plus de détails à un de mes mémoires [1]).

Quoi qu'il en soit, rappelons ce que c'est qu'une fonction θ d'ordre k. Nous aurons p variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et $2p$ périodes, p de la 1ère sorte, p de la 2de sorte; la k^e période de la 1ère sorte est égale à $2i\pi$ pour u_k et à zéro pour les autres variables; la k^e période de la 2de sorte est égale à a_{kh} pour u_h. On a d'ailleurs

$$a_{kh} = a_{hk}.$$

Soit alors, les m étant des entiers,

$$P = \sum_i m_i u_i, \qquad 2Q = \sum_{ij} a_{ij} m_i m_j.$$

[1]) *Sur les fonctions abéliennes* [American Journal of Mathematics, Vol. VIII (1886), pp. 289-342].

La fonction Θ proprement dite est la fonction

$$\Theta = \sum e^{P-Q}.$$

Une fonction θ d'ordre k sera de la forme

$$\theta = \sum A e^{P+P_0-\frac{Q}{k}},$$

où l'on aura $P_0 = \sum_i m_i b_i$, les b étant des constantes et où les A seront des coefficients dépendant des entiers m, mais assujettis à reprendre les mêmes valeurs quand les m augmentent de multiples de k.

Deux fonctions θ d'ordre k appartiennent au même faisceau, quand elles ont mêmes multiplicateurs, c'est-à-dire quand la forme P_0 est la même pour l'une et pour l'autre. Les fonctions θ d'un même faisceau s'expriment linéairement à l'aide de k^p d'entre elles, puisque c'est là le nombre des valeurs distinctes que peut prendre le coefficient A.

Supposons maintenant qu'il y ait réduction; nous distinguerons alors les q premières variables que nous appellerons les u, et les $p - q$ dernières que nous appellerons les u'. Ainsi, dans le 1er exemple ci-dessus nous aurons une variable u qui sera u_1 et deux variables u' qui seront

$$u'_1 = u_2, \quad u'_2 = u_3;$$

dans le 2d exemple nous aurons deux variables u qui seront u_1 et u_2 et deux variables u' qui seront

$$u'_1 = u_3, \quad u'_2 = u_4.$$

De même, nous désignerons par m_i et m'_i les coefficients entiers qui correspondent à u_i et u'_i.

Nous pouvons alors poser

$$P = P_1 + P_2, \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

P_1 représente la partie de P qui dépend seulement des m et P_2 celle qui dépend seulement des m', de telle sorte que

$$P_2 = \sum m' u'.$$

De même, Q_1 représente la partie de Q qui dépend seulement des m, Q_2 celle qui dépend seulement des m', et Q_3 celle qui dépend à la fois des m et des m'. Tous les termes de Q_1 sont du 2d degré par rapport aux m, tous ceux de Q_2 sont du 2d degré par rapport aux m'; ceux de Q_3 sont du 1er degré, d'une part par rapport aux m, d'autre part par rapport aux m'. Dans le 1er exemple ci-dessus on a donc

$$Q_3 = \frac{2i\pi}{\alpha} m_1 m'_1$$

et dans le 2d exemple

$$Q_3 = \frac{2i\pi}{\alpha} m_1 m'_2 + \frac{2i\pi}{\alpha\beta} m_2 m'_1.$$

Nous observerons ensuite que e^{-Q_3} ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes. Cela tient à ce que les m et les m', de même que α et β, sont des entiers. Dans le 1er exemple, e^{-Q_3} ne change pas si m_1 ou m'_1 augmente de α, et comme il ne dépend d'ailleurs que de m_1 et m'_1, il ne change pas quand les m et les m' augmentent de multiples de α; dans le 2^d exemple, il ne change pas si m_1 ou m'_2 augmentent d'un multiple de α, ou si m_2 ou m'_1 augmentent de $\alpha\beta$. Il ne change donc pas si les m et les m' augmentent de multiples de $\alpha\beta$. Dans tous les cas il existe un nombre k tel que e^{-Q_3} ne change pas quand les m et les m' augmentent de multiples de k.

Cela posé, nous aurons

$$\Theta(u,\ u') = \sum e^{P_1+P_2-Q_1-Q_2-Q_3}.$$

La sommation doit se faire par rapport aux m et aux m'. Regardons pour un instant les u comme donnés; posons alors

$$A = \sum e^{P_1-Q_1-Q_3},$$

où la sommation se fait par rapport aux m seulement; A dépendra donc des u et des m'; l'essentiel est de remarquer que A ne change pas quand les m' augmentent de multiples de k.

Posons

$$Q' = k\,Q_2;$$

Q' sera la forme quadratique formée avec des périodes de la 2^{de} sorte, k fois plus grandes que celles qui figurent au tableau primitif; et on aura

$$\Theta(u,\ u') = \sum A e^{P_2-\frac{Q'}{k}},$$

la sommation devant cette fois s'effectuer par rapport aux m'; ce qui montre que Θ considérée comme fonction des u' est une fonction θ d'ordre k admettant comme périodes de la 2^{de} sorte celles qui ont servi à construire la forme Q'. Dans le 1^{er} exemple ci-dessus, ce sera une fonction θ d'ordre α admettant comme périodes

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & \alpha a & \alpha b \\ 0 & 2i\pi & \alpha b & \alpha c. \end{matrix}$$

Dans le 2^d exemple, ce sera une fonction θ d'ordre $\alpha\beta$ admettant pour périodes

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & \alpha\beta a' & \alpha\beta b' \\ 0 & 2i\pi & \alpha\beta b' & \alpha\beta c'. \end{matrix}$$

Remarquons que cette nouvelle manière d'envisager la réduction des périodes abéliennes est applicable non seulement aux fonctions Θ spéciales (comme l'étaient les précédentes qui partaient de la considération de la courbe algébrique C), mais aux fonctions Θ les plus générales.

§ 2.

L'Invariant de la réduction.

Soient α_{iq} les $2p$ périodes de nos intégrales abéliennes et reprenons la relation (1) du § précédent:

(1) $$\alpha_{ik} = \sum_j m_{kj}\beta_{ij} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2q).$$

Je ne suppose nullement ici que les périodes choisies soient les périodes normales. Nous devons d'abord définir la *forme bilinéaire* $F(x, y)$ *caractéristique de ce système de périodes.* Pour cela soient

$$U = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_p u_p$$
$$U' = \mu'_1 u_1 + \mu'_2 u_2 + \cdots + \mu'_p u_p$$

deux combinaisons linéaires quelconques de nos p intégrales abéliennes. Soient

$$x_1, \quad x_2, \ldots, x_{2p}$$
$$y_1, \quad y_2, \ldots, y_{2p}$$

les $2p$ périodes de U et de U', de telle sorte que

$$x_j = \sum \mu_k \alpha_{kj}, \qquad y_j = \sum \mu'_k \alpha_{kj}.$$

On aura entre les x et les y une certaine relation bilinéaire

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

qui subsistera quels que soient les coefficients μ et μ'; et c'est le premier membre de cette relation qui sera la *forme bilinéaire caractéristique.*

Dans le cas des périodes normales, cette forme se réduit à

$$\sum (x_{2k-1} y_{2k} - x_{2k} y_{2k-1}).$$

Si la relation (1) a lieu de façon qu'il y ait réduction et que U soit une combinaison des intégrales réductibles, de telle sorte que

$$\mu_k = 0, \qquad (k > q),$$

on pourra écrire

$$x_k = \sum_i \mu_i \alpha_{ik} = \sum_{ij} \mu_i m_{kj} \beta_{ij},$$

ou bien encore

$$x_k = \sum_j m_{kj} \omega_j, \qquad \omega_j = \sum_i \mu_i \beta_{ij}. \tag{3}$$

Si nous substituons dans (2) à la place des x leurs valeurs tirées de la 1ère équation (3), cette relation bilinéaire prend la forme

$$\sum H_j \omega_j = 0, \tag{4}$$

où

$$H_j = \sum_{ik} \frac{d^2 F}{d x_k d y_i} m_{kj} y_i = F(m_{kj}, y_i)$$

est une combinaison linéaire des y.

Nous pouvons assujettir les coefficients μ', restés jusqu'ici arbitraires, aux $2q$ conditions

$$H_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2q), \tag{5}$$

qui sont des relations linéaires entre les μ', puisque les y sont des fonctions linéaires des μ'. Si ces relations (5) étaient distinctes, elles admettraient $p - 2q$ solutions linéairement indépendantes, puisque nous aurions p inconnues μ' entre lesquelles nous aurions $2q$ relations distinctes. Mais ces relations (5) ne sont pas distinctes, puisque les H_j sont liés par les identités (4). Ces identités (4) sont au nombre de q, puisque U désigne une quelconque des intégrales abéliennes réductibles, de sorte que nous pouvons prendre indifféremment

$$U = u_1, \quad U = u_2, \quad \ldots, \quad U = u_q.$$

Les équations (5) admettront donc $p - q$ solutions linéairement indépendantes.

Si ces équations sont satisfaites, l'intégrale abélienne U' sera réductible au genre $p - q$. En effet, ses $2p$ périodes y seront liées par les $2q$ relations linéaires (5) qui sont à coefficients entiers, de sorte que ces périodes pourront s'exprimer linéairement à l'aide de $2p - 2q$ périodes distinctes que nous appellerons ζ et que nous pourrons écrire (les n étant des entiers)

$$(6) \qquad y_i = \sum n_{ij} \zeta_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p;\ j = 1, 2, \ldots, 2p - 2q).$$

En résumé, nous aurons d'une part q intégrales U réductibles au genre q et d'autre part $p - q$ intégrales U' réductibles au genre $p - q$.

Rapprochons les égalités (3) et (6), que nous écrirons

$$x_i = \sum m_{ik} \omega_k, \qquad y_i = \sum n_{ij} \zeta_j,$$

et formons le déterminant des entiers m et n; il aura $2p$ lignes et $2p$ colonnes, puisque les indices i, k et j varient respectivement de 1 à $2p$, de 1 à $2q$, de 1 à $2p - 2q$. Je remarque que ce déterminant sera un *invariant,* je veux dire qu'il ne changera pas: 1° si on remplace le système des périodes α par un autre système équivalent; 2° si on remplace les périodes ω, ou encore les périodes ζ par un système équivalent.

Je suppose, bien entendu, que le système des ω, de même que celui des ζ, a été choisi de la façon la plus simple possible; c'est-à-dire que: 1° si l'on forme le tableau des coefficients m, tous les déterminants formés en prenant $2q$ colonnes de ce tableau sont des entiers premiers entre eux; 2° que le tableau des coefficients n jouit de la même propriété.

Posons maintenant

$$(7) \qquad H_j = \sum h_{ij} y_i;$$

les coefficients

$$h_{ij} = \sum_k \frac{d^2 F}{d x_k \, d y_i} m_{kj}$$

seront des entiers. Rapprochons maintenant les équations (3) et (7), que nous écrirons

$$x_i = \sum m_{ij} \omega_j, \qquad H_j = \sum h_{ij} y_i,$$

et formons d'une part le tableau des m et d'autre part celui des h. Dans le 1^{er} tableau, m_{ij} occupera la j^e ligne et la i^e colonne; dans le 2^d tableau h_{ij} occupera la j^e ligne et la i^e colonne.

Soit D l'un quelconque des déterminants formés à l'aide du 1^{er} tableau et qui, d'après ce que nous venons de supposer, sont tous premiers entre eux. Soit D' le déterminant correspondant du 2^d tableau. Considérons la somme $\sum D D'$ et comparons-la au déterminant Δ des m et des n, qui, nous l'avons vu, est un invariant.

Les n seront définies par les équations

$$(8) \qquad \sum_i h_{ij} n_{ik} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2q;\ k = 1, 2, \ldots, 2p - 2q).$$

On a en effet

$$o = H_j = \sum h_{ij} y_i = \sum h_{ij} n_{ik} \zeta_k$$

et cette relation doit être une identité par rapport aux ζ_k.

Formons le déterminant M des h et des n; il aura $2p$ lignes et $2p$ colonnes. Soit D' l'un des déterminants formés avec $2q$ colonnes du tableau des h; ce sera un mineur de M; nous continuons à désigner par D le déterminant formé avec les *mêmes* colonnes du tableau des m. Je désignerai de même par D'' le déterminant du tableau des n correspondant à D'; je veux dire par là celui que l'on obtient en supprimant dans le tableau des n, les colonnes que l'on conserve dans le tableau des h quand on veut obtenir D'. Il résulte de là que D'' est aussi un mineur de M, et que l'on a, en développant le déterminant M,

$$M = \sum D' D''.$$

On aura de même en développant le déterminant Δ

$$\Delta = \sum D D''.$$

Et enfin nous nous proposons d'étudier l'expression

$$J = \sum D D'.$$

Quelle est alors la signification des égalités (8); elles signifient que les déterminants D' et D'' sont proportionnels, c'est-à-dire que l'on a

$$D' = \lambda D''.$$

Par une hypothèse faite plus haut, les D'' sont des entiers premiers entre eux; les D' sont des entiers. Donc λ n'est pas autre chose que le plus grand commun diviseur de ces entiers.

Pour déterminer ce plus grand commun diviseur, nous remarquerons qu'il ne doit pas changer quand on remplace les périodes α par un système de périodes équivalent. Soit en effet un nouveau système de périodes α'; les α' sont liés aux α par un système de relations linéaires à coefficients entiers et de déterminant 1; les x' et les y' sont liés respectivement aux x et aux y par les mêmes relations linéaires. La relation $F(x, y) = o$ devient

$$F'(x', y') = o, \tag{2^{bis}}$$

$F'(x', y')$ étant ce que devient $F(x, y)$ quand on y remplace les x et les y par leurs valeurs en fonctions des x' et des y'.

Les relations (3), (4), (6), (7) deviennent

$$x' = \sum m' \omega, \tag{3^{bis}}$$

$$\sum H \omega = o, \tag{4^{bis}}$$

$$y' = \sum n' \zeta, \tag{6^{bis}}$$

$$H = \sum h' y' = \sum h y. \tag{7^{bis}}$$

On voit que les m et les m' sont liés entre eux par les mêmes relations linéaires que les α et les α'; et que les h et les h', à cause de l'identité

$$\sum hy = \sum h'y',$$

sont liés par les relations contragrédientes, c'est-à-dire par des relations qui sont comme les premières à coefficients entiers et de déterminant 1. Il résulte de là que ces transformations n'altéreront ni le plus grand commun diviseur des D, ni celui des D'. Nous pouvons donc supposer qu'on a choisi les périodes normales.

On a alors

$$F(x, y) = \sum (x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1}),$$

$$H_j = \sum (m_{2k-1.j}\,y_{2k} - m_{2k.j}\,y_{2k-1}),$$

$$h_{2k.j} = m_{2k-1.j}; \qquad h_{2k-1.j} = -m_{2kj},$$

ce qui montre que dans ce cas les h ne sont autre chose que les m au signe et à l'ordre près; de sorte que les D ne sont autre chose que les D' au signe et à l'ordre près.

Or les D sont premiers entre eux, il en est donc de même des D'; donc on a

$$\lambda = \pm 1.$$

Nous pouvons supposer $\lambda = 1$, quitte à permuter deux des ω. Il vient ainsi

$$D = D'', \qquad J = \Delta.$$

Ce qui montre que *l'expression J est l'invariant cherché.*

Appliquons cela aux deux exemples du n° 1; pour le premier il vient

$$\omega_1 = \frac{2i\pi}{\alpha}, \qquad \omega_2 = h, \qquad U = u_1.$$

Le tableau des m est donc

(ω_1)	α	0	0	0	1	0
(ω_2)	0	0	0	1	0	0

et, comme les périodes sont normales, celui des h est

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

Tous les D sont nuls sauf deux d'entre eux, qui sont respectivement égaux à 1 et à α; de même, tous les D' sont nuls sauf deux d'entre eux, qui sont respectivement égaux à 1 et à α. Seulement le D qui est égal à α, correspond au D' qui est égal à α, tandis que le D qui est égal à 1 correspond à un D' qui est égal à zéro, et le D' qui est égal à 1 à un D qui est égal à zéro. Donc tous les DD' sont égaux à zéro excepté un d'eux qui est égal a α^2 et l'on a

$$J = \sum DD' = \alpha^2.$$

Passons au 2^d exemple

$$U = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2; \quad \omega_1 = \frac{2i\pi\mu_1}{\alpha}, \quad \omega_2 = \frac{2i\pi\mu_2}{\alpha\beta}, \quad \omega_3 = \mu_1 a + \mu_2 b, \quad \omega_4 = \mu_1 b + \mu_2 c.$$

Les périodes x sont respectivement:

$$2i\pi\mu_1,\quad 2i\pi\mu_2,\quad 0,\quad 0,\quad \mu_1 a+\mu_2 b,\quad \mu_1 b+\mu_2 c,\quad \frac{2i\pi\mu_2}{\alpha\beta},\quad \frac{2i\pi\mu_1}{\alpha};$$

ce qui donne pour le tableau des m.

$$\begin{array}{lcccccccc}
(\omega_1) & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
(\omega_2) & 0 & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
(\omega_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
(\omega_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

et pour le tableau des h, les périodes étant normales,

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & -1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \alpha\beta & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.
\end{array}$$

Le seul des produits DD' qui ne s'annule pas est celui où les déterminants D et D' sont formés avec les colonnes 1, 2, 5 et 6; et dans ce produit on a

$$D = D' = \alpha^2\beta.$$

On aura donc

$$J = \sum DD' = \alpha^4\beta^2.$$

Ainsi, si l'on choisit le système de périodes de façon à mettre le tableau des périodes réductibles sous la forme canonique, l'invariant J est un carré parfait. Car la démonstration que nous avons développée dans les deux exemples précédents s'applique évidemment à tous les cas. Or, cet invariant ne dépend pas du choix des périodes. Donc *l'invariant J est toujours un carré parfait.*

Jusqu'ici nous avons supposé que les périodes x et y étaient distinctes. Ne faisons plus cette hypothèse; les périodes x peuvent ne pas être distinctes et par conséquent leur nombre peut être plus grand que $2p$.

Il existera alors un système de $2p$ périodes distinctes x', et nous aurons entre les deux systèmes de périodes les relations

$$x_i = \sum\nolimits_k \lambda_{ik} x'_k, \tag{9}$$

les λ étant entiers; et entre les périodes correspondantes y et y' les relations

$$y_i = \sum \lambda_{ik} y'_k. \tag{9bis}$$

Il existera encore une forme bilinéaire $F(x, y)$ telle qu'on aura pour deux intégrales abéliennes quelconques de 1ère espèce

$$F(x, y) = 0.$$

Quand on remplacera, dans cette forme, les x et les y par leurs valeurs (9) et (9^{bis}), elle deviendra une forme bilinéaire en x' et y', que j'appellerai $F'(x', y')$, de sorte qu'on aura l'identité

$$F(x, y) = F'(x', y').$$

Nous conserverons les mêmes périodes ω et nous aurons la relation

$$(3^a)\qquad x_k = \sum_j m_{kj}\,\omega_j;$$

et de même avec les périodes x'

$$(3^b)\qquad x'_k = \sum m'_{kj}\,\omega_j.$$

Les m et les m' sont entiers. Le tableau des m' a $2p$ colonnes et q lignes; celui des m a q lignes, mais peut avoir plus de $2p$ colonnes. On aura d'ailleurs

$$(10)\qquad m_{ij} = \sum_k \lambda_{ik}\, m'_{kj}.$$

Nous avons d'autre part

$$F = \sum H_j\,\omega_j, \qquad H_j = \sum h_{ij}\,y_i,$$

et avec les périodes y'

$$H_j = \sum h'_{ij}\,y'_i,$$

d'où l'identité

$$\sum h_{ij}\,y_i = \sum h'_{kj}\,y'_k = \sum h_{ij} \sum \lambda_{ik}\,y'_k = \sum\sum h_{ij}\lambda_{ik}\,y'_k,$$

d'où

$$(11)\qquad h'_{kj} = \sum_i \lambda_{ik}\,h_{ij}.$$

Les relations (10) et (11) sont les relations linéaires qui lient les nombres m et h avec les nombres m' et h' qui jouent le même rôle par rapport aux périodes x' et y'. On voit que ces relations linéaires sont contragrédientes.

Considérons le tableau des m et désignons par

$$D(i_1, i_2, \ldots, i_q)$$

le déterminant formé en prenant dans ce tableau les colonnes de rang $i_1, i_2, \ldots, i_q$. Désignons par $D'(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ le déterminant formé de la même manière avec le tableau des h; par $D_1(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ et $D'_1(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ les déterminants formés de la même manière avec les tableaux des m' et des h'. Soit ensuite

$$\begin{vmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_q \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_q \end{vmatrix}$$

le déterminant obtenu de la façon suivante: On considère le tableau des λ, en plaçant λ_{ik} dans la i^e ligne et la k^e colonne; on supprime ensuite dans ce tableau toutes les lignes sauf celles de rang $i_1, i_2, \ldots, i_q$ (que l'on range dans l'ordre indiqué) et toutes les colonnes sauf celles de rang $k_1, k_2, \ldots, k_q$.

On aura alors, en vertu des relations (10) et (11),

$$(10^{\text{bis}})\qquad D(i_1, i_2, \ldots, i_q) = \sum_k \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_q \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_q \end{vmatrix} D_1(k_1, k_2, \ldots, k_q)$$

et

$$(11^{\text{bis}})\qquad D'_1(k_1, k_2, \ldots, k_q) = \sum_i \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_q \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_q \end{vmatrix} D'(i_1, i_2, \ldots, i_q).$$

Formons l'invariant J d'après la règle énoncée plus haut

$$J = \sum_i D(i_1, i_2, \ldots, i_q)\, D'(i_1, i_2, \ldots, i_q),$$

ou, en vertu de (10^{bis}),

$$J = \sum_{ik} \begin{vmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_q \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_q \end{vmatrix} D_1(k_1, k_2, \ldots, k_q) D'(i_1, i_2, \ldots, i_q),$$

ou, en vertu de (11^{bis}),

$$J = \sum_k D_1(k_1, k_2, \ldots, k_q) D_1'(k_1, k_2, \ldots, k_q).$$

Nous voyons que la transformation n'altère pas la forme de l'expression J. Or dans le cas des périodes x' et y', J représente un invariant. Il sera donc encore un invariant dans le cas des périodes x et y. D'ailleurs dans le cas des périodes distinctes, le même calcul aurait pu servir pour démontrer les propriétés invariantes de l'expression $\sum DD'$.

Donc, *la règle pour former l'invariant reste la même quand les périodes ne sont pas distinctes.*

Il importe toutefois de faire attention au choix de la forme $F(x, y)$.

Nous ne devons pas prendre pour cette *forme bilinéaire caractéristique* toute forme qui s'annule en vertu des relations entre les périodes; sans quoi la définition s'appliquerait tout aussi bien, non seulement à la forme $F(x, y)$, mais à la forme $aF(x, y)$, quel que soit le coefficient a. Il faut choisir la forme F de telle façon que si les x' et les y' sont les périodes normales on ait

$$F(x, y) = F'(x', y') = \sum (x'_{2k-1} y'_{2k} - x'_{2k} y'_{2k-1}).$$

Si les périodes x et y sont distinctes, cela veut dire que le discriminant de la forme F doit être égal à 1.

Ou bien encore, supposons que les périodes x et y n'étant pas distinctes, les périodes x' et y' soient distinctes, sans être forcément normales; nous devrons nous imposer la condition que, si l'on a

$$F(x, y) = F'(x', y'),$$

le discriminant de F' soit égal à 1.

Si les périodes x et y sont distinctes, les coefficients de $F(x, y)$ sont entiers. Si ces périodes ne sont pas distinctes, ils peuvent être fractionnaires, mais rien n'est d'ailleurs à modifier dans l'analyse qui précède.

Si les périodes x et y sont distinctes, la forme $F(x, y)$ se trouve entièrement déterminée par les conditions précédentes. Il n'en est plus de même si ces périodes ne sont plus distinctes. On a en effet entre les x certaines relations linéaires

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_m = 0$$

et les relations correspondantes entre les y

$$Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_m = 0;$$

et alors nous pourrons remplacer F par

$$F(x, y) + \sum (B_i X_i - A_i Y_i),$$

les A_i étant des fonctions linéaires quelconques des x, et les B_i des fonctions linéaires quelconques des y.

Il y a toutefois une condition complémentaire que nous devons imposer à la forme $F(x, y)$; cette forme doit s'annuler identiquement quand on y fait $x_i = y_i$. Si nous tenons compte de cette condition, nous ne pouvons plus choisir les fonctions linéaires A_i et B_i d'une façon tout à fait arbitraire; mais les B_i doivent être formés avec les y comme les A_i avec les x.

§ 3.

Introduction des fonctions fuchsiennes.

Reprenons les deux courbes C et C' du § 1, ayant respectivement pour genre p et q. Nous désignerons également par les lettres C et C' les surfaces de Riemann correspondantes. Nous supposerons que ces courbes sont liées par une transformation unirationnelle, de telle façon qu'à un point de C correspond un point de C' et un seul, tandis qu'à un point de C' correspondent n points de C. Ce nombre n joue un rôle important dans la suite, et nous devons tout d'abord chercher quelle relation le lie à l'invariant de la réduction; ce sera là l'objet des premiers paragraphes qui vont suivre.

Nous avons vu au § 1 que la définition de la réduction peut être élargie, mais nous nous bornerons à l'étude des cas où il y a une transformation unirationnelle analogue à celle dont nous venons de parler.

Soit M un point mobile de C, et M' le point correspondant de C'. Supposons que M' décrive un contour fermé infiniment petit autour d'un point fixe A' de la surface de Riemann C'; il peut arriver que M revienne à sa valeur initiale et décrive aussi un contour fermé; mais il peut arriver également que M ne revienne pas à sa valeur initiale, et que les n déterminations de M s'échangent entre elles. Dans ce cas A' est un point de ramification.

Imaginons par exemple que les n valeurs de M subissent une permutation se décomposant en α permutations circulaires permutant respectivement

$$\nu_1, \quad \nu_2, \ldots, \nu_\alpha$$

valeurs de M, de telle façon que

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\alpha = n.$$

Alors au point A', correspondront sur C seulement α points $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ correspondant à ces permutations circulaires.

Soit par exemple $n = 6$, et supposons que, quand M' tourne autour de A',

$$M_1, \quad M_2, \quad M_3, \quad M_4, \quad M_5, \quad M_6$$

se changent respectivement en

$$M_2, \quad M_3, \quad M_1, \quad M_5, \quad M_4, \quad M_6.$$

La permutation se décomposera en 3 permutations circulaires

$$(M_1 M_2 M_3)(M_4 M_5) M_6$$

et on aura

$$\nu_1 = 3, \qquad \nu_2 = 2, \qquad \nu_3 = 1.$$

Quand le point M' tendra vers A'; M_1, M_2 et M_3 tendront vers A_1; M_4 et M_5 tendront vers A_2; et M_6 vers A_3.

Cela posé, nous allons construire un système de fonctions fuchsiennes de la façon suivante:

Soient x, y les coordonnées de M, et x', y' celles de M'; soit z une variable auxiliaire. Je veux que x, y, x', y' soient fonctions fuchsiennes de z; que quand M décrit un contour fermé sur C, la variable z revienne à sa valeur primitive ou subisse une substitution linéaire; que quand M' décrit un contour fermé sur C', la variable z revienne à sa valeur primitive ou subisse une substitution linéaire; que z soit d'ailleurs choisi de la façon la plus simple possible.

Supposons que M' décrive sur la surface de RIEMANN C' un contour fermé infiniment petit enveloppant un point de ramification A'; il n'est pas possible que z revienne à sa valeur primitive, sans quoi x et y qui sont des fonctions fuchsiennes et par conséquent uniformes de z, reviendraient à leurs valeurs initiales et A' ne serait pas un point de ramification.

Il faut donc que z subisse une substitution linéaire elliptique; quelle est la période de cette substitution, ou, en d'autres termes, au bout de combien de tours décrits sur le contour fermé, notre variable z reviendra-t-elle à sa valeur primitive? Il faut pour cela que toutes les déterminations de M soient revenues à leurs valeurs primitives. Il faudra donc ν tours, ν étant le plus petit commun multiple de

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_\alpha.$$

Qu'arrivera-t-il alors si le point M décrit sur C un contour fermé très petit autour de l'un des points

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_\alpha?$$

Il arrivera que la variable z subira une substitution linéaire elliptique ayant respectivement pour période

$$\frac{\nu}{\nu_1}, \quad \frac{\nu}{\nu_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\nu}{\nu_\alpha}.$$

Et en effet, quand M décrit $\frac{\nu}{\nu_1}$ tours autour de A_1, M' en décrit ν autour de A.

Si l'on regarde x et y comme fonctions fuchsiennes de z, on voit qu'elles admettent un certain groupe fuchsien G, engendré par un certain polygone fuchsien P. Si l'on regarde maintenant x' et y' comme fonctions de z, ce seront encore des fonctions fuchsiennes admettant le groupe G, mais elles admettront également un autre groupe fuchsien G' contenant le groupe G, et formé des substitutions linéaires que subit z quand M' décrit sur C' un contour fermé. Ce groupe G' sera engendré par un polygone fuchsien P', et comme G est un sous-groupe de G', on voit que *le polygone P est décomposable en n polygones congruents à P'*. La question de la réduction des intégrales abéliennes est ainsi rattachée à celle de la décomposition des polygones fuchsiens en un certain nombre de polygones congruents.

Nous voyons que le polygone P aura autant de cycles de sommets, qu'il y a de points analogues à $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots$; la somme des angles des sommets du cycle qui correspond au point A_i sera $\frac{2\pi\nu_i}{\nu}$. De même, le polygone P' aura autant de cycles de sommets, qu'il y a de points de ramification A', la somme des angles, pour le cycle correspondant à A', étant $\frac{2\pi}{\nu}$.

Nous pourrions, si nous le voulions, construire les polygones P et P' de façon à leur donner un plus grand nombre de côtés et de cycles de sommets; nous pourrions en effet considérer sur la surface C' un certain nombre de points choisis d'une façon arbitraire et les traiter comme nous avons fait des points A', bien que ce ne soient pas des points de ramification. La seule différence serait que les nombres $\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\alpha$ seraient tous égaux à 1, de telle sorte que pour les cycles correspondant à un pareil point A' ou aux points A_i correspondants, la somme des angles serait 2π. C'est ainsi par exemple que le groupe fuchsien G qui est engendré par un quadrilatère dont les côtés opposés sont conjugués et dont la somme des angles est π, peut être également engendré par un hexagone dont les côtés opposés sont conjugués, la somme des angles de rang pair étant π et celle des angles de rang impair étant 2π; plus généralement, un groupe fuchsien G quelconque peut être engendré par une infinité de polygones fuchsiens différents. Mais il n'y aurait là qu'une complication qui, la plupart du temps, serait inutile (sauf dans le cas où il n'y aurait aucun point de ramification A').

Cela posé, soient Q et Q' les nombres des cycles de sommets de P et P'; soient $2N$ et $2N'$ le nombre de leurs côtés. On a, par la formule qui donne le genre d'un polygone fuchsien,

$$(1) \qquad \begin{cases} 2p = N - Q + 1, \\ 2q = N' - Q' + 1. \end{cases}$$

D'un autre côté, on trouve pour la surface de P (au point de vue de la géométrie non euclidienne)

$$2\pi(N-1) - 2\pi\sum\frac{\nu_i}{\nu},$$

$2\pi\frac{\nu_i}{\nu}$ étant la somme des angles d'un seul cycle et par conséquent $2\pi\sum\frac{\nu_i}{\nu}$ celle de tous les angles. On trouve de même pour la surface de P'

$$2\pi(N'-1) - 2\pi\sum\frac{1}{\nu}.$$

Ces formules supposent que tout sommet d'un des polygones congruents à P' est aussi un sommet de P. Elles ne seraient plus vraies si un de ces sommets, commun à plusieurs polygones congruents à P', était à l'intérieur de P.

En tenant compte de (1), ces expressions peuvent s'écrire

$$2\pi(Q+2p-2) - 2\pi\sum\frac{\nu_i}{\nu} = 2\pi\sum\left(1-\frac{\nu_i}{\nu}\right) + 2\pi(2p-2),$$

$$2\pi(Q'+2q-2) - 2\pi\sum\frac{1}{\nu} = 2\pi\sum\left(1-\frac{1}{\nu}\right) + 2\pi(2q-2).$$

Comme P est décomposable en n polygones congruents à P', la première surface doit être égale à n fois la seconde, de sorte qu'on a

$$Q + 2p - 2 - \sum \frac{\nu_i}{\nu} = n\left(Q' + 2q - 2 - \sum \frac{1}{\nu}\right).$$

Mais pour un même point A', nous avons

$$\sum \nu_i = n, \qquad \sum \frac{\nu_i}{\nu} = n\frac{1}{\nu}$$

et pour tous les points A'

$$\sum \frac{\nu_i}{\nu} = n \sum \frac{1}{\nu}.$$

Il nous reste donc la formule

$$(2) \qquad Q + 2p - 2 = n(Q' + 2q - 2).$$

Cette formule subsiste si, usant de la faculté dont je parlais tout à l'heure, on cherche à construire un polygone P d'un plus grand nombre de côtés, en prenant un point arbitraire sur C' et le traitant comme un point A'. Dans ce cas, en effet, Q augmente de n unités et Q' d'une unité.

Si on réunit un polygone Π de $2N$ côtés à un autre polygône Π' de $2N'$ côtés, de façon à former un polygone Π'' de $2N''$ côtés et simplement connexe, il arrivera généralement que Π et Π' n'auront qu'un seul côté commun, qui sera leur frontière commune, laquelle disparaîtra par l'annexion. On aura donc

$$N'' = N + N' - 1.$$

Si exceptionnellement, Π et Π' ont deux côtés communs, ces deux côtés devront être consécutifs, sans quoi Π'' ne serait pas simplement connexe, et alors le sommet qui sépare ces deux côtés sera à l'intérieur de Π''; on aura donc plus généralement

$$N'' = N + N' - 1 - \mu,$$

μ étant le nombre des sommets communs à Π et à Π' qui sont à l'intérieur de Π''.

Plus généralement, si avec trois polygones Π, Π', Π'', de $2N$, $2N'$, $2N''$ côtés on forme un polygone Π''' de $2N'''$ côtés, on aura

$$(N''' - 1) = (N - 1) + (N' - 1) + (N'' - 1) - \mu,$$

μ étant le nombre des sommets appartenant à deux ou plusieurs des polygones Π, Π', Π'' qui seront à l'intérieur de Π'''. Si nous appliquons cette formule à notre polygone P de $2N$ côtés formé de n polygones congruents à P' qui a $2N'$ côtés, il viendra:

$$(3) \qquad N - 1 = n(N' - 1) - \mu,$$

μ étant le nombre des sommets de P', ou d'un polygone congruent, qui sont à l'intérieur de P. Ces sommets devront correspondre à un point A_i de C qui soit tel que

$$\nu = \nu_i.$$

A de pareils points, s'ils existent, peuvent également correspondre des cycles de sommets de P ayant des angles dont la somme est 2π.

Nous reviendrons sur ces hypothèses à la fin du § 5.

§ 4.

Calcul de la forme bilinéaire caractéristique.

Imaginons un polygone fuchsien P, la courbe C correspondante, et le système des intégrales abéliennes de première espèce relatives à cette courbe; et cherchons à déterminer, pour les périodes correspondant aux côtés du polygone P, la forme bilinéaire caractéristique dont il a été question au § 2.

Nous emploierons les notations suivantes. Soient

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \ldots, \sigma_{2N}$$

les sommets consécutifs du polygone P en décrivant le périmètre de ce polygone dans un certain sens. Soient

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \ldots, \gamma_{2N}$$

les côtés consécutifs de P, de telle sorte que le côté γ_i soit le côté $\sigma_{i-1}\sigma_i$, et que le côté γ_1 soit le côté $\sigma_{2N}\sigma_1$.

Soit U l'une des intégrales abéliennes de 1ère espèce; soit x_i cette intégrale prise le long du côté γ_i, et soit z_i la valeur de l'intégrale U au sommet σ_i; on aura

$$(1) \qquad x_i = z_i - z_{i-1}$$

et pour que cette formule soit générale, nous conviendrons de poser

$$x_i = x_{2N+i}, \qquad z_i = z_{2N+i}.$$

Si les deux sommets σ_α et σ_β appartiennent à un même cycle, la différence

$$z_\beta - z_\alpha = x_{\alpha+1} + x_{\alpha+2} + \cdots + x_\beta$$

sera une période.

Si les côtés γ_α et γ_β sont conjugués, on aura

$$(2) \qquad x_\alpha = -x_\beta$$

ou

$$(2^{\text{bis}}) \qquad z_\alpha - z_{\alpha-1} = z_{\beta-1} - z_\beta.$$

Dans ce cas

$$z_{\beta-1} - z_\alpha = z_\beta - z_{\alpha-1} = y_\alpha$$

est une période, car les sommets $\sigma_{\beta-1}$ et σ_α, de même que les sommets σ_β et $\sigma_{\alpha-1}$, appartiennent à un même cycle. Si l'on permute les lettres α et β, il vient

$$z_{\alpha-1} - z_\beta = z_\alpha - z_{\beta-1} = y_\beta,$$

d'où

$$(3) \qquad y_\alpha + y_\beta = 0.$$

Si l'on fait la somme des équations (2), on trouve que la somme des $2N$ quantités x doit être nulle

$$(4) \qquad \sum x_i = 0.$$

Nous avons d'autres relations entre les y. Soient par exemple

$$\sigma_\alpha, \quad \sigma_\beta, \quad \sigma_\gamma, \quad \sigma_\delta$$

les sommets consécutifs d'un même cycle; les côtés γ_α et $\gamma_{\beta+1}$ seront conjugués et on aura

$$y_\alpha = z_\beta - z_\alpha,$$
$$y_\beta = z_\gamma - z_\beta,$$
$$y_\gamma = z_\delta - z_\gamma,$$
$$y_\delta = z_\alpha - z_\delta;$$
$$(5) \qquad y_\alpha + y_\beta + y_\gamma + y_\delta = 0.$$

Il y aura autant de relations (5) que de cycles de sommets, soit Q leur nombre; le nombre des y est évidemment $2N$; ils se trouvent liées par N relations (3) et par Q relations (5). Ces $N+Q$ relations ne sont pas distinctes; car si on fait la somme des relations (3) et celle des relations (5) on trouve le même résultat, à savoir

$$\sum y_i = 0.$$

Il restera donc entre les y, $N+Q-1$ relations qui cette fois seront bien distinctes. Car chacun des y figure une fois, et une seule, dans l'ensemble des relations (3); et une fois, et une seule, dans l'ensemble des relations (5).

Si donc nous désignons par A_i les premiers membres des relations (3), par B_i ceux des relations (5) et que nous cherchions si l'on peut avoir identiquement

$$\sum \alpha_i A_i + \sum \beta_i B_i = 0,$$

les α et les β étant des coefficients constants, chacun des y figurera dans l'un des A et dans un seulement, et, d'autre part, dans l'un des B et dans un seulement; il faudra que les deux coefficients α et β soient égaux et de signe contraire. Chacun des α correspond à l'une des relations (3) et par conséquent à une paire de côtés conjugués; chacun des β correspond à l'une des relations (5) et par conséquent à un cycle de sommets. Chaque côté appartenant à une paire, à chaque côté correspondra un α; chaque sommet appartenant à un cycle, à chaque sommet correspondra un β, et, d'après ce que nous venons de dire, le coefficient α qui correspond à un côté, et le coefficient β qui correspond soit au sommet suivant soit au sommet précédent, doivent être égaux et de signe contraire. D'où il suit, que tous les α doivent être égaux à $+1$ (par exemple) et tous les β à -1. Il n'y a donc pas entre les A_i et les B_i d'autre identité que la suivante

$$\sum A - \sum B = 0.$$

Il y a donc $N+Q-1$ relations distinctes entre les y, et comme les y sont au nombre de $2N$, il y a $N-Q+1$ quantités y distinctes. Le genre est donc

$$\frac{N-Q+1}{2},$$

comme il convient.

Cela posé, considérons une seconde intégrale abélienne U'; désignons par x', y', z' les quantités relatives à cette seconde intégrale et correspondant à celles que nous avons appelées x, y, z, en ce qui concerne la première. Il s'agit de former la forme bilinéaire

$$F(y, y').$$

Pour cela, prenons l'intégrale

$$\int U\,dU'$$

tout le long du périmètre de P; cette intégrale devra être nulle. Soient γ_α et γ_β deux côtés conjugués, et deux éléments correspondants de ces côtés; soient U_α et U_β, U'_α et U'_β les valeurs de nos intégrales en deux points correspondants de ces côtés; on aura

$$U_\beta = U_\alpha + y_\alpha, \qquad U'_\beta = U'_\alpha + y'_\alpha, \qquad dU'_\beta = -\,dU'_\alpha.$$

Je mets le signe — parce que si les deux côtés sont parcourus en suivant les points correspondants, ils seront parcourus en sens contraire. L'intégrale $\int U\,dU'$ prise le long de ces deux côtés se réduira donc à

$$\int (U_\beta - U_\alpha)\,dU' = \int y_\alpha\,dU'$$

le long du côté γ_β; c'est-à-dire $y_\alpha x'_\beta$ ou $-\,y_\alpha x'_\alpha$.

L'intégrale se réduira donc à

$$-\sum y_\alpha x'_\alpha,$$

la sommation s'étendant à toutes les paires de côtés, en prenant un côté seulement dans chaque paire. Mais comme on a

$$y_\alpha = -\,y_\beta, \qquad x'_\alpha = -\,x'_\beta, \qquad y_\alpha x'_\alpha = y_\beta x'_\beta,$$

cela peut s'écrire

$$-\tfrac{1}{2}\sum y_\alpha x'_\alpha,$$

la sommation s'étendant à tous les côtés. Nous aurons donc

$$\sum y\,x' = 0, \tag{6}$$

ou, en vertu de (1) (appliquée à l'intégrale U'),

$$\sum y_\alpha (z'_\alpha - z'_{\alpha-1}) = 0,$$

ou, à cause de (3),

$$\sum y_\alpha z'_\alpha + \sum y_\beta z'_{\alpha-1} = 0.$$

Tenant compte de la relation

$$z'_{\alpha-1} = z'_\beta + y'_\beta,$$

il vient

$$\sum y_\alpha z'_\alpha + \sum y_\beta z'_\beta + \sum y_\beta y'_\beta = 0.$$

Mais on a

$$\sum y_\alpha z'_\alpha = \sum y_\beta z'_\beta, \qquad \sum y_\alpha y'_\alpha = \sum y_\beta y'_\beta.$$

En effet l'indice α peut prendre toutes les valeurs possibles depuis 1 jusqu'à $2N$; et quand il prend ces valeurs, l'indice β du côté conjugué prend également ces mêmes valeurs dans un autre ordre. Je puis donc écrire

$$2\sum y_\alpha z'_\alpha + \sum y_\alpha y'_\alpha = 0. \tag{7}$$

Nous devons vérifier d'abord que le premier membre de (7) est bien de la forme $F(y, y')$, y' étant une forme bilinéaire. Choisissons en effet dans chaque cycle de sommet, un sommet que nous appellerons le sommet initial. On aura alors, pour un sommet quelconque σ_α,

$$z'_\alpha = z'_{\alpha_0} + Y'_\alpha,$$

σ_{α_0} étant le sommet initial du cycle et Y' une combinaison linéaire des y'; de sorte que le premier membre de (7) devient

$$2\sum y_\alpha z'_{\alpha_0} + 2\sum y_\alpha Y'_\alpha + \sum y_\alpha y'_\alpha.$$

Il s'agit de démontrer que le coefficient de z'_{α_0} dans cette expression est nul, de telle sorte que cette expression ne dépend plus que des y et des y'. En effet, ce coefficient est égal à

$$2\sum y_\alpha,$$

la sommation s'étendant à tous les sommets du cycle, et cette somme est nulle en vertu des relations (5).

Il s'agit maintenant de vérifier sur le 1[er] membre de (7) l'identité

$$F(y, y') + F(y', y) = 0, \tag{8}$$

ou, ce qui revient au même, l'identité

$$F(y, y) = 0,$$

puisque

$$F(y, y') + F(y', y) = F(y + y', y + y') - F(y, y) - F(y', y').$$

Il est clair que

$$F(y, y) = 2\sum y_\alpha z_\alpha + \sum y_\alpha^2.$$

Or on trouve

$$F(y, y) = 2\sum z_\alpha(z_{\beta-1} - z_\alpha) + \sum (z_{\beta-1} - z_\alpha)^2,$$

ou, en développant,

$$F(y, y) = \sum z_{\beta-1}^2 - \sum z_\alpha^2.$$

Or le 2[d] membre est évidemment nul puisque quand l'indice α prend toutes les valeurs possibles, il en est de même de l'indice $\beta - 1$, quoique dans un autre ordre.

En résumé, nous avons entre les y et les y' une relation bilinéaire

$$2\sum y z' + \sum y y' = 0.$$

Cela prouve que la forme caractéristique cherchée $F(y, y')$ est égale, *à un facteur constant près*, à $2\sum y z' + \sum y y'$, et il reste à déterminer ce facteur constant.

Pour cela supposons que U', au lieu d'être une intégrale de 1[ère] espèce, soit une intégrale de 3[e] espèce admettant pour points logarithmiques deux points M_0 et M_1 de la surface de RIEMANN C, le premier avec le résidu $+1$, le second avec le résidu -1; dans ce cas on aura

$$F(y, y') = 2i\pi(U_0 - U_1),$$

U_0 et U_1 étant les valeurs de U en M_0 et M_1.

D'autre part, l'intégrale

$$\int U\,dU'$$

a aussi pour expression $2i\pi(U_0 - U_1)$, de sorte que

$$F(y, y') = \int U\,dU'.$$

Mais le 1^{er} membre de (7) n'est autre chose que le premier membre de (6), qui a été obtenue elle-même en multipliant par -2 l'expression

$$-\tfrac{1}{2}\sum y_\alpha x'_\alpha$$

qui représentait notre intégrale; on aura donc

$$F(y, y') = -\sum y z' - \tfrac{1}{2}\sum y y',$$

ou enfin, en tenant compte de (8),

$$F(y, y') = \sum z y' + \tfrac{1}{2}\sum y y', \tag{9}$$

ou encore

$$F(y, y') = \tfrac{1}{2}\sum (z y' - y z').$$

§ 5.

Mode de correspondance des côtés.

Représentons-nous le polygone P décomposé en un certain nombre n de polygones congruents à P'. Les côtés du polygone P' sont conjugués deux à deux, ils sont au nombre de $2N'$; le nombre total des côtés des divers polygones congruents à P' seront donc $2nN'$; parmi eux il y en aura $2N$ qui n'appartiendront qu'à un seul de ces polygones et qui feront partie du périmètre de P; les autres appartiendront à deux des polygones congruents à P' et leur serviront de frontière commune.

Nous pourrons représenter ces $2nN'$ côtés par une notation à double indice

$$\gamma(\alpha, \beta);$$

l'indice α variera de 1 à $2N'$ et se rapportera aux divers côtés de P'; l'indice β variera de 1 à n et se rapportera aux divers polygones congruents à P'; ainsi $P'(\beta)$ sera l'un des polygones congruents à P'; $\gamma(\alpha)$ sera l'un des côtés de P' et $\gamma(\alpha, \beta)$ sera le côté de $P'(\beta)$ homologue au côté $\gamma(\alpha)$ de P'.

Supposons alors que les côtés $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\alpha')$ de P' soient conjugués, et considérons un côté $\gamma(\alpha, \beta)$; il existera alors toujours un côté $\gamma(\alpha', \beta')$, et un seul, qui sera identique ou conjugué à $\gamma(\alpha, \beta)$.

Si les deux côtés $\gamma(\alpha, \beta)$, $\gamma(\alpha', \beta')$ sont identiques, ils n'appartiendront pas au périmètre de P, mais ils feront la frontière commune de $P'(\beta)$ et $P'(\beta')$. Si les deux côtés $\gamma(\alpha, \beta)$, $\gamma(\alpha', \beta')$ sont conjugués, ils appartiendront au périmètre de P et ils représenteront deux côtés conjugués de P.

Nous pouvons alors envisager la substitution S_α qui change β en β'; c'est une substitution qui change l'ordre des n lettres β. A chaque côté de P' correspond une pareille substitution et les substitutions correspondant à deux côtés conjugués S_α et $S_{\alpha'}$ sont inverses l'une de l'autre.

Voyons maintenant comment les sommets de P se répartiront en cycles. Nous désignerons encore par $\sigma(\alpha)$ celui des sommets de P' qui est compris entre $\gamma(\alpha)$ et

$\gamma(\alpha+1)$, et par $\sigma(\alpha, \beta)$ le sommet homologue de $P'(\beta)$. Considérons un des cycles de sommets de P', et soient

$$\sigma(\alpha_1), \quad \sigma(\alpha_2), \ \ldots, \ \sigma(\alpha_m)$$

ces sommets. Considérons alors le sommet $\sigma(\alpha_1, \beta_1)$; il sera identique ou conjugué au sommet $\sigma(\alpha'_1 - 1, \beta'_1)$, où β'_1 sera le transformé de β_1 par la substitution S_{α_1}; j'écris

$$\beta'_1 = \beta_1 S_{\alpha_1}.$$

On aura d'ailleurs $\alpha'_1 - 1 = \alpha_2$, et je poserai pour plus de symétrie dans les notations

$$\beta_2 = \beta'_1 = \beta_1 S_{\alpha_1}.$$

De même, le sommet

$$\sigma(\alpha'_1 - 1, \beta'_1) = \sigma(\alpha_2, \beta_2)$$

sera identique ou conjugué au sommet

$$\sigma(\alpha'_2 - 1, \beta'_2) = \sigma(\alpha_3, \beta_3),$$

où $\gamma(\alpha'_2)$ est conjugué de $\gamma(\alpha_2)$ et où

$$\beta_{\cdot} = \beta'_2 = \beta_2 S_{\alpha_2},$$

et ainsi de suite; et enfin le sommet

$$\sigma(\alpha'_{m-1}, \beta'_{m-1}) = \sigma(\alpha_m, \beta_m)$$

sera identique ou conjugué au sommet

$$\sigma(\alpha'_{m-1}, \beta'_m) = \sigma(\alpha_1, \beta'_m)$$

où

$$\beta'_m = \beta_m S_{\alpha_m} = \beta_1 S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_m}.$$

Ainsi, pour obtenir β'_m en partant de β_1, il faut appliquer aux n lettres β la substitution

$$\Sigma = S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_m}$$

qui change leur ordre.

Soient alors

$$\beta''_1, \ \beta''_2, \ \ldots, \ \beta''_q$$

les transformés successifs de β_1 par Σ, Σ^2, ..., Σ^q; on finira par arriver à

$$\beta''_q = \beta_1,$$

c'est-à-dire par retrouver la lettre initiale. Alors les divers sommets

$$\sigma(\alpha_1, \beta_1), \quad \sigma(\alpha_1, \beta''_1), \quad \sigma(\alpha_1, \beta''_2), \ \ldots, \ \sigma(\alpha_1, \beta''_{q-1})$$

appartiendront à un même cycle, lequel comprendra en outre

$$\sigma(\alpha_2, \beta_1 S_{\alpha_1}), \quad \sigma(\alpha_2, \beta''_1 S_{\alpha_1}), \quad \sigma(\alpha_1, \beta''_2 S_{\alpha_1}), \ \ldots$$
$$\sigma(\alpha_3, \beta_1 S_{\alpha_1} S_{\alpha_2}), \quad \sigma(\alpha_3, \beta''_1 S_{\alpha_1} S_{\alpha_2}), \ \ldots$$

On sait qu'une permutation quelconque entre n lettres peut toujours être décomposée en un certain nombre de permutations circulaires; ici l'une des permutations circulaires de Σ est la suivante

$$\beta_1, \ \beta''_1, \ \beta''_2, \ \ldots, \ \beta''_{q-1}$$

et porte sur q lettres.

Supposons donc que Σ se décompose en λ semblables permutations circulaires; nous avons sur P' un cycle de m sommets. A ce cycle correspondront sur P, non pas un, mais λ cycles de sommets; et si une de ces permutations circulaires porte sur q lettres, le cycle correspondant comprendra qm sommets.

Il pourra se faire que plusieurs de ces sommets appartenant à divers polygones $P'(\beta)$ soient identiques; le nombre des sommets *distincts* de P sur ce cycle sera alors moindre que qm; il pourra même se faire, et c'est une hypothèse que nous avons déjà envisagée au § 3, que tous ces sommets soient identiques et que la somme de leurs angles soit 2π; ce sommet n'appartiendra plus alors au périmètre de P, mais ce sera un point intérieur à P appartenant à la fois à plus de deux polygones $P'(\beta)$ et étant le point d'intersection des frontières de ces polygones.

§ 6.

Calcul de l'invariant.

Pour calculer notre invariant, nous devons d'abord chercher les nombres que nous avons appelés h et m au § 2. Les nombres m se rapportent aux différents y et par conséquent aux différents côtés. Au côté $\gamma(\alpha, \beta)$ qui est identique ou conjugué au côté $\gamma(\alpha', \beta')$ correspond une période $y(\alpha, \beta)$, qui est l'intégrale U prise entre les sommets $\sigma(\alpha, \beta)$ et $\sigma(\alpha'-1, \beta')$. Si les deux côtés $\gamma(\alpha, \beta)$, et $\gamma(\alpha', \beta')$ sont identiques et non conjugués, il en est de même des deux sommets $\sigma(\alpha, \beta)$ et $\sigma(\alpha'-1, \beta')$ et on a

$$y(\alpha, \beta)=0$$

et de même pour l'intégrale U'

(1) $$y'(\alpha, \beta)=0.$$

On a dans tous les cas

$$y(\alpha, \beta)+y(\alpha', \beta')=0,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (3) du § 4.

Les y peuvent s'exprimer en fonctions linéaires des périodes ω_j et on aura

(2) $$y(\alpha, \beta)=\sum m(\alpha, \beta, j)\omega_j$$

et de même

$$y'(\alpha, \beta)=\sum m(\alpha, \beta, j)\omega'_j$$

les $m(\alpha, \beta, j)$ étant entiers.

Considérons maintenant la valeur $z(\alpha, \beta)$ de l'intégrale U au sommet $\sigma(\alpha, \beta)$ et la valeur $z(\alpha_0, \beta_0)$ de U au sommet initial du cycle $\sigma(\alpha_0, \beta_0)$ tel qu'il a été défini au § 4, nous pourrons écrire

(3) $$z(\alpha, \beta)=z(\alpha_0, \beta_0)+\sum k(\alpha, \beta, j)\omega_j$$

et de même

$$z'(\alpha, \beta)=z'(\alpha_0, \beta_0)+\sum k(\alpha, \beta, j)\omega'_j,$$

les $k(\alpha, \beta, j)$ étant entiers.

Remplaçons les y et les z par leurs valeurs dans

$$F(y, y')=\sum zy'+\tfrac{1}{2}\sum yy'.$$

Observons que nous pouvons dans les sommes du 2[d] membre, introduire les termes correspondant à des côtés $\gamma(\alpha, \beta)$, qui n'appartiénnent pas au périmètre de P, mais servent de frontière commune à deux des polygones $P'(\beta)$. En effet, ces termes contiennent en facteur $y'(\alpha, \beta)$ qui est nulle dans ce cas en vertu de la relation (1). De plus, nos formules sont applicables comme nous l'avons vu au § 4, bien que les y ne soient pas des périodes distinctes. Le 1[er] membre doit se réduire à:

$$F(y, y') = \sum H_j \omega_j.$$

Quant au 2[d] membre il va prendre la forme d'une expression linéaire par rapport aux $\chi(\alpha_0, \beta_0)$ et aux ω_j, puisque les 2[ds] membres des coefficients (2) et (3) sont de cette forme. Mais le coefficient de $\chi(\alpha_0, \beta_0)$ est égal à

$$\sum y'(\alpha, \beta),$$

la sommation étant étendue à tous les sommets $\sigma(\alpha, \beta)$ du cycle dont $\sigma(\alpha_0, \beta_0)$ est le sommet initial. Or cette somme est nulle par la relation (5) du § 4. Donc les termes en $\chi(\alpha_0, \beta_0)$ disparaissent et le 2[d] membre est linéaire par rapport aux ω_j seulement. On trouve alors, en identifiant les coefficients de ω_j,

$$H_j = \sum k(\alpha, \beta, j) y'(\alpha, \beta) + \tfrac{1}{2} \sum m(\alpha, \beta, j) y'(\alpha, \beta).$$

Mais on a, par la définition des nombres h,

$$H_j = \sum h(\alpha, \beta, j) y'(\alpha, \beta),$$

d'où

$$h(\alpha, \beta, j) = k(\alpha, \beta, j) + \tfrac{1}{2} m(\alpha, \beta, j). \tag{4}$$

On a d'autre part

$$y(\alpha, \beta) = -y(\alpha', \beta') = \chi(\alpha' - 1, \beta') - \chi(\alpha, \beta) = \chi(\alpha', \beta') - \chi(\alpha - 1, \beta)$$

et par conséquent, en égalant les coefficients de ω_j,

$$m(\alpha, \beta) = -m(\alpha', \beta') = k(\alpha' - 1, \beta') - k(\alpha, \beta) = k(\alpha', \beta') - k(\alpha - 1, \beta). \tag{5}$$

Il faudrait affecter les m et les k d'un troisième indice j qui serait le même pour tous les nombres qui figurent dans cette formule (5).

Comparons maintenant deux expressions telles que $\chi(\alpha, \beta)$ et $\chi(\alpha, \beta')$.

La dérivée de U prendra la même valeur en $\sigma(\alpha, \beta)$ et en $\sigma(\alpha, \beta')$ ou, plus généralement, en deux points correspondants des deux polygones $P'(\beta)$ et $P'(\beta')$; et en effet nous avons supposé que l'intégrale U était réductible, c'est-à-dire qu'elle appartenait, non seulement à la courbe C, mais encore à la courbe C'. La différence des valeurs de U en ces deux points est donc une constante, et par conséquent la différence

$$\chi(\alpha, \beta) - \chi(\alpha, \beta')$$

ne dépend que des indices β et β', et ne dépend pas de l'indice α. Il en est donc de même de la différence

$$k(\alpha, \beta, j) - k(\alpha, \beta', j).$$

Il résulte de là que nous pouvons écrire

$$k(\alpha, \beta, j) = k(\alpha, j) + k(\beta, j)$$

et considérer le nombre $k(\alpha, \beta, j)$ comme la somme de deux autres nombres analogues dépendant, le premier seulement de l'indice α et le second seulement de l'indice β.

Cela posé, rappelons comment on forme l'invariant J: on dresse le tableau des m et celui des h; on désigne par D l'un quelconque des déterminants obtenus en prenant $2q$ colonnes dans le 1^er^ tableau; par D' le déterminant obtenu en prenant *les mêmes* colonnes dans le 2^d^ tableau; et on a

$$J = \sum DD'.$$

Je dis que J ne changera pas quand dans le 1^er^ tableau on ajoutera la 1^ère^ colonne à la 2^de^, en même temps que dans le 2^d^ tableau on retranchera la 2^de^ colonne de la 1^ère^. Désignons en effet par D un déterminant tiré du tableau primitif des m; par D', Δ et Δ' les déterminants correspondants tirés du tableau primitif des h, du tableau modifié des m et du tableau modifié des h. Il s'agit de montrer que

$$\sum DD' = \sum \Delta\Delta'.$$

Soit D_α l'un quelconque des déterminants qui ne contiennent ni la 1^ère^ ni la 2^de^ colonne; D_β l'un quelconque des déterminants qui contiennent à la fois ces deux colonnes; D_γ l'un quelconque des déterminants qui contiennent la 1^ère^ colonne sans contenir la 2^de^ et enfin D_γ^0 le déterminant obtenu en remplaçant dans D_γ la 1^ère^ colonne par la 2^de^. On aura

$$D_\alpha = \Delta_\alpha, \qquad D'_\alpha = \Delta'_\alpha, \qquad D_\beta = \Delta_\beta, \qquad D'_\beta = \Delta'_\beta,$$

$$\Delta_\gamma^0 = D_\gamma + D_\gamma^0, \qquad \Delta'_\gamma = D'_\gamma - D'^0_\gamma, \qquad \Delta_\gamma = D_\gamma, \qquad \Delta'^0_\gamma = D'^0_\gamma;$$

d'où

$$D_\alpha D'_\alpha = \Delta_\alpha \Delta'_\alpha, \qquad D_\beta D'_\beta = \Delta_\beta \Delta'_\beta, \qquad D_\gamma D'_\gamma + D_\gamma^0 D'^0_\gamma = \Delta_\gamma \Delta'_\gamma + \Delta_\gamma^0 \Delta'^0_\gamma;$$

et par conséquent

$$\sum DD' = \sum \Delta\Delta'.$$

On pourrait évidemment opérer de même sur d'autres colonnes quelconques.

Les colonnes de nos deux tableaux pourront être rangées dans un ordre tel que celle qui se rapporte à un côté $\gamma(\alpha, \beta)$ soit immédiatement suivie de celle qui se rapporte au côté conjugué $\gamma(\alpha', \beta')$. Nous aurons alors dans les deux tableaux, dans chaque colonne de rang impair, les nombres

$$m(\alpha, \beta, j), \qquad h(\alpha, \beta, j)$$

et dans la colonne suivante les nombres

$$m(\alpha', \beta', j), \qquad h(\alpha', \beta', j).$$

Faisons l'opération dont nous venons de démontrer la légitimité, d'abord sur les deux premières colonnes, puis sur les deux suivantes, et ainsi de suite. Alors dans les deux tableaux modifiés nous aurons dans chaque colonne de rang impair les nombres

$$m(\alpha, \beta, j), \qquad h(\alpha, \beta, j) - h(\alpha', \beta', j)$$

et dans la colonne suivante les nombres

$$m(\alpha, \beta, j) + m(\alpha', \beta', j), \qquad h(\alpha', \beta', j).$$

Mais

$$m(\alpha,\ \beta,\ j) + m(\alpha',\ \beta',\ j) = 0.$$

Nous pouvons alors supprimer toutes les colonnes de rang pair, et en effet tous les déterminants Δ qui contiennent une de ces colonnes sont nuls, puisque tous les termes de ces colonnes sont nuls dans le 1^er^ tableau modifié.

Il nous restera donc deux tableaux formés respectivement avec les nombres:

$$m(\alpha,\ \beta,\ j), \qquad h(\alpha,\ \beta,\ j) - h(\alpha',\ \beta',\ j)$$

et il s'agit de former la somme

$$\sum \Delta\Delta'$$

relative à ces deux tableaux.

On a d'abord

$$m(\alpha,\ \beta,\ j) = k(\alpha' - 1,\ j) + k(\beta',\ j) - k(\alpha,\ j) - k(\beta,\ j)$$

et

$$2h(\alpha,\ \beta,\ j) = k(\alpha' - 1,\ j) + k(\beta',\ j) + k(\alpha,\ j) + k(\beta,\ j),$$

$$2h(\alpha',\ \beta',\ j) = k(\alpha - 1,\ j) + k(\beta,\ j) + k(\alpha',\ j) + k(\beta',\ j),$$

d'où

$$2h(\alpha,\ \beta,\ j) - 2h(\alpha',\ \beta',\ j) = k(\alpha' - 1,\ j) + k(\alpha,\ j) - k(\alpha - 1,\ j) - k(\alpha',\ j),$$

ce qui montre que les nombres du 2^d^ tableau modifié et par conséquent les Δ' ne dépendent pas de l'indice β.

Chaque colonne dépendant de deux indices α et β, chaque déterminant dépendra de deux séries de $2q$ indices

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2q}$$

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{2q};$$

je pourrai donc désigner l'un des déterminants Δ par ces indices, en l'écrivant

$$\Delta(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2q};\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{2q})$$

ou simplement

$$\Delta(\alpha_i,\ \beta_i).$$

Nous pourrions écrire de même $\Delta'(\alpha_i,\ \beta_i)$; mais Δ', comme nous venons de le voir, ne dépendant pas des β, nous écrirons simplement

$$\Delta'(\alpha_i)$$

et nous aurons

$$J = \sum \Delta(\alpha_i,\ \beta_i)\Delta'(\alpha_i).$$

La sommation doit s'effectuer, d'une part par rapport aux indices β, et d'autre part par rapport aux indices α. Nous pourrons écrire

$$H(\alpha_i) = \sum\nolimits_\beta \Delta(\alpha_i,\ \beta_i),$$

la sommation s'effectuant seulement par rapport aux indices β, et on aura ensuite

$$J = \sum\nolimits_\alpha H(\alpha_i)\Delta'(\alpha_i),$$

la sommation s'effectuant cette fois par rapport aux indices α.

Nous devons observer que les indices α doivent être tous différents, sans quoi

$\Delta'(\alpha_i)$ serait nul; en revanche deux ou plusieurs des β peuvent être identiques; car, si $\beta_1 = \beta_2$, par exemple, les nombres

$$m(\alpha_1, \beta_1, j), \qquad m(\alpha_2, \beta_1, j)$$

n'en seront pas moins différents. De plus, on doit tenir compte de l'ordre des β et, par exemple, les deux combinaisons

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \beta_4, \ldots, \beta_{2q}$$

et

$$\beta_2, \quad \beta_1, \quad \beta_3, \quad \beta_4, \ldots, \beta_{2q}$$

doivent être tenues pour différentes puisque la 1ère conduit aux nombres

$$m(\alpha_1, \beta_1, j), \qquad m(\alpha_2, \beta_2, j)$$

et la seconde à

$$m(\alpha_1, \beta_2, j), \qquad m(\alpha_2, \beta_1, j).$$

Cela nous indique comment doivent être faites les sommations.

J'écrirai

$$\Delta(\alpha_i, \beta_i) = [m(\alpha_i, \beta_i, j)]$$

voulant dire par là que $\Delta(\alpha_i, \beta_i)$ est un déterminant où l'élément de la i^e colonne et de la j^e ligne est $m(\alpha_i, \beta_i, j)$. J'aurai alors, avec la même notation,

$$H(\alpha_i) = \sum_\beta \Delta(\alpha_i, \beta_i) = [\sum_\beta m(\alpha_i, \beta, j)].$$

Or

$$m(\alpha_i, \beta, j) = k(\alpha_i' - 1, j) - k(\alpha_i, j) + k(\beta', j) - k(\beta, j),$$

ce que je puis écrire

$$m(\alpha_i, \beta, j) = m(\alpha_i, j) + k(\beta', j) - k(\beta, j),$$

en posant

$$m(\alpha_i, j) = k(\alpha_i' - 1, j) - k(\alpha_i, j).$$

La sommation doit s'étendre aux n valeurs de β. Le terme $m(\alpha_i, j)$ étant indépendant de β, on a

$$\sum m(\alpha_i, j) = n\, m(\alpha_i, j).$$

D'autre part, quand β parcourt les valeurs $1, 2, \ldots, n$, l'indice β' parcourt les mêmes valeurs dans un autre ordre, de sorte qu'on a

$$\sum k(\beta', j) - \sum k(\beta, j) = 0$$

et qu'il reste simplement

$$\sum_\beta \Delta(\alpha_i, \beta_i) = n^{2q} [m(\alpha_i, j)]$$

ou

$$H(\alpha_i) = n^{2q} \Delta(\alpha_i),$$

en posant

$$\Delta(\alpha_i) = [m(\alpha_i, j)],$$

de sorte qu'il reste

$$J = n^{2q} \sum \Delta(\alpha_i) \Delta'(\alpha_i)$$

ou bien

$$J = n^{2q} J',$$

J' étant l'invariant relatif à la courbe C' et au polygone P'.

Examinons en particulier les deux exemples du § 1. Dans le 1[er] de ces exemples on a $q = 1$, et nous pouvons prendre pour périodes

$$\omega_1 = \frac{2i\pi}{\alpha}, \qquad \omega_2 = b$$

et supposer que la courbe C' est une courbe de genre 1 admettant comme intégrale de 1[ère] espèce u_1, laquelle elle-même aura pour périodes fondamentales $\frac{2i\pi}{\alpha}$ et b; nous reprenons les notations du § 1, de sorte que les lettres α et b n'ont plus du tout la même signification qu'au début du présent §. Quoi qu'il en soit, les périodes ω_1 et ω_2 pouvant être regardées comme des périodes normales, on aura

$$J' = 1, \qquad J = n^2$$

et d'après le § 2

$$J = \alpha^2, \qquad n = \alpha.$$

Mais nous pourrions également prendre d'autres périodes $\Big($de façon que toute fonction périodique admettant les périodes ω_1 et ω_2 admette nécessairement les périodes $\frac{2i\pi}{\alpha}$ et $b\Big)$, par exemple

$$\omega_1 = \frac{2i\pi}{\alpha\beta}, \qquad \omega_2 = \frac{b}{\gamma},$$

β et γ étant des entiers quelconques. Dans ce cas le tableau des nombres m s'écrit:

$$\begin{matrix} \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \end{matrix}$$

et l'on a

$$J = \alpha^2\beta^2\gamma^2; \qquad J' = 1, \qquad J = n^2, \qquad n = \alpha\beta\gamma.$$

Mais nous nous tiendrons à la 1[ère] hypothèse, c'est-à-dire que parmi les systèmes de périodes ω qui conduisent à la réduction, *nous choisirons toujours le plus simple;* on aura alors

$$n = \alpha.$$

Passons au 2[d] exemple. Ici $q=2$, les intégrales u_1 et u_2 admettent pour périodes

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & \frac{2i\pi}{\alpha} \\ 0 & 2i\pi & 0 & 0 & b & c & \frac{2i\pi}{\alpha\beta} & 0. \end{matrix}$$

Nous pourrions donc prendre le tableau suivant des périodes ω

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ u_1 & \frac{2i\pi}{\alpha} & 0 & a & b \\ u_2 & 0 & \frac{2i\pi}{\alpha\beta} & b & c. \end{array} \right.$$

Mais ces périodes ne satisfont pas à la condition que doivent remplir un système de périodes d'intégrales abéliennes engendrées par une courbe de genre 2. Nous devons donc chercher un autre système de périodes *sous-multiple* du premier. Je dis, pour abréger le langage, qu'un système de périodes S est *sous-multiple* d'un autre système S', quand l'existence des périodes S entraîne celle des périodes S', sans que la réciproque soit vraie.

Il est clair alors que parmi les systèmes sous-multiples de (S), et satisfaisant à la condition fondamentale imposée aux périodes des intégrales abéliennes, le plus simple est le suivant

$$(S')\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ u_1 & \dfrac{2i\pi}{\alpha\beta} & 0 & a & b \\ u_2 & 0 & \dfrac{2i\pi}{\alpha\beta} & b & c \end{array}\right.$$

et que tous les autres ne sont que des sous-multiples de (S'). Nous pouvons alors supposer que u_1 et u_2, regardées comme intégrales abéliennes relatives à la courbe C', admettent les périodes S'. Alors le tableau des nombres m ne sera plus comme au § 2,

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

mais bien

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0. \end{array}$$

On n'a donc plus comme au § 2, $J = \alpha^4\beta^2$, mais

$$J = \alpha^4\beta^4.$$

D'autre part, les périodes ω étant normales, on a

$$J' = 1, \qquad J = n^4,$$

d'où

$$n = \alpha\beta.$$

Dans le 1er exemple, nous avons trouvé $n = \alpha$, dans le 2^{d} nous trouvons $n = \alpha\beta$; la loi est évidemment générale et peut s'énoncer ainsi:

Le nombre n des polygones $P'(\beta)$ n'est autre chose que le nombre k relatif à la réduction et défini au § 1; pourvu du moins que l'on choisisse le système des périodes ω de la façon la plus simple possible.

§ 7.

Autre mode de calcul.

On peut arriver à ce même résultat d'une manière plus simple, de sorte que je n'aurais pas pris un chemin aussi détourné si les propositions intermédiaires ne devaient pas nous être utiles dans la suite.

Soient U et U' deux intégrales abéliennes appartenant à la courbe C', à laquelle se rapporte le polygone P'; la 1ère sera de 1ère espèce et la 2de de 3e espèce; elle admettra deux points singuliers logarithmiques M_0 et M_1 avec les résidus $+1$ et -1.

Prenons l'intégrale

$$\int U d U'$$

le long du périmètre de P'; elle sera égale à

$$2 i \pi (U_0 - U_1),$$

U_0 et U_1 étant les valeurs de U aux points M_0 et M_1; le résultat serait encore le même si on intégrait le long du périmètre d'un quelconque des polygones appelés plus haut $P'(\beta)$, et en effet quand on passe du point M_0 intérieur à P' au point correspondant de $P'(\beta)$, la valeur de U_0 augmente d'une période; et quand on passe de M_1 au point correspondant de $P'(\beta)$, la valeur de U_1 augmente de la même période, de sorte que la différence $U_1 - U_0$ ne change pas.

D'autre part, cette même intégrale est égale à

$$\Phi(\omega, \omega'),$$

les ω étant les périodes de U par rapport à la courbe C', et les ω' étant les périodes correspondantes de U', tandis que $\Phi(\omega, \omega')$ est la forme bilinéaire caractéristique relative à ces périodes. On a donc

$$\Phi(\omega, \omega') = 2 i \pi (U_0 - U_1).$$

Prenons maintenant la même intégrale le long du périmètre de P, ce sera comme si on la prenait le long des divers polygones $P'(\beta)$ qui sont au nombre de n. On trouvera donc

$$2 n i \pi (U_0 - U_1).$$

D'autre part l'intégrale sera égale à

$$F(y, y'),$$

les y étant les périodes de U par rapport à la courbe C, les y' étant les périodes correspondantes de U', et $F(y, y')$ étant la forme bilinéaire relative à ces périodes. On aura donc

$$F(y, y') = 2 n i \pi (U_0 - U_1),$$

d'où

$$F(y, y') = n \Phi(\omega, \omega').$$

Si nous prenons les périodes normales et le 1er exemple du § 1, nous aurons: pour

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad y_4, \quad y_5, \quad y_6,$$

les valeurs

$$2 i \pi, \quad 0, \quad 0, \quad h, \quad \frac{2 i \pi}{\alpha}, \quad 0;$$

pour

$$\omega_1, \quad \omega_2,$$

les valeurs

$$\frac{2i\pi}{\alpha},\quad h;$$

d'où

$$y_1 = \alpha\omega_1,\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 0,\quad y_4 = \omega_2,\quad y_5 = \omega_1,\quad y_6 = 0$$

avec les mêmes relations entre les y' et les ω'; d'ailleurs

$$F(y, y') = y_1 y_4' - y_4 y_1' + y_2 y_5' - y_5 y_2' + y_3 y_6' - y_6 y_3',$$

$$\Phi(\omega, \omega') = \omega_1 \omega_2' - \omega_2 \omega_1',$$

d'où, en remplaçant les y et les y' par leurs valeurs en fonctions des ω et des ω',

$$F(y, y') = \alpha\Phi(\omega, \omega')$$

et

$$n = \alpha.$$

Passons au 2[d] exemple du § 1; nous aurons (si $U = \lambda u_1 + \mu u_2$): pour

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4,\quad y_5,\quad y_6,\quad y_7,\quad y_8,$$

les valeurs

$$2i\pi\lambda,\quad 2i\pi\mu,\quad 0,\quad 0,\quad a\lambda + b\mu,\quad b\lambda + c\mu,\quad \frac{2i\pi\mu}{\alpha\beta},\quad \frac{2i\pi\lambda}{\alpha};$$

pour

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \omega_4,$$

les valeurs

$$\frac{2i\pi\lambda}{\alpha\beta},\quad \frac{2i\pi\mu}{\alpha\beta},\quad a\lambda + b\mu,\quad b\lambda + c\mu;$$

d'où

$$y_1 = \alpha\beta\omega_1,\quad y_2 = \alpha\beta\omega_2,\quad y_3 = 0,\quad y_4 = 0,\quad y_5 = \omega_3,\quad y_6 = \omega_4,\quad y_7 = \omega_2,\quad y_8 = \beta\omega_1$$

avec les mêmes relations entre les y' et les ω'; d'ailleurs

$$F(y, y') = y_1 y_5' - y_5 y_1' + y_2 y_6' - y_6 y_2' + y_3 y_7' - y_7 y_3' + y_4 y_8' - y_8 y_4',$$

$$\Phi(\omega, \omega') = \omega_1 \omega_3' - \omega_3 \omega_1' + \omega_2 \omega_4' - \omega_4 \omega_2',$$

d'où

$$F(y, y') = \alpha\beta\Phi(\omega, \omega')$$

et

$$n = \alpha\beta.$$

Les résultats du § précédent sont ainsi retrouvés et la méthode est évidemment générale.

§ 8.

Cas où $q = 1$.

Je me propose maintenant d'étudier de plus près les circonstances de la réduction et je commence par rappeler et compléter les relations entre les nombres N, N', Q,

Q', etc. Nous avons trouvé au § 3 les relations suivantes

$$(1)\qquad \begin{cases} 2p = N - Q + 1 \\ 2q = N' - Q' + 1 \end{cases}$$

$$(2)\qquad Q + 2p - 2 = n(Q' + 2q - 2)$$

$$(3)\qquad N - 1 = n(N' - 1) - \mu.$$

La formule (2) s'applique au cas où le nombre μ est égal à zéro, c'est-à-dire où il n'y a pas de sommet commun à plusieurs polygones $P'(\beta)$ qui se trouve à l'intérieur de P. Nous adopterons cette hypothèse; si d'ailleurs elle n'était pas satisfaite, et que $ABCDA$ représentant le périmètre de P, un sommet commun E à plusieurs $P'(\beta)$ fût à l'intérieur de P, nous pourrions joindre AE et prendre pour périmètre de P la ligne fermée $EABCDAE$. Dans le polygone P modifié, E serait regardé comme un sommet, dont l'angle serait 2π, et le périmètre comprendrait deux fois le côté EA, parcouru une fois dans le sens direct, une fois dans le sens rétrograde. Nous pouvons donc toujours supposer

$$\mu = 0.$$

Dans ce cas, la formule (3) devient

$$(3^{\text{bis}})\qquad N - 1 = n(N' - 1)$$

et est une conséquence immédiate des formules (1) et (2).

La formule (2) peut s'écrire

$$(4)\qquad nQ' - Q = 2(p - 1) - 2n(q - 1).$$

Le 1[er] membre de cette relation est susceptible d'une interprétation particulière. Nous avons vu au § 5 comment se forment les Q cycles de sommets de P. A chacun des Q' cycles de sommets de P' correspond une substitution

$$\Sigma = S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_m}$$

portant sur n lettres. Cette substitution se décompose en un certain nombre de permutations circulaires. A chacune de ces permutations circulaires correspond un cycle de sommets de P. Il y a donc en tout Q' substitutions Σ, et le nombre total des permutations circulaires dont elles se composent est de Q.

Le nombre total des lettres est nQ'; si alors λ_i est le nombre des permutations circulaires qui permutent i lettres, on aura

$$\sum \lambda_i = Q, \qquad \sum i\lambda_i = nQ',$$

d'où

$$(5)\qquad \sum (i - 1)\lambda_i = 2(p - 1) - 2n(q - 1).$$

Voyons en passant quelle est la relation de ces substitutions Σ avec les nombres ν_i définis au § 3. Chacun des points singuliers A' du § 3 correspond à un sommet de P' et par conséquent à une substitution Σ. Cette substitution permute n lettres correspondant aux n feuillets de la surface de Riemann C du § 3 ou aux n déterminations de M, c'est précisément la permutation que subissent ces n déterminations quand M' tourne autour de A'. Les points A_i correspondent à divers sommets de P et par conséquent aux permutations circulaires en lesquelles se décompose Σ. On voit ainsi que ces permutations circulaires porteront respectivement sur

$$\nu_1, \quad \nu_2, \ldots, \nu_\alpha$$

lettres.

Nous allons examiner en particulier le cas où $q = 1$, c'est-à-dire celui où la courbe C' est de genre 1, et où les intégrales abéliennes sont réductibles aux intégrales elliptiques.

La formule (5) devient alors:

$$(5^{\text{bis}}) \qquad \sum (i-1)\lambda_i = 2(p-1).$$

Ceci nous montre d'abord que p ne peut être nul, ce qui était d'ailleurs évident puisqu'alors C n'admettrait pas d'intégrale abélienne; si l'on supposait $p = 1$, tous les nombres i devraient être égaux à 1, c'est-à-dire que toutes nos substitutions Σ devraient se réduire à la substitution identique; il n'y aurait pas sur la surface de Riemann C', de points de ramification A', nous devrions prendre pour le polygone fuchsien un quadrilatère, à côtés opposés conjugués dont la somme des angles serait 2π; ce quadrilatère se réduirait alors à un parallélogramme rectiligne de la géométrie ordinaire; puisque la somme des angles serait 2π et non plus petite que 2π comme dans la géométrie non-euclidienne; nous retomberions en définitive sur la théorie ordinaire de la transformation des fonctions elliptiques.

Examinons donc le cas de

$$q = 1, \qquad p > 1.$$

Deux hypothèses sont possibles:

1° Ou bien toutes les substitutions Σ se réduisent à une permutation entre deux lettres. Dans ce cas chacune de ces substitutions se décompose en un certain nombre de permutations circulaires, qui ne portent que sur une lettre, de sorte que le terme $(i-1)$ correspondant est nul, excepté pour une d'elles qui porte sur deux lettres, de sorte que le terme $(i-1)$ correspondant est égal à 1. Nous aurons donc dans le 1er membre de (5^{bis}) autant de termes égaux à 1 qu'il y a de substitutions Σ, tous les autres termes étant nuls; ce 1er membre est donc égal au nombre des substitutions Σ. A chacune de ces substitutions Σ correspond un cycle de sommets de P'. Si, comme nous l'avons supposé au § 3, nous choisissons ce polygone P' de la façon la plus simple possible, il n'y en aura pas d'autres. Ainsi notre premier membre est égal au nombre de ces cycles et l'on a

$$(6) \qquad Q' = 2p - 2$$

et par conséquent

$$(7) \qquad N' = 2p - 1.$$

La somme des angles sera de π pour chacun de ces cycles (puisque le nombre ν est égal à 2). Les polygones P' ainsi définis seront des *polygones P' de la 1ère sorte.*

2° On peut supposer, au contraire, que quelques-unes des substitutions Σ ne se réduisent pas à une permutation entre deux lettres; que, par exemple, l'une d'elles se réduise à une permutation circulaire entre 3 ou plusieurs lettres, ou a deux permutations entre 2 lettres. Alors le 1er membre de (5^{bis}) contient plusieurs termes égaux à 1, ou un terme supérieur à 1 et correspondant à cette substitution, de sorte que l'on a

$$Q' < 2p - 2, \qquad N' < 2p - 1.$$

Les polygones P' ainsi définis seront des *polygones P' de la 2^{de} sorte.*

Les cas les plus simples sont ceux d'un quadrilatère dont les côtés opposés sont conjugués et dont la somme des angles est égal à π; ou bien encore celui d'un hexagone dont les côtés opposés sont conjugués et qui a deux cyles de sommets, avec des sommes d'angles de π et de $\frac{2\pi}{3}$.

Nous verrons plus loin que les polygones P' de la 2^{de} sorte peuvent être regardés comme des dégénérescences de ceux de la $1^{ère}$ sorte.

Examinons surtout ceux de la $1^{ère}$ sorte. Pour déterminer un polygone de $2N'=4p-2$ côtés, il faut $8p-7$ données. Mais notre polygone est assujetti à certaines conditions. D'abord les côtés conjugués doivent être égaux (au point de vue non euclidien) ce qui fait $N' = 2p - 1$ conditions; ensuite la somme des angles de chaque cycle doit être égale à π, ce qui fait $Q' = 2p - 2$ conditions. Il reste donc

$$(8p-7)-(2p-1)-(2p-2) = 4p-4$$

données arbitraires.

Mais ces données sont *réelles,* elles équivalent donc à $2p - 2$ données arbitraires *complexes.*

Comparons ce nombre à celui des périodes arbitraires de notre tableau. Le tableau des périodes peut être réduit à la forme canonique comme nous l'avons fait au § 1; reportons-nous par exemple au 1^{er} exemple de ce § où $q = 1$, $p = 3$; nous voyons que dans ce tableau figurent 4 arbitraires h, a, b, c; le nombre α est l'entier caractéristique de la réduction et ne doit pas être regardé comme arbitraire; c'est notre nombre n. En général, nous aurons une arbitraire correspondant à h, et $\frac{p(p-1)}{2}$ arbitraires analogues à a, b, c; en tout

$$\frac{p(p-1)}{2} + 1.$$

Ce nombre n'est pas égal à $2p - 2$ et cela ne doit pas nous étonner, puisqu'un système quelconque de périodes ne correspond pas toujours à une courbe C, ou, pour parler le langage du § 1, à des fonctions abéliennes *spéciales.* La différence

$$\frac{p(p-1)}{2} + 1 - (2p-2) = \frac{p^2 - 5p + 6}{2}$$

est le nombre des conditions qu'il faut imposer à un système de périodes *réductibles* pour qu'il conduise à des fonctions abéliennes spéciales.

Considérons maintenant un système de périodes *quelconques,* non réductibles en général; le nombre des périodes arbitraires est

$$\frac{p(p+1)}{2}.$$

Le nombre des données arbitraires dont dépend une courbe C de genre p (modules) est

$$3p-3.$$

La différence

$$\frac{p(p+1)}{2}-3p-3=\frac{p^2-5p+6}{2}$$

représente le nombre des conditions qu'il faut imposer à un système de périodes *quelconques* pour qu'il conduise à des fonctions abéliennes spéciales.

On remarquera que, comme il convient, ce nombre de conditions est le même dans les deux cas.

Si on avait pris un polygone de la 2^e sorte, on aurait eu $Q'<2p-2$ et le nombre des arbitraires (réelles) eût été

$$(4N'-3)-N'-Q'=3N'-Q'-3=2Q'<4p-4.$$

Voyons, en nous plaçant à un point de vue entièrement différent, à quoi correspondent ces Q' points singuliers. Considérons la courbe C, qui sera de degré m et aura par conséquent

$$d=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-p$$

points doubles.

Soit u_1 l'intégrale abélienne de C qui est réductible aux intégrales elliptiques. Les points A correspondant aux sommets de P' seront ceux pour lesquels la dérivée de cette intégrale $\frac{du_1}{dx}$ s'annulera. Ce seront donc les points d'intersection de C avec la courbe

$$\frac{du_1}{dx}=0.$$

Cette courbe, adjointe à C, et passant par les d points doubles est de degré $m-3$. Elle coupe C (en dehors des points doubles) en

$$m(m-3)-2d=2(p-1)$$

points. A chacun d'eux correspond en général une valeur de u_1 et par conséquent un cycle de sommets de P'.

En général, ces $2p-2$ points d'intersection sont distincts et correspondent à autant de valeurs distinctes de u_1. Le nombre des cycles de sommets de P' est donc

$$Q'=2p-2.$$

Le polygone P' est alors de la $1^{ère}$ sorte, mais il peut se faire également que les deux courbes se touchent de façon que deux des points d'intersection se confondent (c'est le cas où l'une des substitutions Σ permute circulairement trois lettres), ou bien encore que deux de ces points correspondent à une même valeur de u_1 (c'est le cas où l'une des substitutions Σ permute à la fois deux lettres β_1 et β_2, et deux autres lettres β_3 et β_4). Le nombre Q' est alors plus petit que $2p-2$ et le polygone P' est de la 2^{de} sorte.

§ 9.

Cas de $q > 1$.

Nous avons alors à appliquer la formule

$$\sum (i-1)\lambda_i = 2(p-1) - 2n(q-1) \tag{1}$$

et nous ferons une première remarque; si

$$n > \frac{p-1}{q-1}, \tag{2}$$

le premier membre de (1) doit être négatif, ce qui est absurde. Il est donc impossible de construire des polygones P et P' de façon à satisfaire à l'inégalité (2). Et cependant nous pouvons construire un tableau de périodes réductibles analogue, par exemple, au tableau relatif du 2[d] exemple du § 1. Dans ce tableau $q = 2$, $p = 4$, et $n = \alpha\beta$. Il est clair que nous pouvons choisir les entiers α et β qui sont arbitraires de telle façon que le produit $\alpha\beta$ soit plus grand que 3, c'est-à-dire que $\frac{p-1}{q-1}$.

Nous pouvons donc construire un tableau de périodes réductibles, tel que l'inégalité (2) soit satisfaite, et cela non seulement pour $p = 4$, $q = 2$ mais quels que soient p et q, le résultat étant évidemment général. A la vérité, cela n'implique pas l'existence des courbes C et C', puisque ces périodes pourraient engendrer des fonctions abéliennes *non spéciales*. Mais dans l'exemple choisi ($p = 4$, $q = 2$), il suffit d'une condition pour que les fonctions abéliennes engendrées soient spéciales et pour que la courbe C existe; et, en effet, pour $p = 4$, on a $\frac{p^2 - 5p + 6}{2} = 1$. Comme il reste dans notre tableau plusieurs arbitraires, nous pourrons disposer de l'une d'elles de façon à satisfaire à cette condition, et la courbe C existera. Quant à la courbe C', elle existe toujours puisque, pour $q = 2$, on a $\frac{q^2 - 5q + 6}{2} = 0$.

Ainsi nous pourrons trouver un système de périodes réductibles, telles que C et C' existent et que l'inégalité (2) ait lieu. Il suffira pour cela, quel que soit n, que le nombre des arbitraires

$$\frac{q(q+1)}{2} + \frac{(p-q)(p-q+1)}{2}$$

soit plus grand que le nombre des conditions à remplir

$$\frac{p^2 - 5p + 6}{2} + \frac{q^2 - 5q + 6}{2}.$$

Qu'est-ce à dire? Ainsi que nous l'avons vu au § 1, si on considère un système S' de q points de C', on peut lui faire correspondre un système S de q points de C, de telle façon que toute fonction rationnelle symétrique des coordonnées des divers points de S' soit une fonction rationnelle symétrique des coordonnées des divers points de S. Mais il ne s'ensuit pas qu'à *un* point M' de C', on puisse faire correspondre *un* point M de C', de telle sorte que toute fonction rationnelle des coordonnées de M soit une fonction rationnelle des coordonnées de M'.

Quand la 2[de] condition (qui entraîne la 1[ère]) sera remplie, nous dirons que la courbe C est *multiple* de la courbe C', et quand la 1[ère] condition sera remplie sans que la 2[de] le soit, nous dirons que la courbe C est *pseudo-multiple* de la courbe C'.

L'analyse qui précède nous montre que pour des valeurs convenables de p, q et n il existe certainement des courbes pseudo-multiples.

Maintenant il peut se faire que

$$n = \frac{p-1}{q-1}. \tag{3}$$

Nous pouvons alors construire les polygones P' et P; seulement le premier membre de (1) est nul, de sorte que tous les nombres i doivent être égaux à 1, c'est-à-dire que toutes les substitutions Σ doivent se réduire à la substitution identique. Alors *il n'y a pas de point de ramification tel que A' sur C'.* Si nous choisissons le polygone P' de la façon la plus simple possible, on n'aura qu'un seul cycle de sommets de P' et la somme des angles sera 2π; on aura donc:

$$Q' = 1, \qquad N' = 4q.$$

Nous dirons alors que le polygone P' est *de la 3[e] sorte.* L'exemple le plus simple est $q=2$, $p=3$, $n=2$; le polygone P' est un octogone dont les côtés opposés sont conjugués; le polygone P est un polygone de 14 côtés formé par la réunion de deux de ces octogones et dont les côtés opposés sont conjugués.

Supposons maintenant

$$n < \frac{p-1}{q-1}; \tag{4}$$

nous pouvons alors faire deux hypothèses:

1° ou bien toutes les substitutions Σ se réduisent à une permutation entre deux lettres; on a alors

$$\sum (i-1)\lambda_i = Q' = 2(p-1) - 2n(q-1),$$
$$N' = Q' + 2q - 1 = 2(p-1) - 2(n-1)(q-1) + 1.$$

Le nombre des données arbitraires (réelles) qui définissent P' est

$$4N' - 3 - N' - Q' = 2Q' + 6q - 6 = 4(p-1) - (4n-6)(q-1)$$

et elles équivalent à

$$\nu = 2(p-1) - (2n-3)(q-1)$$

arbitraires complexes. Nous dirons dans ce cas que le polygone P' est *de la 1[ère] sorte.*

2° ou bien toutes les substitutions Σ ne se réduisent pas à une permutation entre deux lettres; alors

$$Q' < 2(p-1) - 2n(q-1), \qquad \nu < 2(p-1) - (2n-3)(q-1).$$

Le polygone P' est alors *de la 2[de] sorte.*

Nous pouvons, ainsi que nous l'avons fait pour le cas de $q=1$, comparer le nombre des arbitraires du polygone P' avec celui des périodes arbitraires. Nous nous bornerons au cas des polygones de la 1ère sorte; on a alors

$$\nu = 2(p-1)-(2n-3)(q-1)$$

données arbitraires *complexes* dans le polygone P'. Le nombre des arbitraires dans le tableau des périodes réductibles est

$$H=\frac{q(q+1)}{2}+\frac{(p-q)(p-q+1)}{2}.$$

Étant donné un tableau de périodes réductibles, à combien de conditions doivent satisfaire les périodes de ce tableau pour que l'on soit conduit à une courbe C multiple d'une courbe C'? Le nombre cherché de ces conditions est $H-\nu$.

Comparons-le avec le nombre

$$\frac{p^2-5p+6}{2}$$

des conditions pour qu'un système *quelconque* de périodes conduise à des fonctions abéliennes spéciales, c'est-à-dire pour que la courbe C existe. La différence

$$H-\nu-\frac{p^2-5p+6}{2}$$

est

$$=(1-q)(p-q+2-2n).$$

On voit que l'égalité a lieu pour $q=1$, ainsi que nous l'avons vu dans le § précédent; en revanche elle n'a plus lieu en général pour $q>1$.

1° Si

$$p=q+2n-2, \tag{5}$$

le nombre des conditions pour qu'un système de périodes *réductibles* engendre deux courbes algébriques C et C' telle que la première soit multiple de l'autre, est égal au nombre des conditions pour qu'un système de périodes *quelconques* engendre une courbe algébrique C.

2° Si

$$p<q+2n-2, \tag{6}$$

le premier nombre est supérieur au second; c'est-à-dire qu'il peut arriver que les conditions pour que C existe étant satisfaites, cette courbe C ne soit cependant pas multiple d'une courbe C'; et cela peut s'expliquer de deux manières:

Ou bien la courbe C' n'existe pas. En effet, si nous avons q intégrales abéliennes réductibles n'ayant chacune que $2q$ périodes distinctes, il peut se faire que les périodes de ces q intégrales engendrent des fonctions abéliennes à q variables *non-spéciales*.

Ou bien la courbe C' existe, mais la courbe C est seulement *pseudo-multiple* de C'. Le nombre des conditions pour que la courbe C' existe est

$$\frac{q^2-5q+6}{2}.$$

Si donc

$$H - \nu > \frac{p^2 - 5p + 6}{2} + \frac{q^2 - 5q + 6}{2}, \tag{7}$$

il peut arriver que, les conditions pour que les courbes C et C' existent l'une et l'autre étant satisfaites, la courbe C ne soit cependant pas multiple de C'. Il est certain dans ce cas que C est pseudo-multiple de C'.

3° si au contraire

$$p > q + 2n - 2, \tag{8}$$

le 1er nombre est plus petit que le 2d.

Pour nous résumer: soit α le nombre des conditions pour que C existe, les périodes étant quelconques; soit β le nombre des conditions pour que C existe, les périodes étant réductibles; soit γ le nombre des conditions pour que C et C' existent, les périodes étant réductibles; et enfin δ le nombre des conditions pour que C soit multiple de C'. On aura certainement

$$\delta \geqq \gamma \geqq \beta, \qquad \beta \leqq \alpha.$$

Les égalités et inégalités (5), (6) et (8) entraînent respectivement les conséquences

$$\alpha = \delta, \qquad \alpha < \delta, \qquad \alpha > \delta.$$

Si on a $\alpha < \delta$, on a certainement $\delta > \beta$, et dans l'hypothèse (7) on a même $\gamma > \beta$; si on a $\alpha > \delta$, on a certainement $\alpha > \beta$; mais, même dans cette hypothèse, il peut très bien se faire que l'on ait par exemple

$$\alpha > \delta > \gamma > \beta,$$

ce qui entraînerait encore l'existence de courbes pseudo-multiples. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que l'existence de ces courbes, certaine dans l'hypothèse (7) et dans l'hypothèse (2), est possible, on pourrait presque dire probable, dans les autres hypothèses.

Plaçons-nous maintenant au même point de vue qu'à la fin du § précédent. Soit d'abord $q = 2$. Soient u et v les deux intégrales réductibles. La courbe C sera de degré m avec

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$$

points doubles. Les courbes

$$\frac{du}{dx} = \lambda \frac{dv}{dx}$$

seront des courbes adjointes de degré $m - 3$ qui couperont C en $2p - 2$ points en dehors des points doubles.

Supposons que la courbe C soit pseudo-multiple de C'; soient $x'_1, y'_1; x'_2, y'_2$ un couple de points quelconques de C'; et $x_1, y_1; x_2, y_2$ le couple de points correspondant de C. (Je prends un système de 2 points parce que $q = 2$). Appelons K' et K ces deux couples; à un couple K correspond un seul couple K'; mais à un couple K' correspondent plusieurs couples K. Dans quelle condition ces couples s'échangent-ils entre eux? Il y a certains couples qu'on peut appeler *couples de ramification,* parce que deux ou plusieurs couples K s'échangent, quand le couple K' subit un cycle de variations en tournant autour d'un de ces couples de ramification. Ce qui caractérise ces couples, c'est que le jacobien

$$\frac{\partial(x_1', x_2')}{\partial(x_1, x_2)} = 0.$$

Soient u_1 et u_2, v_1 et v_2 les valeurs des intégrales u et v aux points x_1 et x_2; soient

$$U = u_1 + u_2, \qquad V = v_1 + v_2.$$

Si nous considérons deux couples K correspondant à un même couple K' et par conséquent susceptibles de s'échanger entre eux, les valeurs de U et de V seront les mêmes pour ces deux couples. La condition précédente équivaut donc à:

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{d u_1}{d x_1}\frac{d v_2}{d x_2} - \frac{d u_2}{d x_2}\frac{d v_1}{d x_1} = 0,$$

ce qui signifie que les deux points x_1 et x_2 du couple de ramification sont sur une même courbe du faisceau

$$(9) \qquad \frac{d u}{d x} + \lambda \frac{d v}{d x} = 0.$$

Pour trouver les couples de ramification, il suffira donc de mener une courbe quelconque de ce faisceau et de prendre deux de ses points d'intersection avec C.

Supposons maintenant que la courbe C soit multiple de C'; alors (x_1', y_1') sera une fonction uniforme de (x_1, y_1). Si alors M' est un point de C'; M_1 et M_2 deux des points de C qui correspondent à M'; u_1, u_2 et v_1, v_2 les valeurs correspondantes des intégrales u et v, on aura

$$u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2.$$

Soit alors A' un des points de ramification sur C', et A_1 le point correspondant de C; on aura en A_1

$$\frac{d u}{d x} = \frac{d v}{d x} = 0,$$

c'est-à-dire que A_1 devra être un des points bases du faisceau (9) en dehors des points doubles.

Supposons que le polygone P' soit de la 1ère sorte, il y aura

$$Q' = 2(p - 1) - 2n(q - 1)$$

de ces points bases en dehors des points doubles, puisqu'il y a Q' points de ramification. Il restera donc pour une courbe quelconque du faisceau

$$2n(q - 1)$$

points d'intersection en dehors des points bases et des points doubles.

Supposons maintenant qu'on considère deux points M_1 et M_2 correspondant à un même point M' et qu'on fasse varier d'une manière continue M_1, M_2 et M'; il viendra

$$u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2,$$

d'où

$$\frac{d u_1}{d v_1} = \frac{d u_2}{d v_2},$$

ce qui veut dire que les deux points M_1 et M_2 sont sur une même courbe du faisceau. Mais à un point M', correspondent n points M qui sont tous sur une même courbe du faisceau. Les $2n(q-1)$ intersections de cette courbe avec C se répartissent donc en $2q-2$ groupes de n points; les n points de chaque groupe correspondent à un même point M'; ainsi, à ces $2n(q-1)$ intersections correspondent sur C' seulement $2q-2$ points M' qui, correspondant à une même valeur de $\frac{du}{dv}$, *sont tous sur une même courbe adjointe à* C', de degré $m'-3$ si C' est de degré m'.

Dans ce dernier cas, considérons un couple de points M_1 et M_2 sur C, situés sur une même courbe du faisceau, mais en dehors des points bases; considérons le couple correspondant M'_1 et M'_2 sur C'. Comme on a

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x_1, x_2)} = 0,$$

on pourrait croire que

$$\frac{\partial(x'_1, x'_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 0$$

et que ce couple est de ramification, ainsi qu'il arrive pour les courbes pseudo-multiples. Mais il n'en est rien, il y a exception dans ce cas. Nous avons, en effet,

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x'_1, x'_2)}\frac{\partial(x'_1, x'_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(U, V)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

Le second membre peut s'annuler, soit quand le second facteur du 1^er^ membre s'annule, soit quand le premier facteur s'annule. Ici c'est ce 1^er^ facteur qui s'annule, puisque M'_1 et M'_2 sont sur une même courbe adjointe de degré $m'-3$.

Si le polygone P' est de la 2^de^ sorte, le nombre Q' est plus petit que

$$2(p-1) - 2n(q-1),$$

mais le nombre des points bases situés sur C est toujours le même, en tenant compte du degré de multiplicité; soit parce que C touche toutes les courbes du faisceau, soit parce que deux points bases correspondent à un même point M' et par conséquent à un même sommet de P'. Si enfin P' est de la 3^e^ sorte, il n'y aura pas de point de ramification et par conséquent pas de point base sur C. Le nombre total des intersections sera

$$2p - 2 = 2n(q-1)$$

se répartissant comme plus haut en $2q-2$ groupes de n points.

Si, dans un cas quelconque, une courbe du faisceau devient tangente à C, c'est que deux de ces groupes se confondent, ou que deux points d'un même groupe se confondent. Dans le 1^er^ cas *la courbe n'est pas simplement tangente à* C, *mais* n *fois tangente à* C. Dans le 2^d^ cas, le contact ne peut avoir lieu qu'en un point base, puisque ce n'est que là que deux des points correspondant à M' peuvent s'échanger; et comme alors deux des points du groupe doivent venir se confondre au point base, comme d'ailleurs en un point base quelconque, on aura $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = 0$, ce qui veut dire que un des points du groupe ne peut venir en ce point base sans qu'un autre point du groupe y vienne également; nous devons conclure:

Celle des courbes du faisceau qui touche C en un point base l'y rencontre en trois points confondus.

Le cas le plus simple est le suivant:

$$p = 3, \qquad q = 2, \qquad n = 2, \qquad m = m' = 4.$$

La courbe C est du 4^e degré sans point double, la courbe C' du 4^e degré avec un point double; P' est de la 3^e sorte. Les courbes adjointes à C' sont des droites passant par le point double; les courbes du faisceau (9) sont des droites passant par un point fixe B. Ce point fixe B n'est pas sur C puisque nous ne devons pas avoir de point base sur C. Si C est multiple de C', toute droite passant par B coupera C en 4 points qui correspondront à 2 points de C' situés sur une même droite passant par le point double. *Toute tangente menée à C par B sera une tangente double;* il y en aura 6, correspondant aux 6 tangentes menées à C' par le point double. Donc, *sur 28 tangentes doubles de C, il y en a 6 qui passent par un même point.*

Soit maintenant

$$p = 4, \qquad q = 2, \qquad n = 2, \qquad m = 5, \qquad m' = 4.$$

P' est de la $1^{ère}$ sorte, $Q' = 2$; C est du 5^e degré avec 2 points doubles, C' du 4^e degré avec 1 point double. Les courbes du faisceau (9) sont des coniques passant par les 2 points doubles et par les $Q' = 2$ points bases. Ces coniques coupent C en 4 points en dehors des points doubles et des points bases; ces 4 points correspondent aux 2 intersections de C' avec une droite passant par le point double de C'.

Si C est multiple de C', *il y a 6 de ces coniques qui sont doublement tangentes à C; celle de ces coniques qui touche C en un des points bases est osculatrice à C.*

Terminons en supposant $q = 3$. Si C est pseudo-multiple de C', au lieu de système de deux points, il faudra envisager des triplets ou systèmes de 3 points, au lieu de 2 intégrales u et v, il en faudra considérer 3, u, v et w; le faisceau (9) deviendra donc un réseau

$$\frac{du}{dx} + \lambda \frac{dv}{dx} + \mu \frac{dw}{dx} = 0. \tag{9^{bis}}$$

Rien à changer d'ailleurs à ce qui précède; pour obtenir les triplets de ramification, on prendra une courbe quelconque de ce réseau et trois des points d'intersection de cette courbe avec C.

Supposons maintenant que C soit multiple de C'; en un point de ramification on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = \frac{dw}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire que ce point sera l'un des points bases du réseau situé sur C.

Si M_1 et M_2 correspondent à un même point M', on aura

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{dv_1}{dv_2} = \frac{dw_1}{dw_2},$$

ce qui montre que toute courbe du réseau qui passe par M_1 passe aussi par M_2.

Si donc deux courbes du réseau se coupent sur C en un point, elles ont n points d'intersection sur C qui correspondent à un même point M'.

Un certain nombre des théorèmes précédents sont évidemment généraux: celui d'après lequel toute courbe du réseau en dehors des points bases et des points doubles coupe C en $2n(q-1)$ points qui se répartissent en $2q-2$ groupes de n points; celui d'après lequel toute courbe du réseau qui touche C en dehors des points bases, touche C en n points; etc.

Le cas le plus simple est

$$p=5, \qquad q=3, \qquad n=2, \qquad m=6, \qquad m'=4.$$

P' est de la 3^e sorte; C a 5 points doubles; C' n'en a pas. Le réseau est formé de cubiques passant par ces points doubles. Si nous envisageons toutes celles de ces cubiques qui passent par un point B de C, elles iront toutes passer par un autre point B_1 de C.

§ 10.

Étude spéciale du cas elliptique.

Supposons $q=1$, d'où

$$Q'=2p-2.$$

Le cas le plus simple est $p=2$; d'où $Q'=2$, $N'=3$; le polygone P' est un hexagone. Nous pouvons supposer d'abord que les côtés opposés sont conjugués, de telle façon que les côtés $\gamma(1)$ et $\gamma(4)$; $\gamma(2)$ et $\gamma(5)$; $\gamma(3)$ et $\gamma(6)$ soient conjugués. Les sommets se répartissent alors en deux cycles auxquels correspondent les deux substitutions

$$(1) \qquad \Sigma = S_1 S_2^{-1} S_3, \qquad \Sigma' = S_1^{-1} S_2 S_3^{-1}$$

pour employer la notation du § 5.

Mais on pourrait faire d'autres hypothèses sur la loi de conjugaison des côtés; ces hypothèses se ramènent à deux que j'écris

$$(2) \qquad 12, \quad 35, \quad 46$$

$$(3) \qquad 13, \quad 25, \quad 46.$$

Voici la signification de cette notation; quand j'écris 12 par exemple, je veux dire que les côtés $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$ sont conjugués; de sorte que l'hypothèse des côtés opposés conjugués s'écrit

$$(4) \qquad 14, \quad 25, \quad 36.$$

Dans l'hypothèse (2) les substitutions Σ relatives aux deux cycles s'écrivent

$$\Sigma = S_1^{-1}, \qquad \Sigma' = S_1 S_3 S_4^{-1} S_3^{-1} S_4$$

et dans l'hypothèse (3)

$$\Sigma = S_1 S_4, \qquad \Sigma' = S_2 S_4^{-1} S_2^{-1} S_1^{-1}.$$

Seulement il est clair que ces deux dernières hypothèses ne sont pas distinctes de la précédente; si, en effet, les côtés de l'hexagone P' étaient conjugués d'après l'une des deux lois (2) ou (3), on mènerait l'une des diagonales de cet hexagone qui en partagerait la surface en deux parties P'_1 et P'_2; soit C un des côtés de P' appartenant à P'_1 et C' son conjugué que je supposerai appartenir à P'_2; soit S la substitution du groupe fuchsien qui change C en C', et P'_3 le transformé de P'_1 par cette substitution.

Nous pouvons remplacer le polygone $P' = P'_1 + P'_2$ par le polygone $P'_2 + P'_3$; ce nouveau polygone engendrera le même groupe fuchsien, et nous pourrons nous arranger pour que dans ce nouveau polygone les côtés opposés soient conjugués.

Revenons aux équations (1); les deux substitutions Σ et Σ' doivent se réduire à des permutations entre deux lettres, puisque le polygone P' est de la 1ère sorte pour employer la terminologie du § précédent. Regardons ces deux substitutions comme données et proposons-nous de déterminer les substitutions S_1, S_2 et S_3. On trouvera successivement

$$S_2^{-1} S_3 = S_1^{-1} \Sigma, \qquad S_1 \Sigma' = S_2 S_3^{-1}, \qquad S_3 S_2^{-1} = \Sigma'^{-1} S_1^{-1},$$

$$\Sigma S_1^{-1} = S_1 S_2^{-1} S_3 S_1^{-1} = S_1 S_2^{-1} S_3 S_2^{-1} S_2 S_1^{-1} = S_1 S_2^{-1} \Sigma'^{-1} S_1^{-1} S_2 S_1^{-1},$$

$$\Sigma S_1^{-1} = (S_2 S_1^{-1})^{-1} (\Sigma'^{-1} S_1^{-1}) (S_2 S_1^{-1}).$$

La signification de cette identité est que les deux substitutions ΣS_1^{-1} et $\Sigma'^{-1} S_1^{-1}$ sont *semblables* et que la 1ère est la *transformée* de la 2de par la substitution $S_2 S_1^{-1}$.

Nous devons donc chercher à déterminer S_1^{-1} de telle façon que les deux substitutions ΣS_1^{-1} et $\Sigma'^{-1} S_1^{-1}$ (ou ce qui revient au même dans ce cas particulier $\Sigma' S_1^{-1}$, puisque Σ' se réduisant à une permutation entre deux lettres, on a $\Sigma' = \Sigma'^{-1}$) soient semblables.

Dans ce cas $S_1^{-1} \Sigma$ et $S_1^{-1} \Sigma'$ sont également semblables, puisqu'il est clair que ΣS_1^{-1} et $S_1^{-1} \Sigma = S_1^{-1} (\Sigma S_1^{-1}) S_1$ sont semblables.

Voyons comment on peut reconnaître que deux permutations entre n lettres sont semblables. Supposons que la substitution S se réduise à α permutations circulaires entre

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_\alpha \qquad \text{lettres},$$

de sorte que $p_1 + p_2 + \cdots + p_\alpha = n$. Nous dirons alors que S répartit les n lettres en α *cycles* comprenant respectivement p_1, p_2, ..., p_α lettres.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions soient semblables est alors que les nombres α, p_1, p_2, ..., p_α soient les mêmes pour les deux substitutions et, quand cette condition sera remplie, il sera facile de trouver la transformation qui transforme l'une de ces substitutions dans l'autre.

Cela posé, imaginons que Σ permute deux lettres a et b et que S_1^{-1} admette α cycles de p_1, p_2, ..., p_α lettres. Alors de deux choses l'une:

1° Ou bien a et b appartiennent à un même cycle de S_1^{-1}. Dans ce cas $S_1^{-1}\Sigma$ aura les mêmes cycles que S_1^{-1}; seulement le cycle auquel appartenaient a et b se sera décomposé en deux, le premier commençant par a et le second par b. Si donc le cycle de S_1^{-1} avait p_1 lettres et que les deux lettres a et b s'y rencontrent à un intervalle de q lettres, les deux cycles nouveaux auront respectivement $p_1 - q$ et q lettres.

2° Ou bien a et b appartiennent à deux cycles différents de S_1^{-1} ayant respectivement p_1 et p_2 lettres; dans ce cas dans $S_1^{-1}\Sigma$, ces deux cycles se fondront en un seul qui aura $p_1 + p_2$ lettres.

D'où la règle suivante pour former S_1^{-1}; supposons que Σ permute les lettres a et b et que Σ' permute les lettres c et d; alors S_1^{-1} devra satisfaire à l'une des conditions suivantes :

1° Ou bien les quatre lettres a, b, c, d appartiendront à un même cycle de S_1^{-1} et y occuperont les rangs

$$R_a, \quad R_b, \quad R_c, \quad R_d,$$

de telle façon que

$$R_a - R_b = R_c - R_d,$$

c'est-à-dire que les deux distances ab et cd soient les mêmes.

2° Ou bien que ces deux couples de lettres ab et cd soient dans deux cycles différents, que ces deux cycles aient le même nombre de lettres, et que les distances ab et cd soient les mêmes:

3° Ou bien que les quatre lettres a, b, c, d appartiennent à quatre cycles C_a, C_b, C_c, C_d ayant respectivement N_a, N_b, N_c, N_d lettres et de telle façon que

$$C_a \gtrless C_b, \qquad C_c \gtrless C_d$$
$$N_a = N_c, \qquad N_b = N_d$$

(ou $N_a = N_d$, $N_b = N_c$).

On voit de combien de manières on peut déterminer S_1 et ce qu'il y reste d'arbitraires.

Une fois S_1 déterminée, nous connaîtrons les deux substitutions semblables ΣS_1^{-1}, $\Sigma' S_1^{-1}$ et il nous sera facile de déterminer la substitution $S_2 S_1^{-1}$ qui les transforme l'une dans l'autre. Nous aurons donc S_2 et nous en déduirons immédiatement S_3.

Le problème comporte donc en général un grand nombre de solutions. Lorsqu'on en connaîtra une, voyons comment nous pourrons construire le polygone P. Partons de l'hexagone P'. Le polygone P sera formé de n hexagones $P'(1)$, $P'(2)$, $\ldots$, $P'(n)$, congruents à P'. Représentons symboliquement ces n hexagones par n points A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Supposons que la substitution S_1 change A_α en A_β, nous joindrons les deux points A_α et A_β par un trait continu; ces traits continus seront ce que j'appellerai *les lignes* L_1. Nous définirons de même les lignes L_2 et les lignes L_3, à l'aide des substitutions S_2 et S_3. Une condition à remplir, c'est qu'en suivant les lignes L_1, L_2 et L_3 on puisse passer d'un quelconque des points A à un autre, c'est-à-dire que *le groupe dérivé de* S_1, S_2, S_3, que j'appellerai le groupe (S_1, S_2, S_3), *soit transitif.*

Si cette condition est remplie, on pourra en général aller d'un des points A à un autre par plusieurs chemins différents. Pratiquons alors des coupures dans quelques-unes des lignes L_1, L_2, L_3 jusqu'à ce qu'on ne puisse plus aller d'un point A à un autre que d'une seule manière sans revenir sur ses pas. Nous disposerons alors les hexagones $P'(\alpha)$ de la façon suivante: supposons que A_α et A_β soient reliés par une ligne L_i non affectée de coupure; alors les deux hexagones $P'(\alpha)$ et $P'(\beta)$ seront contigus de telle façon que le $(i+3)^e$ côté de $P'(\alpha)$ coïncide avec le i^e côté de $P'(\beta)$. Si la ligne L_i est affectée d'une coupure, ces deux hexagones ne seront plus contigus, mais le $(i+3)^e$ côté de $P'(\alpha)$ et le i^e côté de $P'(\beta)$ seront deux côtés conjugués du périmètre de P.

Il est possible de choisir S_1 *de plusieurs manières,* de façon à satisfaire aux équations (1) et de telle sorte que le groupe (S_1, S_2, S_3) soit transitif. Mais il est aisé de comprendre que toutes ces manières ne sont pas essentiellement distinctes. Nous supposons en effet $p = 2$ et nous nous donnons l'entier n de telle façon que le tableau des périodes réduites s'écrive

$$\begin{array}{cccc} 2i\pi & 0 & a & \dfrac{2i\pi}{n} \\[2ex] 0 & 2i\pi & \dfrac{2i\pi}{n} & b. \end{array}$$

Il dépend donc de deux constantes a et b qui sont arbitraires. Ces deux constantes définissent la courbe C qui varie d'une manière continue, quand les constantes varient elles-mêmes d'une manière continue. *Les courbes C réductibles forment donc une seule série analytique.*

Si nous nous donnons les substitutions S_1, S_2, S_3 et le polygone P', nous pourrons construire le polygone P. Ce dernier polygone et par conséquent la courbe C varient alors d'une façon continue quand les éléments de P' varient d'une façon continue. Les courbes C ainsi obtenues forment donc une série analytique.

Partons maintenant d'autres substitutions S'_1, S'_2, S'_3; nous obtiendrons encore une série analytique de courbes C; mais cette série sera identique à la première puisqu'il n'y en a qu'une.

On doit donc pouvoir passer des substitutions S_1, S_2, S_3 aux substitutions S'_1, S'_2, S'_3 en transformant l'hexagone P' comme nous l'avons expliqué au début de ce §; c'est-à-dire en le coupant par une diagonale qui le divise en deux polygones P'_1 et P'_2 et remplaçant $P' = P'_1 + P'_2$ par $P'_2 + P'_3$, P'_3 étant l'un des transformés de P'_1. Il s'agit de voir ce que deviennent dans ces conditions les substitutions S_1, S_2, S_3, mais pour cela je préfère traiter le problème d'une façon un peu plus générale. Supposons que P' soit un polygone de $2N'$ côtés, N' étant quelconque; supposons que $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$ soient conjugués, et soit S_α la substitution correspondante. Soient $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ deux côtés conjugués appartenant l'un à P'_1, l'autre à P'_2, et soit S_a la substitution correspondante. Supposons que P'_3 soit le transformé de P'_1 par la transformation T_a du groupe fuchsien qui change $\gamma(a)$ en $\gamma(b)$.

Soient S'_α les diverses substitutions relatives au nouveau polygone; S'_α se rapportera à $\gamma(\alpha)$, si ce côté appartient à P'_2 et par conséquent fait partie du périmètre de $P'_2 + P'_3$; S'_α se rapportera au transformé de $\gamma(\alpha)$ par T_a, si $\gamma(\alpha)$ appartient à P'_1 et que son transformé appartenant à P'_3 fasse partie du périmètre de $P'_2 + P'_3$. Dans ces conditions, ni $\gamma(a)$, ni son transformé $\gamma(b)$, ne font partie du périmètre de $P'_2 + P'_3$; nous aurons en revanche dans le nouveau polygone deux nouveaux côtés qui seront la diagonale menée dans P', et sa transformée par T_a. Ce sera, par définition, à cette paire de côtés que se rapportera la substitution S'_a.

Cela posé, on aura

$$S'_a = S_a$$

et quant aux autres substitutions S'_α, on aura

$$(5)\quad \begin{cases} S'_\alpha = S_\alpha & \text{si } \gamma(\alpha) \text{ et } \gamma(\beta) \text{ appartiennent tous deux à } P_2, \\ S'_\alpha = S_a S_\alpha S_a^{-1} & \text{si } \gamma(\alpha) \text{ et } \gamma(\beta) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad P_1, \\ S'_\alpha = S_\alpha S_a^{-1} & \text{si } \gamma(\alpha) \text{ appartient à } P_1 \text{ et } \gamma(\beta) \text{ à } P_2, \\ S'_\alpha = S_a S_\alpha & \text{si } \gamma(\alpha) \quad \text{»} \quad P_2 \quad \text{»} \quad P_1. \end{cases}$$

Si nous supposons en particulier que P' soit un hexagone à côtés opposés conjugués, que la diagonale joigne deux sommets opposés et que les côtés $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ soient adjacents à cette diagonale, on aura

$$(5^{\text{bis}})\qquad S'_1 = S_1, \qquad S'_2 = S_1 S_2, \qquad S'_3 = S_1 S_3.$$

Nous devons donc prévoir que si les équations (1) admettent deux solutions et que pour ces deux solutions le groupe (S_1, S_2, S_3) soit transitif, on peut passer de l'une de ces solutions à l'autre par une série de transformations de la forme (5^{bis}) ou (5). Il serait intéressant de retrouver ce résultat par une vérification directe.

Supposons maintenant $p=3$; le polygone P' sera un décagone. Soit par exemple

$$12, \quad 38, \quad 49, \quad 5\,10, \quad 67$$

la loi de conjugaison des côtés. On aura pour les substitutions Σ

$$(6)\qquad \Sigma_1 = S_2, \qquad \Sigma_2 = S_6^{-1}, \qquad \Sigma_3 = S_3 S_4^{-1} S_5 S_2^{-1}, \qquad \Sigma_4 = S_4 S_5^{-1} S_6 S_3^{-1}.$$

Des équations (6) on déduit

$$\Sigma_5 \Sigma_2 = S_3^{-1} S_4 S_5^{-1}, \qquad \Sigma_3 \Sigma_1 = S_3 S_4^{-1} S_5.$$

Ces équations sont de même forme que les équations (1), on en déduirait donc que

$$\Sigma_3 \Sigma_1 S_3^{-1} \quad \text{et} \quad (\Sigma_5 \Sigma_2)^{-1} S_3^{-1} = \Sigma_2^{-1} \Sigma_5^{-1} S_3^{-1} - \Sigma_2 \Sigma_5 S_3^{-1}$$

sont deux substitutions semblables. Il serait possible d'en déduire S_3 et ensuite les autres substitutions. Mais je ne ferai pas le calcul jusqu'au bout.

Ici encore, et pour la même raison, les courbes C réductibles ne forment qu'une seule série analytique et par conséquent si les équations (6) admettent deux solutions (conduisant à un groupe transitif), on peut passer d'une solution à l'autre par une série de transformations de la forme (5).

Soit enfin $p=4$; notre polygone P' aura 14 côtés. Nous ne pouvons plus démontrer de la même manière que les courbes C réductibles ne forment qu'une seule série analytique. Si, en effet, nous formons le tableau des périodes réductibles

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & 0 & 0 & h & \dfrac{2i\pi}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 2i\pi & 0 & 0 & \dfrac{2i\pi}{n} & a & b & c \\ 0 & 0 & 2i\pi & 0 & 0 & b & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 2i\pi & 0 & c & e & f, \end{matrix}$$

les sept constantes h, a, b, c, d, e, f ne sont plus arbitraires. Il faut leur imposer une relation, si nous voulons que les fonctions abéliennes engendrées soient spéciales et que la courbe C existe. Cette relation représente une surface de l'espace à 7 dimensions, si nous regardons nos sept constantes comme les coordonnées d'un point dans cet espace; *et nous ne savons pas si cette surface n'est pas décomposable.*

Il serait d'autant plus intéressant de vérifier si, lorsque les équations analogues à (1) et à (6) admettent deux solutions (conduisant toutes deux à un groupe transitif), on peut toujours passer d'une de ces solutions à l'autre par une série de transformations de la forme (5).

§ 10.

Cas de dégénérescence.

Comme nous savons que, tout au moins si $p = 2$ ou 3, les courbes C ne forment qu'une série analytique, nous devons prévoir que les polygones P' de la 2[de] sorte ne seront que des dégénérescences de ceux de la 1[ère] sorte. Pour nous en rendre compte, voyons ce qui arrive lorsqu'un polygone P' dégénère de telle sorte que deux de ses côtés conjugués se réduisent à zéro.

Soient $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$ les deux côtés conjugués qui se réduisent à zéro; soient $\sigma(\alpha)$, $\sigma(\alpha - 1)$, $\sigma(\beta)$, $\sigma(\beta - 1)$ leurs sommets; de telle sorte que $\sigma(\alpha)$ et $\sigma(\beta - 1)$ d'une part, $\sigma(\alpha - 1)$ et $\sigma(\beta)$ d'autre part, appartiennent a un même cycle. Deux cas sont à distinguer suivant que les quatre sommets appartiennent ou non à un même cycle. Si ces quatre sommets n'appartiennent pas à un même cycle, le genre q du polygone P' ne change pas par suite de la dégénérescence; dans le cas contraire, ce genre diminue d'une unité.

Plaçons-nous dans le premier cas, qui est le plus intéressant; avant la dégénérescence les sommets qui nous intéressent font partie de deux cycles différents K et K'; le premier de ces cycles commencerait par exemple par le sommet $\sigma(\beta)$ et se terminerait par le sommet $\sigma(\alpha - 1)$, d'où l'on reviendrait au sommet $\sigma(\beta)$. La substitution Σ correspondante s'écrirait

$$\Sigma = S_\lambda S_\mu \ldots S_\varpi S_\alpha,$$

les substitutions S_λ, etc. correspondant à divers côtés de P' et la dernière S_α au côté $\gamma(\alpha)$. Le cycle K' commencerait par $\sigma(\beta - 1)$ suivi de $\sigma(\alpha)$, et des autres sommets du cycle; à ce cycle correspondrait la substitution:

$$\Sigma' = S_\beta S_\gamma \ldots S_\theta,$$

le première des substitutions S du second membre étant $S_\beta = S_\alpha^{-1}$ et correspondant au côté $\gamma(\beta)$.

Après la dégénérescence, les deux cycles se confondent en un seul où on rencontre successivement $\sigma(\beta - 1) = \sigma(\beta)$, puis les divers sommets du cycle K, et enfin

$$\sigma(\alpha - 1) = \sigma(\alpha),$$

puis les sommets consécutifs du cycle K'. La substitution correspondante est:

$$\Sigma_1 = S_\lambda S_\mu \ldots S_\varpi S_\gamma \therefore S_\theta = S_\lambda S_\mu \ldots S_\varpi S_\alpha S_\beta S_\gamma \ldots S_\theta = \Sigma\Sigma'.$$

Je dis que, le genre p ne pourra pas augmenter par la dégénérescence. Nous avons en effet, comme au § 8,

$$\sum(i-1)\lambda_i = 2(p-1) - 2n(q-1).$$

Il s'agit donc de montrer que $\sum(i-1)\lambda_i$ ne peut pas augmenter par la dégénérescence, c'est-à-dire que cette somme $\sum(i-1)\lambda_i$, étendue aux divers cycles de lettres de Σ_1, ne peut être plus grande que la même somme étendue aux cycles de lettres de Σ et de Σ'. A chacune de nos n lettres faisons correspondre un symbole β_i; égalons ceux de ces symboles qui correspondent à un même cycle de lettres de la substitution Σ par exemple; soit h le nombre des équations symboliques distinctes ainsi obtenues; ce nombre h ne sera autre chose que la somme $\sum(i-1)\lambda_i$ étendue aux divers cycles de lettres de Σ; puisque si l'un de ces cycles est formé de i lettres, cela nous fera $(i-1)$ équations et, s'il y a λ_i cycles de i lettres, cela fera en tout $\sum(i-1)\lambda_i$ équations. Soient h' et h_1 les nombres analogues relatifs à Σ' et à Σ_1; je me propose de montrer que

$$h + h' \geqq h_1.$$

Les équations symboliques relatives à Σ_1 sont des conséquences de celles qui sont relatives à Σ et à Σ'; si en effet Σ change a en b, et que Σ' change b en c, Σ_1 changera a en c; cela nous donnera l'équation symbolique $\beta_a = \beta_c$ engendrée par Σ_1, laquelle sera une conséquence de l'équation $\beta_a = \beta_b$ engendrée par Σ, et de $\beta_b = \beta_c$ engendrée par Σ'. Cela me permet d'écrire l'inégalité précédente; je ne mets pas simplement le signe d'égalité, pour deux raisons: 1° d'abord parce que, si les équations dues à Σ_1 sont toutes des conséquences de celles qui sont dues à Σ et à Σ', il ne s'ensuit pas que toutes ces conséquences soient elles-mêmes des équations dues à Σ_1; 2° parce qu'il peut se faire que les équations dues à Σ ne soient pas toutes distinctes des équations dues à Σ'.

Le cas le plus simple, est celui où Σ se réduit à une permutation entre deux lettres et où il en est de même de Σ'. En d'autres termes Σ et Σ' contiendront chacune un cycle de deux lettres, tous les autres cycles n'ayant qu'une lettre. Alors deux cas peuvent se présenter: 1° ces deux cycles de deux lettres ont une lettre commune; 2° ils n'ont pas de lettre commune. Dans le 1^er^ cas Σ_1 aura un cycle de 3 lettres, et dans le 2^d^ cas deux cycles de 2 lettres.

Considérons les courbes C et C' correspondant au cas de dégénérescence et formons le polygone P', en nous astreignant, comme nous l'avons fait, à choisir ce polygone *de la façon la plus simple possible*; ce sera un polygone de la 2^e^ sorte, et on aura

$$Q' = 2(p-1) - 2n(q-1) - 1.$$

Deux des cycles de sommets qui existent dans le cas général se seront confondus en un seul. Soient: P' le polygone dans le cas général; P'_0 ce que devient ce polygone par la dégénérescence; P'_1 le polygone *le plus simple* qui peut engendrer les courbes

C et C' dans le cas de la dégénérescence. P' possédera deux cycles K et K' correspondant à Σ et Σ'; sur P'_0, de même que sur P'_1, ces deux cycles sont confondus en un seul K_1 qui correspond à Σ_1. La somme des angles de K est égale à π de même que celle des angles de K'; quant à la somme des angles de K_1, elle est égale à zéro sur P'_0, tandis que sur P'_1, elle est égale à $\frac{2\pi}{3}$ si Σ_1 a un cycle de 3 lettres, et à π si Σ_1 a 2 cycles de 2 lettres.

Soit par exemple $q=1$, $p=2$; le polygone P' est un hexagone à côtés opposés conjugués, la somme des angles est 2π; dans les cas de dégénérescence, ce polygone se réduit à la limite à un quadrilatère à côtés opposés conjugués, et dont la somme des angles est zéro. Mais le quadrilatère P'_0 ainsi obtenu n'est pas le plus simple qui puisse engendrer les courbes C et C'; ce quadrilatère le plus simple P'_1 est encore à côtés opposés conjugués, mais la somme des angles est $\frac{2\pi}{3}$ ou π.

On voit ainsi que si les courbes C forment une série analytique continue, il n'en est pas de même des polygones P' les plus simples susceptibles de les engendrer. Si on considère une série continue de courbes C, et la série des polygones P' les plus simples correspondants, cette série présentera une discontinuité au moment de la dégénérescence.

§ 11.

Polygones doublement réductibles.

Soit $q=1$, $p=2$; nous avons une courbe C de genre 2 qui est multiple d'une courbe C' de genre 1, mais si la courbe C admet une intégrale abélienne réductible aux intégrales elliptiques, elle en admet une seconde, c'est-à-dire qu'il y a une seconde courbe C'' de genre 1 dont C est multiple. Existe-t-il un système de fonctions fuchsiennes engendrant à la fois les trois courbes? Soit G un groupe fuchsien de genre 2, et engendrant la courbe C, c'est-à-dire tel qu'entre deux des fonctions fuchsiennes engendrées par ce groupe, il y ait précisément la relation algébrique représentée par la courbe C. Peut-on choisir ce groupe G, de telle sorte qu'il soit contenu dans un autre groupe fuchsien G' de genre 1, et engendrant la courbe C', et qu'il soit en même temps contenu dans un troisième groupe fuchsien G'' de genre 1 et engendrant la courbe C''? Alors le groupe G peut être regardé comme engendré par un polygone P décomposable en n polygones congruents entre eux et congruents au polygone P' qui engendre la courbe C'. En même temps le groupe G peut être regardé comme engendré par un polygone P_1 *équivalent* à P; par ce mot *équivalent*, je veux dire que P et P_1 peuvent être décomposés en un même nombre de parties et de telle façon que chacune des parties de P_1 ne soit autre chose que la transformée de la partie correspondante de P par une des substitutions de G. D'autre part, P_1 pourra être décomposé en n polygones congruents entre eux et congruents au polygone P'' qui engendre la courbe C''.

Nous allons voir bientôt que cela n'est pas toujours possible. Reprenons les trois surfaces de RIEMANN C, C', C'': à un point de la 2^{de} correspondent n points de la $1^{\text{ère}}$ et de même à un point de la 3^{e} correspondent n points de la $1^{\text{ère}}$. Soient: M' un point de C'; $M_1, M_2, \ldots, M_n$ les points correspondants de C. Si deux de ces points M_i se confondent, le point M' est un point de ramification de C' et on définirait de même ceux de C''. Soient $A'_1, A'_2, \ldots, A'_p$ ceux de C'; et soient $B''_1, B''_3, \ldots, B''_p$ ceux de C''. Aux points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_p$ correspondront l'un des cycles de sommets de P'; mais ce n'est pas tout. Considérons B''_1; à ce point correspondront sur C, n points $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{1n}$ dont deux au moins sont confondus. Soit B_{1i} un de ces n points qui ne se confond à aucun autre (s'il en existe, ce qui arrivera en général); à ce point correspondra sur C' un point B'_{1i} qui devra encore correspondre à un cycle de sommets de P'. A ce point B'_{1i} correspondront sur C, n points parmi lesquels B_{1i}; soit D_1 un autre de ces points auquel correspondra sur C'' un point D''_1; à D''_1 correspondront sur C, n points dont le point D_1; soit E_1 un autre de ces points; soit E'_1 le point correspondant de C'; je dis que à E'_1 correspondra encore un cycle de sommets de P'; et ainsi de suite, on poursuivrait ainsi jusqu'à l'infini.

Voici comment on verrait par exemple que B'_{1i} correspond à un cycle de sommets de P'. Soit z la variable qui figure dans nos fonctions fuchsiennes, M, M', M'' les points correspondants sur C, C', C'', de telle sorte que les coordonnées de ces trois points soient des fonctions fuchsiennes de z. Supposons que z tourne autour d'un certain point z_0, en même temps que M, M' et M'' tournent respectivement autour de B_{1i}, B'_{1i} et B''_1. Supposons que quand z fait α tours, M, M' et M'' en fassent respectivement β, γ, δ. Comme B''_1 correspond à un cycle de sommets de P'', on devra avoir en ce point

$$\frac{dM''}{dz} = 0.$$

D'autre part, comme B_{1i} ne se confond avec aucun autre point B_{1k}, et qu'en ce point, par conséquent, M est fonction uniforme de M'', on aura

$$\frac{dM''}{dM} \gtreqless 0.$$

Comme M' est fonction uniforme de M, on aura

$$\frac{dM}{dM'} \gtreqless 0.$$

De ces relations,

$$\frac{dM}{dM'} \gtreqless 0, \quad \frac{dM''}{dM} \gtreqless 0, \quad \frac{dM''}{dz} = 0,$$

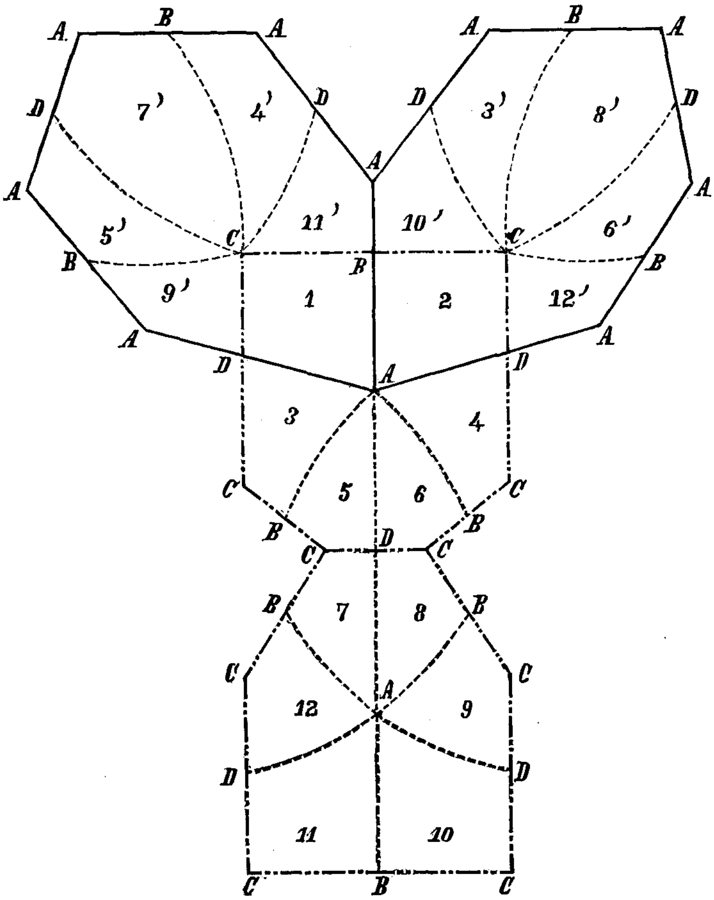
on déduira

$$\frac{dM'}{dz} = 0,$$

ce qui veut dire que z_0 est aussi un sommet du polygone P'.

En général on serait conduit à attribuer à P' une infinité de cycles de sommets, ce qui veut dire que le problème que nous nous étions proposé est impossible.

Cette impossibilité n'a pas lieu dans le cas de $n = 2$; en effet nous n'avons que deux points B_{11} et B_{12} qui doivent se confondre, et il n'existe pas de point B_{1i} ne se confondant avec aucun autre; ce que nous venons de dire ne s'applique donc pas.



Reportons-nous à la figure, sur laquelle je vais d'abord donner quelques explications. Les proportions et les courbures n'y sont pas observées, *même grossièrement.* On ne doit s'attacher qu'aux positions relatives des lignes et des points au point de vue de l'Analysis sitûs. Toutes les lignes, droites ou courbes, qui y sont tracées représentent des *droites non euclidiennes,* c'est-à-dire des arcs de circonférences orthogonales au cercle fondamental. Quand je parlerai de ligne droite, d'égalité ou de symétrie, j'entendrai toujours ces mots *au sens non-euclidien.*

Le polygone P est décomposé en deux hexagones P' et P'_1; les contours de ces deux hexagones sont figurés en trait plein, leurs sommets sont désignés par la lettre A. Le polygone P_1, équivalent à P, est décomposé en deux hexagones P'' et P''_1; les contours sont représentés en trait mixte — ·· — ··, leurs sommets sont désignés par la lettre C.

Quand un hexagone a ses côtés opposés égaux et que la somme des angles de rang pair est égale à la somme des angles de rang impair (ce qui arrive ici où les côtés opposés sont conjugués et où ces deux sommes d'angles sont égales à π) cet hexagone possède un centre de symétrie. Ici le polygone P', formé des quadrilatéres 1, 11', 4', 7', 5', 9', et le polygone P'_1, formé des quadrilatéres 2, 10', 3', 8', 6', 12', admettent pour centres de symétrie deux sommets C du polygone P''; le polygone P'', formé des quadrilatères 1, 2, 3, 4, 5, 6, a pour centre de symétrie un sommet A commun à P' et à P'_1; le polygone P''_1, formé des quadrilatères 7, 8, 9, 10, 11, 12, possède un centre de symétrie que j'appelle encore A.

Les points B et D sont les milieux des côtés de P', P'_1, P'', P''_1. Notre figure se trouve décomposée en 22 quadrilatères numérotés de 1 à 12, et de 3' à 12'. Ces quadrilatères présentent les symétries suivantes:

1, 7'; 4', 9'; 11', 5'	sont symétriques	par rapport à	C 1 (sommet C du quadrilatère 1)
3', 12'; 2, 8'; 6', 10'	»	»	C 2
1, 10'; 2, 11'; 3', 9'	»	»	B 1
8', 5'; 6', 7'; 12', 4'	»	»	B 1
1, 6; 2, 5; 4, 3	»	»	A 1
5, 8; 6, 7; 3, 9	»	»	D 5
1, 10; 2, 11; 4, 12	»	»	D 5
7, 10; 8, 11; 9, 12	»	»	A 7
3, 9'	»	»	D 1
4, 12'	»	»	D 2.

D'où les égalités suivantes:

$$(A)\qquad \left\{\begin{array}{ll} 1 = 10' = 10, & 6 = 6' = 7 = 7', \\ 4 = 12 = 4' = 12', & 3 = 9 = 3' = 9', \\ 2 = 11 = 11', & 5 = 8 = 5' = 8'. \end{array}\right.$$

Ces égalités ont lieu de telle sorte que les sommets A, B, C, D de deux quadrilatères égaux se correspondent. On aura d'autre part

$$1 = 6, \qquad 4 = 3, \qquad 2 = 5,$$

mais de telle sorte que les sommets $ABCD$ d'un des quadrilatères correspondent aux sommets $ADCB$ de l'autre. Il en résulte que dans le tableau des égalités (A), les sept quadrilatères de la 1[ère] ligne sont égaux entre eux, de même que les huit de la 2[de], ou les 7 de la 3[e].

Les quadrilatères 4 et 4', 5 et 5', etc. sont transformés l'un de l'autre par une substitution du groupe G, et c'est pour cela que les deux polygones

$$P = P'_1 + P', \qquad P_1 = P''_1 + P''$$

sont équivalents.

Il est clair que la surface du cercle fondamental peut être décomposée en quadrilatères tous égaux à l'un des trois quadrilatères 1, 2 ou 3, de telle façon que tout sommet de l'un des quadrilatères soit un centre de symétrie de la figure. On peut les assembler 6 à 6 de façon à réaliser la décomposition du cercle fondamental en polygones congruents à P'; on peut les assembler d'une seconde manière 6 à 6 de façon à réaliser la décomposition du cercle fondamental en polygones congruents à P''.

Considérons la courbe C'; les sommets A de rang pair de l'hexagone P' correspondront à un point M'_1 de cette courbe, les sommets A de rang impair à un autre point M'_2 de cette courbe. Soient u_1 et u_2 les arguments elliptiques de ces deux points. Le point C, centre de symétrie de P', correspondra sur C' à un point M'_3 d'argument elliptique $\frac{u_1+u_2}{2}$, tandis que les arguments elliptiques des milieux B et D des côtés seront encore $\frac{u_1+u_2}{2}$ à une demi période près. L'argument elliptique de tous les points C sera le même.

Considérons maintenant les arguments elliptiques sur la courbe C''; nous trouverons encore que ceux de tous les points A sont les mêmes; que ceux des sommets C de rang pair de P'' sont les mêmes; que ceux des sommets C de rang impair sont les mêmes; que celui d'un point A est moyenne arithmétique entre celui d'un sommet C de rang pair et celui d'un sommet C de rang impair.

Nous remarquerons que l'hexagone P' est quelconque, de telle sorte que le résultat est général et nous l'énoncerons sous la forme suivante:

Supposons que la courbe C de genre 2 *soit multiple de la courbe C' de genre* 1, *de telle façon qu'à chaque point de C corresponde un point de C' et à chaque point de C', deux points de C: il existera une autre courbe C'' de genre* 1, *telle qu'à chaque point de C corresponde un point de C'' et à chaque point de C'' deux points de C.*

Il y aura sur C' deux points M'_1 et M'_2 à chacun desquels correspondront sur C deux points confondus en M_1 pour le premier, en M_2 pour le second; soient M''_1 et M''_2 les points de C'' qui correspondent à M_1 et M_2.

Il y aura de même sur C'' deux points N''_1 et N''_2 à chacun desquels correspondront sur C deux points confondus en N_1 pour le premier, en N_2 pour le second; soient N'_1 et N'_2 les points de C' qui correspondent à N_1 et N_2.

Les points N'_1 et N'_2 sont identiques, de même que les points M''_1 et M''_2.

Nous pouvons supposer que C' et C'' sont deux cubiques. La tangente à C' au point $N'_1 = N'_2$ et la droite $M'_1 M'_2$ se coupent sur C'. La tangente à C'' au point $M''_1 = M''_2$ et la droite $N''_1 N''_2$ se coupent sur C''.

Un cas particulier intéressant est celui où l'hexagone P' est régulier et où nos trois quadrilatères sont égaux. Le cercle fondamental se trouve alors subdivisé en une infinité de quadrilatères égaux. Ces quadrilatères engendront alors un groupe fuchsien Γ, qui est de genre zéro, et un système de fonctions fuchsiennes de la classe de celles qui sont engendrées par la série hypergéométrique. Le groupe Γ contient comme sous groupes G', G'' et G. Considérons une fonction fuchsienne quelconque engendrée par Γ; ce sera une fonction rationnelle à la fois des coordonnées du point M, de celles du point M' et de celles du point M''. A une valeur de cette fonction correspondront 12 points M sur la courbe C, 6 points M' sur la courbe C', et 6 points M'' sur la courbe C''.

Paris, 21 novembre 1908.

H. Poincaré.