Le nombre et la nature des observations faites se résument ainsi :

Chambre prismatique, avec le prisme de 22°, 6 épreuves ; avec le prisme de 61°, 9 épreuves.

Spectrographe à fente avec un seul prisme de 64°,8 épreuves.

Chambre photographique de $0^m,65$, 16 épreuves.

Chambre photographique de $0^m,17$, 16 épreuves.

Grand réflecteur de 3^m, confié à Rabourdin, 61 épreuves extrêmement belles qui donnent de fins détails de la tête.

Un Tableau complet de toutes ces épreuves, avec les dates précises et les temps de pose, sera publié prochainement dans le *Bulletin astronomique*.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la diffraction des ondes hertziennes.* Note de M. **H. Poincaré.**

Dans une Note précédente (*Comptes rendus*, 22 février 1909, p. 453), j'ai mis l'équation des ondes hertziennes sous la forme d'une équation de Fredholm,

$$2\pi\mu = \int \mu' \mathrm{K}\, d\sigma' + \mathrm{N}; \tag{1}$$

μ est la densité électrique en un point M de la surface du conducteur; l'intégration est étendue aux divers éléments $d\sigma'$ de cette surface; μ' est la densité électrique au centre de gravité M′ de l'élément $d\sigma'$; K est le *noyau;* c'est une fonction des coordonnées de M et de M′ dont j'ai montré, dans la Note citée, le mode de formation ; enfin, N est la composante, normale au conducteur, du champ électrique dû aux actions extérieures.

Je vais traiter le cas où le conducteur est une sphère de centre O et de rayon ρ, très grand par rapport à la longueur d'onde, et où les actions extérieures se réduisent à celle d'un excitateur unique placé en un point S, à une distance D du centre O. Nous supposerons une oscillation isochrone, de sorte que toutes nos quantités seront proportionnelles à l'exponentielle imaginaire $e^{i\omega t}$; on trouve alors aisément

$$4\pi \mathrm{N} = e^{i\omega(t-r)}\left[\frac{i\omega}{r}\sin\theta\sin\xi + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{i\omega r^3}\right)(\sin\theta\sin\xi + 2\cos\theta\cos\xi)\right]; \tag{2}$$

dans cette formule, r est la distance SM, tandis que θ, φ et $\pi - \xi$ représentent les angles S, O et M du triangle SOM. On peut, en général, si ω est grand et que r ne soit pas très petit, se borner au premier terme de la parenthèse.

Nous allons développer N en une série de polynomes de Legendre et écrire

$$(3)\qquad N=\sum K_n P_n,\qquad \int_0^\pi P_n N \sin\varphi\, d\varphi=\frac{2K_n}{2n+1}.$$

Il est aisé de voir que K_n dépend de ρ et est de la forme

$$K_n=\frac{A_n J_n(\omega\rho)}{\rho^2},$$

A_n étant une constante indépendante de ρ, tandis que J_n est une fonction analogue aux fonctions de Bessel et qu'on peut définir de la façon suivante. Soit l'équation

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+y\left[1-\frac{n(n+1)}{x^2}\right]=0.$$

Parmi les intégrales de cette équation, nous distinguerons celle qui reste holomorphe pour $x=0$ et que nous appellerons J_n, et celle qui pour x très grand est sensiblement égale à e^{-ix} et que nous appellerons I_n. J'achèverai de définir ces deux intégrales par la relation

$$(5)\qquad I'_n J_n - J'_n I_n = 1,$$

I'_n étant la dérivée de I_n par rapport à x. L'étude de l'équation de Fredholm donne alors facilement, A étant un coefficient constant,

$$(6)\qquad \mu=A\sum\frac{K_n P_n}{I'_n(\omega\rho)\,J_n(\omega\rho)}.$$

Pour pousser plus loin le calcul, il faut s'appuyer sur ce fait essentiel que ω est très grand, ce qui permet de remplacer les intégrales par leur valeur approchée de la façon suivante. L'intégrale

$$\int \eta\, e^{i\omega\theta}\, dx,$$

où θ et ρ sont deux fonctions de x, a pour valeur approchée

$$\eta\, e^{i\omega\theta}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega\theta''}}\, e^{\pm i\frac{\pi}{4}},$$

où l'on a donné à x la valeur qui correspond au maximum ou au minimum de θ et où θ'' est la dérivée seconde de θ. Grâce à cette formule, on trouve pour la valeur approchée du polynome de Legendre $P_n(\cos\varphi)$, où n est très grand et où $\sin\varphi$ n'est pas très petit,

$$\mathrm{P}_n = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n\sin\varphi}}\cos\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{7}$$

Nous avons besoin également de l'expression approchée de J_n et de I_n quand, l'argument x étant très grand, le nombre n est très grand également; mais deux cas sont à distinguer, suivant que n est plus grand ou plus petit que x; si $n < x$, on trouve

$$\mathrm{I}'_n \mathrm{J}_n = e^{i\eta}\cos\eta, \tag{8}$$

où η est l'angle défini par l'équation

$$\eta = (n+1)\frac{\pi}{2} - x\cos\xi - \left(n + \frac{1}{2}\right)\xi,$$

ξ étant l'angle aigu, tel que $n = x\sin\xi$.

Si $n > x$, on trouve simplement

$$\mathrm{I}'_n \mathrm{J}_n = \frac{1}{2}. \tag{8 bis}$$

Une distinction analogue doit être faite dans le calcul de K_n; si $n < \omega\rho$, on a

$$\mathrm{K}_n = \frac{2n+1}{8\pi\sqrt{n}}\left[e^{i\left(n\varphi - \omega r + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{i\left(n\varphi' - \omega r' + \frac{\varphi'}{2}\right)}\right]\frac{i\omega\sin\theta\sin\xi}{\sqrt{\mathrm{D}\rho\cos\theta\cos\xi}}\sqrt{\frac{\sin\theta}{\omega\rho}}, \tag{9}$$

dont je vais expliquer la signification. Nous poserons

$$n = \omega\rho\sin\xi,$$

et nous chercherons à construire un triangle SOM, ayant pour côtés $\mathrm{SO} = \mathrm{D}$, $\mathrm{OM} = \rho$ et l'angle M égal à ξ, ou à $\pi - \xi$. Nous pouvons en construire deux; pour le premier, où l'angle M est obtus, le côté SM sera égal à r, l'angle O à φ, l'angle M à $\pi - \xi$, et l'angle S à θ; pour le second, où l'angle M est aigu, le côté SM sera égal à r', l'angle O à φ', l'angle M à ξ, enfin l'angle S à θ, même valeur que pour le premier triangle.

Si l'on compare les deux exponentielles imaginaires qui figurent dans le second membre de (9), on voit que la différence de leurs exposants est égale à $2i\eta$, η étant l'angle défini plus haut.

Si $n > \omega\rho$, l'angle ξ est imaginaire, et il en est de même des deux triangles SOM définis plus haut et, par conséquent, des valeurs de φ et de φ'; on peut alors hésiter entre les deux valeurs imaginaires de φ; on peut encore, lorsque $\sin\xi > \frac{D}{\rho}$ ou $n > \omega D$, hésiter sur le signe à attribuer à r et, par conséquent, hésiter non plus entre deux, mais entre quatre valeurs de φ. Celle que nous appellerons φ sera celle dont la partie imaginaire est positive et dont le module est le plus petit; on trouve alors

$$(9\ bis)\qquad K_n = \frac{2n+1}{8\pi\sqrt{n}} e^{i\left(n\varphi - \omega r + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \frac{i\omega\sin\theta\sin\xi}{\sqrt{D\rho\cos\theta\cos\xi}} \sqrt{\frac{\sin\theta}{\omega\rho}}.$$

En comparant les expressions (8) et (9) aux expressions (8 *bis*) et (9 *bis*), on voit que dans les deux cas on arrive au même résultat :

$$(10)\qquad \frac{K_n}{I'_n J_n} = \frac{2n+1}{4\pi\sqrt{n}} e^{i\alpha} \frac{i\omega\sin\theta\sin\xi}{\sqrt{D\rho\cos\theta\cos\xi}} \sqrt{\frac{\sin\theta}{\omega\rho}},$$

en posant pour abréger

$$\alpha = n\varphi - \omega r + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

La formule (6) nous donne alors

$$(11)\qquad \mu = A \sum \frac{2n+1}{4\pi\sqrt{n}} P_n e^{i\alpha} \frac{i\omega\sin\theta\sin\xi}{\sqrt{D\rho\cos\theta\cos\xi}} \sqrt{\frac{\sin\theta}{\omega\rho}}.$$

Il reste à sommer la série (11).

Le cas qui nous intéresse est celui où la source est très près de la sphère, et où D est très voisin de ρ; dans ce cas, pour $\sin\xi = 1$, $\cos\theta$ est très petit; je supposerai néanmoins que $\omega\cos\theta$ est encore assez grand. Dans ce cas, on peut prendre

$$r = \varphi = 0, \qquad \alpha = -\frac{\pi}{2}, \qquad e^{i\alpha} = -i.$$

Nous pouvons, dans le numérateur $2n+1$ de l'expression (11), négliger 1 devant $2n$.

Nous pouvons prendre le rayon ρ de la sphère comme unité de longueur et, comme D est à peu près égal à ρ, faire $D = \rho = 1$. Nous avons d'autre part, d'après la formule (7),

$$P_n = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n\sin\psi}} \cos\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

où Q est le point où l'on observe la densité μ, et où ψ est l'angle SOQ. La formule (11) devient alors

$$(12)\qquad \mu = A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum \frac{1}{\sqrt{\sin\psi}} \cos\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{\omega}\sin\xi\sin\theta\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta\cos\xi}}.$$

La série (12) peut être remplacée par une intégrale qui la représente avec une approximation suffisante. Pour cela nous devons poser $n = \omega z$, d'où

$$\sin\xi = z, \qquad \sin\theta = \frac{z}{D}, \qquad \cos\xi = \sqrt{1 - z^2}, \qquad \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{z^2}{D^2}}.$$

Comme D est très voisin de $\rho = 1$, nous pourrons remplacer $\sin\theta$ par $z = \sin\xi$; mais nous ne pouvons pas égaler $\cos\theta$ à $\cos\xi$, parce que les valeurs de z qui joueront le rôle plus important sont celles qui sont voisines de 1, pour lesquelles le rapport de $\cos\theta$ à $\cos\xi$, loin d'être voisin de 1, peut prendre toutes les valeurs possibles.

Les valeurs de n correspondant à deux termes consécutifs de la série diffèrent de 1; les valeurs correspondantes de z différeront de $\Delta z = \frac{1}{\omega}$; je puis donc remplacer 1 par $\omega\Delta z$; et j'ai alors, en passant de la série à l'intégrale,

$$\mu = A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int \frac{1}{\sqrt{\sin\psi}} \cos\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{\omega}\, z^{2+\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{(1 - z^2)\left(1 - \frac{z^2}{D^2}\right)}}\, \omega\, dz. \tag{13}$$

Cette intégrale peut être décomposée en deux parties, en remplaçant le cosinus par la somme de deux exponentielles imaginaires. La première partie où figure l'exponentielle

$$e^{i\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

est négligeable vis-à-vis de la seconde, qui s'écrit

$$\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\omega\sqrt{\omega}\, dz}{\sqrt{\sin\psi}} e^{-i\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \frac{z^{2+\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{(1 - z^2)\left(1 - \frac{z^2}{D^2}\right)}}.$$

Comme n et ω sont très grands, nous pouvons appliquer à cette intégrale les règles que nous avons expliquées plus haut pour en calculer une valeur approchée; et nous voyons ainsi que nous n'avons à tenir compte que des valeurs de z voisines de 1 ou voisines de D qui annulent le dénominateur. Si $D - 1$ est très petit, mais de telle façon que $(D - 1)\omega$ soit encore assez grand, il suffira d'envisager celles qui sont voisines de 1, et l'on trouvera ainsi, puisque $z = 1$, $n = \omega$,

$$\mu = B \frac{e^{-i\left(\omega\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\sin\psi}} \frac{\omega^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{1 - \frac{1}{D^2}}}, \tag{14}$$

B étant un coefficient numérique. Si l'on tenait compte des valeurs voisines de D, on ne ferait que changer la valeur de ce coefficient sans l'annuler. On voit que le rapport $\frac{\mu}{N}$ est de l'ordre de

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\omega}\sqrt[4]{1-\frac{1}{D^2}}},$$

où le premier facteur du dénominateur est d'autant plus petit que la longueur d'onde est plus grande, et le second facteur d'autant plus petit que la source est plus rapprochée de la surface de la sphère.

Ces considérations sont peut-être de nature à mieux faire comprendre les étonnants effets de diffraction obtenus en télégraphie sans fil à grande distance.

ÉLECTRICITÉ. — *Formules extrêmement simples relatives au coefficient de self-induction et à la constante du temps d'une bobine très longue.* Note de M. **Marcel Deprez.**

On sait que le coefficient de self-induction $\mathcal{L}$ d'une bobine dont la longueur est très grande par rapport à son diamètre est donné avec une exactitude suffisante par la formule classique $\mathcal{L} = 4\pi n_1^2 S a$, dans laquelle on désigne par : n_1 le nombre de spires par centimètre de longueur de la bobine; S la surface du cercle embrassé par la spire moyenne; a la longueur de la bobine.

Je crois utile de faire connaître une formule beaucoup plus simple que j'ai donnée pour la première fois, il y a plusieurs années, dans mon *Cours d'Électricité industrielle du Conservatoire des Arts et Métiers* (1). Des transformations algébriques tellement simples que je crois inutile de les transcrire ici permettront de ramener l'expression ci-dessus à cette autre qui lui est rigoureusement équivalente : $\mathcal{L} = \frac{L^2}{a}$, dans laquelle L représente la longueur totale du fil enroulé sur la bobine.

Par les mêmes procédés de calcul et tout aussi simplement, j'ai démontré, en même temps que la formule ci-dessus, que la *constante du temps* $\frac{\mathcal{L}}{R}$ a

(1) Leçon du 30 novembre 1901.