ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 22 FÉVRIER 1909.

PRÉSIDENCE DE M. ÉMILE PICARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts** adresse ampliation du Décret approuvant l'élection que l'Académie a faite de M. **Jungfleisch** pour occuper, dans la Section de Chimie, la place vacante par le décès de M. *A. Ditte*.

Il est donné lecture de ce décret.

Sur l'invitation de M. le Président, M. **Jungfleisch** prend place parmi ses Confrères.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Les ondes hertziennes et l'équation de Fredholm.* Note de M. **H. Poincaré**.

Il peut y avoir intérêt à ramener les problèmes relatifs aux ondes hertziennes à l'intégration d'une équation de Fredholm. Voici comment on peut opérer. Adoptons les notations de Maxwell, mais en prenant la vitesse de la lumière pour unité.

J'écris les équations connues, en me bornant à la première équation de chaque groupe,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}, \qquad 4\pi f=-\frac{dF}{dt}-\frac{d\psi}{dx},\\ &4\pi\left(u+\frac{df}{dt}\right)=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}, \qquad \frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=\rho,\\ &\sum\frac{dF}{dx}+\frac{d\psi}{dt}=0, \qquad 4\pi u=\frac{d^2F}{dt^2}-\Delta F, \qquad 4\pi\rho=\frac{d^2\psi}{dt^2}-\Delta\psi. \end{aligned}\right.$$

Les deux dernières équations nous apprennent que le potentiel électrostatique ψ de même que les composantes F, G, H du potentiel vecteur ne sont autre chose que les potentiels retardés dus respectivement à la densité électrique ρ dans les conducteurs et aux composantes u, v, w du courant de conduction.

Nous supposerons que toutes nos fonctions sont une somme de termes contenant en facteurs des exponentielles $e^{\omega t}$; ces exponentielles sont généralement imaginaires, mais elles seront imaginaires conjuguées deux à deux. On pourra considérer séparément tous les termes qui dépendent d'une même exponentielle $e^{\omega t}$; on aura ainsi diverses solutions simples dont les combinaisons linéaires nous donneraient la solution générale; en combinant l'un de ces éléments simples avec son imaginaire conjugué, on aurait une oscillation pendulaire amortie, l'amortissement dépendant de la partie réelle et la période de la partie imaginaire de ω.

On aura alors, par exemple, $\frac{dF}{dt} = \omega F$, et l'on pourra écrire

$$(2)\qquad \psi = \int \frac{\rho' e^{-\omega r}}{r}\, d\tau', \quad F = \int \frac{u' e^{-\omega r}}{r}\, d\tau', \quad G = \int \frac{v' e^{-\omega r}}{r}\, d\tau', \quad H = \int \frac{w' e^{-\omega r}}{r}\, d\tau'.$$

L'intégration est étendue à tous les éléments $d\tau'$ du volume du conducteur; les lettres ρ', u', v', w' représentent la valeur des fonctions ρ, u, v, w au centre de gravité de l'élément $d\tau'$, et r la distance de ce centre de gravité au point x, y, z. Mais l'électricité et les courants de conduction sont localisés à la surface des conducteurs. Nous devons donc remplacer les intégrales de volume par des intégrales de surface et écrire

$$(2\ bis)\qquad \psi = \int \frac{\rho'' e^{-\omega r}}{r}\, d\sigma', \quad F = \int \frac{u'' e^{-\omega r}}{r}\, d\sigma', \quad G = \int \frac{v'' e^{-\omega r}}{r}\, d\sigma', \quad H = \int \frac{w'' e^{-\omega r}}{r}\, d\sigma',$$

$d\sigma'$ représentant un élément de la surface d'un conducteur; tandis que ρ'', u'', v'', w'' sont les densités superficielles correspondant aux densités de volume ρ', u', v', w'.

Imaginons un conducteur unique soumis à l'action d'un champ extérieur considéré comme donné. Soient M un point quelconque de la surface du conducteur, M_i un point infiniment voisin de M, à l'intérieur du conducteur; en ce point la force électrique doit être nulle. Écrivons cela en particulier pour la composante normale; on obtiendra ainsi l'équation

$$(3)\qquad \frac{d\psi}{dn} + (lF + mG + nH)\omega = N,$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale au point M dirigée vers l'extérieur; où $\frac{d\psi}{dn}$ est la dérivée de ψ estimée suivant cette normale, considérée du côté interne; où enfin N représente la composante normale de la force électrique due au champ extérieur. Désignons par μ la densité superficielle de l'électricité au point M, et par $\mu' = \rho''$ cette même densité au centre de gravité P de $d\sigma'$. Nous trouverons, pour $\frac{d\psi}{dn}$,

$$\frac{d\psi}{dn} = 2\pi\mu + \int \mu' \, d\sigma' \frac{d}{dn} \frac{e^{-\omega r}}{r}.$$

D'ailleurs, on a

$$\frac{d}{dn} \frac{e^{-\omega r}}{r} = -\cos\psi \frac{e^{-\omega r}}{r}\left(\omega + \frac{1}{r}\right),$$

r désignant la distance MP et ψ l'angle de MP avec la normale en M.

D'autre part

$$l\mathrm{F} + m\mathrm{G} + n\mathrm{H} = \sum l\mathrm{F} = \int \frac{e^{-\omega r}}{r} \sum l u'' \, d\sigma',$$

de sorte que l'équation (3) devient

$$2\pi\mu + \int \mu' \, d\sigma' \frac{d}{dn} \frac{e^{-\omega r}}{r} + \omega \int \frac{e^{-\omega r}}{r} \sum l u'' \, d\sigma' = \mathrm{N}. \tag{4}$$

Il reste à transformer la deuxième intégrale. Pour cela, nous nous servirons de l'équation de continuité

$$\frac{d\rho}{dt} = \omega\rho = -\sum \frac{du}{dx}.$$

Nous observerons que les composantes tangentielles de la force électrique et la composante normale de la force magnétique doivent rester continues lorsqu'on franchit la surface du conducteur. De plus, à l'intérieur du conducteur, le champ électrique comme le champ magnétique doivent être nuls; cela est vrai du moins si le conducteur est simplement connexe, ce que nous supposerons. A la surface du conducteur, les lignes de force magnétiques sont donc tangentes à cette surface; d'où cette conséquence que, si x', y', z' sont les coordonnées du point P, assujetti à rester sur cette surface,

$$u'' \, dx' + v'' \, dy' + w'' \, dz' = d\mathrm{V}$$

est une différentielle exacte.

Dans l'expression de $\sum l\mathrm{F}$, la quantité sous le signe $\int$ peut être regardée comme le produit de deux vecteurs par le cosinus de l'angle compris; le premier de ces vecteurs a pour composantes u'', v'', w''; le second est égal à $\frac{e^{-\omega r}}{r}$ et est parallèle à la normale en M. Soient W_1 et W_2 ces deux vecteurs.

Considérons sur la surface une courbe fermée quelconque C et l'aire A limitée par cette courbe; soient ds' un élément d'arc de C, et $d\nu$ une longueur infiniment petite prise sur une courbe orthogonale à C et tracée sur la surface, de telle sorte que $\frac{dV}{d\nu}$ représente la dérivée de V estimée suivant la normale à la courbe C. Les composantes des vecteurs W_1 et W_2 sur cette normale seront

$$\frac{dV}{d\nu}, \quad \frac{e^{-\omega r}}{r}\,\frac{d\Sigma l x'}{d\nu}.$$

Nous poserons

$$\int_C \frac{e^{-\omega r}}{r}\,\frac{d\Sigma l x'}{d\nu}\,ds' = \int_A B\,d\sigma'. \tag{5}$$

L'aire A et la courbe C qui la limitent étant quelconques, cette équation définira la fonction B qui ne sera autre chose que la *convergence* du vecteur W_2 ou plutôt de la composante de ce vecteur qui est tangente à la surface du conducteur. L'équation de continuité nous donnera d'ailleurs

$$\int_C \frac{dV}{d\nu}\,ds' = -\,\omega \int_A \mu'\,d\sigma'. \tag{6}$$

Nous définirons maintenant la fonction L par l'équation

$$\int_C \frac{dL}{d\nu}\,ds' = \int_A B\,d\sigma'. \tag{7}$$

En vertu de l'équation (6), l'intégrale $\int B\,d\sigma'$ étendue à la surface tout entière est nulle; l'équation (7) définira donc une fonction L qu'il sera aisé de former si la surface du conducteur est simplement connexe et si l'on sait en faire la représentation conforme sur une sphère. La fonction L dépend à la fois des coordonnées du point M et de celles du point P; elle sera déterminée par l'équation (7) à une fonction arbitraire près des coordonnées de M. On aura, en vertu de (5), en étendant les intégrales à toute la surface,

$$\int \frac{e^{-\omega r}}{r} \sum l u''\,d\sigma' = -\int BV\,d\sigma'.$$

et ensuite, en vertu de (6) et (7),

$$\int BV\, d\sigma' = -\omega \int L\mu'\, d\sigma',$$

de sorte que l'équation (4) deviendra

$$(8) \qquad 2\pi\mu = \int \mu'\, d\sigma' \left[\cos\psi \frac{e^{-\omega r}}{r}\left(\omega + \frac{1}{r}\right) - \omega^2 L\right] + N;$$

N devant être regardée comme une fonction connue, cette équation a la forme d'une équation de Fredholm.

Le calcul de L se simplifie considérablement dans le cas de la sphère, d'un cylindre ou d'une surface de révolution, c'est-à-dire dans tous les cas pratiques. On peut étendre la solution à une surface multiplement connexe, mais il est nécessaire alors d'introduire une donnée de plus, à savoir le nombre des lignes de force magnétique du champ extérieur qui traversent le *trou* de la surface multiplement connexe.

L'équation (8), traitée par la méthode de Fredholm, permet de traiter le problème de la réception des ondes hertziennes en regardant ω et N comme donnés, et celui de leur émission en regardant N comme nul et ω comme inconnu. On sait que Fredholm introduit un paramètre arbitraire λ, qu'il place en facteur devant l'intégrale du second membre, et qu'il présente sa solution comme le quotient de deux fonctions entières en λ. Ici le numérateur et le dénominateur seront des fonctions entières non seulement par rapport à λ, mais par rapport à ω.

L'équation (8) nous donne théoriquement la solution du problème de la diffraction, mais alors la grandeur du paramètre ω introduit des difficultés pratiques qui méritent un examen spécial et sur lesquelles je me réserve de revenir.

BIOLOGIE. — *Le sexe chez les Oursins issus de parthénogenèse expérimentale.* Note de M. **Yves Delage.**

Les deux Oursins parthénogénétiques en élevage à la Station biologique de Roscoff, dont j'ai entretenu l'Académie dans mes Notes des 26 août et 9 décembre 1907 et 17 février 1908, viennent de mourir. Je crois devoir résumer ici leur histoire.

Ils proviennent l'un et l'autre d'expériences à l'acide chlorhydrique et à