RELAZIONE DEL CONCORSO INTERNAZIONALE

PER LA « MEDAGLIA GUCCIA ».

(Commissari: **M. Noether, H. Poincaré, C. Segre,** *relatore*).

Il programma di questo concorso [1] stabiliva che il CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO conferirà la MEDAGLIA GUCCIA a

una Memoria che farà fare un progresso essenziale alla teoria delle curve gobbe algebriche;

soggiungendo però che, nel caso in cui, fra i lavori inviati al concorso, nessuna Memoria relativa a questa teoria fosse riconosciuta degna del premio, questo potrà essere aggiudicato a

una Memoria che farà fare un progresso essenziale alla teoria delle superficie, o altre varietà, algebriche.

Le Memorie sottoposte dal CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO al giudizio della Commissione furono tre [2]. Eccone i titoli e le epigrafi:

1°) *Sur les courbes gauches de direction* (pagine 234). — Epigrafe:

« Prévoyez votre route, avant que de partir:
« A qui dirige mal, rien ne sert de courir ».

2°) *Sur quelques propriétés arithmétiques des courbes algébriques planes ou gauches* (pagine 16). — Epigrafe:

« ὁ ζητῶν εὑρίσκει ».

[1] Cfr. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVIII, 1904, pp. 390-391.

[2] Cfr. il *Verbale dell'adunanza del 14 luglio 1907* (Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. II, 1907, pp. 35-37; Medaglia GUCCIA, p. 36).

3°) *Grundlage zu einer Bewegungsgeometrie des Kreises und der Kugel* (pagine 45). — Epigrafe:

« Die Kugel beherrscht das Weltall und die Raumwissenschaft ».

La *1ª Memoria*, molto ampia, si basa in special modo su certe formole, che dànno esplicitamente le coordinate x, y, z dei punti di una curva sghemba ed il suo arco s in funzione di un parametro (il parametro di un piano isotropo tangente alla curva). Queste formole sono opportunamente applicate alle *curve di direzione* (sulle quali cioè $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sono funzioni razionali di x, y, z), ed alle curve *rettificabili algebricamente*, o *razionalmente* (in cui s è funzione algebrica, oppure razionale, di x, y, z): in particolare a curve *algebriche*.

Seguono varie ricerche speciali su curve evolute od evolventi di linee date, sulle superficie caustiche ed anticaustiche, ecc.

In complesso questo lavoro, che è il più importante fra quelli presentati, contiene sui vari argomenti accennati parecchi risultati utili, specialmente su classi particolari di linee e superficie.

Ciò nondimeno, e pur prescindendo da talune mende facilmente correggibili, che si riscontrano ad esempio in qualche ragionamento, la Commissione con rammarico ha dovuto escluderlo dal premio, ritenendo che esso non corrisponda al tema prefisso. Invero questo poneva come condizione che la Memoria da premiarsi facesse fare un progresso essenziale alla teoria delle curve gobbe *algebriche*, oppure a quella delle superficie, od altre varietà *algebriche*. *L'algebricità* era evidentemente una condizione indispensabile, che caratterizzava gl'indirizzi secondo cui si potevano svolgere, pur colla massima libertà, le ricerche. Ora il lavoro di cui parliamo versa invece sostanzialmente su questioni metriche di Geometria differenziale; e se anche qua e là considera in particolare delle curve (e superficie) algebriche, per esempio di direzione, non fa su di esse ricerche profonde, e non ottiene proprietà che abbiano una speciale importanza, nè in sè, nè per le applicazioni che potranno dare.

La *2ª Memoria* riguarda le curve algebriche, le cui equazioni hanno per coefficienti dei numeri algebrici; e tratta di problemi connessi all'esistenza, su tali curve, di punti a coordinate esprimibili così:

$$\sum_{1}^{\nu} a_i e^{\alpha_i},$$

ove anche le a_i ed α_i son numeri algebrici. Un noto teorema fondamentale di Lindemann fornisce subito delle relazioni tra i coefficienti della curva ed i numeri a_i, α_i. Ma le conseguenze che l'Autore ne trae si riferiscono solo a casi particolari, il cui interesse è piuttosto limitato, o si spingono poco più in là di ciò che si può riguardare come già noto. Perciò il contributo che ne viene alle proprietà aritmetiche delle curve algebriche non ci pare sufficiente.

Infine la *3ª Memoria*, relativa alla Geometria dei cerchi e delle sfere, ed a certi congegni cinematici, ha in sè stessa poco valore, e non corrisponde affatto al tema.

***

Così la Commissione, unanime, ha concluso che non era il caso di conferire il premio a nessuno di quei tre lavori presentati al concorso.

Dopo ciò, seguendo il programma che le era tracciato, essa ha esaminato se il premio si potesse invece assegnare a Memorie, pubblicate dopo l'apertura del concorso (1° novembre 1904) e prima della sua scadenza (1° luglio 1907), e relative ancora alle curve gobbe, o superficie, od altre varietà, algebriche.

Effettivamente nel periodo indicato vari matematici han pubblicato dei lavori importanti su questi argomenti. La Commissione ha esaminato attentamente quelel pubblicazioni, ed ha concluso col prescegliere fra esse quelle di **Francesco Severi** relative alla Geometria delle superficie algebriche e delle curve algebriche tracciate su di esse.

Anche altri Autori avremmo giudicati degni del premio. Ma nel confronto dei loro lavori colle Memorie del Severi (sempre, bene inteso, per l'intervallo di tempo di cui si tratta) stava a favore di queste l'esservi risolte un complesso più ampio di questioni *generali*, mentre in quelli si trattava invece più spesso di classi *particolari* di superficie od altri enti.

Le pubblicazioni del Severi a cui abbiamo alluso sono, più precisamente, le seguenti:

1. *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie.*

Mathematische Annalen, t. LXI (1905), pp. 20-49.
(Datata 14 novembre 1904; pubblicata 5 settembre 1905).

2. *Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard, della 1ª e della 2ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica.*

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XL (1904-905), pp. 288-296.
(Presentata nell'Adunanza del 22 gennaio 1905).

3. *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica.*

Mathematische Annalen, t. LXII (1906), pp. 194-225.
(Datata 20 settembre 1905; pubblicata 1° maggio 1906) (1).

(1) Un riassunto di questa Memoria trovasi nella Nota: *Sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique et sur les intégrales de Picard attachées à la surface* (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. CXL, 1er semestre 1905, pp. 361-363, séance du 6 février 1905).

4. *Il teorema d'*A*BEL sulle superficie algebriche.*

Annali di Matematica pura ed applicata, s. III, t. XII (1906), pp. 55-79.
(Datata 30 aprile 1905; pubblicata in agosto 1905) (¹).

5. *Intorno al teorema d'*A*BEL sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di* P*ICARD.*

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXI (1° semestre 1906), pp. 257-282.
(Datata 15 dicembre 1905; stampata il 12-19 febbrajo 1906).

6. *Sul teorema di* R*IEMANN*-R*OCH e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica.*

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XL (1904-905), pp. 766-776.
(Datata 18 aprile 1905; presentata nell'Adunanza del 7 maggio 1905).

7. *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica.*

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, ecc., s. II, vol. XXXVIII (1905), pp. 859-865.
(Datata 24 luglio 1905; presentata nell'Adunanza del 9 novembre 1905).

8. *Osservazioni varie di Geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà.*

Atti del R. Istituto Veneto, ecc., t. LXV (1905-906), Parte II^a, pp. 625-643.
(Datata 5 aprile 1906; licenziate le bozze per la stampa il 28 maggio 1906).

In queste Memorie si trovano, strettamente connessi fra loro, i più recenti metodi di studio di quella teoria: i metodi algebrico-geometrici dovuti principalmente ad ENRIQUES e CASTELNUOVO; e quelli trascendenti di PICARD, basati sull'uso degli integrali di differenziali totali, o integrali semplici, relativi alla superficie algebrica assegnata. E come il SEVERI aveva già portato nuovi contributi importanti ai metodi geometrici — citiamo solo, come esempio, l'estensione del concetto di *serie caratteristica* ai sistemi continui, non lineari, di curve, — ed altri qui ne porta, come l'introduzione (Memoria 7) delle *curve virtuali*, grazie a cui si rende possibile in ogni caso l'operazione di *sottrazione* per le curve di una data superficie, — così alla teoria degl'integrali di PICARD egli ha fatto fare in questi lavori una serie di progressi veramente essenziali (²).

Anzitutto rileviamo che qui appunto si trova risolta finalmente la questione capitale di decidere quali siano le superficie su cui quegl'integrali non si riducono alle funzioni note, cioè a costanti se di 1ª specie, a funzioni razionali se di 2ª, a combinazioni algebrico-logaritmiche se di 3ª specie. SEVERI dimostra che tali superficie

(¹) Un riassunto di questa Memoria trovasi nella Nota: *Le théorème d'*A*BEL sur les surfaces algébriques* (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. CXL, 1^{er} semestre 1905, pp. 926-928, séance du 3 avril 1905).

(²) Cfr. PICARD-SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* t. II, (1906), pp. 420, 432, 490-498.

sono precisamente quelle *irregolari*, nelle quali cioè il genere geometrico p_g è superiore a quello aritmetico p_a.

Esaminando la cosa più minutamente, si ha, per quel che riguarda gl'integrali di 1ª specie, che un teorema dato da Humbert in una sua importante Memoria del 1894, ed un altro di Enriques del 1899 portavano a confrontare la classe delle superficie dotate d'integrali semplici di 1ª specie con quella delle superficie irregolari. Essi stabilivano, rispettivamente, che le superficie in cui esistono sistemi algebrici di curve non contenuti in sistemi lineari appartengono all'una ed all'altra classe.

Orbene Severi dimostra (Memoria **1**) che l'esistenza d'integrali di 1ª o di 2ª specie, trascendenti, trae di conseguenza l'irregolarità della superficie. In altri termini, se una superficie è regolare, sulla varietà Riemanniana a 4 dimensioni che ne dà l'imagine reale, ogni ciclo lineare si può ridurre con deformazione continua ad un punto.

Subito dopo l'Enriques invertì quella proposizione, dimostrando che su ogni superficie irregolare esistono dei sistemi algebrici di curve non contenuti in sistemi lineari; onde, pel citato teorema di Humbert, le superficie irregolari ammetteranno integrali semplici di 1ª specie.

Ma il Severi stabilisce una proposizione quantitativa di maggior significato che quella riferita. Sia p l'irregolarità $(=p_g-p_a)$ di una superficie. Siano q ed r i numeri dei suoi integrali semplici distinti di 1ª e di 2ª specie. Egli ottiene (Memoria **2**) la relazione:

$$r-q=p \text{ (1)}.$$

Com'è noto, il risultato più completo

$$q=p, \qquad r=2p$$

fu poi pubblicato per primo dal Castelnuovo. Ma Severi ne diede pure subito una propria, molto semplice, dimostrazione, per mezzo di un'estensione del teorema d'Abel (Memoria **4**), di cui diremo in seguito.

Quanto agl'integrali di 3ª specie, essi compaiono nella Memoria **3**, ed ivi, come corollario di altre considerazioni su cui pure ritorneremo, è risolta nel senso sopra indicato la questione della eventuale riducibilità di quegli integrali a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Fra i nuovi contributi allo studio degl'integrali di Picard, rileviamo ancora nelle Memorie **1** e **2** l'analisi degl'integrali di 2ª specie aventi una data curva polare, e delle loro funzioni razionali *residue*. Sottraendo da un tale integrale delle funzioni razionali convenienti, esso può sempre ridursi ad integrali che posseggano solo una curva polare di 1° ordine, irriducibile e priva di punti multipli. Su questa curva il gruppo degli zeri della funzione residua di 1° rango conduce a considerare la serie caratteristica della curva; e appunto dall'essere questa serie una serie parziale si deduce nella Memoria **1** che la superficie è irregolare. — Nella Memoria **5** è data una riduzione a forma normale degl'integrali delle tre specie: la quale, se in

(1) Nella Memoria **1** aveva solo dimostrato che $r-q \leq p$.

parte è analoga a quella degl'integrali abeliani, in qualche punto esige invece considerazioni essenzialmente nuove.

Di grande importanza sono le ricerche della Memoria **3** intorno alla totalità delle curve algebriche situate su una data superficie algebrica irriducibile. Premettiamo che il SEVERI dice che due o più di quelle curve son *legate algebricamente* quando la linea costituita da alcune di esse contate certi numeri di volte, e quella costituita dalle rimanenti, pure debitamente contate, sono linee (totali) di uno stesso sistema algebrico irriducibile. Ciò posto, si considerino, sulla superficie F, l curve $C_1, C_2, \ldots, C_l$, di ordini $m_1, m_2, \ldots., m_l$; e s'indichi con n_{ik} in generale il numero delle intersezioni di C_i, C_k (con n_{ii} il grado virtualo di C_i). Si ha allora che: La condizione necessaria e sufficiente affinchè le curve $C_1, C_2, \ldots, C_l$ sian legate algebricamente è che sian nulli tutti i determinanti d'ordine l della matrice

$$|n_{ik}\, m_i|.$$

Questa condizione si può anche mettere sotto forma trascendente: equivale cioè all'esistenza su F di un integrale semplice di 3ª specie, il quale divenga infinito logaritmicamente soltanto nei punti di $C_1, C_2, \ldots, C_l$ (1).

Ciò permette di applicare un teorema fondamentale del PICARD relativo alle curve algebriche che costituiscono la totalità delle curve su cui un integrale di 3ª specie ha singolarità logaritmiche. Esso si traduce ora così: Per ogni superficie F vi è un certo numero ϱ tale che su essa si posson fissare ϱ curve algebricamente distinte (*base*), per modo che ogni altra curva della superficie sia legata algebricamente ad esse. Naturalmente la base si può variare: servono per formare una base ϱ qualunque curve $C_1, C_2, \ldots$ il cui determinante $|n_{ik}|$ sia $\neq 0$.

Grazie a questo teorema, ad ogni curva algebrica D di F spettano certi $\varrho + 1$ coefficienti (numeri interi), mediante i quali si esprime il legame algebrico di D con una base fissata $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$. Questi $\varrho + 1$ numeri caratterizzano le proprietà della curva in sè (come curva di F), e in relazione colle altre curve della superficie. Così essi bastano per esprimere il genere ed il grado di D, come pure il numero delle intersezioni di due curve date di F.

Ognun vede l'interesse e la generalità di questi risultati, e quanto essi sian promettenti anche per l'avvenire della Geometria delle curve tracciate su una data superficie algebrica, e di conseguenza per quella delle curve sghembe algebriche in generale.

Con essi rimane esteso alle curve di una superficie qualunque quel concetto fondamentale della *base*, che, per certe classi particolari di superficie, lo stesso SEVERI aveva già dato, ispirandosi alla teoria di HURWITZ delle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica. E le ricerche sulla totalità delle curve sghembe giacenti su una data superficie, svolte nelle Memorie che ebbero il premio STEINER nel 1882, trovano qui un'estensione di grande portata.

(1) Ne deriva la proposizione già prima citata da questa Memoria **3**.

Passiamo ai lavori sull'estensione del teorema d'Abel alle superficie. Si sa che, data una curva algebrica di genere p, il teorema d'Abel relativo ai suoi p integrali di 1ª specie serve ad esprimere le condizioni perchè due gruppi di n punti siano *equivalenti*, cioè stiano in una stessa serie lineare di grado n. Orbene si abbia invece sulla superficie F un sistema continuo S di curve algebriche. Condizione necessaria e sufficiente affinchè S sia contenuto totalmente in un sistema lineare è questa: che per ognuno degli integrali semplici di 1ª specie relativi ad F la somma dei valori che esso prende nei punti d'intersezione di due curve di S rimanga costante al variare di queste curve. In ciò consiste quello che il Severi (Memoria **4**) chiama 1° teorema d'Abel per le superficie. Ad esso egli dà anche altre forme, assumendo le due curve nominate infinitamente vicine fra loro, oppure rendendo costanti le somme degl'integrali nei punti in cui una curva variabile di S sega una conveniente curva fissa. Nella Memoria **5** stabilisce delle proposizioni analoghe, in cui però anzi che un sistema continuo S si considerano due sole curve, e si esprime che, sotto certe condizioni, due loro equimultipli convenienti appartengono ad uno stesto sistema lineare [1].

Un'altra sorta di estensione del teorema d'Abel (Memoria **4**) si riferisce invece alle *involuzioni* sulla superficie, ossia sistemi algebrici ∞^2 di gruppi di n punti di F, tali che ogni punto stia in un sol gruppo. Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'involuzione di F sia *regolare* (vale a dire sia regolare la superficie su cui essa si può rappresentare biunivocamente) è questa: che se di ogni integrale semplice di 1ª specie relativo ad F si prendono i valori negli n punti di un gruppo, la somma di questi n valori rimanga costante al variare del gruppo nell'involuzione. Così, ad esempio, se F è regolare, ogni involuzione su F sarà pure regolare. — Come conseguenza di quel teorema, si dimostra poi che: se una superficie contiene un sistema continuo d'involuzioni irregolari, queste saranno tutte *composte* con un medesimo fascio irrazionale di curve.

Citiamo infine, di nuovo nel campo dei sistemi di curve algebriche giacenti su una data superficie, i contributi del Severi alla estensione, già fatta prima di lui, del teorema di Riemann-Roch alle superficie. Sulla F sia data una curva C, che può anche essere riducibile, di grado e genere virtuali n e π, e d'indice di specialità i. Posto per brevità

$$h = p_a + n - \pi + 1 - i\,,$$

sia $h \geq 0$. Allora (Memorie **6** e **8**): 1°) su F esiste *un solo* sistema algebrico completo cui C appartiene come curva totale; 2°) questo sistema algebrico ha dimensione $\geq h + p$, e si compone di ∞^p sistemi lineari non equivalenti di dimensione $r \geq h$. Uno di questi sistemi lineari sarà il sistema lineare completo contenente C. Nella Me-

[1] Alcuni risultati di quelle Memorie **4** e **5** vengono ritrovati geometricamente, senza l'uso degl'integrali, nella Memoria **8**, ove si dimostra pure la seguente proposizione più generale:

Dato su una superficie un sistema continuo di curve algebriche A, se le curve kA (ove k è un dato intero positivo) segano su una curva fissa (curva totale di un sistema continuo infinito, che non sia un fascio irrazionale) gruppi appartenenti ad una stessa serie lineare. le curve A staranno certamente in uno stesso sistema lineare.

moria **7** si estende la relazione $r \geq h$ verificata da questo sistema al caso che C sia una *curva virtuale* (nel qual caso si deve porre $r = -1$, se no $r \geq 0$), dando così il modo di decidere aritmeticamente della possibilità di effettuare la sottrazione di due curve o sistemi di curve.

***

Da quest'analisi risulta come quelle teorie alle quali mirava il benemerito fondatore del premio, ed a cui si riferiva il programma del concorso, abbian fatto, nel periodo di tempo prescritto, per opera di **Francesco Severi** dei progressi essenziali. E però la Commissione è unanime nel decidere che a questo valoroso geometra sia conferita la MEDAGLIA GUCCIA.

Erlangen, Paris, Torino — febbraio 1908.

La Commissione { **M. Noether**, **H. Poincaré**, **C. Segre**, *relatore*.