ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 21 DÉCEMBRE 1908.

PRÉSIDENCE DE M. ÉMILE PICARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Remarques sur l'équation de Fredholm.* Note de M. **H. Poincaré**.

On sait que Fredholm résout l'équation

$$\varphi(x) + \lambda \int f(x, s)\, \varphi(s)\, ds = \psi(x) \tag{1}$$

par la formule

$$\varphi(x) = \psi(x) - \int \frac{D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_{\lambda f}} \psi(y)\, dy, \tag{2}$$

où $D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $D_{\lambda f}$ sont deux fonctions entières de λ. Le développement de $D_{\lambda f}$ commence par le terme 1, et le terme général est

$$\frac{\lambda^n}{n!} \int f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Le terme général du développement de $D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est

$$\frac{\lambda^{n+1}}{n!} \int f\begin{pmatrix} x, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

La notation $f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{pmatrix}$ représente le développement à n lignes et n colonnes, où l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne est $f(x_i, y_k)$.

Si $f(x, y)$ devient infini pour $x = y$ les formules précédentes deviennent illusoires, puisque certains éléments de nos déterminants sont infinis. On sait comment Fredholm s'est tiré de cette difficulté. Soient $f_2, f_3, \ldots$ ce que l'on appelle les *noyaux réitérés;* si $f(x, y)$ devient infini comme $(x-y)^{-\alpha}$ et que l'exposant α soit suffisamment petit, il arrivera que tous ces noyaux réitérés seront finis à partir de l'un d'entre eux. Supposons donc que f_n soit fini, ainsi que tous les noyaux réitérés d'indice plus grand. Fredholm ramène l'équation (1) à une autre équation de même forme, mais où λ est remplacé par $-(-\lambda)^n$ et f par f_n.

Dans l'équation (2), la fonction méromorphe en λ

$$\Phi(\lambda) = \frac{D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_{\lambda f}}$$

se trouve remplacée par une autre fonction méromorphe en λ, $\Phi_n(\lambda)$, dont le dénominateur est

$$D_n = D_{-(-\lambda)^n f_n}.$$

Si f est fini, f_n l'est également, et les deux formules sont applicables; les deux fonctions méromorphes Φ et Φ_n sont donc égales, ce qui veut dire que l'on peut revenir de la nouvelle formule à l'ancienne en divisant le numérateur et le dénominateur par un même facteur commun. Il est aisé en effet de vérifier que, si l'on pose

$$D_{\lambda f} = F(\lambda)$$

et si α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, on aura

$$D_n = F(\lambda)\, F(\alpha\lambda)\, F(\alpha^2\lambda) \ldots F(\alpha^{n-1}\lambda).$$

Qu'arrive-t-il maintenant quand f devient infini et que, par exemple, f_2 est fini? Ici encore, nous devons prévoir que le numérateur et le dénominateur de Φ_2 auront un facteur commun, et que $D_2 = D_{-\lambda^2 f_2}$, qui est une fonction entière de λ^2, sera le produit de deux fonctions entières $G(\lambda)$ et $G(-\lambda)$, le second facteur $G(-\lambda)$ divisant également le numérateur.

C'est en effet ce qui arrive; on peut alors se proposer, puisque la fonction mémomorphe Φ se présente sous une forme illusoire et que la fonction méromorphe Φ_2 n'est pas irréductible, de former une fonction méromorphe irréductible égale à Φ_2. Dans ce cas, la solution se présente sous une forme très simple.

Nous aurons

$$\Phi_2 = \frac{N}{D}, \tag{3}$$

N et D étant deux fonctions entières de λ qui se formeront de la même manière que $D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $D_{\lambda f}$; la seule différence, c'est que les déterminants

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

seront remplacés par d'autres, formés tout à fait de la même manière, sauf que les éléments $f(x_i, x_i)$ qui deviennent infinis seront remplacés par zéro.

Les considérations suivantes permettront de mieux comprendre la signification de ce résultat. Supposons que la fonction $f(x, y)$ non seulement soit finie, mais admette des dérivées premières finies. Dans ce cas, d'après un résultat de M. Fredholm sur la loi de décroissance des coefficients, la fonction entière $D_{\lambda f}$ sera de genre zéro. Supposons, au contraire, que $f(x, y)$ devienne infinie pour $x = y$ comme $(x - y)^{-\alpha}$ et que α soit plus petit que $\frac{1}{4}$. Supposons même, pour éviter toute complication dans l'énoncé, que l'on ait

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{|x - y|^{\alpha}},$$

la fonction ψ restant holomorphe dans le domaine considéré. On aura alors

$$|f_2(x', y) - f_2(x, y)| < A\,|x' - x|^{1-2\alpha},$$

et, d'après le théorème de M. Fredholm, le coefficient de λ^{2n} dans le développement de $D_{-\lambda^2 f_2}$ décroîtra comme $(n^n)^{2\alpha - 1 - \frac{1}{2}}$; de sorte que, si $\alpha < \frac{1}{4}$, cette fonction $D_{-\lambda^2 f_2}$ sera une fonction entière de genre zéro de λ^2. Nous savons qu'une fonction entière de genre zéro de λ^2 peut toujours être regardée comme le produit de deux fonctions entières de λ,

$$G(\lambda)\, G(-\lambda),$$

qui sont de genre 1. Nous devons donc nous attendre à ce qu'en appelant $D(\lambda)$ le dénominateur de la formule (3), on ait

$$D_{-\lambda^2 f^2} = D(\lambda)\, D(-\lambda),$$

de sorte que

$$G(\lambda) = e^{k\lambda} D(\lambda),$$

k étant une constante quelconque. C'est en effet ce qui arrive. Ce qui caractérise la fonction $D(\lambda)$ et la distingue de toutes les autres fonctions $G(\lambda)$, c'est que le coefficient de λ est nul. Quand la fonction $f(x, y)$ reste finie de telle façon que $D_{\lambda f}$ existe, $D_{\lambda f}$ sera aussi une fonction $G(\lambda)$ et l'on aura

$$D_{\lambda f} = e^{k\lambda} D(\lambda),$$

k étant le coefficient de λ dans le développement de $D_{\lambda f}$. Dès que la fonction $f(x, y)$ devient infinie, cette formule devient illusoire, parce que le coefficient k devient infini.

Proposons-nous, d'autre part, de développer $\log D_{\lambda f}$ suivant les puissances de λ; nous trouverons

$$\log D_{\lambda f} = \sum \frac{\lambda^n \varphi_n}{n},$$

en posant

$$\varphi_n = (-1)^{n+1} \int f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_{n-1}, x_n) f(x_n, x_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

On peut tirer de là une conclusion. Reprenons la formule

$$\Phi(\lambda) = \frac{D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_{\lambda f}}.$$

Multiplions haut et bas par

$$e^{-\frac{\lambda \varphi_1}{1} - \frac{\lambda^2 \varphi_2}{2} - \ldots - \frac{\lambda^p \varphi_p}{p}}.$$

Nous obtiendrons ainsi la formule

$$\Phi(\lambda) = \frac{N_p}{D_p}, \tag{3 bis}$$

où N_p et D_p sont des fonctions entières de λ. Ces fonctions se formeront de la même manière que $D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $D_{\lambda f}$, avec cette différence qu'après avoir développé les déterminants

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix},$$

il faudra supprimer dans le développement tous les termes qui contiennent en facteur un produit de la forme

$$f(x_1, x_1), \quad f(x_1, x_2) f(x_2, x_1), \quad f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) f(x_3, x_1), \quad \ldots,$$

jusqu'à

$$f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_{p-1}, x_p) f(x_p, x_1).$$

Mais il arrivera ceci; supposons que $f(x, y)$ ne reste plus fini, mais prenne la forme

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{|x - y|^\alpha},$$

ψ étant fini. Alors les séries $D_{\lambda f}$, $D_{\lambda f}\binom{x}{y}$ ne seront plus convergentes, mais *les séries* N_p *et* D_p *resteront convergentes,* pourvu que

$$\alpha < \frac{p}{p+1},$$

de sorte que la formule (3 *bis*) restera applicable.

Si l'on suppose $f(x, y)$ fini et pourvu d'une dérivée, les quatre séries $D_{\lambda f}$, $D_{\lambda f}\binom{x}{y}$, N_p et D_p sont toutes convergentes; mais les deux premières convergent plus rapidement, puisqu'elles représentent des fonctions entières de genre zéro, tandis que les deux dernières représentent des fonctions entières de genre p.

Remarquons encore qu'on peut obtenir la dérivée logarithmique de $D_{\lambda f}$ de la façon suivante :

Soit $\theta(x, \zeta)$ la solution de l'équation

$$\theta(x, \zeta) + \lambda \int f(x, s)\,\theta(s, \zeta)\,ds = f(x, \zeta);$$

on aura

$$\text{dér.} \log D_{\lambda f} = \int \theta(x, x)\,dx.$$

ÉLECTRICITÉ. — *Action des lignes d'énergie électrique sur les orages à grêle.* Note de M. **J. Violle.**

J'ai déjà entretenu l'Académie des méfaits attribués à une ligne de transmission d'énergie électrique à haute tension, qui aurait amené la grêle sur une région généralement indemne ([1]).

Quelle peut être l'action d'une telle ligne?

Les effluves puissants, qui se dégagent d'une ligne à haute tension sous l'influence d'un nuage orageux et sur lesquels j'ai spécialement attiré l'attention dans ma précédente Communication, montrent que le système fonc-

([1]) J. Violle, *Comptes rendus*, t. CXLVII, 17 août 1908, p. 375.