Tome L. Samedi 2 Mars 1907. 14e Année. — N° 9.

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE DES TRANSFORMATIONS

Electriques — Mécaniques — Thermiques

DE

L'ÉNERGIE

SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX RELATIFS A L'ÉLECTROTECHNIQUE

Une récente conversation que j'ai eue avec MM. Maurice Leblanc et Marius Latour a appelé mon attention sur certaines propriétés générales des systèmes électriques. Peut-être ne sera-t-il pas inutile de traiter ici cette question.

J'envisage un système pouvant comprendre des circuits fixes, des circuits mobiles, des pièces en rotation recevant le courant *par des bagues*, mais ne contenant *ni aimant permanent, ni pièces à collecteurs ou à résistance variable, ni condensateurs ou capacité sensible, et ne recevant pas du dehors du courant continu*. Je me propose en particulier d'établir qu'un pareil système, si compliqué qu'il soit d'ailleurs, ne pourra jamais constituer une génératrice *auto-excitatrice*; et que, s'il reçoit du dehors du courant alternatif, il y aura toujours décalage entre la force électromotrice et l'intensité.

L'ÉNERGIE ÉLECTRODYNAMIQUE.

Supposons que le système comprenne n circuits; soient

$$i_1, i_2, \ldots\ldots, i_n$$

les intensités dans ces divers circuits; soit L_p le coefficient de self-induction du circuit i_p; soit M_{pq} le coefficient d'induction mutuelle des circuits i_p et i_q. Posons :

$$2T = \Sigma L_p i_p^2 + 2\Sigma M_{pq} i_p i_q.$$

La fonction T sera l'*énergie électrodynamique*. Cette fonction est *essentiellement positive*, car elle est égale à l'intégrale :

$$\frac{1}{8\pi}\int \mu d\tau(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

où μ représente la perméabilité magnétique, α, β, γ les composantes du champ magnétique et où l'intégration est étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ de l'espace.

Nous supposerons dans la suite que la perméabilité est constante, que par conséquent les coefficients L et M sont indépendants des intensités, et que T est un polynôme homogène du 2^d degré par rapport à ces intensités. Les résultats seraient encore vrais si l'on abandonnait cette hypothèse ; pour se rendre compte de la façon dont il conviendrait d'opérer si la perméabilité était supposée variable, il suffira de se reporter à ce que j'ai dit au début de mes leçons sur le téléphone (*Eclairage Electrique,* tome L, 16 février 1907, p. 222).

Les coefficients L et M seront en général des fonctions du temps, parce que le système comprend des pièces mobiles ; je regarderai le mouvement de ces pièces comme donné, ce qui me permettra de regarder L et M comme des fonctions connues du temps.

Fonction des résistances.

Je représenterai par Sdt la chaleur de Joule produite dans l'appareil pendant le temps dt. Il est clair que la *fonction des résistances* S sera comme T, un polynôme du 2^d degré par rapport aux i ; mais, à la différence de ce qui arrive pour T, les coefficients de ce polynôme seront des constantes et non des fonctions du temps, puisque nous supposons que le système ne contient pas de résistance variable. Il est clair que la fonction des résistances S sera *essentiellement positive*.

Si les circuits étaient entièrement séparés les uns des autres, le polynôme S ne contiendrait que des termes carrés ; mais il peut se faire que deux circuits aient une partie commune. Si alors une portion de conducteur appartient à la fois aux deux circuits i_p et i_q, la résistance de cette portion nous donnera un terme en $(i_p+i_q)^2$ et par conséquent un terme en $i_p\, i_q$.

Équations de Lagrange-Maxwell.

Je suppose que dans le circuit i_p, il y ait une force électromotrice E_p venue du dehors ; alors les équations de Lagrange-Maxwell nous donnent :

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{di_p}+\frac{dS}{di_p}=E_p. \tag{1}$$

Si nous posons :

$$V=\Sigma E_p i_p$$

Cela peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{di_p}+\frac{dS}{di_p}=\frac{dV}{di_p}. \tag{1 bis}$$

Variables normales.

On peut quelquefois introduire une petite simplification par un changement de variables.

Si on désigne par i' des variables liées aux i par des relations linéaires, les équations (1 *bis*) prennent la forme :

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{di'_p}+\frac{dS}{di'_p}=\frac{dV}{di'_p} \tag{2}$$

c'est-à-dire qu'elles conservent la forme des équations de Lagrange. Si d'ailleurs on pose :

$$\frac{dV}{di'_p}=E'_p$$

il y a des relations linéaires entre les E' et les E, et on a identiquement

$$V=\Sigma Ei=\Sigma E'i'.$$

On peut choisir les nouvelles variables de telle façon que S ne contienne que des termes carrés et que l'on ait

$$2S=\Sigma R'_p i'^2_p$$

comme si tous les circuits étaient séparés les uns des autres. On peut donc toujours se supposer ramené au cas où ces circuits sont séparés et où l'on a :

$$2S=\Sigma R_p i_p^2; \qquad \frac{dS}{di_p}=R_p i_p.$$

On pourrait même choisir les variables nouvelles de façon que les deux polynômes S et T ne contiennent l'un et l'autre que des termes carrés, si les coefficients L et M étaient constants, mais il n'en est pas ainsi en général.

Fonctions périodiques.

Toutes les quantités que nous aurons à considérer seront des fonctions périodiques ou quasi périodiques. Si une fonction $f(t)$ est périodique, on peut la développer suivant la formule de Fourier sous la forme :

$$f(t)=A+\Sigma B\cos\alpha t+\Sigma C\sin\alpha t$$

les α étant des multiples d'une même quantité. La fonction $f(t)$ sera dite *quasi périodique*, si elle est développable en une série de même forme, les α étant quelconques.

La valeur moyenne de $f(t)$ est A; si cette valeur moyenne est nulle, $f(t)$ est la dérivée d'une fonction périodique ou quasi périodique. Dans ce qui va suivre, j'aurai presque toujours affaire à des fonctions périodiques proprement dites ; je dirai donc ordinairement fonctions périodiques, mais ce que je dirai s'appliquera également aux fonctions quasi périodiques.

La valeur moyenne du carré de f est

$$A^2+\Sigma\frac{B^2+C^2}{2}.$$

On voit qu'elle est plus grande que le carré de la valeur moyenne.

La dérivée d'une fonction périodique a sa valeur moyenne nulle. Cela nous permet de faire une sorte d'intégration par parties et de dire que la valeur moyenne de $u\frac{dv}{dt}$ est égale à celle de $-v\frac{du}{dt}$, puisque celle de $\frac{d(uv)}{dt}$ est nulle, j'écris

$$\left[u\frac{dv}{dt}\right]=-\left[v\frac{du}{dt}\right]$$

en représentant par [U] la valeur moyenne de U.

Théorème fondamental.

Reprenons l'équation (1), et supposons que l'on ne fournisse de l'extérieur à l'appareil que du courant alternatif; cela revient à supposer que la valeur moyenne de E_p est nulle. Comme $\frac{dT}{di_p}$ est une fonction périodique, la valeur moyenne de

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{di_p}$$

est nulle. Il en résulte que celle de

$$\frac{dS}{di_p}$$

est nulle également. *Comme nous supposons qu'il n'y a pas de résistance variable*, il est clair qu'il en résulte que la valeur moyenne de i_p est nulle. Si par exemple

$$S = \frac{1}{2}\Sigma R_p i_p^2,$$

la valeur moyenne de

$$\frac{dS}{di_p} = R_p i_p$$

est nulle et elle ne diffère de celle de i_p que par le facteur constant, R_p. Je puis donc poser

$$i_p = \frac{dj_p}{dt}$$

j_p étant une fonction périodique. Je multiplie l'équation (1) par j_p et j'ajoute toutes les équations analogues; il vient :

$$\Sigma j \frac{d}{dt}\frac{dT}{di} + \Sigma j \frac{dS}{di} = \Sigma E j. \tag{3}$$

Je prends les valeurs moyennes des deux membres. Je représente la valeur moyenne d'une fonction U par la notation $[U]$; j'ai alors, en intégrant comme plus haut par parties,

$$\left[\Sigma j \frac{d}{dt}\frac{dT}{di}\right] = -\left[\Sigma \frac{dj}{dt}\frac{dT}{di}\right] = -\left[\Sigma i \frac{dT}{di}\right] = -2[T]$$

en appliquant pour finir le théorème des fonctions homogènes. Cette partie moyenne est donc négative, puisque T est essentiellement positif.

J'ai ensuite, par les propriétés des formes quadratiques et en appelant S' ce que devient la fonction S quand on y remplace les i par les j correspondants :

$$\Sigma j \frac{dS}{di} = \Sigma i \frac{dS'}{dj}.$$

Or les coefficients de S' c'est-à-dire les résistances étant invariables, on aura :

$$\frac{dS'}{dt} = \Sigma \frac{dS'}{dj}\frac{dj}{dt} = \Sigma i \frac{dS'}{dj} = \Sigma j \frac{dS}{di}$$

d'où

$$\left[\Sigma j \frac{dS}{di}\right] = \left[\frac{dS'}{dt}\right] = 0.$$

reste donc :

$$\Sigma[Ej] = -2[T] < 0. \tag{4}$$

Interprétation du théorème.

Supposons d'abord un appareil ne recevant rien du dehors, et formé par exemple d'une génératrice fermée sur une résistance, ou bien de l'ensemble d'une génératrice et d'une réceptrice. Alors, puisque nous ne recevons rien du dehors, on aura :

$$E_p = 0 ; \quad \Sigma[Ej] = 0$$

ce qui est en contradiction avec l'équation (4). *Nous devons conclure que la machine ne pourra jamais s'amorcer elle-même par auto-excitation.*

Supposons maintenant que l'appareil reçoit d'une source extérieure du courant alternatif; soit

$$E = A \cos \omega t$$

la force électromotrice correspondante

et soit : $$i = B \cos(\omega t + h) + \Sigma C \cos \alpha t + \Sigma D \sin \alpha t$$

le courant correspondant ; le premier terme du second membre est celui qui a même période que la force électromotrice. On a alors :

$$j = \frac{B}{\omega} \sin(\omega t + h) + \Sigma \frac{C}{\alpha} \sin \alpha t - \Sigma \frac{D}{\alpha} \cos \alpha t$$

et la valeur moyenne de Ej est

$$[Ej] = \left[\frac{AB}{\omega} \cos \omega t \sin(\omega t + h)\right] = \frac{AB \sin h}{\omega}$$

les termes en αt ne donnant rien. Cette valeur moyenne doit être négative; donc $\sin h$ ne doit pas être nul, donc le courant et la force électromotrice sont toujours décalés l'un par rapport à l'autre.

Second théorème.

Supposons maintenant que l'on fournisse du dehors au système *exclusivement* du courant continu, c'est-à-dire que les E_p soient des constantes.

Supposons d'abord

$$S = \frac{1}{2} \Sigma R i^2 ; \qquad \frac{dS}{di_p} = R_p i_p.$$

En égalant les valeurs moyennes des deux membres de (1) on trouve :

$$[R_p i_p] = R_p [i_p] = [E_p] = E_p$$

puisque E_p et R_p sont des constantes. Cela donne la valeur moyenne de i_p.

Cela posé l'énergie moyenne fournie au système est :

$$\Sigma[E_p i_p] = \Sigma E_p [i_p] = \Sigma R_p [i_p]^2.$$

La chaleur de Joule produite est

$$\Sigma[R_p i_p^2] = \Sigma R_p [i_p^2].$$

Mais nous avons vu que la valeur moyenne du carré d'une fonction périodique est toujours plus grande que le carré de sa valeur moyenne, on a donc :

$$[i_p^2] > [i_p]^2.$$

La chaleur de Joule est donc toujours plus grande que l'énergie fournie (laquelle est d'ailleurs toujours positive).

Un appareil du genre de celui que nous étudions (c'est-à-dire sans collecteur) ***ne peut donc fonctionner comme moteur, si on ne lui fournit que du courant continu.***

Il pourrait au contraire fonctionner comme générateur ; c'est le cas d'un alternateur excité par un courant continu extérieur.

Si l'on n'avait pas $S = \frac{1}{2} \Sigma R i^2$, on n'aurait qu'à revenir aux variables normales en faisant le changement de variables indiqué plus haut.

Nous venons de voir que l'énergie fournie était toujours positive, ce qui montre que notre appareil ne peut non plus servir de générateur de courant continu.

Influence des aimants permanents.

Il est aisé de voir pourquoi les résultats précédents ne sont plus vrais quand il y a des aimants permanents.

Supposons que l'une des résistances R_p soit nulle, ainsi que la force électromotrice E_p correspondante. L'équation (1) se réduira alors à

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{di_p} = 0\,; \qquad \frac{dT}{di_p} = \text{const.}$$

mais nous n'aurons plus aucune raison de conclure que la valeur moyenne de i_p est nulle, si l'appareil ne reçoit du dehors que du courant alternatif.

Or, c'est précisément ce qui arrive dans le cas d'un aimant permanent. Les circuits d'Ampère qui constituent cet aimant peuvent être regardés comme des circuits dépourvus de résistance et dans lesquels n'agit aucune force électromotrice.

Influence des condensateurs.

Qu'arrive-t-il maintenant si le système comporte des condensateurs ou des capacités notables ? Alors si nous désignons par U l'énergie électrostatique emmagasinée dans ces condensateurs et par j la charge de l'un d'eux, la fonction U sera un polynôme du 2^d^ degré par rapport aux j. La dérivée $\frac{dj}{dt}$ représente alors le courant i. Nous devons donc distinguer deux sortes de circuits dans le système :

1° Ceux qui sont interrompus par des condensateurs ; le courant i_p qui y circule sera la dérivée

$$i_p = \frac{dj_p}{dt}$$

de la charge j_p du condensateur, et comme cette charge ne peut croître au delà de toute limite, il faut que la valeur moyenne de i_p soit nulle.

2° Les circuits fermés ; pour ceux-là il n'y a plus de raisons pour que la valeur moyenne de i_p soit nulle.

Quoi qu'il en soit, notre équation (1) va devenir :

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{di_0} + \frac{dU}{di_p} + \frac{dS}{di_p} = E_p. \tag{5}$$

Supposons que le système ne reçoive que du courant alternatif, c'est-à-dire que

$$[E_p] = 0.$$

Nous devons distinguer les équations (5) relatives aux circuits à condensateurs et les équations (5) relatives aux circuits fermés. Pour les premières, on a, comme on vient de le voir,

$$[i_p] = 0. \tag{6}$$

Pour les secondes on a $\frac{dU}{dj_p} = 0$; elles se ramènent donc à la forme (1) et on verrait comme plus haut que l'on doit avoir :

$$\left[\frac{dS}{di_p}\right] = 0. \tag{7}$$

Si les résistances sont invariables, les équations (7) sont des relations linéaires entre les $[i_p]$. Le nombre des équations (6) et (7) est égal à celui des circuits, nous avons donc autant d'équations linéaires entre les $[i_p]$ qu'il y a de $[i_p]$. On en conclut que toutes les valeurs moyennes $[i_p]$ sont nulles, ce qui permet de poser comme plus haut

$$i_p = \frac{dj_p}{dt}$$

même pour les circuits fermés.

Si nous ajoutons les équations (5) après les avoir multipliées par j_p il vient :

$$\Sigma j \frac{d}{dt}\frac{dT}{di} + \Sigma j \frac{dU}{dj} + \Sigma j \frac{dS}{di} = \Sigma E j \tag{8}$$

ou en prenant les valeurs moyennes :

$$-\Sigma\left[i\frac{dT}{di}\right] + \Sigma\left[j\frac{dU}{dj}\right] = \Sigma[Ej]$$

car on verrait comme plus haut que :

$$\Sigma\left[j\frac{d}{dt}\frac{dT}{di}\right] = -\Sigma\left[\frac{dj}{dt}\frac{dT}{di}\right] = -\Sigma\left[i\frac{dT}{di}\right]; \qquad \Sigma j\frac{dS}{di} = 0.$$

Il reste donc :

$$\Sigma[Ej] = 2[U - T].$$

Il peut donc y avoir concordance de phase entre la force électromotrice et le courant; ou bien encore il peut y avoir auto-excitation, pourvu que l'énergie électrostatique des condensateurs et l'énergie électrodynamique aient même valeur moyenne.

Il est clair que cette compensation ne se trouve réalisée que pour une seule vitesse.

Résistances variables et collecteurs.

Tous les raisonnements précédents supposent explicitement que les résistances sont constantes. Cela n'a plus lieu dès qu'il y a un collecteur. L'un des circuits sera alors formé par exemple par un circuit extérieur fixe, les balais, deux lames déterminées l et l' du collecteur et les spires de l'induit comprises entre ces deux lames. La résistance de ce circuit est constamment variable et elle devient infinie dès que les lames l et l' cessent d'être en contact avec les balais. Les lames suivantes l_1 et l'_1 viennent alors en contact avec les balais ; mais c'est alors un circuit entièrement différent qui entre en jeu ; il a pris la place du premier dans l'espace ; mais nous devons envisager chacun des circuits qui entrent ainsi successivement en jeu comme donnant naissance à une équation (1) distincte.

S'il y a par exemple $2n$ lames au collecteur et qu'on les désigne par l_0, l_1, l_2, ... si nous désignons par bb' le conducteur fixe compris entre les balais, et par $l_i l_{i+1}$ l'ensemble des spires de l'induit comprises entre les deux lames l_i et l_{i+1} ; si on convient de désigner arbitrairement une même lame par $l_p, l_{2n+p}, \ldots l_{4n+p}, \ldots l_{p-2n} \ldots$; nous aurons à envisager séparément les $4n$ circuits :

$$bl_i l_{i+n}, \ldots\ldots l_{i+n} b'b \qquad (9)$$

$$bl_i l_{i-1}, \ldots\ldots l_{i-n} b'b \qquad (10)$$

$$(i = 1, 2, \ldots\ldots, 2n)$$

et à écrire pour chacun d'eux une équation (1). Les deux circuits (9) et (10) ne seront d'ailleurs parcourus par un courant que pendant le temps où les lames l_i et $l_{i+n} = l_{i-n}$ seront en contact avec les balais b et b'. Pendant le reste du temps, l'intensité correspondante sera nulle et la résistance infinie. *Nos équations restent donc applicables, mais à la condition d'y regarder les résistances comme variables.*

Passons au cas de la roue de Barlow. A l'instant t, le courant va du centre O de la roue au point A de la circonférence qui se trouve en contact avec le frotteur B, puis il revient du frotteur B au centre O de la roue par la partie fixe du circuit ; le circuit total que nous appellerons C se compose donc de deux parties :

rayon OA + conducteur fixe BO.

A l'époque t', la roue a tourné, le point A n'est plus en contact avec le frotteur B, qui touche maintenant un autre point A′ de la circonférence. Le courant principal ne suit plus le circuit C, mais un nouveau circuit C′ comprenant :

rayon OA′ + conducteur fixe BO.

Ce nouveau circuit C′ doit être regardé comme distinct du circuit C et on doit lui appliquer une nouvelle équation (1). Mais qu'est devenu à l'époque t' le circuit C lui-même ? Il comprend maintenant trois parties :

rayon OA + arc de circonférence AA′ + conducteur fixe BO ;

car il doit rester formé des mêmes conducteurs matériels. Seulement sa résistance est devenue beaucoup plus grande.

Nous retrouvons donc le rôle des résistances variables, et nous pouvons dire que la roue de Barlow n'est autre chose qu'un collecteur à une infinité de lames.

Ce que nous venons de dire ne changera pas, si au lieu d'un frotteur fixe unique nous supposons un frotteur circulaire régnant tout le long de la roue de Barlow.

A l'instant t les points A_1, A_2, ... de la roue sont en contact avec les points B_1, B_2, ... du frotteur circulaire et les courants parcourent les circuits C_i comprenant

rayon OA_i + conducteur fixe B_iO

$$(i = 1, 2, \ldots\ldots).$$

A l'instant t' ce sont les points A_2, A_3, ... de la roue qui sont en contact avec les points B_1, B_2, ... du frotteur, les courants parcourent les circuits C'_i comprenant

rayon OA_{i+1} + conducteur fixe B_iO.

Ils sont distincts des C_i puisqu'ils ne sont pas formés des mêmes conducteurs matériels ; et quant aux circuits C_i eux-mêmes, ils sont devenus :

$$\text{rayon } OA_i + \text{arc de circonférence } A_iA_{i+1} + \text{conducteur fixe } B_iO$$

et leur résistance a augmenté.

Je précise, pour achever de définir la condition pour qu'un circuit puisse être regardé comme conservant son individualité et pour qu'on puisse lui appliquer une équation (1) qui lui appartienne en propre. Le nouveau circuit C_i se composera des molécules matérielles qui formaient le circuit C_i primitif, c'est-à-dire du rayon OA_i et du conducteur fixe B_iO, plus les parties de la roue qui sont, depuis l'instant t jusqu'à l'instant t', venues successivement en contact avec le frotteur B_i et qui sont représentées par l'arc A_iA_{i+1}.

On voit, dans ce court exposé, la raison des différences essentielles entre les propriétés des appareils sans collecteur, et celles des appareils à collecteur dont la roue de Barlow n'est en un sens qu'un cas particulier.

Henri POINCARÉ.

L'ÉLECTROLYSE DES MÉLANGES *(suite)* [1].

Tensions critiques de décomposition du mélange d'électrolytes. — Considérons tous les groupements possibles d'ions (+) et (—), en prenant successivement les groupements d'ions de tension croissante, et en s'arrêtant dès que tous les ions auront figuré dans ces groupements successifs de tensions croissantes. A ces groupements d'ions correspondent des composés chimiques, résultats de la saturation électrique de ces ions, et en état d'équilibre chimique avec eux, et qui *existent* par conséquent réellement dans la solution, avec une certaine concentration déterminée, $\frac{N}{V}$.

L'électrolyte complexe peut donc être considéré comme le mélange de plusieurs électrolytes élémentaires qui ne sont pas forcément ceux qui ont servi à le constituer, mais qui sont ceux à réaction le moins exothermique, en combinant la base de l'un à l'acide d'un autre, par exemple. Car on obtient le même électrolyte en mélangeant des solutions équivalentes de KCl et de SO^4Na^2, par exemple, ou des solutions de NaCl et de SO^4K^2.

Ne compliquons pas encore le phénomène par le passage du courant, c'est-à-dire par le déplacement des ions têtes de files, et appelons $\left(\frac{m}{V}\right)$ la concentration commune des ions correspondant au groupement de tension la plus basse. Ainsi qu'on l'a vu précédemment[2], l'équilibre chimique entre les ions et l'électrolyte non ionisé conduit à la relation :

$$v = a - b \times \log \frac{\left(\frac{k \times m \times \nu}{V}\right)^{\nu}}{k \times \left[\frac{N}{V} - \frac{m}{V}\right]},$$

v étant la tension de décomposition de l'électrolyte ; ν le nombre d'ions provenant d'une molécule d'électrolyte ; a, b et k, des constantes.

---

[1] *L'Éclairage Électrique*, t. L, 16 février 1907, p. 234.
[2] *L'Éclairage Électrique*, t. XLVIII, 21 janvier 1906, p. 94.