SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES CONVEXES*

PAR

HENRI POINCARÉ

§1. *Introduction.*

Dans mes *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* j'ai étudié les particularités des solutions du problème des trois corps et en particulier des solutions périodiques et asymptotiques. Il suffit de se reporter à ce que j'ai écrit à ce sujet pour comprendre l'extrême complexité de ce problème; à côté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. Il y aurait donc intérêt à étudier d'abord un problème où on rencontrerait cette difficulté principale, mais où on serait affranchi de toutes les difficultés secondaires. Ce problème est tout trouvé, c'est celui des lignes géodésiques d'une surface; c'est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique; d'abord il n'y a que deux degrés de liberté, et puis si l'on prend une surface sans point singulier, on n'a rien de comparable avec la difficulté que l'on rencontre dans les problèmes de dynamique aux points où la vitesse est nulle; dans le problème des lignes géodésiques en effet, la vitesse est constante et peut être regardée comme une des données de la question.

M. Hadamard l'a bien compris, et c'est ce qui l'a déterminé à étudier les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées; il a donné une solution complète de ce problème dans un memoire du plus haut intérêt. Mais ce n'est pas aux géodésiques des surfaces à courbures opposées que les trajectoires du problème des trois corps sont comparables, c'est au contraire aux géodésiques des surfaces convexes.

J'ai donc abordé l'étude des lignes géodésiques des surfaces convexes; malheureusement le problème est beaucoup plus difficile que celui qui a été résolu par M. Hadamard. J'ai donc dû me borner à quelques resultats partiels, relatifs surtout aux géodésiques fermées qui jouent ici le rôle des solutions périodiques du problème des trois corps.

* Presented to the Society at the St. Louis meeting, September 17, 1904. Received for publication January 4, 1905.

§ 2. *Foyers et caustiques.*

Soit S une surface *convexe, analytique;* supposons que ses deux rayons de courbure principaux restent constamment compris entre deux limites L_1 et L_2 et par conséquent sa courbure totale entre L_1^2 et L_2^2. Nous voyons d'abord que le rayon de courbure de l'une quelconque de ses géodésiques restera toujours compris entre L_1 et L_2. Je commence par rappeler les propriétés essentielles des *foyers* et des *caustiques.*

Soit O un point fixe de la surface S. Envisageons une géodésique OM passant par le point O, soit OH une autre géodésique fixe passant par ce même point O, soit v l'angle sous lequel ces deux géodésiques se coupent en O, soit u l'arc OM compté sur le géodésique. Ces deux quantités u et v peuvent être regardées comme des coordonnées définissant la position du point M sur la surface; ce sont, en quelque sorte, des coordonnées polaires, le point O jouant le rôle du pôle, et la géodésique OH celui de l'axe polaire. Le carré de l'élément d'arc sera de la forme

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2,$$

où λ est une fonction de u et de v.

Il est à remarquer qu'un point quelconque M de la surface correspond à une infinité de couples de valeurs des coordonnées u et v, et en effet il y a une infinité de manières d'aller de O en M en suivant une géodésique. Par exemple si S se réduit à une sphère de rayon 1, on a

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u \, . \, dv^2$$

et les couples de valeurs

$$(u, v), \ (u + 2\pi, v), \ (u + 4\pi, v), \cdots,$$

correspondent à un même point M.

Considérons deux géodésiques issues du point O et infiniment peu différentes, et supposons qu'elles se coupent de nouveau en un point M. Nous aurons pour le point d'intersection deux couples de valeurs des coordonnées et l'on obtiendra l'un ou l'autre suivant qu'on atteindra ce point M en suivant la première géodésique, ou bien en suivant la seconde qui en diffère fort peu. Comme ces deux géodésiques sont infiniment peu différentes, les deux couples de valeurs seront très peu différents, soit (u, v), et $(u + du, v + dv)$. Comme le point M représenté par ces deux couples est le même, on aura

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2 = 0,$$

soit

$$du = 0, \ \lambda = 0.$$

Si donc nous envisageons deux géodésiques infiniment voisines issues du point O, elles se recouperont successivement en une infinité de points d'après un théorème de M. HADAMARD et les points d'intersection successifs pourront être désignés par $F_1, F_2, \cdots, F_n$. Le point F_n est ordinairement appelé le $n^{\text{ème}}$ *foyer* du point O; on voit que F_p est le $(p-q)^{\text{ème}}$ foyer de F_q.

On appelle *caustique* l'enveloppe de toutes les géodésiques issues du point O; et on voit que la caustique est le lieu des foyers du point O. Cette caustique d'après ce qui précède a pour équation

$$\lambda = 0.$$

Considérons un instant v comme une constante, de façon à suivre constamment une des géodésiques issues de O, et désignons par λ', λ'', etc., les dérivées successives de λ par rapport à u. On sait que

$$-\frac{\lambda''}{\lambda}$$

représente la courbure totale de sorte que l'on a

$$\frac{1}{L_1^2} < -\frac{\lambda''}{\lambda} < \frac{1}{L_2^2}. \tag{1}$$

On conclut aisément de ces inéqualités:

1°. que λ, λ' et λ'' sont toujours finis.

2°. que les racines de l'équation $\lambda = 0$ sont séparées par celles de l'équation $\lambda' = 0$ et réciproquement.

3°. que si u_0 est une racine de l'equation $\lambda = 0$ et u_1 une racine de l'equation $\lambda' = 0$; si entre u_0 et u_1 il n'y a aucune racine ni de $\lambda = 0$, ni de $\lambda' = 0$, on aura les inégalités

$$\frac{\pi}{2} L_2 < |u_1 - u_0| < \frac{\pi}{2} L_1, \tag{2}$$

Si donc nous considérons u et v comme les coordonnées *polaires* d'un point dans un plan, et que nous construisions dans ce plan les courbes $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$, nous voyons que ces courbes se composent d'une série d'ovales fermées s'enveloppant mutuellement et enveloppant le pôle, de sorte que si l'on s'éloigne du pôle en suivant un rayon vecteur on rencontre alternativement une ovale appartenant à $\lambda = 0$ et une ovale de $\lambda' = 0$; la distance de deux ovales consécutives est comprise entre $\pi/2L_2$ et $\pi/2L_1$. On a d'ailleurs pour $u = 0$,

$$\lambda = 0, \ \lambda' = 1.$$

de sorte que l'on peut considérer le pôle comme l'une des ovales de la courbe $\lambda = 0$, cette ovale se réduisant à un seul point.

Les 1^{ers} foyers se trouvent sur la $1^{\text{ère}}$ ovale, les 2^{ds} foyers sur la 2^{de}, et ainsi de suite. On voit donc que les foyers des différents ordres sont entièrement séparés les uns des autres. C'est ce qui nous permet de définir la $n^{\text{ème}}$ *caustique* comme le lieu des $n^{\text{èmes}}$ *foyers*.

Nous appellerons P le plan sur lequel nous représentons ainsi les points de S, en prenant pour coordonnées polaires u et v. Dans ce plan, nous appellerons $C_1, C_2, \cdots$ les ovales successives de la courbe $\lambda = 0$, (C_0 se réduisant au pôle); nous appellerons $C'_1, C'_2, \cdots$, les ovales successives de la courbe $\lambda' = 0$. Dans le cas ou la surface S serait de révolution, le point O étant le pôle, λ ne dépendrait que de u et les ovales C et C' se réduiraient à des cercles concentriques. Soient x, y, z les coordonnées du point M et

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface S. Les équations d'une ligne géodésique peuvent s'écrire

$$\frac{d^2x}{du^2} = \mu \frac{dF}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{du^2} = \mu \frac{dF}{dy}, \qquad \frac{d^2z}{du^2} = \mu \frac{dF}{dz}, \tag{3}$$

μ étant déterminé par l'équation

$$\Sigma \frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + 2\Sigma \frac{d^2F}{dxdy}\frac{dx}{du}\frac{dy}{du} + \mu\Sigma\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Les valeurs initiales de x, y, z seront les coordonnées du point O; quant aux valeurs initiales de dx/du, dy/du, dz/du, elles dépendront linéairement de cos v et sin v.

Les équations différentielles (3), (4) ne peuvent admettre de point singulier réel; elles n'en admettraient en effet que si μ devenait infini, c'est à dire si $\Sigma(dF/dx)^2$ s'annulait, c'est à dire si l'on avait à la fois

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dz} = 0,$$

c'est à dire si la surface S avait un point singulier, ce qui n'est pas. Nous sommes donc certain que la solution envisagée de nos équations différentielles n'ira passer par aucun point singulier. Je puis donc lui appliquer le théorème que j'ai démontré aux Nos. 23 à 28 du Tome 1$^{\text{er}}$ de *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.* Il en résulte que x, y et z sont des fonctions holomorphes de u et des valeurs initiales, et par conséquent de u et de v; je veux dire que x, y, z sont developpables suivant les puissances de $u - u_0$, $v - v_0$, pourvu que $|u - u_0|$ et $|v - v_0|$ soient assez petits et cela quelles que soient les valeurs de u_0 et v_0.

Revenons à nos caustiques; soient Q_1 et Q_2 deux points d'une caustique entre lesquels nous supposerons qu'il n'y ait aucun point singulier. Quelle sera (sur le surface S) l'arc de caustique compris entre ces deux points? Si u_1 et u_2 sont les valeurs de u correspondant à ces deux points; cet arc est

$$|u_1 - u_2|.$$

On le verrait par un raisonnement tout pareil à celui qui donne l'arc de la développée d'une courbe plane.

L'élément d'arc de caustique est donc égal à du.

Reprenons les deux géodésiques infiniment voisines issues du point O et correspondant aux angles v et $v + dv$. La distance d'un point de la 1ère géodésique à la 2de sera évidemment λdv; quand on approchera d'un foyer, cette distance tendra vers 0 puisque λ tendra vers 0, les deux géodésiques se recouperont sous un angle $\lambda' dv$. L'angle de contingence géodésique de la caustique est donc $\lambda' dv$. La courbure géodésique de la caustique est donc

$$\frac{\left(\dfrac{d\lambda}{du}\right)^2}{\left(\dfrac{d\gamma}{dv}\right)}.$$

Cela posé reprenons l'équation $\lambda = 0$; en aucun point on ne pourra avoir $\lambda' = 0$: les deux courbes $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$ ne peuvent se couper, puisque la distance des deux ovales C et C' est au moins égale à $\pi/2L_2$; donc l'équation $\lambda = 0$ peut être résolue par rapport à u, et u est une fonction holomorphe de v. Comme x, y, z sont fonctions holomorphes de u et de v, nous voyons que *dans l'équation de la caustique les coordonnées* x, y, z *sont des fonctions holomorphes de* v.

Toutes les fois que $d\lambda/dv$ n'est pas nul, l'équation $\lambda = 0$ peut être résolue par rapport à v, et v est fonction holomorphe de u. *Les coordonnées d'un point de la caustique sont donc des fonctions holomorphes de l'arc* u. Tous les points singuliers de notre caustique nous seront donc donnés par l'équation $d\lambda/dv = 0$. J'ajoute que la courbure géodésique de la caustique ne peut pas s'annuler ni changer de signe, puisque $d\lambda/du$ ne peut s'annuler. Il n'y a donc rien qui corresponde à une sorte de point d'inflexion.

Les points singuliers de la caustique correspondent donc aux racines de l'équation $d\lambda/dv = 0$, c'est à dire aux minima de u quand on décrit l'une des ovales C dans le plan P.

Pour nous rendre compte de la nature de ces points singuliers prenons un instant pour origine le point singulier, pour plan des xy le plan tangent, pour axe des x la tangente à la courbe, et choisissons l'origine de l'angle v de façon que $v = 0$ au point singulier. Alors x et y sont développables suivant les puissances de v, le 1er terme du développement est en v^m pour x, en v^n pour y; et les entiers m et n satisfont à l'inégalite

$$m < n.$$

Si λ s'annule ainsi que ses p premières dérivées par rapport à v et que la

$(p+1)^{\text{ème}}$ ne s'annule pas, comme d'ailleurs $d\lambda/du$ ne s'annule pas ; on voit que le développement de u commence par un terme en v^{p+1}. On aura donc

$$m = p + 1.$$

D'autre part $d\lambda/dv$ commence par un terme en v^p de sorte que pour un point très voisin du point singulier, la courbure géodésique est de l'ordre de v^{-p}.

Or cette courbure a pour expression

$$\frac{\dfrac{dx}{dv}\dfrac{d^2y}{dv^2} - \dfrac{dy}{dv}\dfrac{d^2x}{dv^2}}{\left[\left(\dfrac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dv}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}};$$

elle est donc de l'ordre de

$$m + n - 3 - 3(m-1) = n - 2m.$$

On a donc

$$n - 2m = -p,$$

d'où finalement

$$m = p + 1, \qquad n = p + 2.$$

Le cas le plus simple est celui de

$$p = 1, \qquad m = 2, \qquad n = 3;$$

le point singulier est alors un point de rebroussement ordinaire.

Ces points de rebroussement correspondent aux maxima et aux minima de u, mais les deux cas doivent être distingués. S'il s'agit d'un minimum, et si R est le point de rebroussement en question, les deux branches de la caustique touchent non la géodésique OR, mais son prolongement ; s'il s'agit d'un maximum, les deux branches de la caustique sont dirigées de R vers O.

Nous sommes ainsi amenés à distinguer 4 sortes de foyers.

1°. Les *foyers ordinaires*, correspondant aux points non singuliers de la caustique ($p = 0$).

2°. Les *foyers en pointe*, correspondant aux points de rebroussement ordinaires ($p = 1$), qui sont des minima de u.

3°. Les *foyers en talon*, correspondant aux points de rebroussement ordinaires, ($p = 1$) qui sont des maxima de u.

Ces deux expressions sont empruntées à l'art des chemins de fer ; je me représente une trifurcation, où nous avons la voie principale représenté par la géodésique OR et deux embranchements représentés par les deux branches de la caustique ; un train qui suivrait la ligne principale en allant de O vers R rencontrerait les aiguilles en pointe dans le 1$^{\text{er}}$ cas et en talon dans le 2$^{\text{d}}$.

4°. Les *foyers singuliers*, correspondant aux points singuliers d'ordre plus élevé ($p > 1$). On voit pour ce qui précède que ces points singuliers rentrent dans tous les cas dans une classe très particulier.

Nous introduisons maintenant la notion de *ligne de partage.* Supposons que l'on joigne chaque point de la surface S au point O par le plus court chemin. Ce plus court chemin sera un arc de géodésique. Si $OAPM$ est le plus court chemin de O à M; si le point P est situé sur l'arc $OAPM$, l'arc OAP sera manifestement le plus court chemin de O à P. Il suit de là que le plus court chemin de O à M ne peut jamais croiser le plus court chemin de O à M'.

Soit OM une géodésique quelconque passant par O; on pourra trouver sur cette géodésique un point P, tel que le plus court chemin de O à un point Q situé sur la géodésique OM entre O et P, soit précisément l'arc OQ de cette géodésique OM, mais que cela ne soit plus vrai si le point Q est au delà de P. On dit alors que P est *l'extrémité* du plus court chemin OP.

Nous pouvons alors conclure que par tout point de S passe un plus court chemin et un seul. Il y a exception pour les extrémités des divers plus courts chemins; si P est l'une de ces extrémités; du point P partiront *au moins deux* plus courts chemins qui auront l'un et l'autre leur extrémités en P. Tous les plus courts chemins qui ont leur extrémité en P ont même longueur.

Le lieu des points qui sont les extrémités de deux on plusieurs plus courts chemins forment un ensemble de lignes que l'on peut appeler *lignes de partage*, Si un point P partent seulement deux plus courts chemins, par le point P passe une seule ligne de partage dont la tangent est la bissectrice de l'angle formé par les tangentes aux deux plus courts chemins.

Si du point P partent plus de deux plus courts chemins, au point P aboutissent plusieurs lignes de partage, dont les tangentes sont les bissectrices des angles formés par les tangentes à deux plus courts chemins consécutifs.

L'ensemble des lignes de partage ne divise pas la surface S en deux régions, puisque l'on peut aller du point O à un point quelconque M de la surface sans traverser aucune ligne de partage; il suffit pour cela d'aller de O en M par le plus court chemin.

L'ensemble des lignes de partage, ou une partie de ces lignes, ne peut donc jamais constituer un polygone fermé; il formera une sorte de *système rameux.* où les bifurcations seront représentées par les points où aboutissent plus de deux plus courts chemins. Que représenteront alors les extrémités des rameaux? Supposons que nous suivions une ligne de partage PQR et que le point R soit l'extrémité de cette ligne. Du point Q partiront deux plus courts chemins de même longueur; quand le point Q ira de P en R, ces deux plus courts chemins varieront d'une manière continue. Au point R ils devront se confondre en un seul.

Il est aisé de voir que les points R sont les seuls points des lignes de partage qui se trouvent sur la 1$^{\text{ère}}$ caustique; (je veux dire bien entendu qu'en aucun autre point d'une ligne de partage, l'un des plus courts chemin qui y'aboutissent ne touche la 1[ère] caustique). On voit d'ailleurs que ces points R ne peuvent être des foyers ordinaires, mais seulement des foyers en pointe.

§ 3. *Géodésiques d'un sphéroïde.*

Cherchons les géodésiques d'une surface très peu différente d'une sphère; nous n'aurons pour cela qu'à appliquer la méthode de la variation des constantes de LAGRANGE. Sur la sphère, les lignes géodésiques sont les grands cercles et l'on peut adopter comme éléments définissant le mouvement d'un point sur ce grand cercle de la même manière que les éléments elliptiques définissent le mouvement Képlerien d'une planète, les quatre quantités suivantes: les coordonnées du pôle du grand cercle, la vitesse uniforme du mouvement ou une fonction de cette vitesse, la longitude du point mobile sur ce grand cercle, comptée à partir d'une certaine origine. Mais il convient d'abord de mettre les équations sous la forme canonique. Si nous mettons l'élément linéaire d'une surface quelconque sous la forme

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

on aura pour l'expression T de la demi-force vive qui figure dans les équations de Lagrange ou de Hamilton

$$T = \tfrac{1}{2}(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2),$$

d'où

$$U = \frac{dT}{du'} = Eu' + Fv',$$

$$V = \frac{dT}{dv'} = Fu' + Gv',$$

et

$$T = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}U^2 + 2\mathfrak{F}UV + \mathfrak{G}V^2),$$

où $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ ont des valeurs faciles à calculer. Dans la cas de la sphère on a simplement

$$T = \tfrac{1}{2}(u'^2 + \sin^2 u \cdot v'^2),$$

d'où

$$T = \tfrac{1}{2}\left(U^2 + \frac{1}{\sin^2 u} V^2\right).$$

Dans le cas d'une surface très peu différente de la sphère, on aura

$$T = T_0 + \mu T_1,$$

où

$$T_0 = \tfrac{1}{2}\left(U^2 + \frac{1}{\sin^2 u} V^2\right),$$

où μ sera très petit et où

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(eU^2 + 2fUV + gV^2)$$

e, f et g étant des fonctions quelconques de u et de v.

Formons l'équation de Jacobi.

Supposons d'abord $\mu = 0$ de façon que notre sphéroïde se réduise à une sphère.

Soit θ la longitude du noeud de l'orbite circulaire décrite par le point sur la sphère, sur le plan de l'équateur; soit i l'inclinaison de cette orbite; soit λ la longitude du point mobile sur la sphère comptée à partir du noeud; soit ω la vitesse de circulation; (le rayon de la sphère est pris pour unité ainsi que la masse du point mobile); alors la demi-force vive sera $\omega^2/2$; la constante des aires sera ω dans le plan de l'orbite et $\omega \cos i$ dans le plan de l'equateur.

Il est aisé d'exprimer u, v, U, V en fonctions de $\theta, \lambda, i, \omega$, et on verrait comme en mécanique céleste que, en posant $G = \omega \cos i$,

$$\omega d\lambda + G d\theta - U du - V dv$$

est une differentielle exacte.

Si nous ne supposons plus $\mu = 0$, nous pourrons toujours considérer des variables nouvelles $\theta, \lambda, i, \omega$, liées à u, v, U et V par les mêmes relations que dans le cas de la sphère et que nous considérerons comme "les éléments de l'orbite osculatrice." Les équations conservent alors leur forme canonique et peuvent s'écrire

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{dT}{d\omega}, \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{dT}{d\lambda}, \qquad \frac{dG}{dt} = -\frac{dT}{d\theta}, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dG}.$$

Quelle est la forme de T? Observons d' abord que $T_0 = \omega^2/2$. Remarquons en outre que $u, v, u'/\omega, v'/\omega, U/\omega, V/\omega$ et par conséquent T/ω^2 ne dépendent que de i, λ, θ. Posons donc

$$\omega t = \tau, \quad T = \omega^2 S, \quad T_0 = \omega^2 S_0, \quad T_1 = \omega^2 S_1;$$

nos équations deviendront

$$\frac{d\omega}{\omega d\tau} = -\frac{dS}{d\lambda}, \qquad \frac{di}{d\tau}\sin i = \frac{dS}{d\theta} - \frac{dS}{d\lambda}\cos i,$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = 2S + \frac{dS}{di}\operatorname{cotg} i, \qquad \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{\sin i}\frac{dS}{di},$$

qui admettent comme il convient l'intégrale $\omega^2 S = \text{const.}$

Comme S_0 se réduit à $1/2$ nous pouvons écrire

$$\frac{di}{d\tau} = \frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{d\theta} - \mu \operatorname{cotg} i \frac{dS_1}{d\lambda}, \qquad \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{di},$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = 1 + 2\mu S_1 + \mu \operatorname{cotg} i \frac{dS_1}{di}.$$

Comme μ est très petit, nous pouvons dans les seconds membres remplacer les inconnus par leurs valeurs approchées qui sont celles qui correspondent au cas de la sphère ; c'est à dire des valeurs constantes pour i et θ, pour λ, la valeur approchée $\tau +$ const.

Au point de vue qui nous occupe, il sera d'ailleurs préférable de prendre λ pour variable indépendante et d'écrire

$$\frac{di}{d\lambda} = \frac{\dfrac{\mu}{\sin i}\dfrac{dS_1}{d\theta} - \mu \operatorname{cotg} i \dfrac{dS_1}{d\lambda}}{1 + 2\mu S_1 + \mu \operatorname{cotg} i \dfrac{dS_1}{di}},$$

ou en négligeant μ^2,

$$(1) \qquad \frac{di}{d\lambda} = \frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{d\theta} - \mu \operatorname{cotg} i \frac{dS_1}{d\lambda},$$

et de même

$$(2) \qquad \frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{\mu}{\sin i}\frac{dS_1}{di}.$$

Dans les 2[ds] membres, on conservera alors λ et on remplacera i et θ par leurs valeurs approchées qui sont des constantes.

Rendons-nous compte de la signification géométrique de cette fonction S_1; comment d'abord ferons-nous correspondre les points du sphéroïde à ceux de la sphère ? Le choix de cette correspondance est arbitraire dans une assez large mesure. Le plus simple est de faire correspondre les points où le plan tangent a même direction, c'est adopter ce qu'on appelle la représentation sphérique des surfaces. Dans ces conditions, si l'on veut me permettre le langage de la Géodésie, u et v représenteront, sur le sphéroïde la colatitude et la longitude *astronomiques*.

Considérons alors sur le sphéroïde deux points infiniment voisins M et M', et sur la sphère les deux points correspondants M_1 et M'_1. Soient u et v les coordonnées de M (ou de M_1); soient $u + u'dt$, $v + v'dt$ celles de M' (ou de M'_1). Soit ds l'arc MM' et ds_1 l'arc $M_1M'_1$, nous voyons que le rapport ds/ds_1 depend non-seulement de la position du point M, mais de l'orientation de l'arc MM'; lorsque cet arc appartient à une ligne de courbure, il n'est pas autre chose que le rayon de courbure principal correspondant.

Si M et M' représentent deux positions d'un point mobile sur le sphéroïde aux instants t et $t + dt$, on aura pour l'énergie cinétique

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Il est manifeste que les deux couples de points MM' et $M_1M'_1$ correspondent aux mêmes valeurs de u, v, u', v'; mais ils ne correspondent pas aux mêmes valeurs de u, v, U, V, ni par conséquent de i, θ, ω, λ; car la relation qui lie U et V à u, v, u', v', n'est pas la même pour $\mu = 0$ c'est à dire pour la sphère, et pour $\mu > 0$, c'est à dire pour le sphéroïde. Soit alors sur la sphère un couple de points infiniment voisins $M_1 M'_2$, choisis de façon à correspondre aux mêmes valeurs de u, v, U, V (ou de i, θ, ω, λ) que le couple de points MM' du sphéroïde.

Soient alors u et v les coordonnées du point M_1, $u + u'_0 dt$, $v + v'_0 dt$ celles du point M'_2; soit ds_2 l'arc $M_1 M'_2$. Alors i et θ désigneront la colatitude et la longitude du pôle du grand cercle qui passe par M_1 et M'_2; λ sera l'arc de ce grand cercle compris entre le point M_1 et l'équateur, et on aura enfin

$$M_1 M'_2 = ds_2 = \omega dt.$$

Soit

$$T_0 = \tfrac{1}{2}(u'^2 + v'^2 \sin^2 u),$$

$$T'_0 = \tfrac{1}{2}(u_0'^2 + v_0'^2 \sin^2 u),$$

on aura évidemment,

$$T_0 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2, \qquad T'_0 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{ds_2}{dt}\right)^2 = \frac{\omega^2}{2}.$$

Si nous désignons de même par T'_1 ce que devient T_1 quand on y remplace u' et v' par u'_0 et v'_0, la différence $T'_1 - T_1$ sera de l'ordre de μ de même que $dT'_1/du'_0 - dT_1/du'$. Comme U et V doivent avoir même valeur pour le couple MM' sur la sphère et pour le couple $M_1 M'_1$ sur le sphéroïde, on aura

$$U = \frac{dT'_0}{du'_0} = \frac{dT}{du'},$$

$$V = \frac{dT'_0}{dv'_0} = \frac{dT}{dv'},$$

d'où en négligeant μ^2

$$\frac{dT'_0}{du'_0} = \frac{dT_0}{du'} + \mu \frac{dT'_1}{du'_0},$$

$$\frac{dT'_0}{dv'_0} = \frac{dT_0}{dv'} + \mu \frac{dT'_1}{dv'_0}.$$

Je multiplie la 1ère par u'_0; la 2de par v'_0 et j'ajoute; j'obtiens alors par les propriétés des formes quadratiques,

$$\Sigma u'_0 \frac{dT'_0}{du'_0} = \Sigma u'_0 \frac{dT_0}{du'} + \mu \Sigma u'_0 \frac{dT'_1}{du'_0} = u' \frac{dT'_0}{du'_0} + 2\mu T'_1,$$

d'où

$$\Sigma (u'_0 - u') \frac{dT'_0}{du'_0} = 2\mu T'_1.$$

D'autre part, nous pouvons développer T_0 par la formule de Taylor suivant les puissances croissantes de $u' - u'_0$, $v' - v'_0$; nous avons alors en négligeant μ^2, c'est à dire en négligeant les termes du 2d ordre,

$$T_0 = T'_0 + \Sigma \frac{dT'_0}{du'_0}(u' - u'_0) = \frac{\omega^2}{2} \cdot 2\mu T'_1,$$

ou toujours en négligeant μ^2,

$$T_0 = \frac{\omega^2}{2} - 2\mu T_1,$$

d'où

$$T = \frac{\omega^2}{2} - \mu T_1.$$

Des deux relations

$$T = T_0' - \mu T_1, \qquad T = T_0 + \mu T_1$$

on tire d'abord

$$2T = T_0 + T_0',$$

c'est à dire

$$2ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2,$$

ou en négligeant μ^2,

$$2ds = ds_1 + ds_2.$$

Ce que nous appelons S_1, c'est le rapport $(T - \omega^2)/\mu\omega^2$, c'est à dire

$$(ds^2 - ds_2^2)/\mu ds_2^2,$$

ou en négligeant les puissances supérieures de μ

$$S_1 = \frac{ds_1^2 - ds^2}{\mu ds^2} = \frac{2}{\mu}\frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{2}{\mu}\frac{ds_1 - ds}{ds_1}.$$

Telle est la signification géométrique de S_1.

Reprenons maintenant les équations (1) et (2). Les 2[ds] membres sont des fonctions périodiques de λ. Pour que i et θ soient également des fonctions périodiques de λ, c'est à dire pour que la géodésique soit fermée il faut et il suffit que la *valeur moyenne* de ce 2[d] membre, considéré comme fonction périodique de λ, soit nulle.

Quelle est cette valeur moyenne? Développons S_1 suivant les cosinus et les sinus des multiples de λ et soit R la valeur moyenne de S_1, c'est à dire l'ensemble des termes indépendants de λ. Il est clair que dR/di sera la valeur moyenne de ds_1/di, et $dR/d\theta$ celle de $dS_1/d\theta$. Quant à la valeur moyenne de $dS_1/d\lambda$, elle sera nulle.

Pour que les valeurs moyennes de nos 2[ds] membres soient nulles, il faut donc et il suffit que

$$\frac{dQ}{di} = \frac{dR}{d\theta} = 0.$$

Les géodésiques fermées répondront donc aux maxima, aux minima, et aux minimax de la fonction R. A l'exemple des Anglais, j'appelle minimax les points où s'annulent les dérivées du 1[er] ordre d'une fonction de deux variables sans qu'on ait ni maximum, ni minimum.

Il faut d'abord rechercher la signification géométrique de la fonction R. Si nous donnons à i et à θ des valeurs constantes et que nous fassions varier λ, comment variera le point M. Le point M_1 décrira sur la sphère un grand cercle, le plan tangent au point M restera donc parallèle à une droite D dont la direction est définie par la colatitude i et la longitude θ. Construisons un cylindre circonscrit au sphéroïde et dont les génératrices sont parallèles à D; il touche le sphéroïde suivant une courbe fermée C. *Le point M restera sur cette courbe C.* Cette courbe C sera ce qu'on pourrait appeler, dans le langage de la géodésie, un grand cercle astronomique.

On a alors

$$R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_1\, d\lambda.$$

Soient M, M' deux points infiniment voisins de la courbe C, soit M_1, M_1' les deux points correspondants de la sphère. Soit comme plus haut

$$MM' = ds, \qquad M_1 M_1' = ds_1.$$

On aura $ds_1 = d\lambda$ et

$$S_1 = \frac{2}{\mu}\frac{ds_1 - ds}{ds_1},$$

d'où

$$R = \frac{1}{2\pi}\int \frac{2}{\mu}\frac{ds_1 - ds}{d\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{\pi\mu}(s_1 - s).$$

Ici $s_1 = 2\pi$ est la longueur totale du grand cercle de la sphère, et s est la longueur totale de la courbe C.

Ainsi les maxima, minima et minimax de R correspondent aux minima, maxima et minimax de la longueur totale des courbes C.

Considérons sur la sphère le grand cercle qui correspond à une courbe C, soient P et P' les deux pôles de ce grand cercle; la colatitude et la longitude du point P sont i et θ; et R est une fonction de i et de θ. Remarquons d'abord que cette fonction a même valeur aux deux points diamétralement opposés P et P'. Construisons les courbes $R =$ const., c'est à dire les courbes qui joignent les différents points P où la fonction R a la même valeur. Nous aurons une série de courbes telles que par chaque point de la sphère passe une de ces courbes et une seule. Aux minima et aux maxima de R correspondent des points isolés de ces courbes, aux minimax des points doubles à tangentes réelles. Un théorème d'Analysis Situs nous apprend que le nombre total des minima et des maxima, c'est à dire des points isolés, surpasse de 2 unités celui des minimax, c'est à dire des points doubles. Je me bornerai à renvoyer à ce sujet à mon mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles (Journal de Liouville, sér. 3, tome 7).

Le nombre total des minima, maxima et minimax est donc un multiple de 4, plus 2. Mais à chaque courbe C correspondent deux pôles P et P' diamétralement opposés, donc à chaque géodésique fermée correspondent *deux* minima, maxima ou minimax. *Le nombre total des géodésiques fermées est donc impair*, puisque c'est la moitié du nombre total des minima, maxima et minimax.

Il ne s'agit bien entendu ici que des géodésiques fermées qui subsistent *quelque petit que soit* μ. Il peut y en avoir et il y en a une infinité d'autres. Une question reste à traiter. L'existence des géodésiques fermées dont nous venons de parler à été établie par un calcul approximatif puisque nous avons négligé μ^2. Cette existence peut-elle être démontrée rigoureusement? Ou plutôt cette démonstration rigoureuse ne peut elle pas se tirer directement de notre calcul approximatif? Oui, cela peut se faire et par un procédé connu; on n'a qu'à appliquer les principes exposés dans le Chapitre 3 du Tome 1 de mon ouvrage, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.*

§ 4. *Le principe de continuité analytique.*

Soient S et S' deux surfaces quelconques satisfaisant aux conditions que nous nous sommes imposées dans les paragraphes précédents et que j' appellerai pour abréger les conditions A. *On peut toujours passer de l'une à l'autre d'une manière continue.* Je veux dire que l'on peut supposer une surface variable Σ qui ayant pour équation générale

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

où le 1^er^ membre F est une fonction *analytique* des coordonnées x, y, z et d'un paramètre variable t (qui restera analytique au moins pour tous les systèmes de valeurs de x, y, z, t, tels que 1°. t soit compris entre 0 et 1; 2°. x, y, z soient réels 3°. F soit nul.) et de telle façon: 1°. Que cette surface Σ se réduit à S pour $t = 0$ et à S' pour $t = 1$; 2°. Que quand t varie d'une manière continue depuis 0 jusqu'à 1, cette surface Σ ne cesse jamais de satisfaire aux conditions A.

Ainsi la surface Σ quand t variera d'une manière continue entre 0 et 1, restera convexe et analytique, ses rayons de courbure restent compris entre des limites déterminées. Considérons sur cette surface variable Σ une ligne géodésique satisfaisant à une certaine condition, par exemple à celle d'être fermée. Soit $y = \phi(x)$, $z = \psi(x)$ l'équation de cette géodésique. Définissons cette géodésique, par les données initiales; appelons par exemple y_0 et z_0 les valeurs de y et de z pour $x = 0$, de sorte que

$$y_0 = \phi(0), \qquad z_0 = \psi(0).$$

Soient de même y_0', z_0' les valeurs initiales de dy/dx et dz/dx, de telle façon que

$$y_0' = \phi'(0), \qquad z_0' = \psi'(0).$$

Ces données initiales y_0, z_0, y_0', z_0' suffisent pour distinguer notre géodésique de toutes les autres géodésiques tracées sur la surface Σ.

Cela posé, si nous écrivons que cette géodésique est fermée, nous obtiendrons entre y_0, z_0, y'_0, z'_0 certaines relations qui seront analytiques. Donc y_0, z_0, y'_0, z'_0 sont liés à t par des relations analytiques; si nous considérons y_0, z_0, y'_0, z'_0, t comme les coordonnées d'un point dans l'espace à 5 dimensions, ces relations définiront une certaine courbe analytique que j'appelle C. Nous envisagerons une branche de cette courbe analytique que j'appelle B. Il est aisé de définir cette branche et de la distinguer des autres par continuité. Dans le voisinage de $t = t_0$, les quantités y_0, y'_0, z_0, z'_0 sont susceptibles d'un ou de plusieurs développements et chacun de ces développements procède suivant les puissances de $(t - t_0)^{1/q}$; la branche B se composera de tous les points réels de la courbe C qui correspondent à l'un de ces développements; quand le développement ne sera plus valable, on la poursuivra par le procédé de la continuation analytique. Si q est impair, cette branche comprendra un point et un seul, tant pour $t = t_0 - e$ que pour $t = t_0 + e$; si q est pair, elle comprendra deux points pour $t = t_0 - e$ et zéro pour $t = t_0 + e$; ou inversement.

Nous dirons que les différentes géodésiques fermées qui appartiennent aux différents points d'une même branche B font partie d'une même *série continue*.

Considérons les différents géodésiques fermées d'une même série continue qui appartiennent à une même surface Σ. Elles correspondent aux points d'intersection de la branche B avec le plan $t = t_0$. Le nombre de ces points ne peut varier que quand t_0 prend une valeur telle que le nombre que nous appelions plus haut q soit pair. Dans ce cas, ce nombre varie de deux unités. D'où cette conséquence:

Le nombre des géodésiques d'une surface Σ qui font partie de une, deux ou plusieurs séries continues déterminées est constamment pair ou constamment impair.

Examinons maintenant les différentes sortes de courbes fermées que l'on peut tracer sur une surface convexe. Ces courbes au point de vue de l'Analysis Situs se répartiront en une infinité de *types* caractérisés par le nombre et la disposition des points doubles.

Considérons une série continue de géodésiques fermées; elles pourront appartenir à différents types; comment pourront elles passer d'une type à l'autre? D'abord *elles ne pourront jamais avoir de point de rebroussement;* car les géodésiques des surfaces satisfaisant aux conditions A n'ont aucun point singulier. Ensuite, il ne pourra jamais arriver que deux branches de cette géodésique viennent à se toucher. Car deux géodésiques ne peuvent se toucher sans se confondre, attendu qu'un point et la tangente en ce point sur une surface convexe détermine complètement une géodésique.

Il résulte de là que *dans une même série continue, le nombre des points doubles d'une géodésique fermée demeure constant.* Ce nombre en effet, pourrait varier de deux manières: 1°. Si un point double à tangentes réelles devenait un point isolé à tangentes imaginaires, mais alors il faudrait passer par un point de rebroussement. 2°. Si deux points doubles réels devenaient imaginaires conjugués, mais alors il faudrait qu'au moment du passage, deux branches de courbe vinssent à se toucher.

Nous venons de voir que tout cela est impossible; un seul point reste à éclaircir. J'ai dit que deux géodésiques ne peuvent se toucher *à moins de se confondre*. Ne serait il pas possible que pour certaines valeurs de t, la géodésique fermée que nous envisageons *dégénère* parce que deux de ses parties se confondraient entre elles? Il est clair que cela est possible. Une courbe fermée d'un certain type, peut se réduire en dégénérant à une courbe fermée d'un autre type parcourue plusieurs fois. C'est ainsi qu'un limaçon de Pascal, peut, à la limite, se réduire à un cercle parcouru deux fois. Il n'y a pas de raison pour que cela n'arrive pas pour les géodésiques et en fait cela arrive.

Si une courbe fermée du type T, peut dégénérer en une courbe fermée du type T' parcourue plusieurs fois, nous dirons que le type T' est *subordonné* au type T.

Supposons donc que nous considérions une série continue de géodésiques fermées correspondant à la branche de courbe B définie plus haut; que M, M', M'' soient 3 points infiniment voisins de cette branche, que M' soit entre M et M'', qu'en M la géodésique appartienne an type T; qu'en M' elle se réduise à une courbe fermée du type T' parcourue plusieurs fois; qu'en M'' elle appartienne an type T'', qui pourra être d'ailleurs identique à T. Le type T' est ainsi subordonné tant à T qu'à T''. Quand on passera de M en M'' on peut se demander si le nombre des points doubles a varié.

Soit t_0 la valeur de t qui correspond an point M'; nous poserons $\tau = (t - t_0)^{1/q}$ en choisissant l'entier q de façon que y_0, z_0, y'_0, z'_0 soient développables suivant les puissances de τ. Considérons l'un des points doubles de notre géodésique, quand t tend vers t_0, ce point se rapprochera d'un certain point D de la géodésique singulière du type T'. Prenons ce point pour origine et choisissons les axes de facon que le plan des yz ne soit tangent à aucune des branches de géodésique qui passent par ce point. Dans ces conditions, nous pourrons mettre les équations d'une quelconque de nos branches de géodésique sous la forme suivante; y et z seront développables suivant les puissances de x et de τ. Considérons deux de ces branches et soient

$$y = \Sigma\tau^m \phi_m(x), \qquad z = \Sigma\tau^m \psi_m(x),$$
$$y = \Sigma\tau^m \phi'_m(x), \qquad z = \Sigma\tau^m \psi'_m(x),$$

leurs équations. Je suppose que ces deux branches se confondent pour $\tau = 0$, on a donc

$$\phi_0(x) = \phi'_0(x), \qquad \psi_0(x) = \psi'_0(x).$$

Cherchons les points doubles, c'est à dire les points d'intersection de nos deux branches. Ils nous seront donnés par l'équation

$$\Sigma\tau^m[\phi_m(x)-\phi'_m(x)]=0$$

(laquelle entraîne d'ailleurs l'autre équation

$$\Sigma\tau^m[\psi_m(x)-\psi'_m(x)]=0$$

en tenant compte de l'équation de la surface Σ).

Soit $\phi_p(x)-\phi'_p(x)$ le premier des coefficients $\phi_m(x)-\phi'_m(x)$ qui ne s'annule pas identiquement; quand τ tendra vers zero, les points doubles tendront vers des limites, qui seront les solutions de l'équation

$$\phi_p(x)-\phi'_p(x)=0.$$

Par l'hypothèse le point $x=0$ est une de ces limites; on a donc

$$\phi_p(0)-\phi'_p(0)=0.$$

Nos points doubles sont alors donnés par l'équation

$$\Sigma\tau^{m-p}[\phi_m(x)-\phi'_m(x)]=0$$

dont le 1[er] membre, développable suivant les puissances de x et de τ, s'annule pour $x=\tau=0$; on peut en tirer x développé suivant les puissances de τ ce qui prouve que x reste réel aussi bien pour $\tau>0$ que pour $\tau<0$, et par conséquent qu'un point double réel, par exemple au point M, ne peut devenir imaginaire au point M'.

Il n'y aurait d'exception que si la dérivée

$$\frac{d}{dx}[\phi_p(x)-\phi'_p(x)]$$

s'annulait pour $x=0$. Or cela n'arrive pas; cela voudrait dire que deux branches se coupent en deux points infiniment voisins, c'est à dire qu'un point se confond avec son propre foyer, ou peut en devenir aussi voisin que l'on veut en comptant les distances sur la géodésique. Or nous avons vu plus haut que la distance d'un point à son foyer est toujours au moins égale à $r/2L_2$.

Donc même dans ce cas, le nombre des points doubles ne peut varier.

La disposition des points doubles peut elle varier? Oui, mais uniquement de la manière suivante: supposons trois branches de courbe qui se coupent en 3 points doubles de facon à former un petit triangle; à la limite ce petit triangle se réduit à un point et les 3 points doubles se confondent en un seul point triple; ensuite les 3 points doubles se séparent de nouveau, et les trois branches forment de nouveau un triangle, mais dont la disposition est différente. Si la branche 1 parcourue dans un certain sens rencontrait dans la 1[ère] disposition, la branche 2 d'abord, puis le branche 3; dans la 2[de] disposition, elle rencontrera la branche 3 d'abord puis la branche 2.

Il est aisé de voir que si les branches de courbe au lieu de déterminer un triangle déterminent un polygone de plus de 3 côtés; la disposition des points doubles ne pourra changer, car il faudrait que deux de ces branches devinssent tangentes. Lorsqu'on pourra passer de cette manière du type T au type T', nous dirons que ces deux *types sont équivalents.* Il y a des types qui ne sont équivalents à aucun autre, par exemple le type sans point double. Une courbe fermée à points doubles partagera la surface convexe en un certain nombre de polygones curvilignes dont quelques-uns pourront être des biangles ou des uniangles. Si aucun de ces polygones n'est un triangle, le procédé précédent ne pourra être appliqué et le type ne sera équivalent à aucun autre. Considérons maintenant deux séries continues de géodésiques; soient G la géodésique de la $1^{\text{ère}}$ serie, G' celle de la 2^{de}; le nombre des points d'intersection de G et de G' ne pourrait varier que si ces deux géodésiques devenaient tangentes l'une à l'autre, ce qui est impossible.

Le nombre des points d'intersection de deux géodésiques appartenant à deux séries continues determinées est invariable.

Supposons que pour t voisin de t_0, on trouve que le nombre q, dont nous avons parlé plus haut et qui figure dans l'expression $(t-t_0)^{1/q}$ est pair pour la $1^{\text{ère}}$ série continue, et égal à 1 pour la 2^{de} série. Il arrivera alors que pour $t < t_0$, nous aurons 2 géodésiques G et G'' de la $1^{\text{ère}}$ serie, et que pour $t > t_0$ nous n'en aurons plus. Au contraire nous aurons toujours une géodésique G' et une seule de la 2^{de} série, quel que soit t. Nous pouvons poser

$$(t-t_0)^{1/q} = \tau$$

et faire varier τ d'une manière continue; alors dans la $1^{\text{ère}}$ série nous passerons de la géodésique G à la géodésique G''; et dans la 2^{de} série nous partirons de la géodésique G' et reviendrons finalement à cette même géodésique G'.

Donc le nombre des points d'intersection de G et de G' est le même que celui des points d'intersection de G et de G''.

Quant à la disposition relative des points doubles de G et de G' et de leurs points d'intersection, elle ne pourra varier que de la façon que j'ai dite plus haut à propos de la disposition des points doubles d'une seule géodésique.

Comme première application de ce principe; étudions les géodésiques fermées sans point double; ces géodésiques formeront évidemment une ou plusieurs séries continues. D'après ce qui précède ces séries continues ne pourront contenir que des géodésiques fermées sans point double.

Donc le nombre total des géodésiques fermées sans point double est toujours pair ou toujours impair. Or nous avons vu au § précédent que pour un sphéroïde ce nombre est impair. De plus on peut passer d'un sphéroïde à une surface convexe quelconque d'une manière continue.

Donc sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair.

Par exemple pour un ellipsoïde nous avons les trois sections principales par les plans de symétrie.

§ 5. *Stabilité et instabilité.*

Etudions maintenant les géodésiques peu différentes d'une géodésique fermée (avec ou sans point double). Pour cela nous nous servirons du système de coordonnées suivant. Soit G_0 la géodésique fermée, O un point fixe de cette géodésique ; prenons sur G_0 à partir du point O, une longueur $OP = u$; au point P menons une géodésique G_1 normale à G_0 ; sur G_1 à partir de P prenons une longueur $PM = v$; les coordonnées du point M seront u et v. L'élément d'arc sera donné par

$$ds^2 = dv^2 + h^2 du^2.$$

On voit que $h = 1$ et $dh/dv = 0$ pour $v = 0$, et quel que soit u. Les équations d'une géodésique seront

$$\frac{d}{du}\frac{v'}{\sqrt{v'^2 + h^2}} = h\frac{dh}{dv},$$

v' étant la dérivée de v par rapport à u ; ou en supposant v très petit pour chercher les géodésiques très voisines de G_0,

$$v'' = h''v, \tag{1}$$

où h'' est la valeur de d^2h/dv^2 pour $v = 0$. Alors $-h''$, qui represente la courbure de la surface au point $(u, 0)$, est une fonction de u qui est d'ailleurs périodique puisque G_0 est fermée.

L'équation (1) est une équation linéaire à coefficients périodiques ; elle admet deux solutions remarquables de la forme suivante :

$$v = e^{\alpha u}\phi(u), \qquad v = e^{-\alpha u}\psi(u), \tag{2}$$

$\phi(u)$ et $\psi(u)$ étant périodiques en u.

Quatre cas peuvent se présenter :

1°. Ou bien α est purement imaginaire et les deux solutions (2) imaginaires conjugués. On dit alors que G_0 est *stable.*

2°. Ou bien α est réel et différent de zéro et les deux solutions (2) réelles. On dit alors que G_0 est *instable.*

3°. Ou bien on a $\alpha = \alpha' + i\pi/U$, α' étant réel, et U étant la longueur totale de G_0 ; nos deux solutions peuvent alors se mettre sous la forme $v = e^{\alpha' u}\phi_1(u)$, $v = e^{-\alpha' u}\psi_1(u)$, les fonctions ϕ_1 et ψ_1 étant réelles et telles que

$$\phi_1(u + U) = -\phi_1(u), \qquad \psi_1(u + U) = -\psi_1(u).$$

On dit encore dans ce cas que G_0 est *instable.*

4°. Ou bien α est multiple de $i\pi/U$; c'est un cas limite, qui ne se présentera pas en général et que nous laisserons de côté pour le moment ; dans ce cas les expressions (2) peuvent prendre une forme dégénérescente où figure log u ; ainsi qu'il arrive dans le cas des racines multiples pour les équations linéaires à coefficients constants.

Plaçons nous d'abord dans le 1$^{\text{er}}$ cas, et soient ρ et θ le module et l'argument de la 1$^{\text{ère}}$ solution (2); alors l'equation (1) admettra comme solutions particulières,

$$v = \rho e^{i\theta}, \qquad v = \rho e^{-i\theta},$$

et comme solution générale

$$v = A\rho \sin(\theta - \beta), \tag{3}$$

où β et A sont des constantes d'intégration.

Soit en particulier

$$v_1 = \rho \sin \theta, \qquad v_2 = \rho \cos \theta,$$

on aura

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_1}{v_2} = B \int \frac{du}{v_2^2}, \tag{4}$$

B étant une constante. La formule (4) où tout est d'ailleurs réel nous montre que tg θ varie toujours dans le même sens, par exemple toujours en croissant; car si tg θ allait toujours en décroissant, il nous suffirait d'intervertir le rôle des deux solutions (2). Donc θ est une fonction croissante de u.

Supposons qu'on ait pris l'unité de longueur de telle facon que la longueur totale de G_0 soit égale à 2π. Qu'arrivera-t-il quand u augmentera de 2π? Il arrivera que ρ ne changera pas et que θ augmentera de $2\alpha\pi/i$ (ce qui nous montre d'ailleurs que α/i doit être positif si l'on veut que θ soit croissant).

Cela posé, nous appellerons *argument réduit* d'un point sur la géodésique fermée G_0 la quantité

$$\frac{i\theta}{\alpha}.$$

Si nous avons une unité de longueur quelconque et que U soit la longueur totale de G_0, l'argument réduit sera

$$\frac{2i\pi\theta}{\alpha U}.$$

Il résulte de là que l'argument réduit augmente constamment de 0 à 2π quand on parcourt la géodésique tout entière. Cet argument réduit peut donc servir à définir la position d'un point sur G_0.

Revenons à la solution générale (3); elle représente une géodésique G très peu différente de G_0; les points d'intersection successifs de G et G_0 seront donnés par la formule

$$\theta = \beta + K\pi,$$

où K est un entier quelconque.

Le $K^{\text{ème}}$ foyer du point $\theta = \beta$, sera donc le point $\theta = \beta + K\pi$; d'où cette conséquence: *Les arguments réduits d'un point et de son $K^{\text{ème}}$ foyer diffèrent d'une quantité constante et positive*

$$\frac{Ki\pi}{\alpha} \frac{2\pi}{U}.$$

L'analyse qui précède ne diffère pas de celle du No. 347 du tome 3 de mon ouvrage sur les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Au No. 349 j'ai envisagé les solutions instables et j'ai montré qu'elles se répartissent en trois catégories.

1°. Ou bien α est réel et $\phi(u)$ ne s'annule jamais (solutions instables de la 1ère catégorie). On a alors

$$e^{-2\alpha u}\frac{\psi(u)}{\phi(u)}=B\int\frac{du}{e^{-2\alpha u}\phi^2(u)},$$

ce qui montre que le 1er membre qui est toujours fini et croissant ne peut s'annuler qu'une fois ; comme $e^{-2\alpha u}$ ne s'annule pas, il en résulte que $\psi(u)$ ne peut s'annuler qu'une fois ; et comme $\psi(u)$ est périodique, $\psi(u)$ ne s'annule jamais. D'ailleurs la solution générale de (1) sera encore de le forme

$$v=e^{\alpha u}\phi(u)B\int\frac{du}{e^{-2\alpha u}\phi^2(u)}, \tag{5}$$

ce qui montre que v ne peut s'annuler qu'une fois: *Aucun point de G_0 n'a donc de foyer.*

2°. Ou bien α est réel et $\phi(u)$ s'annule (solutions instable, de la 2de catégorie).

La formule (5) nous montre alors que (l'intégrale du 2d membre étant toujours croissante et devenant infini quand ϕ s'annule) entre deux zéros consécutifs de $\phi(u)$, il y a un zéro de v et un seul.

En particulier entre deux zéros de $\phi(u)$, il y a un zéro de $\psi(u)$ et un seul. Si donc u_0, u_1, u_2, etc. sont les zéros successifs de $\phi(u)$, les valeurs de $\psi(u_0)$, $\psi(u_1)$, $\psi(u_2)$, $\cdots$ sont alternativement positifs et négatifs ; mais la fonction $\psi(u)$ étant périodique, doit revenir à la même valeur quand on fait tout le tour de G_0. Donc *le nombre des zéros de $\phi(u)$ est toujours pair.* Soient donc

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,$$

les zéros successifs de $\phi(u)$ (pair-n). Tout point situé entre u_0 et u_1 aura son foyer entre u_1 et u_2 et quand l'argument d'un point croîtra de u_0 à u_1 l'argument de son foyer croîtra *constamment* de u_1 à u_2 ; car s'il cessait de croître, c'est qu'un même point aurait plusieurs foyers, ce qui est impossible.

Supposons que α soit positif ; alors pour u positif et très grand v sera sensiblement proportionnel à $e^{\alpha u}\phi(u)$; pour u négatif et très grand v sera sensiblement proportionnel à $e^{-\alpha u}\psi(u)$.

Les foyers d'ordre positif et très grand seront donc très voisins de l'un des zéros de $\phi(u)$.

Les foyers d'ordre négatif et très grand seront très voisins de l'un des zéros de $\psi(u)$. Soient alors

$$u_0',\ u_1',\ \cdots,\ u_n'$$

les zéros successifs de $\psi(u)$; u_0' étant compris entre u_0 et u_1.

Soient M_i et M'_i des points de G_0 qui correspondent respectivement à u_i et u'_i. Soit F_0 un point quelconque situé entre M_0 et M'_0, F_k son $K^{\text{ème}}$ foyer. Alors pour $k < n$, F_k sera compris entre M_k et M'_k; on voit ensuite que F_n est compris entre M_0 et M'_0; je dis que c'est entre M_0 et F_0; si en effet F_n était compris entre M'_0 et F_0, F_{2n} serait compris entre M'_0 et F_n et par conséquent entre M'_0 et F_0; plus généralement F_{kn} serait compris entre M'_0 et F_0. Donc F_{kn} ne pourrait tendre vers l'un des zéros de $\phi(u)$ quand k tend vers $+\infty$. En conséquence les points

$$F_n, F_{2n}, \cdots, F_{kn}, \cdots$$

sont entre M_0 et F_0 et quand K croît constamment et indéfiniment, ils se rapprochent constamment et indéfiniment de M_0. Au contraire les points

$$F_{-n}, F_{-2n}, \cdots, F_{-kn}$$

sont entre M'_0 et F_0 et quand K croît constamment et indéfiniment, ils se rapprochent constamment et indéfiniment de M'_0. Les zéros de $\phi(u)$ et ceux de $\psi(u)$ peuvent en conséquence recevoir le nom de *foyers limites*. Telle est la loi de la distribution des foyers pour les géodésiques fermées instables de la 2^{de} catégorie.

3°. Ou bien enfin α est de la forme $\alpha' + i\pi / U$, α étant réel (solutions instables de la $3^{\text{ème}}$ catégorie).

D'après ce que nous avons vu au No. 359 (loc. cit.), ces solutions jouissent des mêmes propriétés que celles de la 2^{de} catégorie. On a d'après ce qu'on a vu plus haut deux solutions de la forme :

$$v = e^{\alpha' u}\phi_1(u), \qquad v = e^{-\alpha' u}\psi_1(u),$$

avec

$$\phi_1(u+U) = -\phi_1(u), \qquad \psi_1(u+U) = -\psi_1(u),$$

et la solution générale s'écrit :

$$v = e^{\alpha' u}\phi_1(u) B \int \frac{du}{e^{-2\alpha' u}\phi_1^2(u)}. \tag{5 bis}$$

Nous voyons que $\phi_1(u)$ doit s'annuler, puisque cette fonction change de signe, qu'entre deux zéros de $\phi_1(u)$, il y a un zéro de $\psi_1(u)$ et un seul.

Ce que nous avons dit de la distribution des foyers successifs et de leurs relations avec les zéros de ϕ et de ψ (dont le rôle est joué ici par les zéros de ϕ_1 et de ψ_1) subsiste sans changement ; la seule différence c'est que *le nombre des zéros de $\phi_1(u)$ au lieu d'être toujours pair, est toujours impair.*

En effet la fonction $\psi_1(u)$ doit, non pas revenir à la même valeur, mais au contraire changer de signe quand on fait tout le tour de G_0.

Dans le cas des surfaces convexes tout point a un foyer dont la distance à ce point est inférieure à une limite donnée ; il n'y a donc pas de géodésiques fermées instables de la $1^{\text{ère}}$ catégorie ; il y en a au contraire pour les surfaces à courbures opposées.

Au No. 355 (loc. cit.) j'ai montré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une trajectoire fermée corresponde à un minimum de l'action, c'est qu'elle soit instable de la $1^{\text{ère}}$ catégorie. Il résulte de là que sur une surface convexe, il n'y a pas de géodésique fermée qui soit plus courte que toutes les courbes fermées infiniment voisines. Cela est d'ailleurs aisé à établir directement.

Considérons un ellipsoïde et ses trois ellipses principales; la plus grande et la plus petite sont des géodésiques fermées stables; la moyenne est une géodésique fermée instable de la 2^{de} catégorie. Sur un hyperboloïde à 1 nappe, l'ellipse de gorge est une géodésique fermée instable de la $1^{\text{ère}}$ catégorie.

Il est aisé de voir (loc. cit., No. 378) que si deux géodésiques fermées viennent à se confondre, pour disparaitre ensuite en devenant imaginaires (lorsqu'on fait varier d'une manière continue le paramètre que nous appelions t dans le § précédent), l'une d'elles est stable et l'autre instable. D'où il resulte que dans une même série continue, l'excès du nombre des géodésiques stables sur celui des géodésiques instables est constant. Or nous avons vu que les géodésiques fermées sans point double forment une ou plusieurs séries continues, et d'autre part que l'on peut toujours passer d'une manière continue d'une surface convexe quelconque à une autre.

Donc *si sur une surface convexe quelconque on envisage toutes les géodésiques fermées sans point double l'excès du nombre de celles qui sont stables sur le nombre de celles qui sont instables est constant*; il est donc le même que pour l'ellipsoïde, *il est donc égal à* 1.

Sur une surface convexe, il y a donc toujours au moins une géodésique fermée stable sans point double.

Remarquons que α que l'on appelle *l'exposant caractéristique* de G_0 est par ce qui précède entièrement déterminé. On pourrait croire le contraire, car si U est la longueur totale de G_0, on a

$$e^{\alpha u}\phi(u) = e^{\alpha + \frac{2i\pi u}{U}}\left[\phi(u)e^{-\frac{2i\pi u}{U}}\right],$$

où $\phi(u)e^{-2i\pi u/U}$ est comme $\phi(u)$ une fonction périodique. Il semble donc que l'on puisse remplacer α par $\alpha + 2i\pi/U$ ou par $\alpha + 2ki\pi/U$ (k entier positif ou négatif). Mais dans le cas des géodésiques instables, il n'y a qu'une des quantités $\alpha + 2ki\pi/U$ qui soit réelle et c'est celle qu'il convient d'adopter.

Dans le cas des géodésique stables, α est entièrement déterminé par la condition que l'argument θ augmente de $\alpha U/i$ quand on fait le tour de la géodésique G_0. Autre remarque: considérons une géodésique instable de la 2^{de} ou de la $3^{\text{ème}}$ catégories; elle fera partie d'une série continue au sens du § 4. Je dis que le nombre des zéros de $\phi(u)$, d'où dépend comme nous venons de le voir, la loi de distribution des foyers, demeurera constant; car il ne pourrait varier que si $\phi(u)$ et $\phi'(u)$ s'annulaient en même temps, ce qui ne peut avoir lieu. Une série continue peut se partager en *sections*, de telle façon que dans une section par exemple toutes les géodésiques soient stables, dans la suivante toutes instables, dans la suivante toutes stables, et ainsi de suite. Aux points où l'on passe d'une section à l'autre, l'exposant caractéristique est multiple de $i\pi / U$. Eh bien *dans une même section d'une même série continue, le nombre des foyers limites est invariable.*

Dans le cas des géodésiques instables, il y a plusieurs manières de définir l'exposant α; nous pouvons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, supposer α réel pour celles de la 1ère et de la 2de catégorie, tandis que pour celles de la 3ème catégorie, on supposera la partie imaginaire de α égale à $i\pi / U$. Mais on peut également adopter une autre solution.

On peut supposer que la partie imaginaire de α est égale à $ni\pi / U$, n étant le nombre des zéros de $\phi(u)$ (ou de ϕ_1); l'exemple qui va suivre nous fera comprendre les raisons qui pourraient justifier cette convention. Envisageons la surface

$$x^2 + y^2 + \frac{q^2 z^2}{4} - \frac{q_1 z^2 x}{4} = 1,$$

q et q_1 étant deux constantes.

Cette surface est convexe et fermée si q_1 est suffisamment petit; car elle diffère très peu de l'ellipsoïde de révolution

$$x^2 + y^2 + \frac{q^2 z^2}{4} = 1.$$

Elle admet une géodésique fermée qui est le cercle

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Si pour ce cercle, nous exprimons x et y en fonctions de l'arc u, nous trouvons

$$x = \cos u, \qquad y = \sin u.$$

L'équation des géodésiques infiniment peu différentes de ce cercle sera

$$v'' + \tfrac{1}{4}(q^2 - q_1 \cos u)v = 0.$$

Nous reconnaissons une équation qui a fait l'objet de travaux nombreux (loc. cit., Tome 2, Chapitre 17), les notations sont les mêmes que dans ce chapitre 17 à la condition de changer x en v et $2t$ en u. Le rôle de l'exposant α est le même que celui que jouait dans l'ouvrage cité la quantité

$$\frac{ih}{2}.$$

Si donc q_1 est petit nous avons sensiblement

$$\alpha = \frac{iq}{2}.$$

D'ailleurs α est imaginaire et la géodésique stable, à moins que q ne soit voisin d'un entier.

Si q est voisin d'un entier, n de telle façon que sur la figure de la page 243 (loc. cit.) le point de coordonnées q, q_1 se trouve dans une des régions couvertes de hachures, la géodésique est instable. D'après le No. 352 (loc. cit., Tome 3) elle est toujours de la 2^{de} ou de la $3^{\text{ème}}$ catégorie).

Quel est le nombre des zéros de $\phi(u)$ ou de $\phi_1(u)$? Il suffit de remarquer que sur l'une des courbes qui limitent les régions couvertes de hachures (loc. cit., No. 352) la fonction ϕ ou ϕ_1 est impaire et se réduit sensiblement (à cause de la petitesse de q_1) à $\sin qu/2$, ou à $\sin nu/2$ puisque q est très voisin de n.

Le nombre des zéros de $\phi(u)$ ou de $\phi_1(u)$ est donc n et celui des foyers limites est $2n$, dont n pour les zéros de $\phi(u)$ et n pour les zéros de $\psi(u)$. Cela nous montre :

1°. qu'il existe des surfaces qui admettent des géodésiques fermées instables de la 2^{de} et de la $3^{\text{ème}}$ catégories, le nombre des foyers limites pouvant être quelconque.

2°. que si l'on veut que α soit une fonction continue, il faut lui attribuer pour partie imaginaire $ni\pi / U$, $2n$ étant le nombre des foyers limites.

§ 6. *De quelques types de géodésiques fermées.*

Soit G_0 une géodésique fermée stable dont la longueur totale est U et qui appartient à une série continue. Soit α son exposant caractéristique. Il est clair que U et α sont des fonctions continues du paramètre que nous avons appelé t au § 1 et qui correspond à cette série continue.

Supposons que pour une certaine valeur de t, pour $t = t_0$ par exemple, le produit αU soit commensurable avec $i\pi$ par, exemple égal à

$$2\frac{mi\pi}{n},$$

m et n étant deux entiers premiers entre eux. L'argument réduit d'un point et de son $K^{\text{ème}}$ foyer différeront de

$$\pi\frac{nK}{m},$$

ce qui montre que tout point de notre géodésique G_0 coïncidera avec son $2m^{\text{ème}}$ foyer. Si l'on considère un point M de G_0, et la géodésique issue du point M et infiniment voisine de G_0 on voit qu'elle viendra repasser en M, aux infiniment petits près d'ordre supérieur après avoir recoupé G_0 $2m$ fois (le point M compris). Elle aura ainsi fait n fois le tour de la géodésique G_0. Les principes exposés dans le Chapitre 28 (loc. cit.) nous permettent d'interpréter ce résultat. Il existe outre la géodésique G_0, deux autres géodésiques fermées G_1 et G_1' jouissant des propriétés suivantes :

1°. Pour $t < t_0$ (par exemple) ces deux géodésiques n'existent pas ou plutôt sont imaginaires ; 2°. Pour $t > t_0$ elles sont toutes deux réelles ; 3°. Pour $t = t_0$ elles se confondent entre elles et se réduisent l'une et l'autre à la géodésique G_0 parcourue n fois ; 4°. Elles appartiennent à une même série continue ; 5°. l'une d'elles est stable et l'autre instable.

La relation de G_1 et G_1' avec G_0, est la même que celle qu'on rencontre en mécanique céleste, entre les solutions périodiques de la 2^de^ et de la 3^ème^ sorte et celles de la 1^ère^ sorte, ou entre les solutions du 2^d^ genre et celles du 1^er^ genre. La série continue S_1 à la quelle appartiennent G_1 et G_1' peut donc être regardée comme *engendrée* par la série S_0 à la quelle appartient G_0 ; comme le produit αU, en variant d'une manière continue, passera une infinité de fois par des valeurs commensurables avec $i\pi$, la série S_0 engendrera une infinité d'autres séries continues. Et comme l'une des deux géodésiques G_1 et G_1' est stable, le série S_1 va à son tour engendrer de la même manière une infinité d'autres séries.

Nous avons vu qu'il y a toujours une géodésique fermée stable, sans point double. Appelons-la G_0. Supposons qu'elle engendre comme nous venons de l'expliquer deux autres géodésiques fermées G_1 et G_1' ; soit $mi\pi/n$ la valeur correspondante de αU. Pour des valeurs de t très voisines de t_0, ces deux géodésiques différeront très-peu de G_0 et nous obtiendrons leur équation approximative en reprenant l'analyse du § précédent ; nous trouverons alors (en reprenant les équations (3) du § 2 précédent)

$$v = A\rho \sin(\theta - \beta) \quad \text{pour } G_1,$$

$$v = A'\rho \sin(\theta - \beta') \quad \text{pour } G_1',$$

A, β, A', β' étant des constantes.

Les points d'intersection de G_0 et de G_1 par exemple nous sont donnés par la formule

$$\theta = \beta + K\pi \quad (K \text{ entier}),$$

et les valeurs correspondantes de l'argument réduit sont

$$\frac{2i\pi\beta}{\alpha U} + \frac{K\pi \cdot 2i\pi}{\alpha U} = \frac{n\beta}{m} + \frac{n}{m} K\pi.$$

Combien l'expression

$$\frac{nK}{m},$$

peut-elle prendre de valeurs distinctes, deux valeurs n'étant pas regardées comme distinctes lorsqu'elles diffèrent d'un entier pair ? Evidemment $2m$; donc *le nombre des points d'intersection de G_0 avec G_1, et par conséquent avec une géodésique quelconque de le série S_1 est égal à $2m$.*

Cherchons maintenant le nombre des points doubles. Supposons la géodésique fermée G_1 partagée en $2m$ arcs par ses $2m$ points d'intersection avec G_0 ; ces arcs seront alternativement d'un côté et de l'autre de G_0; d'où il suit qu'un arc de rang pair ne peut pas couper un arc de rang impair, mais que deux arcs de rang pair, ou deux arcs de rang impair peuvent se couper.

J'observe ensuite que $v =$ partie réelle $e^{au}\phi(u)$ est une fonction uniforme de u de sorte que les points doubles correspondront aux valeurs de u pour lesquelles on aura

$$(h) \qquad v(u) = v(u + 2K\pi),$$

K étant entier, et qu'il n'y en aura pas d'autre. Nons avons d'ailleurs

$$\frac{v(u+2K\pi)}{v(u)} = B\int \frac{du}{v^2(u)},$$

car $v(u)$ et $v(u+2K\pi)$ sont deux intégrales de l'équation linéaire (1) du § précédent ce qui montre que le rapport de ces deux intégrales va constamment en croissent ou constamment en décroissant. Entre deux zéros consécutifs de $v(u)$, qui correspondent aux valeurs $+\infty$ et $-\infty$ de ce rapport, il prendra donc une fois et une seule la valeur zéro, une fois et une seule la valeur 1. Entre deux points d'intersection consécutifs de G_0 et de la branche $v(u)$ de la géodésique G_1 (points donnés par l'équation $v(u) = 0$), il y aura un point d'intersection de G_0 et de la branche $v(u+2K\pi)$ de la géodésique G_1 (point donné par l'équation $v(u+2K\pi) = 0$) et il n'y en aura qu'un seul; de plus il y aura un point double donné par l'équation (4) et il n'y en aura qu'un seul.

Cela nous permet d'énumérer les points doubles. Donnons à l'entier K une valeur déterminée et faisons varier u de 0 à $2n\pi$, nous aurons $2m$ points d'intersection de G_0 avec la branche $v(u)$ de G_1; cela nous donnera donc $2m$ points doubles. Maintenant nous pouvons donner à K les valeurs $1, 2, \cdots n-1$, ce qui fait en tout $2m(n-1)$ points doubles. Mais chaque point double est ainsi compté deux fois, puisqu'on retrouve le même en changeant u et K en $u + 2K\pi$ et $n - K$.

Le nombre total des points doubles pour la géodésique G_1 qui diffère infiniment peu de G_0, et par conséquent aussi pour toutes les géodésiques fermées de la série S_1, est donc $m(n-1)$.

Pour $n = 1$, on retrouve des géodésiques fermées sans point double; pour $n = 2$ on constate la circonstance suivante: Les divers arcs de G_1 partagent la surface en $m + 2$ regions, dont m sont des polygones curvilignes de deux côtés et les deux autres des polygones curvilignes de m côtés. Si m n'est pas égal à 3 aucun de ces polygones n'est un triangle, de sorte que d'après ce que nous avons dit au § 4, la disposition des points doubles ne peut varier quand on parcourt la série S_1 d'une manière continue; *toutes les géodésiques de cette série appartiennent donc au même type.*

Il semble qu'il y ait exception pour $m = 3$ et que deux types soient possibles, représentés par les figures 1 et 2; mais la disposition de la figure 2 est impossible. En effet la courbe 2 limite quatre régions A, B, C, D; la région D est un triangle dont les trois angles sont α, β, γ; la courbure totale de D est $\alpha+\beta+\gamma-\pi$; de même celles de A, B, C sont respectivement $\alpha+\pi$, $\beta+\pi$, $\gamma+\pi$; de sorte que

$$A+B+C>D+4\pi>4\pi,$$

chacune des grandes lettres représentant la courbure totale de la région correspondante. Ce qui voudrait dire que la courbure totale des trois régions

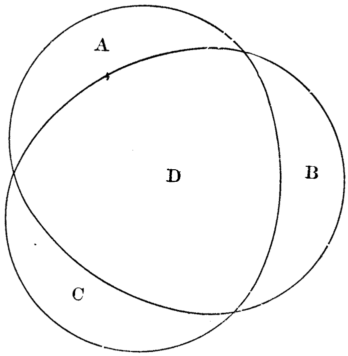

FIG. 1.

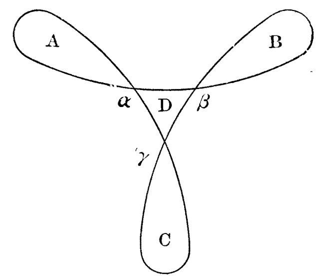

FIG. 2.

A, B, C réunies serait plus grande que celle de la surface entière, résultat évidemment absurde.

Supposons maintenant une géodésique G_1 de la série S_1 qui ne soit plus très-peu différente de G_0. Je considère le produit αU correspondant et je suppose qu'il passe par la valeur

$$\frac{2m_1 i\pi}{n_1},$$

commensurable avec $i\pi$. D'après ce que nous venons de voir, la série S_1 engendrera une autre série S_2; soit G_2 une des géodésiques de cette série et par exemple celle qui diffère très peu de la géodésique G_1 parcourue n_1 fois. On voit d'abord qu'elle rencontrera G_0 en $2mn_1$ points. En combien de points rencontre-t-elle G_1? Les points d'intersection seront de deux sortes. D'abord à chaque point double de G_1 correspondront $2n_1$ points d'intersection. En effet en chaque point double viennent passer 2 branches de G_1, soient B et B', et alors B rencontre n_1 branches de G_2 très peu différentes de B'; et B' rencontre n_1 branches de G_2 très peu différentes de B. On obtient ainsi $2mn_1(n-1)$ points d'intersection. Il faut y ajouter les $2m_1$ points d'intersection de G_2 avec la branche correspondante de G_1, soit en tout

$$2mn_1(n-1)+2m_1.$$

Combien G_2 aura-t-elle de points doubles? Chaque point double de G_1 nous donnera d'abord n_1^2 points doubles de G_2, car nous avons les n_1 branches peu différentes de B, qui coupent en n_1^2 points, les n_1 branches peu différentes de B'; nous avons en outre $m_1(n_1 - 1)$ points doubles obtenus par des équations analogues à (4), soit en tout

$$mn_1^2(n-1) + m_1(n_1 - 1).$$

Ainsi G_2 *et par conséquent toutes les géodésiques de la série* S_2 *couperont* G_0 *en* $2mn_1$ *points,* G_1 *en* $2mn_1(n-1) + 2m_1$ *points et auront* $mn_1^2(n-1) + m_1(n-1)$ *points doubles.*

Il y a une autre quantité qui demeure invariable dans toutes les géodésiques d'une même série, c'est la courbure totale de la région limitée par la géodésique; dans le cas d'une courbe fermée sans point double, c'est 2π; dans le cas de la figure 1, c'est 4π en comptant A, B et C une fois, et D deux fois, conformément aux conventions habituelles.

§ 7. *Existence d'une géodésique fermée.*

Nous avons vu plus haut qu'il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double. Bien que la démonstration ne laisse rien à désirer au point de vue de la simplicité, je crois cependant devoir en donner une seconde, quoique beaucoup moins simple.

Soit une géodésique fermée sans point double, elle partagera la surface en deux régions et la courbure totale de chacune de ces deux régions sera 2π. Considérons maintenant toutes les courbes fermées sans point double qui partagent la surface en deux régions dont la courbure totale est 2π. La longueur de l'une de ces courbes fermées ne peut pas devenir plus petite que toute quantité donnée; car si cette courbe se réduisait à un contour infiniment petit, la courbure totale de l'une des régions limitées par ce contour serait elle-même infiniment petite.

Parmi ces courbes, il y en a donc une qui est plus courte que toutes les autres, et je dis que c'est une géodésique.

Contentons-nous d'abord d'un premier aperçu, afin de faire compendre le principe de la démonstration.

Soit C une courbe fermée quelconque et R l'une des régions limitées par C, soit

$$U = \int ds, \qquad \Omega = \int \frac{d\omega}{\rho},$$

la longueur totale de C et la courbure totale de R; dans ces formules ds représente l'élément d'arc de C, $d\omega$ l'élément de surface de R, et ρ le produit des deux rayons de courbure principaux.

Considérons une courbe C' très peu différente de C et limitant une région

R', soit ζ la distance de ces deux courbes comptée sur la normale à C. Soit $U + \delta U$ la longueur de C', et $\Omega + \delta\Omega$ la courbure totale de R' ; on aura

$$\delta U = \int \gamma\zeta ds , \qquad \delta\Omega = \int \frac{\zeta ds}{\rho},$$

γ représentant la courbure géodésique de C. Nous nous sommes imposé la condition $\Omega = 2\pi$, et nous voulons que U soit minimum; nous devons donc avoir

$$\delta U = 0, \qquad \delta\Omega = 0.$$

Ces deux équations doivent donc être équivalentes, c'est à dire qu'on doit avoir

$$\gamma = \frac{K}{\rho},$$

K étant une constante.

Mais pour une courbe fermée quelconque C limitant une région R on a

$$\int \gamma ds = \Omega - 2\pi .$$

Dans notre cas, on a $\Omega = 2\pi$; d'où

$$K\int \frac{ds}{\rho} = 0 .$$

Comme la surface est convexe, ρ est essentiellement positif de sorte que l'intégrale $\int ds/\rho$ ne peut s'annuler ; on aura donc

$$K = 0, \qquad \gamma = 0,$$

ce qui veut dire que *la courbe C est une géodésique.*

Examinons maintenant les objections qu'on pourrait faire à ce raisonnement incomplet. Considérons l'ensemble des courbes analytiques C fermées et sans point double, limitant une région R de courbure totale 2π ; il est clair que la longueur de ces courbes aura une limite inférieure ; mais on peut se demander si cette limite sera effectivement atteinte ; et si elle le sera par une courbe faisant partie de l'ensemble.

Cette courbe pour laquelle le minimum serait atteint sera-t-elle analytique, de telle façon que les règles du calcul des variations puissent lui être appliquées ?

Et si elle est analytique, sera-t-elle dépourvue de points doubles, ou bien ne pourrait-il se faire que tout en étant infiniment voisine de courbes sans point double elle possédât elle-même des points singuliers où deux de ses branches viendraient à se toucher ?

Cela fait en réalité deux objections distinctes.

La 1ère est d'ordre analytique ; c'est celle que l'on rencontre dans tous les problèmes analogues ; malgré son importance, je n'en parlerai pas ici, je me bornerai à renvoyer aux récents travaux de M. HILBERT.

La 2[de] est d'ordre physique, pour ainsi dire ; elle est spéciale au problème qui nous occupe et nous allons en faire un examen approfondi.

Pour la bien faire comprendre, nous allons donner à notre problème une signification physique et concrète. Supposons d'abord un gaz enfermé dans une enceinte en partie déformable, il exercera sur les parois de cette enceinte une pression qui tendra à en augmenter le volume, le travail effectué par la pression de ce gaz dépendra des variations de ce volume. Au lieu d'un gaz, nous pouvons supposer un fluide compressible comme un gaz, mais tel que la pression soit liée au volume non par la loi de Mariotte, mais par une relation quelconque. Alors le travail virtuel de la pression pour une déformation virtuelle quelconque de l'enceinte sera $p\delta V, p$ designant la pression du gaz, laquelle doit être uniforme, et δV l'accroissement virtuel du volume.

Si l'enceinte n'est susceptible que de certaines déformations, l'equilibre sera atteint quand le volume sera maximum, en supposant que toutes les déformations possibles se fassent sans résistance. Si au contraire certaines forces opposent à la déformation de l'enceinte et que le travail virtuel de ces forces soit δW la condition d'équilibre sera

$$p\delta V + \delta W = 0.$$

Supposons maintenant que notre enceinte soit limitée: 1°. Par notre surface convexe S elle-même, 2°. Par une autre surface convexe S' infiniment peu différente de S et telle que la distance des deux surfaces, comptée suivant la normale à S, soit égale à ϵ/ρ, ϵ étant une constante infiniment petite et ρ le produit des rayons de courbure, 3°. Par un ruban infiniment étroit dont les bords s'appuieront sur S et sur S', (c'est ce ruban qui va épouser la forme de notre courbe fermée C, de telle façon que notre enceinte sera l'espace infiniment mince compris entre la région de S que nous avons appelée R et la région correspondante de S'). Le volume de notre enceinte sera alors représenté par l'intégrale

$$\int \frac{\epsilon}{\rho}\, d\omega = \epsilon\Omega.$$

Nous supposerons que notre ruban résiste plus on moins à l'extension, mais qu'il est d'ailleurs flexible sans résistance ; sa largeur pourra être supposée une peu plus grande que la plus grande valeur de ϵ/ρ, de telle sorte que ses bords s'appliquent sur les surfaces S et S' et soient *collés* contre ces surfaces par la pression du fluide. La pression du fluide tendra à allonger le ruban et mettra en jeu la résistance du ruban à l'extension, c'est à dire ce qu'on appelle la *tension* du ruban ; cette tension sera constante tout le long du ruban, puisque la pression du fluide est normale à ce ruban ; nous l'appellerons T ; on aura alors

$$\delta W = - T\delta U,$$

U étant la longueur totale du ruban, c'est à dire la courbe C. L'équation d'équilibre s'écrit alors

$$p\epsilon\delta\Omega = T\delta U.$$

Si le fil est inextensible, c'est à dire si un accroissement très petit de U amène un accroissement très grand de S: la longueur U est constante et doit être regardée comme une des données de la question, et l'équilibre est atteint quand Ω est maximum.

Si au contraire le fluide est incompressible, c'est à dire si une diminution très petite du volume amène un accroissement tres grand de p, c'est Ω qui est constant et qui est une donnée de la question (comme dans le cas qui nous occupe où $\Omega = 2\pi$) et l'équilibre est atteint quand U est minimum.

Considérons un segment très petit ds du ruban, limité en AB et $A'B'$; tout se passera comme si le ruban était coupé en AB et $A'B'$ et soumis à deux forces appliquées l'une au milieu de AB, l'autre au milieu de $A'B'$ et représentant l'une l'action de la portion du ruban située an dela de AB, l'autre l'action de la portion du ruban située au dela de $A'B'$; ces deux forces ne sont autre chose que la tension du ruban ; elles sont donc égales en grandeur et égales à T; elles doivent faire équilibre à la pression exercée par le fluide sur le segment $ABA'B'$. Projetons tout sur la normale à la courbe C, dans le plan tangent à la surface S. La projection de la pression du fluide sera

$$\frac{p\epsilon}{\rho}\, ds,$$

celle de la tension sera $Td\alpha$, $d\alpha$ étant l'angle de contingence géodésique de C. On aura donc

$$\frac{p\epsilon}{\rho}\, ds = Td\alpha.$$

Comme T, p et ϵ sont des constantes, nous voyons que le rapport de la courbure géodésique $d\alpha/ds$ à $1/\rho$ doit être une constante ; nous retrouvons ainsi, dans un autre langage, le résultat obtenu plus haut.

L'équilibre pourra certainement être atteint d'une façon quelconque, ce qui ne peut se faire que quand C sera une géodésique fermée *à moins que*, et c'est ici que nous retrouvons la difficulté signalée plus haut, deux portions du ruban ne viennent se coller l'une contre l'autre. Dans ce cas les deux portions du ruban ainsi collées l'une sur l'autre, subiraient la pression du fluide des deux côtés, de telle façon que l'effet de cette pression se trouverait annulée.

Dans ce cas l'équation d'équilibre s'écrirait, pour cette portion du ruban,

$$Td\alpha = 0,$$

de sorte que l'angle de contingence géodésique étant nul cette partie du ruban devrait affecter la forme d'une géodésique.

Ainsi nous devrons distinguer les *parties libres* du ruban qui devraient satisfaire à la condition $\rho d\alpha/ds = \text{const.}$, et les *parties collées* qui se réduiraient à des arcs de géodésiques. Que se passerait-il maintenant aux points de raccordement ? Je dis que les diverses parties du ruban devraient se raccorder par contact, c'est à dire sous un angle nul et de façon que l'ensemble du ruban ne présente pas de point anguleux.

Soient en effet BAC, EDF deux brins du ruban, AB étant appliqué sur ED ; nous savons que la tension est constante tout le long de AB, de même que tout le long de AC, de ED ou de DF ; mais nous ne savons pas encore si elle est la même par exemple sur AC et sur AB.

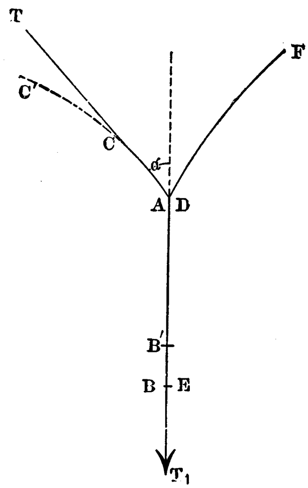

FIG. 3.

Mais il est aisé d'établir ce dernier point ; le brin BAC est en équilibre sous l'action des deux tensions CT et ET' appliquées à ses deux extrémités, de la pression du fluide et de l'action exercée par le brin DE sur le brin AB sur lequel il s'applique. Cette action (égale d'ailleurs au sens près à la réaction du brin AB sur le brin DE) est normale au brin AB, puisque les deux brins, quoique appliqués l'un sur l'autre, peuvent librement glisser l'un sur l'autre.

Supposons alors que le brin BAC se déplace pour venir en $B'AC'$ (c'est à dire glisse en passant par le point fixe A) ; la somme des travaux virtuels doit être nulle. Or le travail de la pression et celui de l'action de DE sur AB sera nul, puisque ces forces sont normales aux brins sur lesquels elles s'exercent. Les travaux des deux tensions seront donc égaux et de signe contraire, ce qui exige que les deux tensions CT et BT_1 soient égales. C. Q. F. D.

Supposons maintenant les arcs AC et AB très petits ; soit AM le prolongement de la tangente en A à AB ; soit α l'angle de CT avec AM. Projetons sur une perpendiculaire à AM toutes les forces qui aggissent sur ABC. Les pressions seront négligeables puisque les arcs sont très petits de sorte que le brin ABC devra être en équilibre sous l'action des deux tensions et de l'action de DE sur AB ; il faut donc (puisque les tensions sont égales) que cette action soit dirigée suivant la bissectrice des deux tensions ; c'est à dire qu'elle fasse avec la perpendiculaire à AB un angle $\alpha/2$; or elle est normale à AB. Donc l'angle de raccordement α est nul. C. Q. F. D.

Ainsi le ruban forme une courbe sans point anguleux le long de laquelle la tension T est constante.

Alors la courbure totale de R sera encore

$$\frac{p\epsilon}{T}\int\frac{ds}{\rho} + 2\pi,$$

l'intégrale étant étendue à toute la partie libre du ruban ; on aura donc

$$\frac{p\epsilon}{T}\int\frac{ds}{\rho}=0,$$

ce qui veut dire encore que $p=0$, ou que la courbure géodésique est partout nulle, ou que le ruban entier affecte partout la forme d'une géodésique fermée.

Si alors AB et A_1B_1 sont deux parties du ruban collées l'une sur l'autre, si AC et A_1C_1 sont les parties libres du ruban au delà de A et de A_1; si BD et B_1D_1 sont les parties libres du ruban au delà de B et de B_1, toutes ces parties devront appartenir à une même géodésique ; donc AC est la continuation analytique de AB, et A_1C_1 celle de A_1B_1. Ce qui est absurde, puisque par hypothèse AB coïncide avec A_1B_1 et que AC ne coïncide pas avec A_1C_1. L'hypothèse où deux parties du ruban viennent se coller l'une sur l'autre doit donc être écartée.

Nous devons de même écarter celle où deux parties du ruban viendraient se toucher en un point, car nous avons vu que deux géodésiques ne peuvent être tangentes l'une à l'autre.

L'équilibre ne pourra donc être atteint que quand le ruban prendra la forme d'une géodésique fermée sans point double.

§ 8. *Discussion du minimum.*

La courbe C dont la longueur est un minimum, doit d'après ce qui précède se réduire à une géodésique ; mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante ; c'est celle qui se rapporte à la 1ère variation et nous avons à examiner celle qui se rapporte à la 2de variation.

Soit C la courbe considérée, qui est représentée sur la figure en $AMBNEPA$. Supposons qu'il existe une courbe AM_1BN_1E infiniment peu différente de la 1ère et satisfaisant comme elle à la condition :

$$\text{Courbure géodésique}=\frac{K}{\rho},$$

K étant une constante qui pourra ne pas avoir la même valeur que pour la courbe C (c'est à dire la valeur zéro).

Je suppose de plus que la courbure totale de l'aire infiniment petite AM_1BMA, soit égale à la courbure totale de l'aire $BNEN_1B$, de telle façon que les deux courbes fermées $AMBNEPA$ et AM_1BN_1EPA enveloppent des aires de même courbure totale.

Je considère les angles sous lesquels les deux courbes $AMBNE$, AM_1BN_1E se coupent en A, en B et en E comme des infiniment petits du 1er ordre, et je remarque d'abord que la différence des longueurs des deux courbes est infiniment petite du 3ème ordre.

Prenons sur AM_1B et AP deux points A'' et A' voisins de A sans en être infiniment voisins (je les suppose simplement assez près pour que les géodésiques qui les joignent en restant très voisins de C restent le plus court chemin d'un point à un autre); et de même sur EN_1B et EP deux points E'' et E' voisins de E. Joignons par des arcs de géodésique marqués en traits pointillés $A'A''$ d'une part, $E'E''$ d'autre part. Il est clair:

1°. Que la longueur $A'A''$ sera plus petite que $A'A + AA''$, et de même la longueur $E'E''$ plus petite que $E'E + EE''$, et que les différences seront des infiniment petits du 2[d] ordre (et non pas d'ordre supérieur au 2[d]); en effet

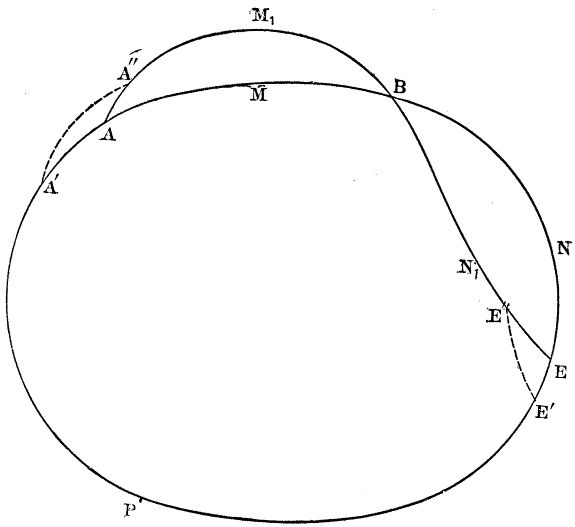

FIG. 4.

$A'A''$ étant une géodésique $AA' + AA'' - A'A''$ par exemple, est au moins égal à $\overline{AA'} + \overline{AA''} - A'A''$, en designant par $\overline{AA'}$ et $\overline{AA''}$ les géodésiques qui joignent A à A' ou à A''; (comme AA' est une géodésique, elle coïncide avec $\overline{AA'}$). Les deux géodésiques se coupent sous de angles infiniment petits du 1[er] ordre, (et non d'ordre supérieur, puisque la distance de A'' à C est du 1[er] ordre) de sorte que $\overline{AA'} + \overline{AA''} - A'A''$ est positif et plus grand qu'un infini petit du 2[d] ordre.

Il résulte de tout cela que la courbe fermée $A'A''M_1BN_1E''E'PA'$ est plus courte que la courbe fermée $AMBNEPA$, ou C.

2°. Il est clair ensuite que l'on peut placer les points A', A'', E', E'' de telle façon que les deux triangles $AA'A''$ et $EE'E''$ aient même courbure totale. Dans ces conditions, les deux courbes $AMBNEPA$ et $A'A''M_1BN_1E''E'PN$ enveloppent des aires ayant même courbure totale.

Si donc on peut construire une courbe AM_1BN_1E placée comme sur la figure et jouissant des propriétés énoncées, C n'est certainement pas la plus courte de toutes les courbes fermées qui enveloppent des aires de courbure totale 2π. *La courbe C ne correspond pas à un vrai minimum.* Supposons maintenant que C soit une géodésique fermée stable et que le produit $\alpha U/i$ soit plus grand que 2π. Je dis que C ne pourra pas correspondre à un vrai minimum.

Soit en effet A un point quelconque de C, AM_1B une géodésique très voisine de C et passant par A; elle viendra recouper C en un point B qui sera le 1$^{\text{er}}$ foyer de A puis en un point E qui sera le 2$^{\text{d}}$ foyer de A. Si $\alpha U/i$ est $> 2\pi$, les deux arcs AMB, BNE ne couvriront pas le périmètre de C tout entier et les deux courbes seront disposées comme sur la figure.

Si de plus l'angle sous lequel les deux géodésiques se coupent en A est égal à celui sous lequel les deux géodésiques se coupent en E, les deux aires AM_1BA, BN_1EMB auront même courbure totale; nous serons dans les conditions du théorème précédent et C ne sera pas un vrai minimum.

La question à résoudre est donc la suivante: peut-on choisir le point A de telle façon que les deux angles en question soient égaux?

Reprenons les rotations du § 5, la géodésique AM_1B aura pour équation

$$v = \rho \sin(\theta - \beta),$$

et les points A, B, E correspondront à

$$\theta = \beta, \qquad \theta = \beta + \pi, \qquad \theta = \beta + 2\pi,$$

l'angle sous lequel les deux géodésiques se couperont en chacun de ces trois points sera représenté par la valeur correspondante de $\rho d\theta/du$. La condition à remplir est donc

$$\left(\rho \frac{d\theta}{du}\right)_{\theta=\beta} = \left(\rho \frac{d\theta}{du}\right)_{\theta=\beta+2\pi}.$$

Mais ρ et $d\theta/du$ sont des fonctions périodiques de u se reproduisant quand u augmente de U. Ce sont donc aussi des fonctions périodiques de l'argument réduit

$$\frac{2i\pi\theta}{\alpha U}.$$

Nous aurons donc

$$\rho \frac{d\theta}{du} = F\left(\frac{2i\pi\theta}{\alpha U}\right),$$

F étant développable en série de Fourier suivant les cosinus et les sinus des multiples de $2i\pi\theta/\alpha U$.

Il s'agit donc de savoir si l'on peut déterminer β de telle façon que

$$F\left(\frac{2i\pi\beta}{\alpha U} + \frac{4i\pi^2}{\alpha U}\right) - F\left(\frac{2i\pi\beta}{\alpha U}\right) = 0.$$

Or le premier membre est une fonction périodique de $2i\pi\beta/\alpha U$, développable en série trigonmétrique suivant les sinus et les cosinus des multiples de $2i\pi\beta/\alpha U$, *et dont la valeur moyenne est nulle.* Ce premier membre ne peut donc être toujours de même signe et il faut bien qu'il s'annule. *Donc C n'est pas un vrai minimum.* C. Q. F. D.

Supposons maintenant que C soit instable, soit n le nombre des zéros des $\phi(u)$ (ou de ϕ_1) et par conséquent n le nombre des zéros de $\psi(u)$ et $2n$ celui des foyers limites. Soient

$$u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}, u_n = u_0 + U, u_{n+1} = u_1 + U,$$

les zéros successifs de $\phi(u)$ (ou de ϕ_1); soient

$$u'_0, u'_1, u'_2, \cdots, u'_{n-1}, u'_n = u'_0 + U, u'_{n+1} = u'_1 + U,$$

les zéros successifs de $\psi(u)$.

Les zéros de $\phi(u)$ partagent le périmètre de C en n segments, de telle façon que si un point est sur le $K^{\text{ème}}$ segment, son foyer est sur le $(K+1)^{\text{ème}}$, son second foyer sur le $(K+2)^{\text{ème}}$, etc.

Reprenons la figure 3, soit A un point quelconque de C, AM_1BN_1E une géodésique infiniment voisine de C, de sorte que B et E soient le 1^er^ et le 2^d^ foyers de A. Si $n > 1$, cette courbe est disposée comme sur la figure, et la seule condition à remplir pour que notre théorème soit applicable, c'est que l'angle sous lequel cette courbe coupe C en A soit égal à l'angle sous lequel elle coupe C en E.

Soit u la valeur de u au point A et soit $F(u)$ le rapport de l'angle sous lequel les deux courbes se coupent en E à l'angle sous lequel elles se coupent en A. Le rapport $F(u)$ est toujours positif, et la question est de savoir si l'on peut disposer de u de telle façon que

$$F(u) = 1.$$

Soit $u = u_0$; l'équation de la géodésique AM_1BN_1E se réduit alors à

$$v = e^{\alpha u}\phi(u)$$

(ou à $v = e^{\alpha' u}\phi_1(u)$ dans le cas des géodésiques instables de la 3^ème^ catégorie). Elle vient couper C successivement en $A_0, A_1, \cdots$, points correspondant aux arguments $u_0, u_1, \cdots$; de sorte que A_{k+1} est le foyer de A_k, et l'intersection a lieu sous les angles

$$\theta(u_0), \theta(u_1) \cdots,$$

en posant

$$\theta(u) = e^{\alpha u}[\alpha\phi(u) + \phi'(u)].$$

On aura donc

$$F(u_0) = \frac{\theta(u_2)}{\theta(u_0)}, \quad F(u_2) = \frac{\theta(u_1)}{\theta(u_2)}, \quad \cdots, \quad F(u_{2n-2}) = \frac{\theta(u_{2n})}{\theta(u_{2n-2})};$$

d'où

$$F(u_0)F(u_2)\cdots F(u_{2n-2}) = \frac{\theta(u_{2n})}{\theta(u_0)} = \frac{\theta(u_0+2U)}{\theta(u_0)} = e^{2\alpha U} > 1,$$

ce qui prouve que l'un au moins des facteurs

$$F(u_0),\ F(u_2),\ \cdots,\ F(u_{2n-2})$$

est plus grand que 1, et par conséquent que $F(u)$ peut devenir >1. Soit maintenant $u = u_0'$, la géodésique se réduit à

$$v = e^{-\alpha u}\psi(u)$$

et l'on a

$$F(u_0') = \frac{\omega(u_2')}{\omega(u_2')},\quad F(u_2') = \frac{\omega(u_4')}{\omega(u_2')},\quad \cdots,\quad F(u_{2n-2}') = \frac{\omega(u_{2n}')}{\omega(u_{2n-2}')},$$

en posant

$$\omega(u) = e^{-\alpha u}[\psi'(u) - \alpha\psi(u)];$$

d'où,

$$F(u_0')F(u_2')\cdots F(u_{2n-2}') = \frac{\omega(u_{2n})}{\omega(u_0)} = \frac{\omega(u_0+2U)}{\omega(u_0)} = e^{-2\alpha U} < 1,$$

ce qui prouve que l'un au moins des facteurs

$$F(u_0'),\ F(u_2'),\ \cdots,\ F(u_{2n-2}')$$

est <1, et par conséquent que $F(u)$ peut devenir <1.

Le rapport $F(u)$ étant une fonction continue et périodique de u et pouvant devenir <1 et >1, pourra devenir égal à 1.

Ce qui montre encore que C n'est pas un vrai minimum.

Ainsi pour que la géodésique fermée C, soit la plus courte de toutes les courbes fermées sans point double qui enveloppent une aire de courbure totale 2π, il faut, si elle est stable que $\alpha U/i$ soit plus petit que 2π et si elle est instable que le nombre $2n$ des foyers limites soit égal à 2.

Ces conditions nécessaires sont-elles suffisantes? Je n'ai pas besoin de traiter ici la question que les procédés ordinaires du calcul des variations permettraient de résoudre.