Auteur Poincaré, Henri
Journal: Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan
Tome: 14
Annee: 1904
Titre de l'article: Rapport relatif au IIIe concours du prix Lobatsch[illegible]
décerné le 14 février 1904.
Pages: inconnues

POINCARÉ 1904

Rapport sur les travaux

de M. Hilbert,

professeur de mathématiques à l'Université de Goettingen.

Nos idées sur les origines et la portée des vérités géométriques ont évolué d'une façon très rapide depuis un siècle. Les decouvertes de Lobatchefski, celles de Bolyai, celles de Riemann ont inauguré une ère nouvelle; certes elles n'ont pas decouragé les hommes trop nombreux qui cherchent à démontrer le postulatum d'Euclide; ceux—la, hélas, rien ne pouvait les décourager; mais elles ont convaincu tous les vrais savants de l'inanité d'une telle recherche. Tel fut le premier résultat de l'invention des géométries non euclidiennes.

Mais le véritable sens de cette invention n'a pas été pénétré tout de suite; Helmholtz a montré d'abord que les propositions de la géométrie euclidienne n'étaient autre chose que les lois des mouvements des corps solides, tandisque celles des autres géométries étaient les lois que pourraient suivre d'autres corps analogues qui sans doute n'existent pas, mais dont l' existence pourrait être conçue sans qu'il en resultât la moindre contradiction, des corps que l'on pourrait fabriquer si on le voulait. Ces lois ne pouvaient, toutefois, être regardées comme experimentales puisque les solides naturels ne les suivent que grossièrement et d'ailleurs, puisque les corps fictifs de la géométrie non euclidienne, n'existant pas, ne peuvent être accessibles à l'experience. Helmholtz, toutefois, ne s'est jamais expliqué sur ce point avec une parfaite netteté.

Lie a poussé l'analyse beaucoup plus loin. Il a cherché de quelle manière peuvent se combiner les divers mouvements possibles d'un système quelconque, ou plus généralement les diverses transformations possibles d'une figure. Si l'on envisage un certain nombre de transformations et qu'on les combine ensuite de toutes les manières possibles, l'ensemble de toutes ces combinaisons formera ce qu'il appelle *un groupe.* A chaque groupe correspond une géométrie, et la notre qui correspond au groupe des déplacements d'un corps solide n'est qu'un cas très particulier. Mais tous les groupes que l' on peut imaginer posséderont certaines propriétés communes, et ce sont précisément ces propriétés communes qui limitent le caprice des inventeurs de géométries; ce sont elles, d'ailleurs, que Lie a etudiées toute sa vie.

Il n'était pourtant pas entièrement satisfait de son oeuvre. Il avait, disait-il, toujours envisagé l'espace comme une *Zahlenmannigfaltigkeit.* Il s'était borné à l'étude des groupes continus proprement dits auxquels s'appliquent les règles de l'Analyse infinitésimale ordinaire. Ne s'était-il pas ainsi artificiellement restreint? N'avait-il pas ainsi négligé un des axiomes indispensables de la géométrie (c'est en somme de l'axiome d'Archimède qu'il s'agit.)? Je ne sais si l'on trouverait trace de cette préoccupation dans ses Oeuvres imprimées, mais dans sa correspondance, ou dans sa conversation, il exprimait sans cesse ce même regret.

Un nouveau progrès restait donc à accomplir et c'est à Hilbert qu'en devait revenir l'honneur. Il importe cépendant de dire un mot des travaux qui l'ont préparé et rendu possible. Depuis le temps de Lobatchefsky, la pensée mathématique a subi une profonde évolution non seulement en Géométrie, mais en Arithmétique et en Analyse. La notion de nombre s'est éclaircie et précisée; en même temps elle a reçu des généralisations diverses. La plus précieuse pour les analystes est celle qui résulte de l'introduction des *imaginaires* dont les mathématiciens modernes ne pourraient plus se passer; mais on ne s'est pas arrêté là et l'on a fait entrer dans la Science d'autres généralisations du nombre, ou, comme on dit, d'autres catégories de nombres complexes.

Les opérations de l'Arithmétique ont été de leur coté soumises à la critique, et les quaternions d'Hamilton nous ont montré un exemple d'une opération qui présente une analogie presque parfaite avec la multiplication, que l'on peut appeler du même nom, et qui pourtant n'est pas commutative, c'est à dire dont le produit change quand on intervertit l'ordre des facteurs. C'était là, en Arithmétique une révolution toute pareille à celle qu'avait faite Lobatchefski en Géométrie.

Notre façon de concevoir l'infini s'est également modifiée. M. G. Cantor nous a appris a distinguer des degrés dans l'infini lui-même (qui n'ont d'ailleurs rien de commun avec les infiniments petits des différents ordres crées par Leibnitz en vue du calcul infinitésimal ordinaire). La notion du continu, longtemps regardée comme primitive, a été analysée et reduite à ses élements.

Mentionnerai-je également les travaux des Italiens qui se sont efforcés de créer un symbolisme logique universel et de réduire le raisonnement mathématique à des règles purement mécaniques? C'est ainsi par exemple que plusieurs géométres italiens tels que M. M. Peano et Padoa ont crée une *pasigraphie*, c'est-à-dire une sorte d'Algèbre universelle où tous les raisonnements sont remplacés par des symboles ou de formules.

Enfin je dois citer le livre de M. Veronese sur les fondements de la géométrie où l'auteur applique pour la première fois à la géométrie les nombres transfinis de Cantor; j'aurai plus loin l'occasion de reparler de cet ouvrage.

En 1899 à l'occasion du jubilé de Gauss et Weber, M. Hilbert publia un mémoire intitulé *Grundlagen der Geometrie* et rempli des idées les plus originales. Ce n'était pas d'ailleurs la premiere fois qu'il s'occupait de questions analogues, témoin sa lettre de 1894 à M. Klein: *Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.* Depuis il publia dans divers recueils une suite d'articles intitulés:

Ueber den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.

Neue Begründung der Bolyai-Lobatscheffskyschen Geometrie.

Ueber die Grundlagen der Geometrie.

Ueber Flächen von konstanter Gaussscher Krümmung. Tous ces articles ont été réunis de façon à former une seconde édition de son mémoire jubilaire; et je dois ajouter que cette seconde édition comporte une série d'additions et de perfectionnements qui en augmentent beaucoup la valeur.

C'est donc cette seconde édition que nous suivrons dans notre analyse; mais nous la rapprocherons d'une part d'autres travaux de Hilbert, tels que son article *Ueber den Zahlbegriff* et sa conférence de Paris sur les problèmes mathématiques de l'avenir et d'autres part de plusieures théses écrites par ses élèves, sous son inspiration directe et qui par conséquent nous aideront à comprendre sa pensée. Les principales sont:

Ueber die Geometrieen in denen die Geraden die kürzesten sind par *M. Hamel.*

Die Legendre'schen Sätze ueber die Winkelsumme im Dreieck par *M. Dehn.*

Liste des axiomes.

M. Hilbert commence par établir la liste complète des axiomes, en s'efforçant de n'en oublier un; cela n'est pas aussi facile qu'on pourrait croire et Euclide lui même en applique qu'il n'énonce pas. L'intuition géométrique nous est tellement familière que nous faisons usage des verités intuitives pour ainsi dire sans nous en apercevoir. De là pour atteindre le but que se proposait Hilbert, la nécessité de ne pas accorder à l'intuition la plus petite place.

La liste de M. Hilbert est-elle définitive? Il est permis de le croire, car elle semble avoir été dressée avec soin. Le savant Professeur répartit les axiomes en cinq groupes:

I. Axiome der Verknüpfung (je traduirai par *axiomes projectifs* au lieu de chercher une traduction littérale, comme par exemple *axiomes de la connection*, qui ne saurait être satisfaisante).

II. Axiome der Anordnung (axiomes de l'ordre).

III. Axiomes de la congruence ou axiomes métriques.

IV. Axiome d'Euclide.

V. Axiome d'Archimède.

Parmi les axiomes projectifs, nous distinguerons ceux du plan et ceux de l'espace; les premiers sont ceux qui dérivent de la proposition bien connue: *par deux points passe une droite et une seule*; mais je préfère traduire littéralement afin de bien faire comprendre la pensée de M. Hilbert.

„Imaginons trois systèmes d'objets que nous appellerons *points*, *droites* et *plans*. Imaginons que ces points, droites et plans soient liés par certaines relations que nous exprimerons par les mots *être situé sur*, *entre*, etc.

„I.—1. Deux points différents A et B déterminent toujours une droite a; ce que nous écrirons

$$AB = a \quad \text{ou} \quad BA = a.$$

„Au lieu du mot *déterminent* nous emploierons également d'autres tournures de phrase qui seront synonymes; nous dirons: A est situé sur a, A est un point de a, a passe par A, a joint A à B, etc.

„I.—2. Deux points quelconques d'une droite déterminent cette droite, c'est-à-dire que si $AB = a$ et que $AC = a$, et si B est différent de C, on a aussi $BC = a$."

Voici les réflexions que doivent nous inspirer ces énoncés: les expressions, *être situé sur*, *passe par*, etc., ne sont pas destinées à évoquer des images; elles sont simplement des synonymes du mot *déterminer*. Les mots *point*, *droite* et *plan* eux-mêmes ne doivent provoquer dans l'esprit aucune représentation sensible. Ils pourraient indifféremment désigner des objets d'une nature quelconque, pourvu qu'on pût établir entre ces objets une correspondance telle qu'à tout système de deux des objets appelés *points* correspondît un des objets appelés *droites*, et un seul. Et c'est pourquoi il devient nécessaire d' ajouter (I, 2) que, si la droite qui correspond au système des deux points A et B est la même que celle qui correspond au système des deux points B et C, c'est aussi la même qui correspond au système des deux points A et C.

Ainsi M. Hilbert a, pour ainsi dire, cherché à mettre les axiomes sous une forme telle qu'ils puissent être appliqués par quelqu'un qui n'en comprendrait pas le sens parce qu'il n'aurait jamais vu ni point, ni droite, ni plan. Les raisonnements doivent pouvoir, d'après lui, se ramener à des règles purement mécaniques, et il suffit, pour faire la Géométrie, d'appliquer servilement ces règles aux axiomes, sans savoir ce qu'ils veulent dire. On pourra ainsi construire toute la Géométrie, je ne dirai pas précisément sans y rien comprendre, puisqu'on saisira l' enchaînement logique des propositions, mais tout au moins sans y rien voir. On pourrait confier les axiomes à une machine à raisonner, par exemple au *piano raisonneur* de Stanley Jevons, et l'on en verrait sortir toute la Géométrie.

Cette préoccupation peut sembler artificielle et puérile; et il est inutile de faire observer combien elle serait funeste dans l'enseignement et nuisible au développement des esprits; combien elle serait desséchante pour les chercheurs, dont elle tarirait promptement l'originalité. Mais, chez M. Hilbert, elle s'explique et se justifie, si l'on se rappelle le but poursuivi. La liste des axiomes est-elle complète, ou en avons-nous laissé échapper quelques-uns que nous appliquons inconsciemment? Voilà ce qu'il faut savoir. Pour cela nous avons un critère, et nous n'en avons qu'un. Il faut chercher si la Géométrie est une conséquence logique des axiomes explicitement énoncés, c'est-à-dire si ces axiomes confiés à la machine à raisonner peuvent en faire sortir toute la suite des propositions.

Si oui, on sera certain de n'avoir rien oublié. Car notre machine ne peut fonctionner que conformément aux règles de la Logique pour lesquelles elle a été construite; elle ignore ce vague instinct que nous appelons *intuition.*

Je ne m'étendrai pas sur les axiomes projectifs de l'espace que l'auteur numérote I, 3, 4, 5, 6. Rien n'est changé aux énoncés habituels.

Un mot seulement sur l'axiome I, 7, qui se formule ainsi:

„Sur toute droite il y a au moins deux points; sur tout plan, il y a au moins trois points non en ligne droite; dans l'espace il y a au moins quatre points qui ne sont pas dans un même plan.“

Cet énoncé est caractéristique. Quiconque aurait laissé à l'intuition une place, si petite qu'elle fût, n'aurait pas songé à dire que sur toute droite il y a au moins deux points, ou bien il aurait ajouté tout de suite qu'il y en a une infinité;

car l'intuition de la droite lui aurait révélé immédiatement et simultanément ces deux vérités.

Passons au second groupe, celui des axiomes de l'ordre. Voici l'énoncé des deux premiers:

„Si trois points sont sur une même droite, il y a entre eux une certaine relation que nous exprimons en disant que l'un des points, et un seulement, est entre les deux autres. Si C est entre A et B, et si D est entre A et C, D sera aussi entre A et B, etc.“

Ici encore nous ne faisons pas intervenir l'intuition; nous ne cherchons pas à approfondir ce que signifie le mot *entre*, toute relation satisfaisant aux axiomes pourrait être désignée par le même mot. Voila qui est bien propre à nous éclairer sur la nature purement formelle des définitions mathématiques; mais je n'insiste pas, car je n'aurais qu'à répéter ce que j'a dit à propos du premier groupe.

Mais une autre réflexion s'impose. Les axiomes de l'ordre sont présentés comme dépendant des axiomes projectifs, et ils n'auraient plus aucun sens si l'on n'admettait pas ces derniers, puisqu'on ne saurait ce que c'est que trois points en ligne droite. Et cependant il existe une géométrie particulière, purement qualitative, et qui est absolument indépendante de la Géométrie projective qui ne suppose connues ni la notion de droite, ni celle de plan, mais seulement celles de ligne et de surface c'est ce qu'on appelle l'*Analysis sitûs*. Ne serait-il pas préférable de donner aux axiomes du deuxième groupe une forme qui les affranchît de cette dépendance et les séparât complètement du premier groupe? Il reste à savoir si cela serait possible, en conservant à ces axiomes leur caractère purement logique, c'est-à-dire en fermant complètement la porte à toute intuition.

Le troisième groupe comprend les axiomes métriques où nous distinguerons trois sous-groupes. Les propositions III, 1, 2, 3 sont les axiomes métriques des segments: ces axiomes servent à définir les longueurs. On conviendra de dire qu'un segment pris sur une droite peut être congruent (égal) à un segment pris sur une autre droite; c'est l'axiome III, 1; mais cette convention n'est pas tout à fait arbitraire; elle doit être faite de façon que deux segments congruents à un même troisième soient congruents entre eux (III, 2); on définit ensuite par une convention nouvelle l'addition des segments, et cette convention, à son tour, doit être faite de façon qu'en additionnant des segmens égaux on trouve des sommes égales; et c'est là l'axiome III, 3.

Les propositions III, 4, 5 sont les axiomes correspondants pour les angles. Mais cela ne suffit pas encore: aux deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles il faut adjoindre l'axiome métrique des triangles (que M. Hilbert numérote III, 6); si deux triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux, les autres angles de ces deux triangles sont égaux chacun à chacun.

On retrouve là l'un des cas connus de l'égalité des triangles, que l'on démontre d'ordinaire par superposition, et qu'on doit poser en postulat si l'on veut éviter de faire appel à l'intuition. Quand d'ailleurs on se servait de l'intuition, c'est-à-dire de la superposition, on voyait du même coup que les troisièmes côtés étaient égaux dans les deux triangles, et les deux propositions étaient unies pour ainsi dire dans une même aperception; ici, au contraire, nous les séparons; de l'une d'elles nous faisons un postulat, mais nous n'érigeons pas l'autre en postulat, parce qu'elle peut se déduire logiquement de la première.

Un point important ici n'est pas traité; il aurait fallu compléter la liste des axiomes en disant que le segment AB est congruent au segment inverse BA. Cet axiome implique la symetrie de l'espace et l'égalité des angles à la base dans un triangle isoscèle. M. Hilbert ne traite pas ici cette question, mais il en a fait l'objet d'un mémoire sur lequel nous reviendrons plus loin.

Je regretterai aussi que, dans cet exposé des axiomes métriques, il ne reste plus aucune trace d'une notion dont Helmholtz avait, le premier, compris l'importance: je veux parler du déplacement d'une figure invariable. On aurait pu conserver à cette notion son rôle naturel, sans sacrifier le caractère logique des axiomes. On aurait evité ainsi l'introduction articielle de cet axiome III, 6, et les postulats auraient été rattachés à leur veritable origine psychologique. Dans un autre mémoire sur lequel nous reviendrons M. Hilbert s'est placé à ce point de vue qui nous semble plus satisfaisant.

Le quatrième groupe ne comprend que le postulatum d Euclide.

Le cinquième groupe comprend deux axiomes; le premier et le plus important est celui d'Archimède.

Soient deux points quelconques A et B sur une droite D; soit a un segment quelconque; construisons sur D, à partir du point A, et dans la direction AB, une série de segments tous égaux entre eux et égaux à a: $AA_1 : A_1A_2, \ldots A_{n-1}A_n$; on pourra toujours prendre n assez grand pour que le point B se trouve sur l'un de ces segments.

C'est-à-dire que, si l'on se donne deux longueurs quelconques l et L, on peut toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que, en ajoutant n fois à elle même la longueur l, on obtienne une longueur totale plus grand que L.

Le second est l'Axiom der Vollständigkeit dont j'expliquerai plus loin le sens.

Indépendance des axiomes.—La liste des axiomes une fois dressée, il faut voir si elle est exempte de contradictions. Nous savons bien que oui, puisque la géometrie existe; et M. Hilbert avait d'abord répondu oui en construisant une géométrie. Mais, chose étrange, cette géométrie n'est pas tout à fait la notre, son espace n'est pas le nôtre, ou du moins ce n'en est qu'une partie. Dans l'espace de M. Hilbert, il n'y a pas tous les points qui sont dans le nôtre, mais ceux seulement qu'on peut, en partant de deux points donnés, construire par le moyen de la règle et du compas. Dans cet espace, par exemple, il n'existerait pas, en général, un angle qui serait le tiers d'un angle donné.

Je crois bien que cette conception aurait été regardée par Euclide comme plus raisonnable que la nôtre. Toujours est-il que ce n'est pas la nôtre. Pour retrouver notre géométrie il faudrait ajouter un axiome.

„Si sur une droite, il y a une double infinité de points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots B_1, B_2, \ldots B_n \ldots$ tels que B_q soit compris entre A_p et B_{q-1}, et A_p entre B_q et A_{p-1}, quelsque soient p et q, il y aura sur cette droite au moins un point C qui sera entre A_p et B_q, quelsque soient p et q".

Dans sa seconde édition, M. Hilbert a voulu complèter sa liste de façon à retrouver notre géométrie et à n'en pas retrouver d'autre. Mais il ne se servit pas de l'axiome que nous venons d'énoncer et préféra adopter l'Axiom der Vollständigkeit qu'il enonce comme il suit:

Au système des points, droites et plans, il est impossible d'adjoindre un autre système d'objets tel que le système complet satisfasse à tous les autres axiomes.

Il est clair alors que cet espace dont je parlais qui ne contient pas tous les points de notre espace ne satisfait pas à ce nouvel axiome, car on peut lui adjoindre ceux des points de notre espace qu'il ne contenait pas, sans cesser de satisfaire à tous les axiomes.

Il y donc une infinité de géométries qui satisfont à tous les axiomes, moins l'Axiom der Vollständigkeit, mais il n'y en a qu'une, la nôtre qui satisfasse en outre à ce dernier axiome.

On doit se demander ensuite si les axiomes sont indépendants, c'est-à-dire si l'on peut sacrifier l'un des cinq groupes en conservant les quatre autres et obtenir néanmoins une géométrie cohérente. C'est ainsi qu'en supprimant le groupe IV (postulatum d'Euclide) on obtient la géométrie non-euclidienne de Lobatschefski.

On peut également supprimer le groupe III. M. Hilbert a réussi à conserver les groupes I, II, IV et V, ainsi que les deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles, tout en rejetant l'axiome métrique des triangles, c'est-à-dire la proposition III, 6,

Voici comment il y parvient: considérons, pour simplifier, une Géométrie plane et soit P le plan dans lequel nous opérons; nous conserverons aux mots *points* et *droites* leur sens habituel; de même nous conserverons aux angles leur mesures habituelles; mais il n'en sera pas de même pour les longueurs. Une longueur sera mesurée *par définition* par sa projection sur un plan Q différent de P, cette projection conservant elle-même sa mesure habituelle. Il est clair que tous les axiomes subsisteront, sauf les axiomes métriques. Les axiomes métriques des angles subsisteront également, puisque nous ne changeons rien à la mesure des angles; ceux des segments sont vrais également, puisque, chaque segment du plan P est mesuré par un autre segment qui est sa projection sur le plan Q, et que ce dernier segment est mesuré à la manière habituelle. Au contraire, les théorèmes sur l'égalité des triangles, tels que l'axiome III, 6, ne sont plus vrais. Cette solution ne me satisfait qu'à moitié; les angles ont été définis indépendamment des longueurs, sans qu'on se soit préoccupé de mettre les deux définitions d'accord.

(ou plutôt en les mettant en désaccord à dessein). Il suffirait de changer l'*une* des deux définitions pour retomber sur la Géométrie classique. Je préférerais qu'on donnât des longueurs une définition telle qu'il devînt impossible de trouver une définition des angles satisfaisant aux axiomes métriques des angles et des triangles. Cela ne serait d'ailleurs pas difficile.

Il aurait été facile à M. Hilbert de créer une géométrie où les axiomes de l'ordre seraient abandonnés, tandis que tous les autres seraient conservés. Ou plutôt cette Géométrie existe déjà, ou plutôt encore il en existe déjà deux. Il y a celle de Riemann, pour laquelle, il est vrai, le postulatum d'Euclide (groupe IV) est abandonné également, puisque la somme des angles d'un triangle est plus grand que deux droits. Pour bien faire comprendre ma pensée, je me bornerai à considérer une géométrie à deux dimensions. La Géométrie de Riemann à deux dimensions n'est autre chose que la Géométrie sphérique, à une condition toutefois: c'est que l'on ne regarde pas comme distincts deux points diamétralement opposés sur la sphère. Les éléments de cette Géométrie seront donc les différents diamètres de cette sphère. Or, si l'on envisage trois diamètres d'une même sphère situés dans un même plan diamétral, on n'a aucune raison de dire que l'un d'eux est *entre* les deux autres. Le mot *entre* n'a plus de sens, et les axiomes de l'ordre tombent d'eux-mêmes.

Si nous voulons maintenant une Géométrie où les axiomes de l'ordre ne subsisteront pas, et où l'on conservera le postulatum d'Euclide avec les autres, nous n'avons qu'à prendre pour éléments les points et les droites *imaginaires* de l'espace ordinaire. Il est clair que les points imaginaires de l'espace ne nous sont pas donnés comme *rangés* dans un ordre déterminé. Mais il y a plus: on peut se demander s'ils sont susceptibles d'être ainsi rangés; cela serait sans doute possible, comme l'a montré G. Cantor (à la condition, bien entendu, de ne pas toujours ranger dans le voisinage l'un de l'autre des points que nous regardons comme infiniment voisins, de rompre par conséquent la continuité de l'espace). On pourrait bien, dis-je, les ranger, mais cela ne pourrait pas se faire de telle façon que cet ordre ne soit pas altéré par les diverses opérations de la Géométrie (perspective, translation, rotation, etc.). Les axiomes de l'ordre ne sont donc pas applicables à cette Géométrie.

La Géométrie non archimédienne.—Mais la conception la plus originale de M. Hilbert, c'est celle de la Géométrie non archimédienne, où tous les axiomes restent vrais, sauf celui d'Archimède. Pour cela il fallait d'abord construire un *système de nombres non archimédiens* c'est-à-dire un système d'éléments entre lesquels on pût concevoir des relations d'égalité et d'inégalité et auxquels on pût appliquer des opérations correspondant à l'addition et à la multiplication arithmétiques, et cela de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

1° Les règles arithmétiques de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité, etc.; *Arithmetische Axiome der Verknüpfung*) subsistent sans changement.

2° Les règles du calcul et de la transformation des inégalités (*Arithmetische Axiome der Anordnung*) subsistent également.

3° L'axiome d'Archimède n'est pas vrai.

On peut arriver à ce résultat en choisissant pour élément des séries de la forme suivante:

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \dots,$$

où m est un entier positif ou négatif et où les coefficients A sont réels, et en convenant d'appliquer à ces séries les règles ordinaires de l'addition et de la multiplication. Il faut ensuite définir les conditions d'inégalité de ces séries, de façon à *ranger* nos éléments dans un ordre déterminé. Nous y arriverons par la convention suivante: nous attribuerons à notre série le signe de A_0 et nous dirons qu'une série est plus petite qu'une autre quand, retranchée de celle-ci, elle donne une différence positive.

Il est clair qu'avec cette convention, les règles du calcul des inégalités subsistent; mais l'axiome d'Archimède n'est plus vrai; et, en effet, si nous prenons les deux éléments 1 et t le premier, additionné à lui-même autant de fois qu'on le voudra, restera toujours plus petit que le second. On aura toujours $t > n$, quel que soit l'entier n, puisque la différence $t - n$ sera toujours positive, le coefficient du premier terme t, qui, par définition, donne son signe, restant toujours égal à 1.

Nos nombres vulgaires rentrent comme cas particuliers parmi ces *nombres non archimédiens.* Les nouveaux nombres viennent s'intercaler pour ainsi dire dans la série de nos nombres vulgaires, de telle façon qu'il y ait, par exemple, une infinité de nombres nouveaux plus petits qu'un nombre vulgaire donné A et plus grands que tous les nombres vulgaires inférieurs à A.

Cela posé, imaginons un espace à trois dimensions où les coordonnées d'un point seraient mesurées, non pas par des nombres vulgaires, mais par des nombres non archimédiens, mais où les équations habituelles de la droite et du plan subsisteraient, de même que les expressions analytiques des angles et des longueurs. Il est clair que dans cet espace tous les axiomes resteraient vrais, sauf celui d'Archimède.

Sur une droite quelconque, entre nos points vulgaires, viendraient s'intercaler des points nouveaux. Si, par exemple, D_0 est une droite vulgaire, D_1 la droite non archimédienne correspondante; si P est un point vulgaire quelconque D_0, et si ce point partage D_0 en deux demi-droites S et S' (j'ajoute, pour préciser, que je considère P comme ne faisant partie ni de S ni de S'), il y aura sur D_1 une infinité de points nouveaux tant entre P et S qu'entre P et S'. Il y aura également sur D_1 une infinité de points nouveaux qui seront à droite de tous les points vulgaires de D_0. En résumé, notre espace vulgaire n'est qu'une partie de l'espace non archimédien.

On voit quelle est la portée de cette invention et en quoi elle constitue dans la marche de nos idées un pas presque aussi hardi que celui que Lobatchefsky nous a fait faire; la géométrie non euclidienne respectait pour ainsi dire notre conception qualitative du continu géométrique tout en bouleversant nos idées sur la mesure de ce continu. La géométrie non archimédienne détruit cette conception, elle dissèque le continu pour y introduire des éléments nouveaux.

Dans cette conception si audacieuse Hilbert avait eu un precurseur. Dans ses fondements de la géométrie Veronese avait eu une idée analogue. Le chapitre VI de son introduction est le développement d'une véritable arithmétique et d'une véritable géométrie non-archimédiennes où les nombres transfinis de Cantor jouent un rôle preponderant. Toutefois par l'élégance et la simplicité de son exposition, par la profondeur de ses vues philosophiques, par le parti qu'il a tiré de l'idée fondamentale, Hilbert a bien fait sa chose de la nouvelle géométrie.

Quoi qu'il en soit, M. Hilbert poursuit les conséquences de ses prémisses et il cherche comment on pourrait refaire la Géométrie sans se servir de l'axiome d'Archimède. Pas de difficulté en ce qui concerne les Chapitres que les écoliers appellent le *premier* et le *deuxième* Livre. Cet axiome n'y intervient nulle part.

Le troisième Livre traite des proportions et de la similitude. Voici, en substance, la marche que suit M. Hilbert pour le reconstituer sans avoir recours à l'axiome d'Archimède. Il prend la construction habituelle de la quatrième proportionnelle comme définition de la proportion, mais une pareille définition a besoin d'être justifiée; il faut montrer d'abord que le résultat est le même, quelles que soient les lignes auxiliaires employées dans la construction et ensuite que les règles ordinaires du calcul s'appliquent aux proportions ainsi définies. C'est cette justification que M. Hilbert nous donne d'une façon satisfaisante.

Le quatrième Livre traite de la mesure des aires planes; si cette mesure peut s'établir facilement sans le secours du principe d'Archimède, c'est parce que deux polygones équivalents ou bien peuvent être décomposés en triangles de telle façon que les triangles élémentaires de l'un et ceux de l'autre soient égaux chacun à chacun (ou, en d'autres termes, peuvent être ramenés l'un à l'autre par le procédé du casse-tête chinois), no bien peuvent être regardés comme des différences de polygones susceptibles de ce mode de décomposition (c'est toujours le même procédé, en admettant non seulement des triangles additifs, mais encore des triangles soustractifs). Mais nous devons observer qu'une circonstance analogue ne parait pas se retrouver pour deux polyèdres equivalents, de sorte qu'on peut se demander si l'on peut déterminer, par exemple le volume de la pyramide sans un appel plus ou moins déguisé au calcul infinitesimal. Il n'est donc pas certain qu'on pourrait se passer aussi facilement de l'axiome d'Archimède dans la mesure des volumes que dans celle des aires planes. M. Hilbert ne l'a d'ailleurs pas tenté. Mais depuis la publication de la première édition, un de ses éléves a démontré que le procédé du casse-tête chinois n'est pas applicable aux volumes des solides.

Une question restait à traiter toutefois; étant donné un polygone, est-il possible de le décomposer en triangles et d'enlever l'un des morceaux de façon que le polygone restant soit équivalent au polygone donné, c'est-à-dire de façon qu'en transformant ce polygone restant par le procédé du casse-tête chinois, on puisse retomber sur le polygone primitif. D'ordinaire, on se borne à dire que cela est impossible parce que le tout est plus grand que la partie. C'est là invoquer un axiome nouveau, et, quelque évident qu'il nous paraisse, le logicien serait plus satisfait si l'on pouvait l'éviter. M. Schur a trouvé la démonstration, il est vrai, mais en s'appuyant sur l'axiome d'Archimède; M. Hilbert voulait y arriver sans se servir de cet axiome. Voici par quel artifice il y parvient; il admet que la *surface* du triangle est *par définition* le demi-produit de sa base par sa hauteur, et il justifie cette définition en montrant que deux triangles équivalents (au point de vue du casse-tête chinois) ont même *surface* (au sens de la nouvelle définition) et que la *surface* d'un triangle décomposable en plusieurs autres est la somme des *surfaces* des triangles composants. Une fois cette justification terminée, tout le reste suit sans difficulté. C'est donc toujours la même marche. Pour éviter d'incessants appels à l'intuition, qui nous fournirait sans cesse de nouveaux axiomes, on transforme ces axiomes en définitions, et l'on justifie après coup ces définitions en montrant qu'elles sont exemptes de contradictions.

La Géométrie non arguésienne.—Le théorème fondamental de la Géométrie projective est le théorème de Desargues. Deux triangles sont dits *homologues* lorsque les droites qui joignent chacun à chacun les sommets correspondants se coupent en un même point. Desargues a démontré que les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles homologues sont sur une même ligne droite; la réciproque est également vraie.

Le théorème de Desargues peut s'établir de deux manières:

1° En se servant des axiomes projectifs du plan et des axiomes métriques du plan;

2° En se servant des axiomes projectifs du plan et de ceux de l'espace.

Le théorème pourrait donc être découvert par un animal à deux dimensions, à qui une troisième dimension paraîtrait aussi inconcevable qu'à nous une quatrième, qui par conséquent ignorerait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui aurait vu se déplacer, dans le plan qu'il habite, des figures invariaples analogues à nos corps solides, et qui, par conséquent, connaîtrait les axiomes métriques. Le théorème pourrait être découvert également par un animal à trois dimensions qui connaîtrait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui, n'ayant jamais vu se déplacer de corps solides, ignorerait les axiomes métriques.

Mais pourrait on établir le théorème de Desargues sans se servir ni des axiomes projectifs de l'espace, ni des axiomes métriques, mais seulement des axiomes projectifs du plan? On pensait que non, mais on n'en était pas sûr. M. Hilbert a tranché la question en construisant une *géométrie non arguesienne*, qui est, bien entendu, une géométrie plane. Considérons une ellipse E. A l'extérieur de cette ellipse, le mot *droite* conserve son sens habituel; à l'intérieur le mot *droite* prend un sens différent et il s'applique à un arc de cercle qui, prolongé, irait passer par un point fixe P extérieur à l'ellipse. Une droite qui traverse l'ellipse E se composera donc de deux parties rectilignes, au sens ordinaire du mot, raccordées à l'intérieur de l'ellipse par un arc de cercle; tel un rayon lumineux qui serait dévié de sa trajectoire rectiligne en traversant un corps réfringent.

Les axiomes projectifs du plan seront encore vrais si l'on suppose le point P assez éloigné de l'ellipse E.

Plaçons maintenant deux triangles homologues en dehors de l'ellipse E, et de telle façon que leurs côtés ne rencontrent pas E, les trois droites qui joignent deux à deux les sommets correspondants, *si on les entend au sens ordinaire du mot*, iront se couper en un même point Q d'après le théorème de Desargues; supposons que ce point Q soit à l'intérieur de E. *Si maintenant nous entendons le mot* droite *au sens nouvel*, les trois droites qui joignent les sommets correspondants seront déviées en pénétrant à l'intérieur de l'ellipse. Elles n'iront donc plus passer en Q, elles ne seront plus concourantes. Le théorème de Desargues n'est plus vrai dans notre nouvelle géométrie, c'est une géométrie non arguésienne.

La Géométrie non pascalienne. — M. Hilbert ne s'arrête pas là et il introduit encore une nouvelle conception. Pour bien la comprendre, il nous faut d'abord retourner un instant dans le domaine de l'Arithmétique. Nous avons vu plus haut s'élargir la notion de nombre, par l'introduction des *nombres non archimédiens.* Il nous faut une classification de ces nombres nouveaux, et pour l'obtenir nous allons classer d'abord les axiomes de l'Arithmétique en quatre groupes qui seront:

1° Les lois d'associativité et de commutativité de l'addition, la loi d'associativité de la multiplication, les deux lois de distributivité de la multiplication; ou en résumé toutes les règles de l'addition et de la multiplication, sauf la loi de commutativité de la multiplication;

2° Les axiomes de l'ordre, c'est-à-dire les règles du calcul des inégalités;

3° La loi de commutativité de la multiplication d'après laquelle on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit;

4° L'axiome d'Archimède.

Les nombres qui admettront les axiomes des deux premiers groupes seront dits *arguésiens*; ils pourront être *pascaliens* ou *non pascaliens* selon qu'ils satisferont ou ne satisferont pas à l'axiome du troisième groupe, ils seront *archimédiens* ou *non archimédiens*, suivant qu'ils satisferont ou non à l'axiome du quatrième groupe. Nous ne tarderons pas à voir la raison de ces dénominations.

Les nombres ordinaires sont à la fois arguésiens, pascaliens et archimédiens. On peut démontrer la loi de commutativité en partant des axiomes des deux premiers groupes et de l'axiome d'Archimède; il n'y a donc pas de nombres arguésiens, archimédiens et non pascaliens.

En revanche, nous avons cité plus haut un exemple de nombres arguésiens, pascaliens et non archimédiens; c'est ce que j'appellerai les *nombres du système* T, et je rappelle qu'à chacun de ces nombres correspond une série de la forme

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots,$$

où les A sont des nombres réels ordinaires.

Il est aisé de former, par un procédé analogue, un système de nombres arguésiens, non pascaliens et non archimédiens. Les éléments de ce système seront des séries de la forme

$$S = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \ldots,$$

où s est un symbole analogue à t, n un entier positif ou négatif, et T_0, T_1,... des nombres du système T; si donc on remplaçait les coefficients T_0, T_1,... par les séries en t correspondantes, on aurait une série dépendant à la fois de t et de s. On additionnera les séries S d'après les règles ordinaires, et de même pour la multiplication de ces séries on admettra les règles de distributivité et d'associativité, mais on admettra que la loi de commutativité n'est pas vraie et qu'au contraire $st = -ts$.

Il reste à *ranger* les séries dans un ordre déterminé pour satisfaire aux axiomes de l'ordre. Pour cela, on attribuera à la série S le signe du premier coefficient T_0; on dira qu'une série est plus petite qu'une autre, quand, retranchée de celle-ci, elle donnera une différence positive. C'est donc toujours la même règle: t est regardé comme très grand par rapport à un nombre réel ordinaire quelconque, et s est regardé comme très grand par rapport à un nombre quelconque du système T.

La loi de commutativité n'étant pas vraie, ce sont bien des nombres non pascaliens.

Avant d'aller plus loin, je rappelle que Hamilton a depuis longtemps introduit un système de nombres complexes où la multiplication n'est pas commutative; ce sont les *quaternions*, dont les Anglais font un si fréquent usage en Physique mathématique. Mais, pour les quaternions, les axiomes de l'ordre ne sont pas vrais; ce qu'il y a donc d'original dans la conception de M. Hilbert, c'est que ses nouveaux nombres satisfont aux axiomes de l'ordre sans satisfaire à la règle de commutativité.

Quaternions

Revenons à la Géométrie. Admettons les axiomes des trois premiers groupes, c'est-à-dire les axiomes projectifs du plan et de l'espace, les axiomes de l'ordre et le postulat d'Euclide; le théorème de Desargues s'en déduira, puisqu'il est une conséquence des axiomes projectifs de l'espace.

Nous voulons constituer notre géométrie *sans nous servir des axiomes métriques*; le mot de *longueur* n'a donc encore pour nous aucun sens; nous n'avons pas le droit de nous servir du compas; en revanche, nous pouvons nous servir de la règle, puisque nous admettons que par deux points on peut faire passer une droite, en vertu de l'un des axiomes projectifs; nous savons également mener par un point une parallèle à une droite donnée puisque nous admettons le postulatum d'Euclide. Voyons ce que nous pouvons faire avec ces ressources.

Nous pouvons définir l'homothétie de deux figures; deux triangles seront dits *homothétiques* quand leur côtés seront parallèles deux à deux, et nous en conclurons (par le théorème de Desargues que nous admettons) que les droites qui joignent les sommets correspondants sont concourantes. Nous nous servirons ensuite de l'homothétie pour définir les proportions. Nous pouvons aussi définir l'égalité dans une certaine mesure.

Les deux côtés opposés d'un parallélogramme seront égaux *par définition*; nous savons ainsi reconnaître si deux segments sont égaux entre eux, pourvu qu'ils soient parallèles.

Grâce à ces conventions, nous sommes maintenant en mesure de comparer les longueurs de deux segments; mais *pourvu que ces segments soient* parallèles. La comparaison de deux longueurs dont la direction est différente n'a aucun sens, et il faudrait pour ainsi dire une unité de longueur différente pour chaque direction. Inutile d'ajouter que le mot *angle* n'a aucun sens.

Les longueurs seront ainsi exprimées par des nombres; mais ce ne seront pas forcément des nombres ordinaires. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que, si le théorème de Desargues est vrai comme nous l'admettons, ces nombres appartiendront à un système satisfaisant aux axiomes arithmétiques des deux premiers groupes, c'est-à-dire à un *système arguésien*. Inversement, étant donné un système quelconque S de nombres arguésiens, on peut construire une géométrie telle que les longueurs des segments d'une droite soient justement exprimées par ces nombres.

Voici comment peut se faire cette construction: un point de ce nouvel espace sera *défini* par trois nombres x, y, z du système S qui s'appelleront les *coordonnées* de ce point. Si aux trois coordonnées des divers points d'une figure on ajoute trois constantes (qui sont, bien entendu, des nombres arguésiens du système S), on obtient une autre figure transformée de la première et de telle façon qu'à un segment quelconque de l'une des figures corresponde dans l'autre un segment égal et parallèle (au sens donné plus haut à ce mot). Cette transformation est donc une translation, de sorte que ces trois constantes définissent une translation. Si maintenant nous multiplions les trois coordonnées de tous les points d'une même figure par une même constante, nous obtiendrons une seconde figure qui sera homothétique de la première.

L'équation du plan sera une équation linéaire connue dans la Géométrie analytique ordinaire; mais, comme dans le système S la multiplication ne sera pas commutative en général, il importe de faire une distinction et de dire que dans chacun des termes de cette équation linéaire ce sera la coordonnée qui jouera le rôle de multiplicande, et le coefficient constant qui jouera le rôle de multiplicateur.

Ainsi, à chaque système de nombres arguésiens correspondra une géométrie nouvelle satisfaisant aux axiomes projectifs, à ceux de l'ordre, au théorème de Desargues et au postulatum d'Euclide. Quelle est maintenant la signification géométrique de l'axiome arithmétique du troisième groupe, c'est-à-dire de la règle de commutativité de la multiplication? *La traduction géométrique de cette règle, c'est le théorème de Pascal*; je veux parler du théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique, en supposant que cette conique se réduit à deux droites.

Ainsi, le théorème de Pascal sera vrai ou faux, selon que le système S sera pascalien ou non pascalien; et, comme il y a des systèmes non pascaliens, *il y aura également des géométries non pascaliennes.*

Le théorème de Pascal peut se démontrer en partant des axiomes métriques; il sera donc vrai, si l'on admet que les figures peuvent se transformer nous seulement par homothétie et translation, comme nous venons de la faire, mais encore par rotation.

Le théorème de Pascal peut également se déduire de l'axiome d'Archimède, puisque nous venons de voir que tout système de nombres arguésiens et archimédiens est en même temps pascalien; *toute géométrie non pascalienne est donc en même temps non archimédienne.*

Le Streckenüberträger.—Citons encore une autre conception de Hilbert. Il étudie les constructions que l'on pourrait faire, non pas à l'aide de la règle et du compas, mais par le moyen de la règle et d'un instrument particulier qu'il appelle *Streckenüberträger*, et qui permettrait de porter sur une droite un segment égal à un autre segment pris sur une autre droite. Le *Streckenüberträger* n'est pas l'équivalent du compas; ce dernier instrument permettrait de construire l'intersection de deux cercles ou d'un cercle et d'une droite quelconque; le *Streckenüberträger* nous donnerait seulement l'intersection d'un cercle et d'une droite *passant par le centre de ce cercle.* M. Hilbert cherche donc quelles sont les constructions qui seront possibles avec ces deux instruments, et il arrive à une conlusion bien remarquable.

Les constructions qui peuvent se faire par la règle et le compas peuvent se faire également par la règle et le *Streckenüberträger, si ces constructions sont telles que le résultat en soit toujours réel.* Il est clair, en effet, que cette condition est nécessaire; car un cercle est toujours coupé *en deux points réels* par une droite menée par son centre. Mais il était difficile de prévoir que cette condition serait également suffisante.

Mais ce n'est pas tout; dans toutes ces constructions il serait possible de remplacer le *Streckenüberträger* par l'*Eichmass*, instrument qui permet de porter sur une droite quelconque à partir d'un point quelconque non plus une longueur quelconque mais une longueur égale à l'unité.

Cette remarque, due à l'un des éleves de M. Hilbert, augmente beaucoup la portée du résultat précédent.

Le mémoire que nous venons d'analyser mettait en evidence l'importance de la nouvelle géométrie non-archimédienne; il discutait le rôle de l'axiome d'Archimede dans les raisonnements géométriques; et le principal résultat de cette discussion pouvait se resumer ainsi; si l'on abandonne cet axiome et que l'on conserve seulement les axiomes des quatre premiers groupes, les résultats essentiels de la géométrie euclidienne ne sont pas altérés; mais il n'en est plus de même si on conserve seulement les axiomes projectifs et ceux de l'ordre, ainsi que le postulatum d'Euclide, mais en abandonnant à la fois l'axiome d'Archimède et les axiomes métriques; on peut alors tomber sur la géométrie non-pascalienne.

Une question se pose alors, ce que nous venons de dire de la géométrie euclidienne est-il encore vrai de celle de Lobatchefski? En d'autres termes, si l'on conserve seulement les axiomes des trois premiers groupes (projectifs, de l'ordre et métriques) et que l'on remplace le postulatum d'Euclide par celui de Lobatchefski, retrouvera-t-on les théorèmes fondamentaux de Lobatchefsky *sans se servir de l'axiome d'Archimède?* C'est cette question que M. Hilbert a resolue dans son article *Ueber eine neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie.* Il y repond affirmativement et montre en particulier qu'il existe toujours une perpendiculaire commune à deux droites du plan qui ne se rencontrent pas sans être parallèles. J'attirerai l'attention sur l'enoncé du postulat de Lobatchefski: „Si b est une droite quelconque du plan et A un point non situé sur cette droite, il passe toujours par A deux demi-droites a_1 et a_2 qui ne sont pas dans le prolongement l'une de l'autre et qui ne coupent pas la droite b, tandisque toute semi-droite, passant par A et située dans l'angle formé par a_1 et a_2, rencontre b."

Ce sont ces deux demi-droites a_1 et a_2 qui ont reçu le nom de *parallèles*. Elles ne rencontrent pas la droite b, mais elles servent de *limite* à l'angle où se trouvent les droites qui rencontrent b et à l'angle où se trouvent les droites qui ne rencontrent pas b.

Je signalerai une théorie élégante de certaines transformations qui portent sur ce qu'on pourrait appeler les points à l'infini du plan lobatscheffskien et dont les lois sont les mêmes que celles de l'addition et de la multiplication des nombres réels. On peut en tirer une exposition très simple et très suggestive de la géométrie non-euclidienne.

L'origine de nos connaissances sur la théorie des parallèles se trouve dans les théorèmes de Legendre qui établissent une correlation nécessaire entre la somme des angles d'un triangle et le choix entre les trois géométries d'Euclide, de Lobatchefski et de Riemann. Quel rôle joue l'axiome d'Archimède dans ces théorèmes?

Cette question préoccupait M. Hilbert et, sous son inspiration, M. Dehn en a fait l'objet d'une thèse que je ne puis ici passer sous silence. Les conclusions de M. Dehn montrent que sans l'axiome d'Archimède les théorèmes de Legendre ne sont plus vrais. Il est vrai encore que si un triangle a la somme de ses angles égale (ou plus grande) (ou plus petite) que deux droits, il en est de même de tous les autres. Il est vra encore que si cette somme est plus petite que deux droits, l'on peut mener à une droite plusieurs parallèles par un point. Il est vrai que si elle est plus grande que deux droits, le postulatum d'Euclide est faux, et que si elle est égale à deux droits, il est impossible que deux droites se rencontrent toujours, mais *les autres théorèmes de Legendre ne sont plus vrais.*

Il existe une géométrie plane où la somme des angles d'un triangle étant plus grande que deux droits, on peut mener à une droite par un point une infinité de parallèles (j'appelle ainsi les droites qui ne la rencontrent pas); c'est la géométrie *non-legendrienne.*

Il en existe une où la somme des angles est égale à deux droits, et où on peut mener à une droite par un point une infinité de parallèles. C'est la *géométrie semi-euclidienne.*

Il me suffira d'expliquer ici ce que c'est que cette dernière, la première etant tout-à fait analogue. Pour cela il faut nous reporter à ce que j'ai dit plus haut de la géométrie *non-archimédienne.* J'ai expliqué comment le plan non-archimédien se déduisait du plan vulgaire par l'adjonction de points nouveaux; comment pour déduire une droite non-archimédienne D_1 de la droite vulgaire D_0, il faut y adjoindre 1° d'une part une infinité de points nouveaux entre deux demi-droites quelconques S' et S'' dont l'ensemble forme D_0. 2° d'autre part une infinité de points nouveaux à droite de tous les points vulgaires de D_0, et une infinité de points nouveaux à gauche de tous les points vulgaires de D_0.

Eh bien, conservons les points nouveaux de la première sorte c'est à dire ceux qui sont à distance finie et suppri mons les points nouveaux de la seconde sorte c'est à dire ceux qui sont à distance infinie. Alors soit D une droite quelconque et A un point quelconque; alors il y aura une infinité de droites passant par A et qui ne rencontreront pas D, ce sont celles qui l'auraient rencontrée en l'un des points nouveaux de la seconde sorte, si ces points n'avaient pas été supprimés: cependant tous les théorèmes d'Euclide subsistent et toute rotation ou toute translation transformera en lui-même le plan non-archimédien ainsi mutilé.

Il semble qu'il y ait là une contradiction avec les résultats de l'article que je viens de citer: *Ueber eine neue Begründung.....* Si, comme l'a montré M. Hilbert, la géométrie de Lobatchefski peut être déduite de son postulat sans l'intervention de l'axiome d'Archimède, comment peut-il y avoir une géométrie semi-euclidienne c'est à dire une géométrie où les théorèmes d'Euclide se concilient avec le postulat de Lobatchefski?

Il semble que cette difficulté provient de ce que l'énoncé du postulat n'est pas le même dans les deux cas. M. Dehn suppose que par un point on peut mener une infinité de droites qui ne rencontrent pas une droite donnée et une infinité de droites qui la rencontrent. Les premières forment un ensemble E_1, les autres forment un ensemble E_2. M. Hilbert suppose de plus qu'il existe une droite limite qui appartient à l'ensemble E_1 et telle que toute droite comprise entre cette droite limite et une droite de E_2 appartient également à E_2. C'est cette droite limite que M. Hilbert considère comme la *parallèle proprement dite.* Dans la géométrie de M. Dehn, cette parallèle proprement dite n'existe pas. Il y aurait là une question interessante à examiner de près. Peut-on construire une géométrie non-archimédienne où cette parallèle proprement dite existe et à laquelle s'appliquent les résultats de M. Hilbert?

Une question analogue est traitée dans un autre article de M. Hilbert: *Ueber die Gleichheit des Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.*

Dans la géométrie plane ordinaire, le plan est symétrique ce qui se traduit par l'égalité des angles à la base du triangle isoscèle.

On doit faire figurer cette *symétrie du plan* dans la liste des axiômes métriques. Dans toutes les géométries plus ou moins étranges dont nous avons parlé jusqu'ici, dans celles du moins où l'on admet les axiomes métriques, dans la géométrie métrique non archimédienne, dans les géométries nouvelles de M. Dehn, dans celles qui ont fait l'objet du mémoire *Ueber eine neue Begründung....* cette symetrie du plan est toujours supposée. Est-elle une conséquence des autres axiomes métriques? Oui, comme le montre M. Hilbert, si l'on admet l'axiome d'Archimède. Non, dans le cas contraire. Il y a des géométries non-archimédiennes où tous les axiomes métriques sont vrais, à l'exception de celui de la symétrie du plan. En voici un exemple.

Les nombres non-archimédiens, définis plus haut, peuvent être infiniment grands ou finis ou infiniments petits; mais un angle sera toujours fini ou infiniment petit à cause de la relation

$$Cos^2\varphi + Sin^2\varphi = 1.$$

Un angle peut donc toujours se mettre sous la forme $\theta + \tau$, θ etant un nombre reel ordinaire et τ un nombre non-archimédien infiniment petit. Définissons alors les coordonnées rectangulaires d'un point, les droites et les translations à la manière ordinaire et définissons la rotation de la manière suivante. Soient α, β les coordonnées du centre de rotation; $\theta + \tau$ l'angle de rotation; x, y les coordonnées d'un point quelconque avant la rotation; x', y' ses coordonnées après la rotation; on aura

$$(x' - \alpha) + i(y' - \beta) = e^{(i\theta + \tau + i\tau)}$$

Considérons le groupe formé par les rotations autour de l'origine, ce groupe ne sera pas permutable à la transformation qui change y en $-y$, ni à aucune transformation qui conserve l'origine, qui change les droites en droites et dont le carré se réduise à la transformation identique. *Le plan n'est donc pas symétrique.*

Tous les autres axiomes métriques subsistent cependant ainsi que le postulatum d'Euclide et même un axiome nouveau que M. Hilbert appelle *Axiom der Nachbarschaft* et qu'il énonce ainsi:

„Etant donné un segment quelconque S, on peut trouver un triangle à l'intérieur duquel on ne puisse placer aucun segment congruent à S.“

Cela résulte aisément de l'equation du cercle. L'équation d'un cercle de rayon ρ et de centre α,β est en effet·

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 e^{2\tau}; \quad \frac{y-\beta}{x-\alpha}=tg(\theta+\tau).$$

En revanche il n'est pas vrai que les angles à la base d'un triangle isoscèle soient égaux; il n'est pas vrai que dans un triangle un côté soit plus petit que la somme de deux autres; enfin le théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse n'est pas vrai. C'est pour cette raison que cette géométrie s'appelle *non-pythagoricienne.*

Je vais parler maintenant d'un article intitulé *Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte* que je ne puis séparer d'une thèse sur le même sujet, écrite par M. Hamel sous l'inspiration de M. Hilbert. Ici nous sommes moins depaysés; non seulement il n'est pas question de renoncer à l'axiome d'Archimède, mais nous ne rencontrons que de fonctions analytiques qui se laissent différentier et intégrer.

Supposons qu'on ait défini les droites à la façon ordinaire et qu'on admette les axiomes projectifs, ceux de l'ordre et les théorèmes de Desargues et de Pascal. Définissons maintenant la longueur d'un arc de courbe quelconque; il n'est pas nécessaire de choisir cette définition de façon à satisfaire aux axiomes métriques c'est à dire de façon à rendre possible le mouvement d'une figure invariable.

Est-il possible de faire ce choix de façon que la ligne droite reste le plus court chemin d'un point à un autre? La définition de la droite n'est pas changée, mais celle du cercle reste arbitraire dans une très large mesure; il faut seulement que tous les cercles qui ont leur centre sur une droite et qui viennent passer par un point de cette droite aient en ce point même tangente. Le problème comporte une infinité de solutions. M. Minkowski, dans un but arithmétique, en a developpé une ou tous les cercles sont des courbes semblables entre elles au sens ordinaire du mot. M. Hilbert, dès 1894, en avait donné une autre qu'on peut caractériser ainsi: Envisagons une courbe fermée connexe qui servira de courbe fondamentale. Soit D une droite, M un point de cette droite; tous les cercles qui ont leur centre sur D et qui passent par M ont même tangente T, et cette tangente quand le point M décrit la droite D, pivote autour d'un point fixe qui est l'intersection de deux tangentes à C aux points où cette courbe est coupeé par la droite D. Enfin M. Hamel a dans sa thèse donné la solution générale de la question, mais cette solution est trop compliquée pour pouvoir être exposée en peu de mots.

Minkowski

Hamel

J'arrive à un important mémoire de M. Hilbert qui est intitulé *Grundlagen der Geometrie*, qui porte par conséquent le même titre que sa Festschrift, mais où il se place cependant à un point de vue tout différent. Dans sa Festschrift en effet, comme on l'a vue par l'Analyse qui précéde, les rapports de la notion d'espace et de la notion du groupe, tels qu'ils résultent des travaux de Lie, sont laissés de côté ou relégués au second plan. Les propriétés générales des groupes n'apparaissent pas dans la liste des axiômes fondamentaux. Il n'en est pas de même dans le mémoire dont nous allons parler.

M. Hilbert suppose un plan sur lequel il fait les hypothèses suivantes:

1° Le points de ce plan correspondent un à un aux points du plan vulgaire ou à une partie de ces points. Ainsi chaque point du plan nouveau a son correspondant dans le plan vulgaire; mais il peut y avoir sur le plan vulgaire des points qui n'ont pas de correspondant sur le plan nouveau. Le plan nouveau a donc pour ainsi dire moins de points que le plan vulgaire, c'est le contraire de ce qui arrivait pour le plan non-archimédien. Les points du plan vulgaire qui ont des correspondants sur le plan nouveau s'appellent Bildpunkte. L'ensemble des Bildpunkte forme sur le plan vulgaire une région que M. Hilbert suppose continue et connexe de telle façon qu'autour de chaque poin- de cette région on puisse décrire un cercle de rayon assez petit pour être contenu dans cette région et qu'on puisse aller d'un point à l'autre de la région, en suivant une courbe continue et sans sortir de la région.

2°. Les points de ce plan nouveau sont susceptibles de transformations appellées *mouvement* et qui forment un *groupe*.

3°. Parmi ces mouvements, il y en a une infinité qui laissent fixe un certain point M et qu'on appelle rotations autour de M. L'ensemble des tranformés d'un même point A par toutes ces rotations s'appèle cercle. Tout cercle a une infinité de points.

4°. Le groupe des mouvements forme un *systeme fermé*; voici ce que cela veut dire: si l'on a une infinité de mouvements qui changent deux points A_0 et B_0 le premier en A_1 et B_1, le second en A_2 et B_2,.... le n-ième en A_n et B_n; et si le point A_n tend vers A et le point B_n vers B quand n croit indéfiniment, il y aura également dans le groupe un mouvement qui changera exactement A_0 et B_0 en A et en B; et c'est encore la même chose si au lieu de deux points on en considére trois ou seulement un.

J'ai un peu abrégé les énoncés, en leur faisant perdre il est vrai un peu de leur précision mais sans en rien retrancher d'essentiel. J'aurais, au sujet de ces énoncés, quelques observations à faire.

Il s'agit en somme de trouver tous les groupes des transformations du plan en lui-même, ou d'une partie du plan en elle même, ces groupes n'etant assujetis qu'à des conditions en apparence très-peu restrictives. Comment peut-on donc aboutir à des conclusions aussi précises? Cela tient à la définition que M. Hilbert donne du mouvement. Pour être un mouvement, une transformation doit satisfaire à plusieures conditions; d'abord elle doit être continue et transformer deux points infiniment voisins en deux points infiniment voisins; ensuite elle doit être biuniforme, c'est à dire que tout point du plan doit avoir un transformé et un seul et être le transformé d'un point et d'un seul.

Par là se trouvent exclus un très grand nombre de groupes; par exemple le groupe des transformations projectives du plan et le groupe des homothéties c'est à dire des transformations qui changent toute figure plane en une figure homothétique. Pourquoi? Si nous prenons par exemple le groupe des homothéties, on voit qu'il contient des transformations dégénérescentes, ce sont celles où, le centre d'homothétie etant d'ailleurs quelconque, le rapport d'homothétie est nul ou infini. Dans ces transformations le centre d'homothétie a une infinité de transformés ou est le transformé d'une infinité de points. Ces transformations dégénérescentes, on ne peut les exclure, sans quoi le groupe ne serait pas un *système fermé*, et on ne peut plus le conserver, puisqu'elles ne repondent pas à la définition du mouvement.

On verrait de la même manière qu'un cercle ne peut contenir tous les points du plan sans quoi, parmi les rotations autour du centre de ce cercle, il y en aurait une qui amenerait au centre un point du plan, autre que le centre, de sorte que le centre serait le transformé de deux points, de ce point et de lui-même. Cela implique l'existence d'un invariant analogue à la distance. On voit que les conditions sont plus restrictives qu'elles ne le semblent.

Par rapport aux ideés de Lie, le progrès réalisé est considerable. Lie supposait que ses groupes étaient définis par des equations analytiques. Les hypothèses de M. Hilbert sont beaucoup plus générales. Sans doute cela n'est pas encore entièrement satisfaisant puisque si la *forme* du groupe est supposée quelconque, sa *matière*, c'est à dire le plan qui subit les transformations, reste assujeti à être une *Zahlenmannigfaltigkeit* au sens de Lie. Ce n'est pas moins un pas en avant, et d'ailleurs M. Hilbert analyse mieux qu'on ne l'avait fait avant lui l'idée de Zahlenmannigfaltigkeit et donne des aperçus qui pourront devenir le germe d'une théorie axiomatique de l'Analysis situs.

Je ne puis que resumer ici la marche générale des ideés de M. Hilbert: Il montre d'abord que les points d'un cercle peuvent être rangés dans un ordre circulaire déterminé et que cet ordre n'est pas altéré par les rotations; il montre ensuite que cet ordre rentre dans le même *type d'ordre* que l'ordre correspondant du cercle vulgaire, c'est à dire dans le type du continu. Il en déduit cette conséquence que le cercle est une courbe continue fermée, car il doit correspondre point par point au cercle vulgaire.

On voit ensuite que si une rotation ne déplace pas un point d'un cercle, elle ne déplacera pas non plus aucun autre point de ce cercle. On peut en déduire que si une rotation ne déplace pas un point autre que son centre, elle ne déplacera aucun des points du plan et se réduira à l'identité. Il en résulte finalement que le groupe des rotations autour d'un point

M a la même structure que le groupe des rotations vulgaires.

On voit en même temps qu'il n'y a pas de mouvement qui laisse fixes deux points du plan, et qu'on peut passer par des rotations d'un point du plan à un autre point quelconque du plan.

Toutes ces démonstrations sont extrêmement delicates; elles exigent l'emploi répété des théorèmes de M. Cantor. C'est à dire qu'elles sont forcément très longues et que le but qu'on aperçoit tout de suite et qu'on croit toucher ne peut être atteint que par de longs efforts.

Le plus grand pas est fait alors; nous savons maintenant que notre groupe dérive de certains sous-groupes, ceux des rotations, dont nous connaissons la structure et cette structure fait rentrer ces sous-groupes dans la catégorie des groupes continus de Lie.

Nous n'aurions donc plus que peu de difficultés à vaincre, mais M. Hilbert veut d'abord définir la droite et il le fait d'une facon très originale. Il rejette d'abord les definitions projectives de la droite qui exigeraient des considérations etrangères à ses prémisses. D'un autre côté sa géométrie est une *géométrie plane*. Si nous disposions de l'espace à trois dimensions, la théorie des groupes nous mènerait naturellement à une définition très simple de la droite, considérée comme axe de rotation; mais ici nous ne pouvons nous en servir puisque nous ne pouvons sortir du plan.

M. Hilbert suit une tout autre voie. Soient deux points A et B; définissons le milieu M de ces deux points, c'est à dire le centre d'une rotation qui change A en B et B en A. M. Hilbert commence par démontrer que deux points ont toujours un milieu et n'en ont qu'un. C'est ici qu'intervient une hypothèse qui a dû plus haut étonner le lecteur; on a supposé que le dernier axiome (celui qu'on énonce d'une façon abrégée en disant que le groupe des mouvements est un système fermé) s'applique non seulement si l'on envisage deux points A_0 et B_0, mais encore si on envisage trois points. On a donc fait une hypothèse plus restrictive que si l'on s'était borné à la considération de deux points A_0 et B_0. Cette restriction était-elle bien nécessaire?

C'est dans cette partie de la théorie qu'elle joue son rôle On envisage une infinité de points $B_1, B_2, \ldots B_n$, et les milieux $M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$ des segments $AB_1, AB_2, \ldots AB_n$; quand n croit indéfiniment, B_n tend vers B et M_n vers M et on se sert de l'hypothèse en question pour montrer que M est le milieu de AB. Aurait-il été impossible de s'en passer, c'est ce dont on ne pourrait être sûr qu'après avoir construit une pseudogéométrie spéciale.

Quoiqu'il soit, étant donnés deux points A et B, M. Hilbert construit le milieu du segment AB, puis les milieux des deux segments MA et MB et ainsi de suite. Il obtient ainsi une infinité de points qui forment un ensemble E; il considère le dérivé de cet ensemble E c'est à dire l'ensemble des points dans le voisinage desquels il y a une infinité de points de E. Il montre que ce dérivé est une ligne continue, et c'est cette ligne qu'il appelle ligne droite.

Les principes fondamentaux de la géométrie euclidienne ou non-euclidienne ordinaire peuvent alors s'établir aisément et en particulier les axiomes métriques.

Il est impossible de n'être pas frappé du contraste entre le point de vue où se place ici M. Hilbert et celui qu'il avait adopté dans sa Festschrift. Dans cette Festschrift les axiomes de continuité occupaient le dernier rang et la grande affaire était de savoir ce que devenait la géométrie quand on les mettait de côté. Ici au contraire c'est la continuité qui est le point de départ et M. Hilbert s'est surtout préoccupé de voir ce qu'on tire de la continuité seule, jointe à la notion du groupe.

Il nous reste à parler d'un mémoire intitulé: *Flächen von konstanter Krümmung.* On sait que Beltrami a montré qu'il y a dans l'espace ordinaire des surfaces qui sont l'image du plan lobatscheffskien, ce sont les surfaces à courbure constante négative; on sait quelle impulsion cette découverte a donnée à la géométrie non-euclidienne. Mais est-il possible de représenter le plan lobatchefskien tout entier sur une surface de Beltrami sans point singulier.

M. Hilbert démontre que non: pour cela il s'appuie sur es théoremes suivants relatifs aux surfaces de Beltrami.

Un quadrilatère formé de lignes asymptotiques a ses côtes opposés égaux.

La surface d'un polygone formé de lignes asymptotiques est proportionnelle à l'excès sphérique et il en est de même de la surface d'un polygone formé de lignes géodésiques; seulement dans le premier cas l'excès sphérique est positif, dans le second cas il est négatif.

L'auteur montre ensuite que sur une surface de Beltrami sans point singulier on ne peut tracer de ligne asymptotique fermée; qu'une ligne asymptotique ne peut ni se recouper elle-même, ni couper une autre ligne asymptotique en plus d'un point. Toute autre hypothèse conduirait à des polygones dont l'éxcès sphérique serait nul. D'où cette conséquence que si une pareille surface correspond point par point au plan non-euclidien, cette correspondance doit être biuniforme. Mais alors en évaluant la surface totale en partant de l'aire du polygone formé de lignes asymptotiques ou de l'aire du polygone géodésique on trouve dans le premier cas que cette surface totale est finie, dans le second qu'elle est infinie. Cette contradiction démontre le théorème énoncé.

En ce qui concerne les surfaces à courbure constante positives, auxquelles se rapporte la géométrie de Riemann,

M. Hilbert démontre que à part la sphère il n'y a pas d'autre surface fermée de cette sorte. En effet, si nous envisageons une portion de surface à courbure constante positive, le maximum du grand rayon de courbure ne pourra pas être atteint à *l'intérieur* de cette portion, mais seulement sur son contour. C'est là une proposition tout-à-fait analogue à un théoréme bien connu relatif au potentiel.

Il suit de là immédiatement que si la surface est fermée, le maximum ne peut être atteint nulle part et que le rayon de courbure est constant. On retombe ainsi aisément sur la sphère.

Après cette analyse, tout commentaire est inutile. On voit à combien de points de vue différents s'est placé M. Hilbert, quelle est la profondeur de son analyse. Ses travaux marquent une époque et il semble tout-à-fait digne du prix Lobatschefsky.

Poincaré.

Rapport sur
géomét

professeur de mat

I. *Liste des t*
publié, de 1898 à
relatifs à la géométr
1. Géométrie g
pour l'avancement d
111—132).
2. Propriétés a
ques (*Ibid.*, 1898, p
3. Construction
sis, 1899, pp. 57—
4. Etudes de g
moires couronnés
royale de Belgique,
a été présenté à l'A
1897).
5. Le cinquièn
pp. 177—191).
6. Les cosegn
diennes (Extrait
in 8).
7. La géomét
1902 (collection s