1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HILBERT, Professeur à l'Université de Göttingen. — LES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE (GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE). Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals.

Quels sont les principes fondamentaux de la Géométrie; quelle en est l'origine, la nature et la portée? Ce sont là des questions qui ont de tout temps préoccupé les mathématiciens et les penseurs, mais qui, il y a un siècle environ, ont pris pour ainsi dire une figure toute nouvelle, grâce aux idées de Lobatchevski et de Bolyai.

On s'est longtemps efforcé de démontrer la proposition connue sous le nom de *postulatum d'Euclide*, on a constamment échoué; nous connaissons maintenant la raison de ces échecs. Lobatchevski est parvenu à construire un édifice logique, aussi cohérent que la Géométrie d'Euclide, mais où le célèbre postulatum est supposé faux, et où la somme des angles d'un triangle est toujours plus petite que deux droits. Riemann a imaginé un autre système logique, également exempt de contradiction, et où cette somme est au contraire toujours plus grande que deux droits. Ces deux géométries, celle de Lobatchevski et celle de Riemann, sont ce qu'on appelle les *géométries non-euclidiennes*.

Le postulatum d'Euclide ne peut donc être démontré, et cette impossibilité est aussi absolument certaine que n'importe quelle vérité mathématique. Ce qui n'empêche pas l'Académie des Sciences de recevoir chaque année plusieurs démonstrations nouvelles auxquelles elle refuse naturellement l'hospitalité des *Comptes rendus*.

On a déjà beaucoup écrit sur les géométries non-euclidiennes; après avoir crié au scandale, on s'est habitué à ce qu'elles ont de paradoxal; plusieurs personnes sont allées jusqu'à douter du postulatum, à se demander si l'espace réel est plan, comme le supposait Euclide, ou s'il ne présente pas une légère *courbure*. Elles croyaient même que l'expérience pouvait leur donner une réponse à cette question. Inutile d'ajouter que c'était là méconnaître complètement la nature de la Géométrie, qui n'est pas une science expérimentale.

Mais pourquoi, parmi tous les axiomes de la Géométrie, le postulatum serait-il le seul qu'on pût nier sans dommage pour la Logique? D'où tiendrait-il ce privilège? On ne le voit pas très bien et, à ce compte, bien d'autres conceptions sont possibles.

Cependant beaucoup de géomètres contemporains ne semblent pas penser ainsi. En accordant le droit de cité aux deux géométries nouvelles, ils croient sans doute avoir été jusqu'au bout des concessions possibles. C'est pourquoi ils ont imaginé ce qu'ils appellent la *Géométrie générale*, qui comprend comme cas particuliers les trois systèmes d'Euclide, de Lobatchevski et de Riemann, et qui n'en comprend pas d'autres. Et cette épithète de *générale* signifie évidemment, dans leur esprit, qu'aucune autre géométrie n'est concevable.

Ils perdront cette illusion s'ils lisent l'Ouvrage de M. Hilbert. Ils y verront éclater de toutes parts les cadres dans lesquels ils avaient voulu nous enfermer.

Pour bien comprendre cette tentative nouvelle, il faut se rappeler quelle a été depuis cent ans l'évolution de la pensée mathématique, non seulement en Géométrie, mais en Arithmétique et en Analyse. La notion de nombre s'est éclaircie et précisée; en même temps elle a reçu des généralisations diverses. La plus précieuse pour les analystes est celle qui résulte de l'introduction des *imaginaires* dont les mathématiciens modernes ne pourraient plus se passer; mais on ne s'est pas arrêté là et l'on a fait entrer dans la Science d'autres généralisations du nombre, ou, comme on dit, d'autres catégories de nombres complexes.

Les opérations de l'Arithmétique ont été de leur côté soumises à la critique, et les quaternions de Hamilton nous ont montré un exemple d'une opération qui présente une analogie presque parfaite avec la multiplication, que l'on peut appeler du même nom, et qui pourtant n'est pas commutative, c'est-à-dire dont le produit change quand on intervertit l'ordre des facteurs. C'était là, en Arithmétique une révolution toute pareille à celle qu'avait faite Lobatchevski en Géométrie.

Notre façon de concevoir l'infini s'est également modifiée.

M. G. Cantor nous a appris à distinguer des degrés dans l'infini lui-même (qui n'ont d'ailleurs rien de commun avec les infiniment petits des différents ordres créés par Leibniz en vue du calcul infinitésimal ordinaire). La notion du continu, longtemps regardée comme primitive, a été analysée et réduite à ses éléments.

Mentionnerai-je également les travaux des Italiens qui se sont efforcés de créer un symbolisme logique universel et de réduire le raisonnement mathématique à des règles purement mécaniques?

Il faut se rappeler tout cela si l'on veut comprendre comment des conceptions, qui auraient fait bondir Lobatchevski lui-même, tout révolutionnaire qu'il fût, nous semblent aujourd'hui presque naturelles et ont pu être proposées par M. Hilbert avec une parfaite tranquillité.

La liste des axiomes. — La première chose à faire était d'énumérer tous les axiomes de la Géométrie. Ce n'était pas si facile qu'on pourrait le croire; il y a les axiomes que l'on voit et ceux qu'on ne voit pas, ceux qu'on introduit inconsciemment et sans s'en apercevoir. Euclide lui-même, que l'on croit un logicien impeccable, en applique souvent qu'il n'énonce pas.

La liste de M. Hilbert est-elle définitive? Il est permis de le croire, car elle semble avoir été dressée avec soin. Le savant Professeur répartit les axiomes en cinq groupes :

I. Axiome der Verknüpfung (je traduirai par *axiomes projectifs* au lieu de chercher une traduction littérale, comme par exemple *axiomes de la connection,* qui ne saurait être satisfaisante).

II. Axiome der Anordnung (axiomes de l'ordre).

III. Axiome d'Euclide.

IV. Axiomes de la congruence ou axiomes métriques.

V. Axiome d'Archimède.

Parmi les axiomes projectifs, nous distinguerons ceux du plan et ceux de l'espace; les premiers sont ceux qui dérivent de la proposition bien connue : *par deux points passe une droite et une seule;* mais je préfère traduire littéralement afin de bien faire comprendre la pensée de M. Hilbert.

« Imaginons trois systèmes d'objets que nous appellerons *points,* *droites* et *plans*. Imaginons que ces points, droites et plans soient liés par certaines relations que nous exprimerons par les mots *être situé sur*, *entre*, etc.

» I. — 1. Deux points différents A et B déterminent toujours une droite a; ce que nous écrirons

$$AB = a \qquad \text{ou} \qquad BA = a.$$

» Au lieu du mot *déterminent* nous emploierons également d'autres tournures de phrase qui seront synonymes; nous dirons : A est situé sur a, A est un point de a, a passe par A, a joint A à B, etc.

» I. — 2. Deux points quelconques d'une droite déterminent cette droite, c'est-à-dire que si $AB = a$ et que $AC = a$, et si B est différent de C, on a aussi $BC = a$. »

Voici les réflexions que doivent nous inspirer ces énoncés : les expressions, *être situé sur*, *passer par*, etc., ne sont pas destinées à évoquer des images; elles sont simplement des synonymes du mot *déterminer*. Les mots *point*, *droite* et *plan* eux-mêmes ne doivent provoquer dans l'esprit aucune représentation sensible. Ils pourraient indifféremment désigner des objets d'une nature quelconque, pourvu qu'on pût établir entre ces objets une correspondance telle qu'à tout système de deux des objets appelés *points* correspondît un des objets appelés *droites*, et un seul. Et c'est pourquoi il devient nécessaire d'ajouter (I, 2) que, si la droite qui correspond au système des deux points A et B est la même que celle qui correspond au système des deux points B et C, c'est aussi la même qui correspond au système des deux points A et C.

Ainsi M. Hilbert a, pour ainsi dire, cherché à mettre les axiomes sous une forme telle qu'ils puissent être appliqués par quelqu'un qui n'en comprendrait pas le sens parce qu'il n'aurait jamais vu ni point, ni droite, ni plan. Les raisonnements doivent pouvoir, d'après lui, se ramener à des règles purement mécaniques, et il suffit, pour faire la Géométrie, d'appliquer servilement ces règles aux axiomes, sans savoir ce qu'ils veulent dire. On pourra ainsi construire toute la Géométrie, je ne dirai pas précisément sans y rien comprendre, puisqu'on saisira l'enchaînement logique des propositions, mais tout au moins sans y rien voir. On pourrait confier les axiomes à une machine à raisonner, par exemple au *piano raisonneur* de Stanley Jevons, et l'on en verrait sortir toute la Géométrie.

C'est la même préoccupation qui a inspiré certains savants italiens, tels que MM. Peano et Padoa, qui se sont efforcés de créer une *pasigraphie,* c'est-à-dire une sorte d'Algèbre universelle où tous les raisonnements sont remplacés par des symboles ou des formules.

Cette préoccupation peut sembler artificielle et puérile; et il est inutile de faire observer combien elle serait funeste dans l'enseignement et nuisible au développement des esprits; combien elle serait desséchante pour les chercheurs, dont elle tarirait promptement l'originalité. Mais, chez M. Hilbert, elle s'explique et se justifie, si l'on se rappelle le but poursuivi. La liste des axiomes est-elle complète, ou en avons-nous laissé échapper quelques-uns que nous appliquons inconsciemment? Voilà ce qu'il faut savoir. Pour cela nous avons un critère, et nous n'en avons qu'un. Il faut chercher si la Géométrie est une conséquence logique des axiomes explicitement énoncés, c'est-à-dire si ces axiomes confiés à la machine à raisonner peuvent en faire sortir toute la suite des propositions.

Si oui, on sera certain de n'avoir rien oublié. Car notre machine ne peut fonctionner que conformément aux règles de la Logique pour lesquelles elle a été construite; elle ignore ce vague instinct que nous appelons *intuition*.

Je ne m'étendrai pas sur les axiomes projectifs de l'espace que l'auteur numérote I, 3, 4, 5, 6. Rien n'est changé aux énoncés habituels.

Un mot seulement sur l'axiome I, 7, qui se formule ainsi :

« Sur toute droite il y a au moins deux points; sur tout plan, il y a au moins trois points non en ligne droite; dans l'espace il y a au moins quatre points qui ne sont pas dans un même plan. »

Cet énoncé est caractéristique. Quiconque aurait laissé à l'intuition une place, si petite qu'elle fût, n'aurait pas songé à dire que sur toute droite il y a au moins deux points, ou bien il aurait ajouté tout de suite qu'il y en a une infinité; car l'intuition de la droite lui aurait révélé immédiatement et simultanément ces deux vérités.

Passons au second groupe, celui des axiomes de l'ordre. Voici l'énoncé des deux premiers :

« Si trois points sont sur une même droite, il y a entre eux une certaine relation que nous exprimons en disant que l'un des points, et un seulement, est entre les deux autres. Si C est entre A et B, et si D est entre A et C, D sera aussi entre A et B, etc. »

Ici encore nous ne faisons pas intervenir l'intuition; nous ne cherchons pas à approfondir ce que signifie le mot *entre,* toute relation satisfaisant aux axiomes pourrait être désignée par le même mot. Voilà qui est bien propre à nous éclairer sur la nature purement formelle des définitions mathématiques; mais je n'insiste pas, car je n'aurais qu'à répéter ce que j'ai dit à propos du premier groupe.

Mais une autre réflexion s'impose. Les axiomes de l'ordre sont présentés comme dépendant des axiomes projectifs, et ils n'auraient plus aucun sens si l'on n'admettait pas ces derniers, puisqu'on ne saurait ce que c'est que trois points en ligne droite. Et cependant il existe une géométrie particulière, purement qualitative, et qui est absolument indépendante de la Géométrie projective, qui ne suppose connues ni la notion de droite, ni celle de plan, mais seulement celles de ligne et de surface; c'est ce qu'on appelle l'*Analysis sitûs.* Ne serait-il pas préférable de donner aux axiomes du deuxième groupe une forme qui les affranchît de cette dépendance et les séparât complètement du premier groupe? Il reste à savoir si cela serait possible, en conservant à ces axiomes leur caractère purement logique, c'est-à-dire en fermant complètement la porte à toute intuition.

Le troisième groupe ne contient qu'un seul axiome, qui est le célèbre postulatum d'Euclide; je remarquerai seulement que, contrairement à l'usage ordinaire, il est présenté avant les axiomes métriques.

Ces derniers forment le quatrième groupe. Nous y distinguerons trois sous-groupes. Les propositions IV, 1, 2, 3 sont les axiomes métriques des segments : ces axiomes servent à définir les longueurs. On conviendra de dire qu'un segment pris sur une droite peut être congruent (égal) à un segment pris sur une autre droite; c'est l'axiome IV, 1; mais cette convention n'est pas tout à fait arbitraire; elle doit être faite de façon que deux segments congruents à un même troisième soient congruents entre eux (IV, 2); on définit ensuite par une convention nouvelle l'addition des segments, et cette convention, à son tour, doit être faite de façon qu'en additionnant des segments égaux on trouve des sommes égales; et c'est là l'axiome IV, 3.

Les propositions IV, 4, 5 sont les axiomes correspondants pour les angles. Mais cela ne suffit pas encore : aux deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles il faut adjoindre l'axiome métrique des triangles (que M. Hilbert numérote IV, 6); si deux triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux, les autres angles de ces deux triangles sont égaux chacun à chacun.

On retrouve là l'un des cas connus de l'égalité des triangles, que l'on démontre d'ordinaire par surperposition, et qu'on doit poser en postulat si l'on veut éviter de faire appel à l'intuition. Quand d'ailleurs on se servait de l'intuition, c'est-à-dire de la superposition, on voyait du même coup que les troisièmes côtés étaient égaux dans les deux triangles, et les deux propositions étaient unies pour ainsi dire dans une même aperception; ici, au contraire, nous les séparons; de l'une d'elles nous faisons un postulat, mais nous n'érigeons pas l'autre en postulat, parce qu'elle peut se déduire logiquement de la première.

Autre remarque : M. Hilbert dit bien que le segment AB est congruent à lui-même, mais (et de même pour les angles) il devrait, semble-t-il, ajouter qu'il est congruent au segment inverse BA. Cet axiome (qui implique la symétrie de l'espace) n'est pas identique à ceux qui sont explicitement énoncés. Je ne sais s'il pourrait s'en déduire logiquement; je crois que oui, mais, étant donnée la marche des raisonnements de M. Hilbert, il me semble que ce postulat est appliqué sans être énoncé (page 17, ligne 18).

Je regretterai aussi que, dans cet exposé des axiomes métriques, il ne reste plus aucune trace d'une notion dont Helmholtz avait, le premier, compris l'importance : je veux parler du déplacement d'une figure invariable. On aurait pu conserver à cette notion son rôle naturel, sans sacrifier le caractère logique des axiomes. On aurait pu dire, par exemple : Je définis entre les figures une certaine relation que j'appelle *congruence*, etc.; deux figures congruentes à une même troisième sont congruentes entre elles; deux figures congruentes sont identiques quand trois points de l'une, non en ligne droite, sont identiques aux trois points correspondants de l'autre, etc. On aurait évité ainsi l'introduction artificielle de cet axiome IV, 6, et les postulats auraient été rattachés à leur véritable origine psychologique.

Le cinquième groupe ne comprend qu'un seul axiome, celui d'Archimède.

Soient deux points quelconques A et B sur une droite D; soit a un segment quelconque; construisons sur D, à partir du point A, et dans la direction AB, une série de segments tous égaux entre eux et égaux à a : AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$; on pourra toujours prendre n assez grand pour que le point B se trouve sur l'un de ces segments.

C'est-à-dire que, si l'on se donne deux longueurs quelconques l et L, on peut toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que, en ajoutant n fois à elle-même la longueur l, on obtienne une longueur totale plus grande que L.

Indépendance des axiomes. — La liste des axiomes une fois dressée, il faut voir si elle est exempte de contradictions. Nous savons bien que oui, puisque la Géométrie existe; et M. Hilbert répond oui également, en construisant une géométrie. Mais, chose étrange, cette géométrie n'est pas tout à fait la nôtre, son espace n'est pas le nôtre, ou du moins ce n'en est qu'une partie. Dans l'espace de M. Hilbert, il n'y a pas tous les points qui sont dans le nôtre, mais ceux seulement qu'on peut, en partant de deux points donnés, construire par le moyen de la règle et du compas. Dans cet espace, par exemple, il n'existerait pas, en général, un angle qui serait le tiers d'un angle donné.

Je crois bien que cette conception aurait été regardée par Euclide comme plus raisonnable que la nôtre. Toujours est-il que ce n'est pas le nôtre. Pour retrouver notre géométrie, il faudrait ajouter un axiome.

« Si, sur une droite, il y a une double infinité de points $A_1, A_2, \ldots,$ A_n, ... B_1, B_2, ... B_n, ..., tels que B_q soit compris entre A_p et

B_{q-1}, et A_p entre B_q et A_{p-1}, quels que soient p et q, il y aura sur cette droite au moins un point C qui sera entre A_p et B_q, quels que soient p et q. »

On doit se demander ensuite si les axiomes sont indépendants, c'est-à-dire si l'on peut sacrifier l'un des cinq groupes en conservant les quatre autres et obtenir néanmoins une géométrie cohérente. C'est ainsi qu'en supprimant le groupe III (postulatum d'Euclide) on obtient la géométrie non-euclidienne de Lobatschevski.

On peut également supprimer le groupe IV. M. Hilbert a réussi à conserver les groupes I, II, III et V, ainsi que les deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles, tout en rejetant l'axiome métrique des triangles, c'est-à-dire la proposition IV, 6.

Voici comment il y parvient : considérons, pour simplifier, une Géométrie plane et soit P le plan dans lequel nous opérons; nous conserverons aux mots *points* et *droites* leur sens habituel; de même nous conserverons aux angles leurs mesures habituelles; mais il n'en sera pas de même pour les longueurs. Une longueur sera mesurée *par définition* par sa projection sur un plan Q différent de P, cette projection conservant elle-même sa mesure habituelle. Il est clair que tous les axiomes subsisteront, sauf les axiomes métriques. Les axiomes métriques des angles subsisteront également, puisque nous ne changeons rien à la mesure des angles; ceux des segments sont vrais également, puisque, chaque segment du plan P est mesuré par un autre segment qui est sa projection sur le plan Q, et que ce dernier segment est mesuré à la manière habituelle. Au contraire, les théorèmes sur l'égalité des triangles, tels que l'axiome IV, 6, ne sont plus vrais. Cette solution ne me satisfait qu'à moitié; les angles ont été définis indépendamment des longueurs, sans qu'on se soit préoccupé de mettre les deux définitions d'accord (ou plutôt en les mettant en désaccord à dessein). Il suffirait de changer l'*une* des deux définitions pour retomber sur la Géométrie classique. Je préférerais qu'on donnât des longueurs une définition telle qu'il devînt impossible de trouver une définition des angles satisfaisant aux axiomes métriques des angles et des triangles. Cela ne serait d'ailleurs pas difficile.

Il aurait été facile à M. Hilbert de créer une géométrie où les axiomes de l'ordre seraient abandonnés, tandis que tous les autres seraient conservés. Ou plutôt cette Géométrie existe déjà, ou plutôt encore il en existe déjà deux. Il y a celle de Riemann, pour laquelle, il est vrai, le postulatum d'Euclide (groupe III) est abandonné également, puisque la somme des angles d'un triangle est plus grande que deux droits. Pour bien faire comprendre ma pensée, je me bornerai à considérer une géométrie à deux dimensions. La Géométrie de Riemann à deux dimensions n'est autre chose que la Géométrie sphérique, à une condition toutefois : c'est que l'on ne regarde pas comme distincts deux points diamétralement opposés sur la sphère. Les éléments de cette Géométrie seront donc les différents diamètres de cette sphère. Or, si l'on envisage trois diamètres d'une même sphère situés dans un même plan diamétral, on n'a aucune raison de dire que l'un d'eux est *entre* les deux autres. Le mot *entre* n'a plus de sens, et les axiomes de l'ordre tombent d'eux-mêmes.

Si nous voulons maintenant une Géométrie où les axiomes de de l'ordre ne subsisteront pas, et où l'on conservera le postulatum d'Euclide avec les autres, nous n'avons qu'à prendre pour éléments les points et les droites *imaginaires* de l'espace ordinaire. Il est clair que les points imaginaires de l'espace ne nous sont pas donnés comme *rangés* dans un ordre déterminé. Mais il y a plus : on peut se demander s'ils sont susceptibles d'être ainsi rangés; cela serait sans doute possible, comme l'a montré G. Cantor (à la condition, bien entendu, de ne pas toujours ranger dans le voisinage l'un de l'autre des points que nous regardons comme infiniment voisins, de rompre par conséquent la continuité de l'espace). On pourrait bien, dis-je, les ranger, mais cela ne pourrait pas se faire de telle façon que cet ordre ne soit pas altéré par les diverses opérations de la Géométrie (perspective, translation, rotation, etc.). Les axiomes de l'ordre ne sont donc pas applicables à cette Géométrie.

La Géométrie non archimédienne. — Mais la conception la plus originale de M. Hilbert, c'est celle de la Géométrie non archimédienne, où tous les axiomes restent vrais, sauf celui d'Archimède. Pour cela il fallait d'abord construire un *système de* *nombres non archimédiens*, c'est-à-dire un système d'éléments entre lesquels on pût concevoir des relations d'égalité et d'inégalité et auxquels on pût appliquer des opérations correspondant à l'addition et à la multiplication arithmétiques, et cela de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Les règles arithmétiques de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité, etc.; *Aritmetische Axiome der Verknupfung*) subsistent sans changement.

2° Les règles du calcul et de la transformation des inégalités (*Aritmetische Axiome der Anordnung*) subsistent également.

3° L'axiome d'Archimède n'est pas vrai.

On peut arriver à ce résultat en choisissant pour élément des séries de la forme suivante :

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \ldots,$$

où m est un entier positif ou négatif et où les coefficients A sont réels, et en convenant d'appliquer à ces séries les règles ordinaires de l'addition et de la multiplication. Il faut ensuite définir les conditions d'inégalité de ces séries, de façon à *ranger* nos éléments dans un ordre déterminé. Nous y arriverons par la convention suivante : nous attribuerons à notre série le signe de A_0 et nous dirons qu'une série est plus petite qu'une autre quand, retranchée de celle-ci, elle donne une différence positive.

Il est clair qu'avec cette convention, les règles du calcul des inégalités subsistent; mais l'axiome d'Archimède n'est plus vrai; et, en effet, si nous prenons les deux éléments 1 et t; le premier, additionné à lui-même autant de fois qu'on le voudra, restera toujours plus petit que le second. On aura toujours $t > n$, quel que soit l'entier n, puisque la différence $t - n$ sera toujours positive, le coefficient du premier terme t, qui, par définition, donne son signe, restant toujours égal à 1.

Nos nombres vulgaires rentrent comme cas particuliers parmi ces *nombres non archimédiens*. Les nouveaux nombres viennent s'intercaler pour ainsi dire dans la série de nos nombres vulgaires, de telle façon qu'il y ait, par exemple, une infinité de nombres nouveaux plus petits qu'un nombre vulgaire donné A et plus grands que tous les nombres vulgaires inférieurs à A.

Cela posé, imaginons un espace à trois dimensions où les coordonnées d'un point seraient mesurées, non pas par des nombres vulgaires, mais par des nombres non archimédiens, mais où les équations habituelles de la droite et du plan subsisteraient, de même que les expressions analytiques des angles et des longueurs. Il est clair que dans cet espace tous les axiomes resteraient vrais, sauf celui d'Archimède.

Sur une droite quelconque, entre nos points vulgaires, viendraient s'intercaler des points nouveaux. Si, par exemple, D_0 est une droite vulgaire, D_1 la droite non archimédienne correspondante; si P est un point vulgaire quelconque de D_0, et si ce point partage D_0 en deux demi-droites S et S' (j'ajoute, pour préciser, que je considère P comme ne faisant partie ni de S ni de S'), il y aura sur D_1 une infinité de points nouveaux tant entre P et S qu'entre P et S'. Il y aura également sur D_1 une infinité de points nouveaux qui seront à droite de tous les points vulgaires de D_0. En résumé, notre espace vulgaire n'est qu'une partie de l'espace non archimédien.

Au premier abord, l'esprit se révolte contre de pareilles conceptions. C'est que, par une vieille habitude, il cherche une représentation sensible. Il faut qu'il se débarrasse de cette préoccupation s'il veut arriver à comprendre, et cela est encore plus nécessaire que pour la Géométrie non euclidienne. M. Hilbert ne s'est proposé qu'une chose : construire un système d'éléments susceptibles de certaines relations logiques, et il lui suffit de montrer que ces relations n'impliquent pas de contradiction interne.

Qu'on remarque cependant ceci : la Géométrie non euclidienne respectait pour ainsi dire notre conception qualitative du continu géométrique tout en bouleversant nos idées sur la mesure de ce continu. La Géométrie non archimédienne détruit cette conception, elle dissèque le continu pour y introduire des éléments nouveaux.

Quoi qu'il en soit, M. Hilbert poursuit les conséquences de ses prémisses et il cherche comment on pourrait refaire la Géométrie sans se servir de l'axiome d'Archimède. Pas de difficulté en ce qui concerne les Chapitres que les écoliers appellent le *premier* et le *deuxième* Livre. Cet axiome n'y intervient nulle part.

Le troisième Livre traite des proportions et de la similitude. Voici, en substance, la marche que suit M. Hilbert pour le reconstituer sans avoir recours à l'axiome d'Archimède. Il prend la construction habituelle de la quatrième proportionnelle comme définition de la proportion, mais une pareille définition a besoin d'être justifiée; il faut montrer d'abord que le résultat est le même, quelles que soient les lignes auxiliaires employées dans la construction, et ensuite que les règles ordinaires du calcul s'appliquent aux proportions ainsi définies. C'est cette justification que M. Hilbert nous donne d'une façon satisfaisante.

Le quatrième Livre traite de la mesure des aires planes; si cette mesure peut s'établir facilement sans le secours du principe d'Archimède, c'est parce que deux polygones équivalents ou bien peuvent être décomposés en triangles de telle façon que les triangles élémentaires de l'un et ceux de l'autre soient égaux chacun à chacun (ou, en d'autres termes, peuvent être ramenés l'un à l'autre par le procédé du casse-tête chinois), ou bien peuvent être regardés comme des différences de polygones susceptibles de ce mode de décomposition (c'est toujours le même procédé, en admettant non seulement des triangles additifs, mais encore des triangles soustractifs). Mais nous devons observer qu'une circonstance analogue ne paraît pas se retrouver pour deux polyèdres équivalents, de sorte qu'on peut se demander si l'on peut déterminer, par exemple le volume de la pyramide sans un appel plus ou moins déguisé au calcul infinitésimal. Il n'est donc pas certain qu'on pourrait se passer aussi facilement de l'axiome d'Archimède dans la mesure des volumes que dans celle des aires planes. M. Hilbert ne l'a d'ailleurs pas tenté.

Une question restait à traiter toutefois ; étant donné un polygone, est-il possible de le décomposer en triangles et d'enlever l'un des morceaux de façon que le polygone restant soit équivalent au polygone donné, c'est-à-dire de façon qu'en transformant ce polygone restant par le procédé du casse-tête chinois, on puisse retomber sur le polygone primitif. D'ordinaire, on se borne à dire que cela est impossible parce que le tout est plus grand que la partie. C'est là invoquer un axiome nouveau, et, quelque évident qu'il nous paraisse, le logicien serait plus satisfait si l'on pouvait l'éviter. M. Schur a trouvé la démonstration, il est vrai, mais en s'appuyant sur l'axiome d'Archimède; M. Hilbert voulait y arriver sans se servir de cet axiome. Voici par quel artifice il y parvient; il admet que la *surface* du triangle est *par définition* le demi-produit de sa base par sa hauteur, et il justifie cette définition en montrant que deux triangles équivalents (au point de vue du casse-tête chinois) ont même *surface* (au sens de la nouvelle définition) et que la *surface* d'un triangle décomposable en plusieurs autres est la somme des *surfaces* des triangles composants. Une fois cette justification terminée, tout le reste suit sans difficulté. C'est donc toujours la même marche. Pour éviter d'incessants appels à l'intuition, qui nous fournirait sans cesse de nouveaux axiomes, on transforme ces axiomes en définitions, et l'on justifie après coup ces définitions en montrant qu'elles sont exemptes de contradictions.

La Géométrie non arguésienne. — Le théorème fondamental de la Géométrie projective est le théorème de Desargues. Deux triangles sont dits *homologues* lorsque les droites qui joignent chacun à chacun les sommets correspondants se coupent en un même point. Desargues a démontré que les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles homologues sont sur une même ligne droite; la réciproque est également vraie.

Le théorème de Desargues peut s'établir de deux manières :

1° En se servant des axiomes projectifs du plan et des axiomes métriques du plan;

2° En se servant des axiomes projectifs du plan et de ceux de l'espace.

Le théorème pourrait donc être découvert par un animal à deux dimensions, à qui une troisième dimension paraîtrait aussi inconcevable qu'à nous une quatrième, qui par conséquent ignorerait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui aurait vu se déplacer, dans le plan qu'il habite, des figures invariables analogues à nos corps solides, et qui, par conséquent, connaîtrait les axiomes métriques. Le théorème pourrait être découvert également par un animal à trois dimensions qui connaîtrait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui, n'ayant jamais vu se déplacer de corps solides, ignorerait les axiomes métriques.

Mais pourrait-on établir le théorème de Desargues sans se servir ni des axiomes projectifs de l'espace, ni des axiomes métriques, mais seulement des axiomes projectifs du plan? On pensait que non, mais on n'en était pas sûr. M. Hilbert a tranché la question en construisant une *géométrie non arguésienne,* qui est, bien entendu, une géométrie plane. Considérons une ellipse E. A l'extérieur de cette ellipse, le mot *droite* conserve son sens habituel; à l'intérieur le mot *droite* prend un sens différent et il s'applique à un arc de cercle qui, prolongé, irait passer par un point fixe P extérieur à l'ellipse. Une droite qui traverse l'ellipse E se composera donc de deux parties rectilignes, au sens ordinaire du mot, raccordées à l'intérieur de l'ellipse par un arc de cercle; tel un rayon lumineux qui serait dévié de sa trajectoire rectiligne en traversant un corps réfringent.

Les axiomes projectifs du plan seront encore vrais si l'on suppose le point P assez éloigné de l'ellipse E.

Plaçons maintenant deux triangles homologues en dehors de l'ellipse E, et de telle façon que leurs côtés ne rencontrent pas E; les trois droites qui joignent deux à deux les sommets correspondants, *si on les entend au sens ordinaire du mot,* iront se couper en un même point Q d'après le théorème de Desargues; supposons que ce point Q soit à l'intérieur de E. *Si maintenant nous entendons le mot* droite *au sens nouveau,* les trois droites qui joignent les sommets correspondants seront déviées en pénétrant à l'intérieur de l'ellipse. Elles n'iront donc plus passer en Q, elles ne seront plus concourantes. Le théorème de Desargues n'est plus vrai dans notre nouvelle géométrie, c'est une géométrie non arguésienne.

La Géométrie non pascalienne. — M. Hilbert ne s'arrête pas là et il introduit encore une nouvelle conception. Pour bien la comprendre, il nous faut d'abord retourner un instant dans le domaine de l'Arithmétique. Nous avons vu plus haut s'élargir la notion de nombre, par l'introduction des *nombres non archimédiens.* Il nous faut une classification de ces nombres nouveaux, et pour l'obtenir nous allons classer d'abord les axiomes de l'Arithmétique en quatre groupes qui seront :

1° Les lois d'associativité et de commutativité de l'addition, la loi d'associativité de la multiplication, les deux lois de distributivité de la multiplication; ou en résumé toutes les règles de l'addition et de la multiplication, sauf la loi de commutativité de la multiplication;

2° Les axiomes de l'ordre, c'est-à-dire les règles du calcul des inégalités;

3° La loi de commutativité de la multiplication, d'après laquelle on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit;

4° L'axiome d'Archimède.

Les nombres qui admettront les axiomes des deux premiers groupes seront dits *arguésiens;* ils pourront être *pascaliens* ou *non pascaliens* selon qu'ils satisferont ou ne satisferont pas à l'axiome du troisième groupe, ils seront *archimédiens* ou *non archimédiens,* suivant qu'ils satisferont ou non à l'axiome du quatrième groupe. Nous ne tarderons pas à voir la raison de ces dénominations.

Les nombres ordinaires sont à la fois arguésiens, pascaliens et archimédiens. On peut démontrer la loi de commutativité en partant des axiomes des deux premiers groupes et de l'axiome d'Archimède; il n'y a donc pas de nombres arguésiens, archimédiens et non pascaliens.

En revanche, nous avons cité plus haut un exemple de nombres arguésiens, pascaliens et non archimédiens; c'est ce que j'appellerai les *nombres du système* T, et je rappelle qu'à chacun de ces nombres correspond une série de la forme

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \dots,$$

où les A sont des nombres réels ordinaires.

Il est aisé de former, par un procédé analogue, un système de nombres arguésiens, non pascaliens et non archimédiens. Les éléments de ce système seront des séries de la forme

$$S = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \dots,$$

où s est un symbole analogue à t, n un entier positif ou négatif, et T_0, T_1, ... des nombres du système T; si donc on remplaçait les coefficients T_0, T_1, ... par les séries en t correspondantes, on aurait une série dépendant à la fois de t et de s. On additionnera les séries S d'après les règles ordinaires, et de même pour la multiplication de ces séries on admettra les règles de distributivité et d'associativité, mais on admettra que la loi de commutativité n'est pas vraie et qu'au contraire $st = -ts$.

Il reste à *ranger* les séries dans un ordre déterminé, pour satisfaire aux axiomes de l'ordre. Pour cela, on attribuera à la série S le signe du premier coefficient T_0; on dira qu'une série est plus petite qu'une autre, quand, retranchée de celle-ci, elle donnera une différence positive. C'est donc toujours la même règle : t est regardé comme très grand par rapport à un nombre réel ordinaire quelconque, et s est regardé comme très grand par rapport à un nombre quelconque du système T.

La loi de commutativité n'étant pas vraie, ce sont bien des nombres non pascaliens.

Avant d'aller plus loin, je rappelle que Hamilton a depuis longtemps introduit un système de nombres complexes où la multiplication n'est pas commutative ; ce sont les *quaternions,* dont les Anglais font un si fréquent usage en Physique mathématique. Mais, pour les quaternions, les axiomes de l'ordre ne sont pas vrais; ce qu'il y a donc d'original dans la conception de M. Hilbert, c'est que ses nouveaux nombres satisfont aux axiomes de l'ordre sans satisfaire à la règle de commutativité.

Revenons à la Géométrie. Admettons les axiomes des trois premiers groupes, c'est-à-dire les axiomes projectifs du plan et de l'espace, les axiomes de l'ordre et le postulat d'Euclide; le théorème de Desargues s'en déduira, puisqu'il est une conséquence des axiomes projectifs de l'espace.

Nous voulons constituer notre géométrie *sans nous servir des axiomes métriques;* le mot de *longueur* n'a donc encore pour nous aucun sens; nous n'avons pas le droit de nous servir du compas; en revanche, nous pouvons nous servir de la règle, puisque nous admettons que par deux points on peut faire passer une droite, en vertu de l'un des axiomes projectifs; nous savons également mener par un point une parallèle à une droite donnée, puisque nous admettons le postulatum d'Euclide. Voyons ce que nous pouvons faire avec ces ressoures.

Nous pouvons définir l'homothétie de deux figures; deux triangles seront dits *homothétiques* quand leurs côtés seront parallèles deux à deux, et nous en conclurons (par le théorème de Desargues que nous admettons) que les droites qui joignent les sommets correspondants sont concourantes. Nous nous servirons ensuite de l'homothétie pour définir les proportions. Nous pouvons aussi définir l'égalité dans une certaine mesure.

Les deux côtés opposés d'un parallélogramme seront égaux *par définition;* nous savons ainsi reconnaître si deux segments sont égaux entre eux, pourvu qu'ils soient parallèles.

Grâce à ces conventions, nous sommes maintenant en mesure de comparer les longueurs de deux segments; mais *pourvu que ces segments soient* PARALLÈLES. La comparaison de deux longueurs dont la direction est différente n'a aucun sens, et il faudrait pour ainsi dire une unité de longueur différente pour chaque direction. Inutile d'ajouter que le mot *angle* n'a aucun sens.

Les longueurs seront ainsi exprimées par des nombres; mais ce ne seront pas forcément des nombres ordinaires. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que, si le théorème de Desargues est vrai comme nous l'admettons, ces nombres appartiendront à un système satisfaisant aux axiomes arithmétiques des deux premiers groupes, c'est-à-dire à un *système arguésien*. Inversement, étant donné un système quelconque S de nombres arguésiens, on peut construire une géométrie telle que les longueurs des segments d'une droite soient justement exprimées par ces nombres.

Voici comment peut se faire cette construction : un point de ce nouvel espace sera *défini* par trois nombres x, y, z du système S qui s'appelleront les *coordonnées* de ce point. Si aux trois coordonnées des divers points d'une figure on ajoute trois constantes (qui sont, bien entendu, des nombres arguésiens du système S), on obtient une autre figure transformée de la première, et de telle façon qu'à un segment quelconque de l'une des figures corresponde dans l'autre un segment égal et parallèle (au sens donné plus haut à ce mot). Cette transformation est donc une translation, de sorte que ces trois constantes définissent une translation. Si maintenant nous multiplions les trois coordonnées de tous les points d'une même figure par une même constante, nous obtiendrons une seconde figure qui sera homothétique de la première.

L'équation du plan sera une équation linéaire connue dans la Géométrie analytique ordinaire; mais, comme dans le système S la multiplication ne sera pas commutative en général, il importe de faire une distinction et de dire que dans chacun des termes de cette équation linéaire ce sera la coordonnée qui jouera le rôle de multiplicande, et le coefficient constant qui jouera le rôle de multiplicateur.

Ainsi, à chaque système de nombres arguésiens correspondra une géométrie nouvelle satisfaisant aux axiomes projectifs, à ceux de l'ordre, au théorème de Desargues et au postulatum d'Euclide. Quelle est maintenant la signification géométrique de l'axiome arithmétique du troisième groupe, c'est-à-dire de la règle de commutativité de la multiplication? *La traduction géométrique de cette règle, c'est le théorème de Pascal;* je veux parler du théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique, en supposant que cette conique se réduit à deux droites.

Ainsi, le théorème de Pascal sera vrai ou faux, selon que le système S sera pascalien ou non pascalien; et, comme il y a des systèmes non pascaliens, *il y aura également des géométries non pascaliennes.*

Le théorème de Pascal peut se démontrer en partant des axiomes métriques; il sera donc vrai, si l'on admet que les figures peuvent se transformer non seulement par homothétie et translation, comme nous venons de le faire, mais encore par rotation.

Le théorème de Pascal peut également se déduire de l'axiome d'Archimède, puisque nous venons de voir que tout système de nombres arguésiens et archimédiens est en même temps pascalien; *toute géométrie non pascalienne est donc en même temps non archimédienne.*

Le Streckenüberträger. — Citons encore une autre conception de Hilbert. Il étudie les constructions que l'on pourrait faire, non pas à l'aide de la règle et du compas, mais par le moyen de la règle et d'un instrument particulier qu'il appelle *Streckenüberträger,* et qui permettrait de porter sur une droite un segment égal à un autre segment pris sur une autre droite. Le *Streckenüberträger* n'est pas l'équivalent du compas; ce dernier instrument permettrait de construire l'intersection de deux cercles ou d'un cercle et d'une droite quelconque; le *Streckenüberträger* nous donnerait seulement l'intersection d'un cercle et d'une droite *passant par le centre de ce cercle.* M. Hilbert cherche donc quelles sont les constructions qui seront possibles avec ces deux instruments, et il arrive à une conclusion bien remarquable.

Les constructions qui peuvent se faire par la règle et le compas peuvent se faire également par la règle et le *Streckenüberträger, si ces constructions sont telles que le résultat en soit toujours réel.* Il est clair, en effet, que cette condition est nécessaire; car un cercle est toujours coupé *en deux points réels* par une droite menée par son centre. Mais il était difficile de prévoir que cette condition serait également suffisante.

Géométries diverses. — Je voudrais, avant de terminer, voir quelle place occupent dans la classification de M. Hilbert les diverses géométries proposées jusqu'ici. Et d'abord *les* géométries de Riemann; je ne veux pas parler de *la* géométrie de Riemann que j'ai signalée plus haut et qui est l'opposé de celle de Lobatchevski; je veux parler des géométries relatives aux espaces à courbure variable envisagés par Riemann dans sa célèbre *Habilitationsschrift.*

Dans cette conception, on attribue par définition une longueur à une courbe quelconque, et c'est sur cette définition que tout repose. Le rôle des droites est joué par les géodésiques, c'est-à-dire par les lignes de longueur minima menées d'un point à un autre. Les axiomes projectifs ne sont plus vrais, et il n'y a aucune raison, par exemple, pour que deux points ne puissent être joints que par une seule géodésique. Le postulat d'Euclide ne peut plus évidemment avoir aucun sens. L'axiome d'Archimède reste vrai, ainsi que les axiomes de l'ordre *mutatis mutandis;* Riemann n'envisage, en effet, que les systèmes de nombres ordinaires. En ce qui concerne les axiomes métriques, on voit aisément que ceux des segments et ceux des angles restent vrais, tandis que l'axiome métrique des triangles (IV, 6) est évidemment faux.

Et ici nous retrouvons l'objection qu'on a le plus souvent faite à Riemann.

Vous parlez de longueur, lui a-t-on dit; or longueur suppose mesure, et, pour mesurer, il faut pouvoir transporter un instrument de mesure qui doit demeurer invariable; d'ailleurs, vous le reconnaissez vous-même. Il faut donc que l'espace soit partout égal à lui-même, qu'il soit homogène pour que la congruence y soit possible. Or, votre espace ne l'est pas, puisque sa courbure est variable; il ne peut donc y être question ni de mesure, ni de longueur.

Riemann n'aurait pas eu de peine à répondre. Supposons une géométrie à deux dimensions pour simplifier; nous pourrons alors nous représenter l'espace de Riemann comme une surface dans l'espace ordinaire. Nous pourrions mesurer des longueurs sur cette surface à l'aide d'une ficelle, et cependant une figure ne pourrait pas se déplacer en restant appliquée sur cette surface et de façon que les longueurs de tous ses éléments demeurent invariables. Car la surface n'est pas, en général, applicable sur elle-même.

C'est ce que M. Hilbert traduirait en disant que les axiomes métriques des segments sont vrais, et que celui des triangles ne l'est pas. Les premiers sont concrétisés pour ainsi dire dans notre ficelle; celui des triangles supposerait le déplacement d'une figure dont tous les éléments auraient une longueur constante.

Quelle sera la place d'une autre géométrie que j'ai proposée autrefois et qui rentre pour ainsi dire dans la même famille que celle de Lobatchevski et celle de Riemann? J'ai montré qu'on peut imaginer trois géométries à deux dimensions, qui correspondent respectivement aux trois sortes de surfaces du second degré, l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et l'hyperboloïde à une nappe; la première est celle de Riemann, la seconde est celle de Lobatchevski, et la troisième est la géométrie nouvelle. On trouverait de même quatre géométries à trois dimensions.

Où viendrait se ranger cette géométrie nouvelle dans la classification de M. Hilbert? Il est aisé de s'en rendre compte. Comme pour celle de Riemann, tous les axiomes subsistent, sauf ceux de l'ordre et celui d'Euclide; mais, tandis que dans la géométrie de Riemann, les axiomes sont faux sur toutes les droites, au contraire, dans la géométrie nouvelle, les droites se répartissent en deux classes, les unes sur lesquelles les axiomes de l'ordre sont vrais, les autres sur lesquelles ils sont faux.

Conclusions. — Mais ce qui est le plus important, c'est de nous rendre compte de la place qu'occupent les conceptions nouvelles de M. Hilbert dans l'histoire de nos idées sur la philosophie des Mathématiques.

Après une première période de naïve confiance où l'on nourrissait l'espoir de tout démontrer, est venu Lobatchevski, l'inventeur des géométries non euclidiennes.

Mais le véritable sens de cette invention n'a pas été pénétré tout de suite; Helmholtz a montré d'abord que les propositions de la géométrie euclidienne n'étaient autre chose que les lois des mouvements des corps solides, tandis que celles des autres géométries étaient les lois que pourraient suivre d'autres corps analogues aux corps solides, qui sans doute n'existent pas, mais dont l'existence pourrait être conçue sans qu'il en résultât la moindre contradiction, des corps que l'on pourrait fabriquer si on le voulait. Ces lois ne pouvaient, toutefois, être regardées comme expérimentales, puisque les solides naturels ne les suivent que grossièrement et, d'ailleurs, puisque les corps fictifs de la géométrie non euclidienne, n'existant pas, ne peuvent être accessibles à l'expérience. Helmholtz, toutefois, ne s'est jamais expliqué sur ce point avec une parfaite netteté.

Lie a poussé l'analyse beaucoup plus loin. Il a cherché de quelle manière peuvent se combiner les divers mouvements possibles d'un système quelconque, ou plus généralement les diverses transformations possibles d'une figure. Si l'on envisage un certain nombre de transformations et qu'on les combine ensuite de toutes les manières possibles, l'ensemble de toutes ces combinaisons formera ce qu'il appelle *un groupe*. A chaque groupe correspond une géométrie, et la nôtre, qui correspond au groupe des déplacements d'un corps solide, n'est qu'un cas très particulier. Mais tous les groupes que l'on peut imaginer posséderont certaines propriétés communes, et ce sont précisément ces propriétés communes qui limitent le caprice des inventeurs de géométries; ce sont elles, d'ailleurs, que Lie a étudiées toute sa vie.

Il n'était pourtant pas entièrement satisfait de son œuvre. Il avait, disait-il, toujours envisagé l'espace comme une *Zahlenmannigfaltigkeit*. Il s'était borné à l'étude des groupes continus proprement dits auxquels s'appliquent les règles de l'Analyse infinitésimale ordinaire. Ne s'était-il pas ainsi artificiellement restreint? N'avait-il pas ainsi négligé un des axiomes indispensables de la Géométrie (c'est en somme de l'axiome d'Archimède qu'il s'agit)? Je ne sais si l'on trouverait trace de cette préoccupation dans ses Œuvres imprimées, mais dans sa correspondance, ou dans sa conversation, il exprimait sans cesse ce même regret.

C'est précisément la lacune qu'a comblée M. Hilbert; les géométries de Lie restaient toutes assujetties aux formes de l'Analyse et de l'Arithmétique qui semblaient intangibles. M. Hilbert a brisé ces formes ou, si l'on aime mieux, il les a élargies. Ses espaces ne sont plus des *Zahlenmannigfaltigkeiten*.

Les objets qu'il appelle *point, droite* ou *plan* deviennent ainsi des êtres purement logiques qu'il est impossible de se représenter. On ne saurait s'imaginer, sous une forme sensible, ces points qui ne sont que des systèmes de trois séries. Peu lui importe, il lui suffit que ce soient des *individus* et qu'il ait des règles sûres pour distinguer ces individus les uns des autres, pour établir conventionnellement entre eux des relations d'égalité ou d'inégalité et pour les transformer.

Une autre remarque : les groupes de transformations au sens de Lie ne semblent plus jouer qu'un rôle secondaire. C'est du moins ce qu'il semble quand on lit le texte même de M. Hilbert. Mais, si l'on y regardait de plus près, on verrait que chacune de ses géométries est encore l'étude d'un groupe. Sa géométrie non archimédienne est celle d'un groupe qui contient toutes les transformations du groupe euclidien, correspondant aux divers déplacements d'un solide, mais qui en contient encore d'autres susceptibles de se combiner aux premières d'après des lois simples.

Lobatchevski et Riemann rejetaient le postulatum d'Euclide, mais ils conservaient les axiomes métriques; dans la plupart de ses géométries, M. Hilbert fait l'inverse. Cela revient à mettre au premier rang un groupe formé des transformations de l'espace par homothétie et par translation; et à la base de sa géométrie non pascalienne, c'est un groupe analogue que nous retrouvons, comprenant non seulement les homothéties et les translations de l'espace ordinaire, mais d'autres transformations analogues se combinant aux premières d'après des lois simples.

M. Hilbert semble plutôt dissimuler ces rapprochements, je ne sais pourquoi. Le point de vue logique paraît seul l'intéresser. Étant donnée une suite de propositions, il constate que toutes se déduisent logiquement de la première. Quel est le fondement de cette première proposition, quelle en est l'origine psychologique, il ne s'en occupe pas. Et même si nous avons, par exemple, trois propositions A, B, C, et si la logique permet, en partant de l'une quelconque d'entre elles, d'en déduire les deux autres, il lui sera indifférent de regarder A comme un axiome et d'en tirer B et C, ou bien, au contraire, de regarder C comme un axiome, et d'en tirer A et B. Les axiomes sont posés, on ne sait pas d'où ils sortent, il est donc aussi facile de poser A que C.

Son œuvre est donc incomplète; mais ce n'est pas une critique que je lui adresse. Incomplet, il faut bien se résigner à l'être. Il suffit qu'il ait fait faire à la philosophie des Mathématiques un progrès considérable, comparable à ceux que l'on devait à Lobatchevski, à Riemann, à Helmholtz et à Lie.

H. POINCARÉ.

MÉLANGES.

THÈSES DE SCIENCES MATHÉMATIQUES SOUTENUES DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS ET DEVANT LES FACULTES DES SCIENCES DES DÉPARTEMENTS DANS LE COURANT DU XIXe SIÈCLE.

(*Suite et fin.*)

Faculté des Sciences de Besançon.

1870 (22 janvier).

CHEVILLIET (J.-L.). — Sur l'équilibre d'élasticité du cylindre droit à base quelconque et de la sphère, soumis à l'action de la pesanteur et comprimés entre deux plans horizontaux.

— Sur le problème inverse des perturbations.