BULLETIN DE LA S. M. F.

H. POINCARÉ

Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 61-86.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__61_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRES.

SUR LES SURFACES DE TRANSLATION ET LES FONCTIONS ABÉLIENNES;

Par M. H. Poincaré.

M. Lie, dans une série de Notes (*Archiv for Matematik og Naturvidenskab*, vol. 7; *Comptes rendus*; 1892; *Berichte der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*; 1896), a montré qu'une surface (ou une variété de l'espace à plus de trois dimensions) ne peut être doublement de translation que si elle est engendrée d'une certaine manière par un système de fonctions abéliennes ou par leurs dégénérescences.

La démonstration de Lie repose sur la considération de certaines équations aux dérivées partielles.

Dans un Mémoire publié au *Journal de Liouville* (1895), j'ai été conduit moi-même à aborder le même problème par une voie toute différente.

Depuis, en réfléchissant à cette question, j'ai trouvé un troisième chemin qui peut conduire au but; le théorème fondamental se trouve démontré d'une façon pour ainsi dire intuitive et sans qu'on ait à faire intervenir des équations aux dérivées partielles de Lie.

Malheureusement, la démonstration de ce théorème n'est pas tout et elle devrait être suivie d'une longue discussion à cause du très grand nombre de cas particuliers que l'on est forcé de distinguer. Je ne les ai pas tous traités; je me suis borné à parler de ceux sur lesquels j'avais à dire quelque chose de nouveau. Pour les autres, qui sont d'ailleurs très particuliers, je n'aurais pu que renvoyer aux travaux de Lie.

I. — Théorème fondamental.

Supposons qu'une surface soit doublement de translation. Comme elle est de translation, ses équations pourront se mettre sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f_1(t_1) + f_2(t_2), \\ y = \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), \\ z = \psi_1(t_1) + \psi_2(t_2), \end{cases}$$

où t_1 et t_2 sont deux variables indépendantes; et comme elle est doublement de translation, cela pourra se faire de deux manières, de sorte qu'on aura, outre les équations (1), les équations

$$(1\ bis)\qquad \begin{cases} x = f_3(t_3) + f_4(t_4), \\ y = \varphi_3(t_3) + \varphi_4(t_4), \\ z = \psi_3(t_3) + \psi_4(t_4), \end{cases}$$

t_3 et t_4 étant deux autres variables.

Posons

$$\begin{array}{llll} f_1(t_1) = u_1, & f_2(t_2) = u_2, & f_3(t_3) = -u_3, & f_4(t_4) = -u_4, \\ \varphi_1(t_1) = v_1, & \varphi_2(t_2) = v_2, & \varphi_3(t_3) = -v_3, & \varphi_4(t_4) = -v_4, \\ \psi_1(t_1) = w_1, & \psi_2(t_2) = w_2, & \psi_3(t_3) = -w_3, & \psi_4(t_4) = -w_4. \end{array}$$

En rapprochant les équations (1) et (1 *bis*), nous aurons

$$(2)\qquad \begin{cases} u_1 + u_3 + u_3 + u_4 = 0, \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0, \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0. \end{cases}$$

Ces relations doivent avoir lieu quelles que soient les variables t_1 et t_2, les deux autres variables t_3 et t_4 étant précisément définies en fonctions de t_1 et de t_2 par ces relations (2).

Considérons les trois dérivées $f'_1(t_1)$, $\varphi'_1(t_1)$, $\psi'_1(t_1)$ des trois fonctions f_1, φ_1 et ψ_1 et regardons-les comme les coordonnées homogènes d'un point M_1 dans un plan.

Définissons de même le point M_i dont les coordonnées homogènes seront

$$f'_i(t_i),\quad \varphi'_i(t_i),\quad \psi'_i(t_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nous aurons ainsi quatre points M_1, M_2, M_3, M_4. Chacun de ces points décrira une courbe plane. J'appellerai C_i la courbe décrite par le point M_i.

Nous pouvons dire également que les coordonnées homogènes de M_i sont

$$du_i = f'_i(t_i)\,dt_i, \qquad dv_i = \varphi'_i(t_i)\,dt_i, \qquad dw_i = \psi'_i(t_i)\,dt_i \qquad (i = 1, 2),$$

ou

$$du_i = -f_i'(t_i)\,dt_i, \quad dv_i = -\varphi_i'(t_i)\,dt_i, \quad dw_i = -\psi_i'(t_i)\,dt_i \qquad (i = 3, 4).$$

Faisons d'abord varier t_1 en laissant t_2 constant, de telle sorte que

$$dt_2 = du_2 = dv_2 = dw_2 = 0;$$

la différentiation des équations (2) nous donnera

$$(3) \qquad \begin{cases} du_1 + du_3 + du_4 = 0, \\ dv_1 + dv_3 + dv_4 = 0, \\ dw_1 + dw_3 + dw_4 = 0. \end{cases}$$

Faisons ensuite varier t_2 en laissant t_1 constant, de telle sorte que

$$dt_1 = du_1 = dv_1 = dw_1 = 0;$$

la différentiation des équations (2) nous donnera

$$(3\,bis) \qquad \begin{cases} du_2 + du_3 + du_4 = 0, \\ dv_2 + dv_3 + dv_4 = 0, \\ dw_2 + dw_3 + dw_4 = 0. \end{cases}$$

Les équations (3) signifient que les trois points M_1, M_3, M_4 sont en ligne droite et les équations (3 *bis*) que les trois points M_2, M_3, M_4 sont en ligne droite. Les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sont donc en ligne droite.

La droite $M_1 M_2 M_3 M_4$ est une ligne droite quelconque du plan; en effet, les variables t_1 et t_2 étant indépendantes, le point M_1 est un point quelconque de C_1 et le point M_2 un point quelconque de C_2. En joignant un point quelconque de C_1 et un point quelconque de C_2, on obtient évidemment une droite quelconque du plan.

Supposons que nous fassions varier cette droite d'une manière continue; les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 varieront également d'une manière continue. Supposons maintenant qu'au bout d'un certain temps cette droite mobile soit revenue à sa position initiale; on peut se demander si les quatre points M_i reviendront également à leur position initiale.

Ce que je me propose de démontrer, c'est que, quand la droite mobile revient à sa position initiale, l'ensemble des quatre points n'a pas changé; ces points ont pu seulement s'échanger entre eux.

J'en déduirai que l'ensemble des courbes C_1, C_2, C_3, C_4 forme une courbe plane algébrique du quatrième ordre. Dans certains cas particuliers, cette courbe peut se décomposer, de telle façon que plusieurs des courbes C_i peuvent être distinctes. Mais, en général, la courbe du quatrième degré est indécomposable, de sorte que les quatre courbes sont le prolongement analytique l'une de l'autre.

Pour établir ces différents points, j'envisage d'abord une tangente T à la courbe C_1. Je suppose qu'il s'agisse d'une tangente ordinaire et non d'une tangente d'inflexion. Je suppose que la droite $M_1M_2M_3M_4$ que j'appelle D soit d'abord très voisine de T, qu'on la fasse varier d'une manière continue de façon qu'elle reste toujours très peu différente de T et qu'elle revienne finalement à sa position initiale *après avoir tourné autour de* T.

Dans ces conditions, le point M_1 est d'abord très voisin du point de contact de T et de C_1, il reste ensuite très voisin de ce point de contact; mais, quand la droite D revient à sa position initiale, le point M_1 ne revient pas à sa position initiale; il s'est échangé avec un autre point d'intersection M'_1 de la droite D et de la courbe C_1.

Soient de même M'_2, M'_3, M'_4 ce que deviennent les points d'intersection de D avec C_2, C_3 et C_4 quand la droite D, après avoir tourné autour de T, revient à sa position initiale. Ces points M'_2, M'_3, M'_4 peuvent différer des positions initiales M_2, M_3, M_4 de ces points d'intersection ou se confondre avec elles.

Soient u'_i, v'_i, w'_i les valeurs de $\pm f_i(t_i)$, $\pm \varphi_i(t_i)$, $\pm \psi_i(t_i)$ correspondant au point M'_i (on prend le signe $+$ pour $i = 1, 2$, et le signe $-$ pour $i = 3, 4$); on a alors les relations

$$(2\ bis) \qquad \begin{cases} u'_1 + u'_2 + u'_3 + u'_4 = 0, \\ v'_1 + v'_2 + v'_3 + v'_4 = 0, \\ w'_1 + w'_2 + w'_3 + w'_4 = 0. \end{cases}$$

Le point M'_1 différant du point M_1, on ne saurait avoir

$$u'_1 = u_1, \qquad v'_1 = v_1, \qquad w'_1 = w_1.$$

On aura donc, par exemple,

$$u'_1 \gtrless u_1.$$

Dans ces conditions, on ne saurait avoir à la fois

$$u_2 = u'_2, \qquad u_3 = u'_3, \qquad u_4 = u'_4,$$

sans quoi il y aurait incompatibilité entre la première relation (2) et la première relation (2 *bis*). Il faut donc que l'un au moins des points M'_2, M'_3, M'_4 diffère du point correspondant M_2, M_3 ou M_4.

Il faut donc que, par exemple, le point M_2 se soit échangé avec un autre point d'intersection M'_2 de la courbe C_2 et de la droite D quand cette droite D a tourné autour de T.

Il est clair qu'il n'en serait pas ainsi si la droite T coupait la courbe C_2 en un point ordinaire (très voisin de M_2) et sans le toucher.

D'où cette conclusion : la droite T doit être tangente à l'une des courbes C_2, C_3, C_4 ou passer par l'un des points singuliers de ces courbes.

Ce raisonnement s'applique à toutes les tangentes de la courbe C_1 ; or, il est clair que toutes ces tangentes ne peuvent pas passer par un des points singuliers de C_2, C_3 ou C_4 ou toucher en deux points différents, outre la courbe C_1, une autre des courbes C_2, C_3 et C_4.

Si une tangente T de C_1 passe par un point singulier de C_2, C_3 ou C_4, il est clair que la tangente infiniment voisine ne passera pas par ce point. Si une droite T touche C_1 et C_2 en deux points P_1 et P_2 différents, il est clair que la tangente de C_1 dont le point de contact est infiniment voisin de P_1 ne touchera pas C_2.

Il faut donc que le point de contact d'une tangente quelconque T de C_1 se confonde avec le point de contact de cette même tangente avec une autre de trois courbes C_2, C_3 et C_4 ; il faut donc que deux au moins des quatre courbes, C_1 et C_2 par exemple, se confondent ou plutôt soient le prolongement analytique l'une de l'autre.

Que se passera-t-il alors si la droite D tourne autour de la tangente T qui touche les deux courbes C_1 et C_2 (qui se prolongent analytiquement l'une l'autre) en un certain point P ? Dans la position initiale, les deux points M_1 et M_2 seront très voisins l'un de l'autre et très voisins du point P. Quand la droite D aura décrit un tour complet, les deux points d'intersection M_1 et M_2 se seront échangés, les points M_3 et M_4 étant d'ailleurs revenus à leurs positions initiales.

L'*ensemble* des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 n'aura pas varié.

Ce raisonnement, toutefois, demande à être complété. Car l'échange entre plusieurs points d'intersection de la droite D et de la courbe C_1 pourrait se faire aussi quand la droite D, au lieu de tourner autour d'une tangente ordinaire de la courbe C_1, tournerait autour d'une tangente singulière, par exemple d'une tangente d'inflexion, ou autour d'une droite passant par un point singulier de C_1.

Pour ne pas avoir à répéter notre raisonnement pour chacun de ces cas, j'emploierai l'artifice suivant. J'envisage une position particulière D_0 de la droite D et les positions correspondantes M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_4^0 des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.

Supposons que la droite D_0 vienne couper la courbe C_1 en un point M_1' autre que le point M_1^0. Soient P_1 et Q_1 deux points de la courbe C_1 très voisins de M_1^0 ; nous pouvons toujours supposer que la tangente en Q_1 est une tangente ordinaire. Soit T cette tangente en Q_1 ; les points P_1 et M_1^0 appartenant tous deux à la courbe C_1 et étant très voisins de Q_1, la droite $M_1^0 P_1$ différera très peu de T.

Considérons maintenant une suite continue de points M_1'' tous situés sur la courbe C_1 et allant de M_1' jusqu'en P_1 ; soit S cette suite. Faisons maintenant varier la droite D de la manière suivante : nous joindrons successivement le point M_1^0 à tous les points M_1'' de la suite S depuis le point M_1' jusqu'au point P_1, de telle façon que la droite D se confonde à l'origine avec $M_1^0 M_1'$ et à la fin avec $M_1^0 P_1$.

La droite D étant ainsi devenue très voisine de T, je pourrai la faire tourner autour de T, sans qu'elle cesse jamais d'être très voisine de cette tangente. Après un tour complet, elle se confondra de nouveau avec $M_1^0 P_1$.

Je joindrai ensuite le point M_1^0 à tous les points M_1'' de la suite S depuis le point P_1 jusqu'au point M_1' de telle façon que la droite D, repassant par les mêmes positions dans l'ordre inverse, se confonde à l'origine avec $M_1^0 P_1$ pour revenir finalement à sa position primitive $M_1^0 M_1''$.

La droite D a ainsi décrit un véritable lacet, qui se divise en trois parties; comment, dans ces trois parties, se sont comportés les points d'intersection? Dans la première partie, la droite D a occupé successivement les positions $M_0^1 M_1'$, $M_1^0 M_1''$, $M_1^0 P_1$; l'un des points d'intersection M_1^0 est resté fixe; un autre est parti de M_1' pour aboutir en P_1 en parcourant d'une façon continue toute la suite S.

Dans la deuxième partie, la droite D tourne autour de T et, comme T est une tangente ordinaire et que M_1^0 et P_1 sont très voisins du point de contact, les deux points d'intersection M_0^1 et P_1 s'échangent.

Dans la troisième partie, la droite D repasse, dans l'ordre inverse, par les mêmes positions que dans la première partie; le point qui coïncidait avec M_1^0 pendant toute la première partie coïncidera avec P_1 à la fin de la deuxième partie et, pendant la troisième partie, variera d'une façon continue de P_1 à M_1' en parcourant toute la suite S. Le point qui coïncidait avec M_1' au début de la première partie et avec P_1 à la fin de la première partie se trouvera en M_1^0 à la fin de la deuxième partie et restera fixe en M_1^0 pendant toute la troisième partie.

Finalement, les deux points M_1^0 et M_1' se seront échangés.

Voyons ce que deviennent les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 quand on fait varier ainsi la droite D. Le point M_1 est celui des points d'intersection de D et de C_1 qui se confondait primitivement avec M_1^0. Il se confondra donc avec M_1^0 pendant toute la première partie du lacet, s'échangera avec P_1 pendant la deuxième partie et variera de P_1 à M_1' pendant la troisième partie.

D'après ce que nous venons de voir, quand D tournera autour de T, M_1 doit s'échanger avec l'un des trois points M_2, M_3, M_4; si, par exemple, il s'échange avec M_2, les points M_3 et M_4 reviennent à leur position primitive, et la courbe C_2 est le prolongement analytique de la courbe C_1.

Dans la deuxième partie du lacet, les deux points d'intersection M_1^0 et P_1 s'échangent; or, M_1 coïncide avec M_1^0 au début de la deuxième partie et avec P_1 à la fin. Comme il doit s'échanger avec M_2, c'est que M_2 coïncide avec P_1 au début de la deuxième partie et avec M_1^0 à la fin.

Comment maintenant se comporte M_2 dans la première et la deuxième parties du lacet ? M_2 est l'intersection de D avec la courbe C_2 qui est identique à la courbe C_1 ; il est clair que si nous faisons parcourir à D en sens inverse la première partie du lacet, de façon à ramener le droite D dans sa position initiale D_0, le point M_2, qui coïncide avec P_1 quand la droite D (à la fin de la première partie du lacet) est en $M_1^0 P_1$, parcourra en sens inverse la suite S, de sorte qu'il se trouvera en M_1' quand la droite D sera en D_0.

Ainsi, le point M_2^0 (c'est-à-dire la position que prend M_2 quand D est en D_0) n'est autre chose que M_1'.

Si donc la droite D_0 coupe la courbe C_1 en un autre point que M_1^0, cet autre point ne peut être que l'un des points

$$M_2^0, \quad M_3^0, \quad M_4^0.$$

Ainsi, la droite D_0 (qui est une droite quelconque) ne peut avoir avec l'ensemble des courbes C_1, C_2, C_3, C_4 d'autres points d'intersection que les quatre points M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_4^0.

Donc l'ensemble de ces quatre courbes forme une courbe algébrique du quatrième degré. C. Q. F. D.

De là, il est aisé de déduire le théorème de Lie que les seules surfaces qui soient doublement de translation sont les surfaces

$$\Theta(x, y, z) = 0$$

(où Θ est la fonction Θ ordinaire à trois variables) et leurs dégénérescences.

II. — Extension des résultats précédents.

Le raisonnement s'étend presque sans changement au cas d'un plus grand nombre de variables.

Soient x_1, x_2, ..., x_p les coordonnées d'un point dans l'espace à p dimensions et supposons que l'on ait dans cet espace une variété V à $p-1$ dimensions qui soit doublement de translation.

Les équations de la variété V pourront se mettre sous la forme

$$(1) \quad x_q = f_{q.1}(t_1) + f_{q.2}(t_2) + \ldots + f_{q.p-1}(t_{p-1}) \qquad (q = 1, 2, \ldots, p)$$

t_1, t_2, ..., t_{p-1} étant $p-1$ variables indépendantes.

La variété V étant deux fois de translation, ses équations pourront se mettre de deux manières sous la forme (1), de sorte que nous aurons, outre les relations (1), les relations

$$(1\,bis)\quad x_q = f_{q.p}(t_p) + f_{q.p+1}(t_{p+1}) + \ldots + f_{q.2p-2}(t_{2p-2}) \qquad (q = 1, 2, \ldots, p),$$

où t_p, t_{p+1}, t_{p+2}, ..., t_{2p-2} représentent $p-1$ nouvelles variables.

Si nous posons

$$f_{q.i}(t_i) = u_{q.i} \qquad \begin{pmatrix} q = 1, 2, \ldots, p \\ i = 1, 2, \ldots, p-1 \end{pmatrix},$$

$$f_{q.i}(t_i) = -u_{q.i} \qquad (q = 1, 2, \ldots, p;\ i = p, p+1, \ldots, 2p-2),$$

des relations (1) et (1 *bis*) nous déduirons les suivantes :

$$(2)\qquad u_{q.1} + u_{q.2} + \ldots + u_{q.2p-3} + u_{q.2p-2} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, p),$$

où les $p-1$ variables t_1, t_2, ..., t_{p-1} doivent être regardées comme indépendantes, tandis que les $p-1$ variables t_p, t_{p+1}, ..., t_{2p-2} sont des fonctions des $p-1$ premières.

Considérons maintenant

$$f'_{1.i}(t_i),\quad f'_{2.i}(t_i),\quad \ldots,\quad f'_{p.i}(t_i)$$

ou, si l'on préfère,

$$du_{1.i},\quad du_{2.i},\quad \ldots,\quad du_{p.i},$$

comme les coordonnées homogènes d'un point M_i dans l'espace à $p-1$ dimensions, et appelons C_i la courbe gauche de l'espace à $p-1$ dimensions qui est décrite par le point M_i.

Supposons que l'on fasse varier t_1, les variables t_2, t_3, ..., t_{p-1} demeurant constantes de telle sorte que l'on ait

$$dt_i = du_{q.i} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, p-1;\ q = 1, 2, \ldots, p).$$

La différentiation des relations (2) nous donnera alors

$$(3)\qquad du_{q.1} + du_{q.p} + du_{q.p+1} + du_{q.p+2} + \ldots + du_{q.2p-2} = 0,$$

et l'on trouverait de même

$$(3\,bis)\quad \begin{cases} du_{q.k} + du_{q.p} + du_{q.p+1} + \qquad\qquad + du_{q.2p-2} = 0 \\ \qquad (q = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, p-1). \end{cases}$$

Ces relations signifient que les $2p - 2$ points

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_{2p-2}$$

sont dans une même variété plane P à $p - 2$ dimensions. Je dirai, pour abréger, dans un même plan P.

Voyons maintenant comment pourraient s'échanger entre eux les différents points d'intersection de la courbe C_1 et du plan P.

Soient T un plan tangent à C_1 et M_1^0 le point de contact; je supposerai que ce plan tangent soit un plan tangent ordinaire rencontrant la courbe en deux points confondus; je supposerai, de plus, que ce plan ne touche ni la courbe C_1, ni aucune des autres courbes C_i en un autre point que M_1^0; ce n'est donc ni un plan tangent commun à deux courbes C_i, ni un plan touchant double à C_1. Je supposerai que ce n'est pas non plus un plan tangent à la fois en M_1^0 à deux branches de courbe C_1 et C_i tangentes l'une à l'autre. Il est clair, en effet, que les plans tangents à C_1 satisfont *en général* à toutes ces conditions.

Supposons ensuite que le plan P, d'abord très peu différent de T, fasse un tour complet autour de T. Le plan P, dans sa position primitive, coupe C_1 en deux points M_1 et M'_1 très voisins de M_0. Quand P a tourné autour de T, ces deux points M_1 et M''_1 s'échangent; les autres points d'intersection de P avec les courbes C_t reviennent à leurs positions primitives.

Quand P tourne autour de T, le point M_1 change; par conséquent, pour que les relations (2) subsistent, il faut que l'un au moins des autres points M_i, le point M_2, change également.

Or cela ne peut arriver que d'une seule manière, puisque, d'après nos hypothèses, le plan T n'est pas tangent à la fois à deux branches de courbe différentes; cela ne peut arriver que si les deux courbes C_1 et C_2 sont le prolongement analytique l'une de l'autre.

Dans ce cas, M'_1 n'est autre chose que M_2, de sorte que les deux points M_1 et M_2 s'échangent simplement.

Reprenons maintenant le raisonnement dans toute sa généralité.

Soit P_0 une position particulière du plan P et M_i^0 la position correspondante du point M_i.

Je suppose que P_0 coupe C_1 en un point M'_1 différent de M_1^0.

Soient Q_1 et R_1 deux points de C_1 très voisins de M_1^0; nous pouvons toujours supposer que le plan tangent T en Q_1 est un *plan tangent ordinaire*. J'entends par là : 1° que ce plan tangent rencontre la courbe en deux points confondus seulement; 2° qu'il n'est pas tangent à la fois à deux branches de courbe C_i différentes (soit en touchant la courbe C_1 en deux points différents, ou en touchant la courbe C_1 et une courbe C_i en deux points différents; soit en touchant en Q_1 deux branches de courbe C_1 et C_i tangentes l'une à l'autre, mais différentes l'une de l'autre).

Faisons maintenant décrire au plan P un lacet.

Dans la première partie du lacet, le plan P part de la position P_0 et aboutit à une position finale où il passe par R_1 et M_1^0 et est très peu différent de T; dans les positions intermédiaires, il ne cesse pas de passer par M_1^0. Par conséquent, l'un des points d'intersection de P et de C_1 est resté fixe en M_1^0, l'autre a varié d'une manière continue de M'_1 à R_1; le point M_1 en particulier est resté fixe en M_1^0.

Dans la deuxième partie du lacet, le plan P décrit un tour complet autour de T. Les deux points d'intersection de P et de C_1 qui sont en M_1^0 et R_1 s'échangent entre eux. Le plan T étant un plan tangent ordinaire, deux des points M_i, à savoir M_1 et, par exemple, M_2 s'échangent; les autres points M_i reviennent à leurs positions primitives. Le point M_1 qui était en M_1^0 au commencement de cette deuxième partie vient donc en R_1 à la fin et l'on voit qu'inversement le point M_2 devait être en R_1 au commencement de la deuxième partie et venir en M_1^0 à la fin. Enfin les deux courbes C_1 et C_2 doivent être le prolongement analytique l'une de l'autre.

Dans la troisième partie du lacet, le plan P repasse dans l'ordre inverse, par les positions qu'il a occupées dans la première. Les points d'intersection de P avec C_1 (ou avec son prolongement analytique C_2) qui, au début de la troisième partie, se trouvaient en R_1 et en M_1^0, doivent venir à la fin de cette troisième partie en M'_1 et M_1^0. Les points $M_3, M_4, \dots, M_{2p-2}$ qui avaient, à la fin de la deuxième partie, repris les mêmes positions qu'au début de la deuxième partie, repasseront dans la troisième partie, dans l'ordre inverse par les mêmes positions que dans la première partie; de sorte qu'ils seront à la fin de la troisième partie dans les mêmes positions qu'au début de la première partie, c'est-à-dire en M_3^0, M_4^0, ..., M_{2p-2}^0. Le point M_1 qui, au début de la troisième partie, était en R_1, viendra à la fin de la troisième partie en M_1'; le point M_2 qui était en M_1^0 sera encore en M_1^0 à la fin de la troisième partie.

Enfin, le point M_2 qui était en R_1 à la fin de la première partie avait dû, pendant cette première partie, coïncider constamment avec un des points d'intersection de C_1 et de P, puisque C_1 et C_2 ne diffèrent pas au point de vue analytique. Avec lequel de ces points d'intersection? Il est clair que c'est avec celui qui est en R_1 à la fin de la première partie. Nous devons donc conclure qu'au début de la première partie il était en M_1'.

Donc M_1' n'est autre chose que M_2^0.

Ainsi, il ne peut pas y avoir d'autre point d'intersection de P_0 et de C_1 que les points M_i^0.

Donc l'ensemble des courbes C_i forme une courbe algébrique d'ordre $2p - 2$.

III. — Discussion.

Considérons donc cette courbe d'ordre $2p - 2$ que j'appellerai la *courbe* C et qui est formée de l'ensemble des courbes C_i. Je dis maintenant que les quantités que nous avons appelées $u_{q.i}$ sont des intégrales abéliennes de première espèce relatives à cette courbe algébrique.

Nous avons représenté par

$$du_{1.i}, \quad du_{2.i}, \quad \ldots, \quad du_{p.i}$$

les coordonnées homogènes du point M_i; nous pouvons représenter de même par

$$du_1, \quad du_2, \quad \ldots, \quad du_p$$

où

$$du_q = f'_{q.i}(t)\, dt$$

les coordonnées homogènes du point général M de la courbe C [comme *en général* C est indécomposable, de sorte que les différentes courbes C_i sont le prolongement analytique les unes des autres, je puis écrire simplement $f_q(t)$ au lieu de $f_{q.i}(t)$, de sorte que $du_q = f'_q(t)\, dt$)].

Je poserai d'ailleurs

$$\frac{du_1}{\xi_1}=\frac{du_2}{\xi_2}=\ldots=\frac{du_{p-1}}{\xi_{p-1}}=\frac{du_p}{\xi_p}.$$

Première proposition. — *Supposons d'abord que la courbe* C *ne présente aucun point singulier, tel que point double, point de rebroussement, etc.*

Alors dans le voisinage d'un point quelconque de C les rapports des coordonnées ξ à l'une d'entre elles, à ξ_p par exemple, seront des fonctions holomorphes de l'un de ces rapports, de $\frac{\xi_1}{\xi_p}$ par exemple.

Soit M un point de C dont les coordonnées sont $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$; si, par exemple, dans le voisinage de ce point, tous les $\frac{\xi_i}{\xi_p}$ sont fonctions holomorphes de $\frac{\xi_1}{\xi_p}$, je dirai que toutes les fonctions holomorphes $\frac{\xi_1}{\xi_p}$ sont des fonctions holomorphes du point analytique $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ ou simplement du point M. Si, dans le voisinage de M, ce n'étaient pas tous les $\frac{\xi_i}{\xi_p}$ qui fussent fonctions holomorphes de $\frac{\xi_1}{\xi_p}$, mais tous les $\frac{\xi_i}{\xi_{p-1}}$, par exemple, qui fussent fonctions holomorphes de $\frac{\xi_2}{\xi_{p-1}}$, ce seraient alors les fonctions holomorphes de $\frac{\xi_2}{\xi_{p-1}}$ que j'appellerais *fonctions holomorphes du point* M, etc.; dans tous les cas, cette expression, fonction holomorphe du point M, se trouvera parfaitement définie.

Si, dans le voisinage d'un point de C, la fonction u_2 n'est pas une fonction holomorphe du point M, je dirai que ce point est un point singulier de la fonction u_q.

Je dis maintenant que la fonction u_q n'aura pas de point singulier. Considérons, en effet, le plan P qui coupe C aux $2p-2$ points

$$M_1,\quad M_2,\quad \ldots,\quad M_{2p-2},$$

de sorte qu'on aura

$$u_{q.1}+u_{q.2}+\ldots+u_{q.2p-2}=0. \tag{1}$$

Si les points M_2, M_3, ..., M_{2p-2} ne sont pas singuliers, les fonctions

$$u_{q.2}, \quad \ldots, \quad u_{q.2p-2}$$

seront holomorphes; en vertu de (1), la fonction $u_{q.1}$ le sera également, de sorte que le point M_1 ne sera pas non plus singulier.

Si le plan P passe par un point singulier de la fonction u_q sur C, il devra donc passer par un second point singulier. Mais le plan P est quelconque; quelles que soient les positions attribuées aux points singuliers, on pourrait donc faire passer le plan P par un de ces points et par un seul. Or, cela est impossible, nous venons de le voir; donc il ne peut y avoir de point singulier.

En particulier, la fonction u_q ne pourra devenir infinie (à moins que le point M ne décrive une infinité de cycles sur la surface de Riemann S relative à la courbe C), mais nous ne pouvons encore affirmer que u_q soit une fonction uniforme du point M; nous voyons déjà que u_q revient à sa valeur primitive quand le point M décrit un contour fermé *infiniment petit* sur la surface de Riemann S; mais il pourrait n'en pas être de même quand le point M décrit un *cycle* fermé sur S.

Le raisonnement ne s'appliquerait pas si la courbe C présentait un point singulier, un point double, par exemple; car alors tout plan P passant par ce point double couperait C en *deux* points confondus qui pourraient être tous deux singuliers pour la fonction u. Tout plan P passant par un de ces points singuliers passerait alors par l'autre. En revanche, le raisonnement s'applique sans changement si la courbe algébrique C se décompose sans avoir de point multiple.

Deuxième proposition. — Soient maintenant

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_h$$

les intégrales abéliennes de première espèce de la courbe C et soit $v_{q.i}$ la valeur de v_q au point M_i. Nous aurons

$$v_{q.1} + v_{q.2} + \ldots + v_{q.2p-2} = 0, \tag{2}$$

relations analogues aux relations (1).

Considérons maintenant

$$\begin{array}{rl} \text{les } du_{q.i} & (q = 1, 2, \ldots, p) \\ \text{et les } dv_{q.i} & (q = 1, 2, \ldots, h) \end{array}$$

comme les coordonnées homogènes d'un point N_i dans l'espace à $p+h-1$ dimensions. Nous trouverons comme plus haut par différentiation

$$(2\,bis)\qquad \left\{\begin{array}{ll} dv_{q.i}+\sum_{k=p}^{2p-2} dv_{q.k}=0 & (q=1,2,\ldots,h), \\ du_{q.i}+\sum_{k=p}^{2p-2} du_{m.k}=0 & (m=1,2,\ldots,p) \\ \qquad (i=1,2,\ldots,p-1); & \end{array}\right.$$

ces relations nous montrent que les $2p-2$ points N_i sont dans une même variété plane P' à $p-2$ dimensions.

Soient C'_i la courbe décrite par le point N_i et C' l'ensemble des courbes C'_i.

Soit P'_0 une position particulière du plan P' et soit N_i^0 la position correspondante du point N_i. Soit T_i la tangente à la courbe C' au point N_i^0.

Pour définir P'_0, il suffira de nous donner $p-1$ des points N_i^0, par exemple les points $N_1^0, N_2^0, \ldots, N_{p-1}^0$. Nous pourrons toujours supposer que ces $p-1$ points n'appartiennent pas à une même variété plane à $p-3$ dimensions. Si, en effet, les points $N_1, N_2, \ldots, N_{p-1}$ appartenaient *en général* à un plan de $p-3$ dimensions, il en serait de même des points $M_1, M_2, \ldots, M_{p-1}$ et alors la courbe C devrait être contenue dans un plan à $p-2$ dimensions, de sorte que la variété V se réduirait à un plan à $p-2$ dimensions.

Soit maintenant N_1^1 un point de C' infiniment voisin de N_1^0; par les $p-1$ points

$$N_1^1,\quad N_2^0,\quad N_3^0,\quad \ldots,\quad N_{p-1}^0,$$

je puis faire passer une variété plane P'_1 à $p-2$ dimensions, infiniment peu différente de P'_0.

P'_1 coupera C' en $p-1$ autres points

$$N_p^1,\quad N_{p+1}^1,\quad \ldots,\quad N_{2p-2}^1,$$

infiniment voisins des points

$$N_p^0,\quad N_{p+1}^0,\quad \ldots,\quad N_{2p-2}^0.$$

Les deux variétés P'_0 et P'_1 ayant $p-2$ points communs

$$N_2^0,\quad N_3^0,\quad \ldots,\quad N_{p-1}^0$$

(non situés sur une même variété plane à $p-4$ dimensions, puisque avec N_1^0 ils ne sont pas dans un plan à $p-3$ dimensions) détermineront une variété plane Q_0 à $p-1$ dimensions.

Q_0 contiendra évidemment la droite

$$N_q^0 N_q^1 \qquad (q=1, p, p+1, \ldots, 2p-2),$$

c'est-à-dire la tangente T_q. (C'est ainsi que le plan tangent à un cône contient les tangentes à toutes les courbes tracées sur le cône et coupant la génératrice de contact.)

Ainsi, la variété plane qui contient P'_0 et la tangente T_1 contient aussi les tangentes

$$T_p,\quad T_{p+1},\quad \ldots,\quad T_{2p-2}.$$

Comme rien ne distingue les différents points d'intersection de C' et de P'_0, je pourrais démontrer de même que cette variété contient aussi les tangentes

$$T_2,\quad T_3,\quad \ldots,\quad T_{p-1}.$$

En résumé, à toute variété plane P' à $p-2$ dimensions coupant C' en $2p-2$ points N_i correspondra une variété plane Q à $p-1$ dimensions qui contiendra les $2p-2$ tangentes T_i.

Soit maintenant P'_2 une position de P' infiniment voisine de P'_0; soient Q_0 et Q_2 les variétés Q correspondant à P'_0 et à P'_2. Je me propose de démontrer que Q_0 et Q_2 sont identiques. Je désignerai par N_i^0 et N_i^2 les intersections de C' avec P'_0 et avec P'_2 et par T_i^0 et T_i^2 les tangentes correspondantes à C'.

En effet, supposons d'abord que P'_2 et P'_0 ait un point commun, par exemple N_1^0. Alors Q_2 et Q_0 contiendront tous deux la tangente T_1^0.

De plus, Q_0 contient la tangente T_q^0 et Q_2 contient la tangente infiniment voisine T_q^2. En négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, on peut dire que T_q^0 et T_q^2 se coupent en un point infiniment voisin de N_q^0.

Donc, les $2p-2$ points N_q^0 sont infiniment voisins de l'intersection de Q_2 et Q_0; la limite de l'intersection de Q_2 et Q_0, quand P'_2 et P'_0 tendent à se confondre, ne peut donc être que P'_0. Or cette intersection doit contenir la tangente T_1^0. Mais en général (c'est-à-dire si les points $N_1^0, N_2^0, \ldots, N_{p-1}^0$ qui définissent P'_0 ont été choisis d'une façon quelconque sur C'), la tangente T_1^0 ne fait pas partie de P'_0 (sans cela, en effet, la tangente à la courbe C au point M_1 serait également, en général, dans le plan P; or le plan P est un plan *quelconque* de $p-2$ dimensions de l'espace plan à $p-1$ dimensions où se trouve C. Il est donc impossible que la tangente à C s'y trouve toujours). La contradiction ne peut être levée que si l'on suppose que Q_0 et Q_2 se confondent.

Ainsi Q_2 et Q_0 se confondent si P'_0 et P'_2 ont comme point commun $N_1^0 = N_1^2$; ils se confondraient également si P'_0 et P'_2 avaient comme point commun $N_2^0 = N_2^2$.

Supposons maintenant que P'_0 et P'_2 n'aient aucun point commun. Je pourrai construire une variété P'_3 passant par N_1^0 et par N_2^2. Alors P'_0 et P'_3 ayant pour point commun N_1^0, Q_0 et Q_3 se confondent; d'autre part, P'_3 et P'_2 ayant pour point commun N_2^2, Q_3 et Q_2 se confondent. Donc Q_0 et Q_2 se confondent encore.

Maintenant, si deux variétés Q correspondant à deux variétés P′ très peu différentes se confondent, il est aisé de conclure que deux variétés Q correspondant à deux variétés P′ quelconques se confondront encore. Donc toutes les variétés Q se confondent.

Donc, la courbe C′ est située dans un espace plan à $p-1$ dimensions (le théorème correspondant dans l'espace ordinaire est le suivant : *Si toutes les droites qui joignent deux points quelconques d'une courbe gauche vont rencontrer cette même courbe en un troisième point, c'est que la courbe gauche se réduit à une courbe plane*). Remarquons que le raisonnement s'applique quand même les courbes C et C′ présenteraient des points multiples ou seraient décomposables.

TROISIÈME PROPOSITION. — Donc entre les $p+h$ fonctions u et v il y a h relations linéaires.

Donc p est au moins égal à h; et, parmi les fonctions u, il y en a h qui sont des combinaisons linéaires des intégrales abéliennes de première espèce.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_h$$

sont des intégrales abéliennes de première espèce.

Je dis qu'il en est de même de $u_i (i > h)$.

En effet, du_i est une différentielle abélienne, puisque du_1 en est une et que

$$du_i = \frac{\xi_i}{\xi_1} du_1.$$

De plus, u_i ne devenant pas infini sera une intégrale abélienne de première espèce.

Ainsi toutes les fonctions u sont des intégrales abéliennes de première espèce, de sorte que $p = h$.

Il semblerait que le raisonnement est en défaut si la courbe C est unicursale, c'est-à-dire si $h = 0$; on n'a pas, en effet, dans ce cas, le droit de dire que du_1 est une différentielle abélienne, puisque nous n'avons plus de différentielle abélienne de première espèce.

Mais ce cas doit être exclu. Et, en effet, si la courbe C est unicursale, il n'y a plus de cycles sur la surface de Riemann S ; il en résulte que les fonctions u qui sont des fonctions holomorphes du point M sur *toute* cette surface de Riemann sont en même temps des fonctions uniformes. Elles doivent donc se réduire à des constantes.

Supposons maintenant que la courbe C *présente des points singuliers, par exemple des points doubles, des points de rebroussement, etc.*

Nous ne pourrons plus dire que la fonction u_q est une fonction holomorphe du point M sur toute la surface de Riemann S ; elle pourra présenter des singularités quand le point M vient en un point singulier de C. Voyons quelle peut être la nature de ces singularités.

Soit donc O un point singulier de C ; le plan P coupera C en $2p - 2$ points et quand la distance de ce plan P à O tendra vers zéro de la manière la plus générale, m de ces $2p - 2$ points tendront vers O ; de sorte que O sera un point multiple d'ordre m.

Je suppose d'abord que m est au plus égal à $p - 1$.

Nous devons introduire ici la notion des intégrales de première espèce dégénérées.

Lorsqu'une courbe algébrique acquiert un point double de plus, son genre s'abaisse d'une unité; elle perd donc une intégrale abélienne de première espèce. Que devient à la limite cette intégrale de première espèce qui disparaît ainsi? Elle devient une intégrale de troisième espèce que j'appellerai *intégrale de première espèce dégénérée*.

Dans le cas d'un point double ordinaire, il arrive que le point double correspond à deux points de la surface de Riemann. L'intégrale dégénérée correspondante est alors l'intégrale de troisième espèce qui admet ces deux points comme points singuliers logarithmiques avec deux résidus égaux et de signe contraire.

En vertu du théorème d'Abel, si l'on coupe une courbe de l'espace à $p - 1$ dimensions par un plan à $p - 2$ dimensions, la somme des valeurs d'une intégrale de première espèce relatives aux différents points d'intersection sera une constante, par exemple zéro. Par raison de continuité, cela sera encore vrai pour une intégrale dégénérée.

Soit donc v une intégrale de première espèce ou une intégrale dégénérée relative à C, et v_i sa valeur en M_i; on aura

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{2p-2} = 0.$$

Regardons

$$du_{1.i}, \quad du_{2.i}, \quad \ldots, \quad du_{p.i}, \quad dv_i$$

comme les coordonnées homogènes d'un point N_i dans l'espace à p dimensions.

Soit C' l'ensemble des courbes décrites par les points N_i; la deuxième proposition restant vraie, cette courbe C' sera dans un espace plan à $p - 1$ dimensions, c'est-à-dire que l'on aura

$$dv = \alpha_1\, du_1 + \alpha_2\, du_2 + \ldots + \alpha_p\, du_p,$$

les α étant des coefficients constants. On tire de là

$$du_q = dv \frac{\xi_q}{\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_p \xi_p},$$

ce qui montre que du_q est une différentielle abélienne.

Le raisonnement s'applique sans difficulté au cas où la courbe C est indécomposable, et où elle possède au moins une intégrale de première espèce ou une intégrale dégénérée.

Or, elle aura toujours au moins une intégrale de première espèce, à moins qu'elle ne soit unicursale.

D'autre part, si elle a un ou plusieurs points multiples, elle aura au moins une intégrale dégénérée. En un de ces points multiples viendront passer une ou plusieurs branches de courbe distinctes. Par exemple, en un point double à tangentes séparées passeront deux branches sans point singulier; en un point de rebroussement une seule branche avec un point singulier; en un point triple pourront passer ou bien trois branches sans point singulier, ou bien une branche sans point singulier et une autre à point de rebroussement, ou bien une branche unique avec un point singulier d'ordre plus élevé, etc.

Si l'une des branches de courbe présente ainsi un point singulier, l'intégrale de deuxième espèce qui admet ce point singulier comme pôle sera une intégrale dégénérée. Si aucune des branches n'admet de point singulier, il y aura au moins deux branches, et le point multiple correspondra au moins à deux points de la surface de Riemann (à autant de points de cette surface qu'il y a de branches distinctes). Alors, l'intégrale de troisième espèce qui admet ces deux points comme points logarithmiques avec des résidus égaux et de signe contraire est une intégrale dégénérée.

Si la courbe C était indécomposable, le raisonnement ne serait donc en défaut que si elle était unicursale et dépourvue de points multiples.

Mais ce cas, comme nous l'avons remarqué plus haut, doit être exclu, car, en l'absence de point multiple et d'après la première proposition, les fonctions u sont holomorphes sur toute la surface de Riemann et, si la courbe est unicursale, elles sont uniformes et, par conséquent, se réduisent à des constantes.

Il en serait encore de même si la courbe C était décomposable et qu'une des composantes, que j'appellerai K, soit unicursale, sans point multiple et ne coupant aucune des autres composantes. En effet, les fonctions u ne peuvent avoir d'autres points singuliers que les points multiples des diverses composantes et leurs points d'intersection; comme la courbe K ne passe par aucun de ces points, les fonctions u seront holomorphes sur toute la surface de Riemann Σ relative à K; comme K est unicursale, cette surface Σ n'aura pas de cycle et, par conséquent, les fonctions u seront uniformes; elles se réduisent donc à des constantes sur toute la surface Σ.

Si alors nous reprenons les relations

$$u_{q.1} + u_{q.2} + \ldots + u_{q.2p-2} = 0,$$

un certain nombre des quantités $u_{q.i}$ (à savoir celles qui correspondent aux points M_i qui sont sur la composante K) se réduisent à des constantes que l'on peut supposer nulles sans restreindre la généralité. Alors la variété V aurait moins de $p - 1$ dimensions, de sorte que ce cas doit être encore exclu.

Supposons donc que C se décompose et qu'une des composantes K soit de genre supérieur à zéro, on ait un point multiple. Cette composante admettra une intégrale de première espèce ou une intégrale dégénérée. Appelons v cette intégrale. Sur les autres composantes nous supposerons $v = 0$. Si la composante K rencontre une autre des composantes, il arrivera ainsi généralement que v n'aura pas la même valeur sur les deux branches de courbe qui passeront au point d'intersection, mais cela n'a aucun inconvénient.

Si les $du_{q.i}$ et v_i sont encore les coordonnées homogènes du point N_i, on verra encore que la courbe C' est dans un espace plan à $p - 1$ dimensions; d'où il résulte :

1° Que les composantes de C autres que K sont dans des plans à moins de $p - 1$ dimensions;

2° Que sur les composantes K, on a

$$dv = \alpha_1\, du_1 + \alpha_2\, du_2 + \ldots + \alpha_p\, du_p,$$

d'où l'on déduit, comme plus haut, que, sur cette composante K, les du sont des différentielles abéliennes.

Si donc toutes les composantes sont de genre supérieur à zéro ou ont un point multiple, il n'y a pas de difficulté.

Supposons donc qu'une composante K soit unicursale et sans point multiple. Elle devra avoir au moins un point commun avec une des autres composantes, le cas où elle ne coupe aucune de ces composantes (tout en étant unicursale et sans point multiple) ayant été exclu plus haut.

Supposons d'abord que K coupe une autre composante K′ en deux points Q et Q′.

Définissons une fonction v de la façon suivante : Sur K, v sera l'intégrale de troisième espèce qui admet Q et Q′ comme points logarithmiques avec les résidus $+1$ et -1; sur K′, v sera l'intégrale de troisième espèce qui admet Q et Q′ comme points logarithmiques avec les résidus -1 et $+1$; sur les autres composantes, v sera nulle.

Dans ces conditions, on aura encore

$$\sum v_i = 0,$$

en appelant v_i la valeur de v au point M_i.

Si donc $du_{q.i}$ et dv_i sont les coordonnées homogènes de N_i, la courbe C′ sera dans un espace plan à $p-1$ dimensions, d'où il résulte que, sur les composantes K et K′, on a encore

$$dv = \sum \alpha_q \, du_q,$$

et que, sur ces deux composantes, les du sont des différentielles abéliennes.

Le résultat s'étend au cas où les deux composantes K et K′ se touchent en un point Q, c'est-à-dire où les deux points Q et Q′ se confondent; l'intégrale de troisième espèce v se réduit alors à une intégrale de deuxième espèce.

Considérons maintenant un autre cas : je suppose que, parmi les composantes de C, il y en ait m que j'appellerai

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_m,$$

et qui se coupent mutuellement de telle sorte que K_1 coupe K_2 en Q_1, que K_2 coupe K_3 en Q_2, ..., que K_{m-1} coupe K_m en Q_m, et enfin que K_m coupe K_1 en Q_m.

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment K_1 par K_1 ou par K_{m+1} et de même Q_1 par Q_1 ou Q_{m+1}, K_m par K_m ou K_0, Q_m par Q_m ou Q_0.

Alors K_i coupe K_{i+1} en Q_i et K_{i-1} en Q_{i-1}.

Je dirai alors que ces composantes forment une chaîne fermée.

Je définirai alors la fonction v comme il suit : Sur K_i, ce sera l'intégrale de troisième espèce qui admet Q_i et Q_{i-1} comme points logarithmiques avec les résidus $+1$ et -1; sur les composantes étrangères à la chaîne, v sera nul.

On a alors $\Sigma v_i = 0$ et, toujours par le même raisonnement, on verrait que sur les composantes de la chaîne les du sont des différentielles abéliennes.

Nous avons laissé de côté un certain nombre de cas d'exception qui pourraient sans doute être traités par des principes analogues.

J'examinerai encore un cas dont la généralité est très grande.

La courbe C, décomposable ou non, n'admet aucun point multiple d'ordre supérieur à $p-1$.

Je commencerai par établir le point suivant :

Soient $F = 0$, $F_1 = 0$ les équations de deux variétés algébriques de même degré à $p-2$ dimensions et situées dans l'espace à $p-1$ dimensions. L'équation

$$F + \lambda F_1 = 0$$

sera l'équation générale du faisceau déterminé par ces deux variétés.

Une variété quelconque du faisceau coupera C en μ points que j'appellerai

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_\mu.$$

Soient

$$u_{i.1}, \quad u_{i.2}, \quad \ldots, \quad u_{i.\mu}$$

les valeurs correspondantes de la fonction u_i. Soient

$$M'_1, \quad M'_2, \quad \ldots. \quad M'_\mu$$

les μ points d'intersection de C avec une variété du faisceau infiniment voisine de la première. Ces μ points seront évidemment infiniment voisins de $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$.

Soit $du_{i.k}$ l'accroissement que subit $u_{i.k}$ quand on passe de M_k à M'_k.

Je dis que l'on a

$$du_{i.1} + du_{i.2} + \ldots + du_{i.\mu} = 0.$$

C'est le théorème d'Abel. Nous aurons ainsi montré que nos fonctions u_i satisfont au théorème d'Abel comme les intégrales abéliennes de première espèce.

En effet, les fonctions $u_{i.k}$ et $\frac{du_{i.k}}{d\lambda}$ sont des fonctions holomorphes de λ $\left(\text{ou de } \frac{1}{\lambda} \text{ pour } \lambda = \infty\right)$ à part les exceptions suivantes :

1° Quand la variété $F + \lambda F_1 = 0$ est tangente à C et que, par conséquent, plusieurs des points M_k s'échangent entre eux. (Soient, par exemple, pour fixer les idées, les trois points M_1, M_2, M_3; mais alors la somme

$$\frac{du_{i.1}}{d\lambda} + \frac{du_{i.2}}{d\lambda} + \frac{du_{i.3}}{d\lambda}$$

est fonction holomorphe de λ.)

2° Quand la variété $F + \lambda F_1 = 0$ va passer par un point multiple ou singulier de la courbe C.

Nous avons vu, en effet, que les fonctions u_i sont des fonctions holomorphes du point M, sauf quand ce point M vient en un des points multiples de C.

Si donc nous posons

$$du_{i.1} + du_{i.2} + \ldots + du_{i.\mu} = \varphi(\lambda)\, d\lambda,$$

$\varphi(\lambda)$ est holomorphe $\left(\text{de même que} \int \varphi(\lambda)\, d\lambda\right)$, sauf pour les valeurs de λ telles que $F + \lambda F_1 = 0$ aille passer par un point multiple.

Supposons donc que pour $\lambda = \lambda_0$, q des points M_k, à savoir les points $M_1, M_2, \ldots, M_q$ aillent se confondre ensemble et avec un point multiple A d'ordre q; les points $M_{q+1}, \ldots, M_\mu$ restant distincts entre eux du point A et de tous les autres points singuliers.

Posons

$$\begin{gathered}
du_{i.1} + du_{i.2} + \ldots + du_{i.q} = \varphi_1(\lambda)\, d\lambda, \\
du_{i.q+1} + du_{i.q+2} + \ldots + du_{i.\mu} = \varphi_2(\lambda)\, d\lambda, \\
\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda).
\end{gathered}$$

Il est clair que $\int \varphi_2(\lambda)\, d\lambda$ est encore holomorphe pour $\lambda = \lambda_0$, puisque les points $M_{q+1}, \ldots, M_\mu$ restent ordinaires et que, par conséquent, les fonctions $u_{i.q+1}, \ldots, u_{i.\mu}$ restent holomorphes.

Puisque q a été supposé toujours plus petit que p, par les points $M_1, M_2, \ldots, M_q$, je puis faire passer un plan que j'appelle P; pour $\lambda = \lambda_0$, ce plan vient en P_0. Soient $M'_1, M'_2, \ldots, M'_{2p-2-q}$ les $2p-2-q$ autres points d'intersection de P avec C. Nous supposerons que ces points restent ordinaires pour $\lambda = \lambda_0$. C'est-à-dire que P_0 ne passe par aucun point multiple que A; qu'il ne touche pas C en dehors de A; qu'il ne touche aucune des branches de courbe qui passent par A. Soit $u'_{i.k}$ la valeur de la fonction u_i au point M'_k. On aura

$$du_{i.1} + du_{i.2} + \ldots + du_{i.q} + du'_{i.1} + \ldots + du'_{i.2p-2-q} = 0,$$

ce qui est la définition des fonctions u_i; si donc on pose

$$du'_{i.1} + du'_{i.2} + \ldots + du'_{i.2p-2-q} = \varphi'(\lambda)\, d\lambda,$$

il viendra

$$\varphi'(\lambda) = -\varphi_1(\lambda).$$

Comme les points M'_k restent ordinaires pour $\lambda = \lambda_0$, les fonctions $u'_{i.k}$ restent holomorphes et il en est de même de $\int \varphi'(\lambda)\, d\lambda$, de $\int \varphi_1(\lambda)\, d\lambda$ et, par conséquent, de $\int \varphi(\lambda)\, d\lambda$. Donc la fonction $\int \varphi(\lambda)\, d\lambda$, holomorphe pour toutes les valeurs de λ (même pour $\lambda = \infty$), se réduit à une constante. C. Q. F. D.

Il semble d'abord que nous nous sommes imposé de nombreuses conditions restrictives, au sujet de la variété $F + \lambda_0 F_1 = 0$ et du plan P_0 qui ne doivent pas passer par d'autres points singuliers que A, ni toucher C en dehors de A, ni toucher une des branches de courbe qui passent en A.

Mais comme ces circonstances ne se présentent pas quand les polynomes F et F_1 seront les plus généraux de leur degré, il est possible d'étendre le théorème à tous les cas par passage à la limite.

Or nous savons que si une courbe, décomposable ou non, est coupée en μ points par une variété $F = 0$, il y aura entre ces μ points h relations si notre courbe admet h intégrales abéliennes de première espèce et dégénérées.

Si v_1, v_2, ..., v_h sont ces intégrales et $v_{i.k}$ la valeur de v_i au point M_k, ces h relations s'écriront

$$v_{i\,1} + v_{i.2} + \ldots + v_{i.\mu} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

et *il n'y en aura pas d'autres si le degré de* F *est suffisant.*

Il résulte de là que les u_i ne peuvent être que des combinaisons linéaires des v_i et que p est au plus égal à h.

D'ailleurs, le même raisonnement que plus haut (deuxième et troisième propositions) montrerait que p est au moins égal à h.

On a donc $p = h$, ce qui suffit pour établir le théorème proposé.