COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 9 DÉCEMBRE 1901.

PRÉSIDENCE DE M. FOUQUÉ.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la connexion des surfaces algébriques.* Note de M. **H. Poincaré**.

« Une Note importante de M. Picard a récemment attiré de nouveau l'attention sur la question de la connexion des surfaces algébriques. Je crois devoir dire quelques mots de certains résultats que j'ai obtenus sur ce sujet.

» Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

une surface algébrique, à laquelle correspondra une variété fermée V à quatre dimensions.

» M. Picard a démontré que toute surface peut être ramenée, par une transformation birationnelle, soit à une surface de l'espace à cinq dimensions dépourvue de toute singularité, soit à une surface de l'espace ordinaire ne présentant que des *singularités ordinaires*, c'est-à-dire une courbe double et des points triplanaires.

» Nous sommes donc autorisés par là à nous restreindre au cas des surfaces à singularités ordinaires, ce qui est d'autant plus nécessaire que les autres surfaces pourraient présenter des singularités telles que la variété V correspondante présente elle-même un point singulier. Or les théorèmes généraux de l'*Analysis sitûs* n'ont guère été démontrés que pour les variétés sans point singulier et les définitions elles-mêmes deviendraient ambiguës, à moins d'être complétées par de nouvelles conventions.

» Cela posé, rappelons quelques-uns des résultats obtenus par M. Picard. Donnons à y une valeur constante quelconque, l'équation (1) représentera une courbe algébrique $f(x, z) = 0$ de genre p; à cette courbe correspondra une surface de Riemann S sur laquelle on pourra tracer $2p$ cycles distincts

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}.$$

» Lorsque y variera, la surface de Riemann S et les cycles ω varieront, et quand y aura décrit un lacet autour de l'un des points singuliers

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_q$$

pour lesquels le genre de la courbe $f(x, z) = 0$ s'abaisse, les $2p$ cycles ω se seront transformés en $2p$ combinaisons linéaires (à coefficients entiers) de ces mêmes cycles ω; ils auront subi une transformation linéaire T_i. L'ensemble de ces transformations T_i forme un groupe dont M. Picard a montré l'importance au point de vue qui nous occupe et que j'appellerai *groupe de Picard*.

» Il s'agit de former tous les cycles distincts de la variété V, tant à une qu'à deux ou à trois dimensions. En ce qui concerne les cycles à une dimension, le problème a été entièrement résolu par M. Picard. Notre savant confrère a montré que tous ces cycles peuvent être ramenés aux divers cycles ω d'une des surfaces S, mais que ces cycles ω ne sont pas tous distincts; un quelconque de ces cycles est équivalent à son transformé par l'une des transformations T_i. Si donc on égale chacun des $2p$ cycles ω à son transformé par chacune des q transformations T_i, on obtiendra un système de $2pq$ équations linéaires entre les ω, que j'appellerai le *système* (A).

» Autant ce système (A) aura de solutions *distinctes*, autant la variété V admettra de cycles à une dimension distincts.

» Il semble d'abord qu'il y a des cas où le nombre de ces cycles doive être abaissé; que, pour certains points singuliers A_i, le genre de la surface S s'abaissant, un des cycles de cette surface pourra se réduire à zéro, sans être pour cela la différence entre un des cycles de S et son transformé par la substitution T_i. C'est ce qui arriverait, par exemple, si nous avions deux points singuliers A_1 et A_2, tels que les transformations T_1 et T_2 soient inverses l'une de l'autre; puis que nous fassions varier la surface (1) d'une manière continue, de telle sorte qu'à la limite les deux points A_1 et A_2 se confondent. Alors, pour la surface limite, la transformation du groupe de Picard qui correspondrait au point singulier formé par la réunion de A_1 et A_2 se réduirait à la transformation identique, et cependant certains des cycles de la surface S se réduiraient à zéro quand y viendrait en ce point singulier. Mais cette circonstance ne se présentera jamais pour les surfaces à singularités ordinaires auxquelles nous devons et pouvons nous restreindre. Si elle se présentait pour d'autres surfaces, on pourrait se demander si ces cycles doivent être regardés comme équivalents à zéro; on se trouverait justement dans les cas où les définitions ordinaires deviennent ambiguës, à moins d'être complétées par des conventions nouvelles, et la réponse à la question posée dépendrait des conventions que l'on adopterait.

» En ce qui concerne les cycles à deux dimensions, M. Picard a considéré ceux qui sont engendrés de la façon suivante : Supposons qu'un cycle ω ne soit pas altéré par l'une des transformations Θ du groupe de Picard; nous ferons alors décrire à y un contour fermé correspondant à cette transformation Θ; le cycle ω variant avec y engendrera un cycle fermé à deux dimensions. Il reste à savoir si tous les cycles ainsi obtenus sont distincts et s'il ne peut y en avoir d'autres.

» Voici les résultats auxquels je suis parvenu à cet égard : il y a des cycles de deux sortes; tous les autres n'en sont que des combinaisons.

» Il y a deux cycles de la première sorte qui sont la surface de Riemann obtenue en donnant à x une valeur constante, et la surface de Riemann obtenue en donnant à y une valeur constante.

» Voici le mode de génération des cycles à deux dimensions de la seconde sorte :

» Soit Ω_i une combinaison linéaire des cycles ω, Ω'_i son transformé par la transformation T_i; si ces combinaisons linéaires sont choisies de telle sorte que l'on ait

$$(2) \qquad \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_q = \Omega'_1 + \Omega'_2 + \ldots + \Omega'_q,$$

on engendrera un cycle de la façon suivante : si nous faisons décrire à y un lacet autour de A_i, en partant du point O et revenant au point O, le cycle Ω_i engendrera une variété W_i à deux dimensions qui ne sera pas fermée, mais qui sera limitée par la position initiale et finale du cycle, c'est-à-dire par le cycle Ω_i^0 de la surface de Riemann correspondant au point O et par son transformé $\Omega_i'^0$. Alors si l'on réunit toutes les variétés W_i, elles se raccorderont à cause de l'identité (2), et leur ensemble formera un cycle à deux dimensions.

» Tous ces cycles ne sont pas distincts. Soit U_0 un cycle quelconque, U_1 son transformé par T_1, U_2 celui de U_1 par T_2, U_3 celui de U_2 par T_3, etc., et enfin $U_q = U_0$ le transformé de U_{q-1} par T_q. Si nous avons alors

$$\Omega_1 = U_0 + V_1, \qquad \Omega_2 = U_1 + V_2, \qquad \ldots, \qquad \Omega_q = U_{q-1} + V_q$$

(V_i étant un cycle quelconque inaltéré par la transformation T_i) et, par conséquent,

$$\Omega'_1 = U_1 + V_1, \qquad \Omega'_2 = U_2 + V_2, \qquad \ldots, \qquad \Omega'_q = U_q + V_q,$$

le cycle à deux dimensions engendré par $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_q$ sera équivalent à zéro. *Il n'y a pas d'autre cycle équivalent à zéro*. Donc, quand on aura réduit par ce moyen le nombre des cycles à deux dimensions, tous ceux qui resteront seront distincts.

» J'ignore si tous les cycles de la seconde sorte sont des combinaisons de ceux qui correspondraient, d'après M. Picard, à une transformation Θ et à un cycle inaltéré par cette transformation.

» Passons enfin aux cycles à trois dimensions. Soit Ω un cycle de la surface S qui soit *invariant* par rapport au groupe de Picard, c'est-à-dire inaltéré par toutes ses substitutions. Quand on donnera à y toutes les valeurs possibles, ce cycle engendrera un cycle fermé à trois dimensions.

» Il n'y en aura d'ailleurs pas d'autre et tous les cycles ainsi obtenus seront distincts.

» On vérifie que, comme il convient, le nombre des cycles invariants (et par conséquent celui du nombre des cycles à trois dimensions de V) est égal au nombre des solutions distinctes du système (A) (et par conséquent à celui des cycles à une dimension de V).

» On voit que la considération du groupe de Picard suffit pour la détermination des nombres de Betti; elle suffirait également pour la détermination de ce que j'ai appelé les *coefficients de torsion.* »

CHIMIE GÉNÉRALE. — *Études sur le radium;* par M. **Berthelot**.

« J'ai poursuivi les essais chimiques sur le radium, que j'avais entrepris (¹) avec un échantillon confié par M. Curie pour cet objet. Je me suis attaché à la décomposition de l'anhydride iodique I^2O^5 aussi pur que possible, en raison du caractère endothermique de cette décomposition. J'ai examiné deux points, savoir : le rôle de la phosphorescence et l'ordre de grandeur des énergies mises en jeu par l'intervention du nouvel élément. Mes essais ont été exécutés dans une enceinte mise à l'abri de toute introduction de lumière extérieure, aussi complètement que possible.

» J'ai opéré à une température voisine de 10° et à une température de 100°, toujours sous une pression très voisine de la pression atmosphérique et en prolongeant les actions pendant un temps plus ou moins long. Chaque fois, trois essais comparatifs ont été faits avec l'acide iodique, dans des conditions et avec des dispositions aussi semblables que possible, savoir: une expérience à blanc; une expérience en présence d'un tube contenant du radium et susceptible d'agir par sa phosphorescence; enfin, une expérience en présence du même tube entouré de papier noir, afin d'intercepter toute influence attribuable à l'éclairage intérieur de l'enceinte, résultant de la phosphorescence.

» J'ai mis en œuvre un poids de matière active égal à $0^{gr},145$, renfermant environ, d'après M. Curie, un huitième de son poids de chlorure de radium, soit un peu moins de 2 centigrammes; le surplus étant du chlorure de baryum. Cette matière était renfermée dans un très petit tube de verre scellé, verre plombeux dans la première série, verre exempt de plomb dans la seconde ; ce tube étant entouré d'un tube mince un peu plus large, lequel était environné d'anhydride iodique blanc (4 à 5 grammes).

» Les trois tubes disposés horizontalement, ce système était placé dans une enceinte noire, où ne pénétrait aucune lumière extérieure. A travers le tube enveloppant circulait lentement un courant d'air absolument sec, qui s'échappait, par la pointe effilée du tube, dans deux barboteurs con-

---

(¹) *Comptes rendus*, t. CXXXIII, p. 661; 28 octobre 1901.