

dispenser une fois pour toutes de cet effort. Après avoir parlé du *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal, dont une figure suggérera à Leibniz son Calcul différentiel, l'auteur arrive à Barrow, le maître de Newton, à qui celui-ci a extorqué la dernière de ses *Leçons de Géométrie* (1669). Leibniz avait de son côté inventé son Calcul le 29 octobre 1675, un an avant de voir chez Collins le manuscrit de l'*Analyse par les équations* de Newton. Si donc la priorité appartient à celui-ci, l'originalité de Leibniz est incontestable. De plus, il a développé logiquement sa méthode des infiniment petits, tandis que Newton a varié dans ses conceptions, faisant usage de rapports-limites pour masquer l'emploi des infiniment petits. Enfin Newton eut le tort de tenir caché ce que Leibniz donna aux vents.

M. MILHAUD remarque que M. Cantor a donné comme criterium de la valeur d'une méthode la facilité et la généralité de son application; et il demande si Descartes, comme inventeur de la Géométrie analytique, ne doit pas alors être placé au-dessus de Fermat, que M. Cantor a proclamé le plus grand mathématicien français du XVII<sup>e</sup> siècle.

M. CANTOR répond que Descartes, dans sa *Géométrie*, a bien moins fondé la Géométrie analytique que la théorie générale des équations. Descartes est si peu l'inventeur de la Géométrie analytique, qu'on ne trouve même pas chez lui l'équation de la ligne droite, tandis que Fermat la connaissait. La Géométrie analytique était, en principe, beaucoup plus ancienne que ces deux savants; mais si l'on demande qui a écrit le premier traité de Géométrie analytique, c'est De Witt. La supériorité du génie de Fermat éclate dans la théorie des nombres, que Descartes a peu étudiée, et où Fermat a découvert et démontré des théorèmes dont on cherche encore aujourd'hui la démonstration.

M. l'abbé ACKERMANN demande si Descartes n'a pas du moins inventé la méthode générale pour traduire la Géométrie en Algèbre et l'Algèbre en Géométrie.

M. CANTOR répond qu'il n'y a là rien de nouveau: cette méthode était déjà connue de Viète.

M. PAUL TANNERY signale à ce propos quelques lettres inédites de Florimond de Beaune à Descartes.

M. POINCARÉ, membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, lit des extraits de son mémoire sur *les Principes de la Mécanique*. La

Mécanique est une science expérimentale; mais ses principes n'ont-ils qu'une vérité empirique et approximative? Telle est la question. Le *principe d'inertie* n'est pas une vérité *a priori*; et il n'est pas non plus une loi expérimentale, car on ne pourra jamais le vérifier. De même pour la *loi de l'accélération*, qui est tout simplement la définition de la force. M. Poincaré réfute la *Mécanique anthropomorphique*, qui prétend avoir la notion psychologique de la force; il y rattache l'*École du fil* de M. Andrade, qui représente toutes les forces par des fils élastiques plus ou moins tendus. Le *principe de la réaction* se dédouble en un axiome (le mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité d'un système isolé quand on attribue à ses éléments des coefficients *constants*) et en une définition, celle de la *masse*. Mais nous ne pouvons pas vérifier l'axiome en question, parce que nous ne possédons pas de système isolé. Il est à peu près vrai pour des systèmes à peu près isolés; mais la question de savoir s'il est rigoureusement vrai pour des systèmes rigoureusement isolés n'a aucun sens.

Le *principe du mouvement relatif* semble s'imposer à l'esprit et être confirmé par l'expérience; en réalité, on ne peut le démontrer ni *a priori* ni *a posteriori*. M. Poincaré discute à ce propos l'*argument de Newton* en faveur du mouvement absolu. Enfin le *principe de la conservation de l'énergie* ne peut être ni vérifié ni infirmé par l'expérience, puisqu'il se réduit au fond à ceci : « Il y a quelque chose qui demeure constant », ce qui est la formule même du déterminisme. M. Poincaré conclut que les principes de la Mécanique sont, d'un côté, des vérités fondées sur l'expérience, et d'un autre côté, des postulats universels et *a priori*. En définitive, ce sont des conventions, non pas absolument arbitraires, mais commodes, c'est-à-dire appropriées à l'expérience. Ainsi s'explique que l'expérience ait pu édifier (ou suggérer) les principes de la Mécanique, mais qu'elle ne pourra jamais les renverser.

M. PAINLEVÉ insiste sur le caractère arbitraire que prennent, dans l'exposé de M. Poincaré, les principes de la Mécanique. Ce sont des conventions que l'expérience ne pourra jamais mettre en défaut : car le jour où quelque fait viendrait les contredire, on trouverait toujours, bon gré mal gré, un moyen de les adapter au fait nouveau. Par exemple, si dans une expérience le principe de Kepler ne semblait pas se vérifier, on expliquerait la divergence par l'existence de faits insoupçonnés qui se manifesteraient et se mesureraient

par cette divergence, et qui feraient l'objet d'une nouvelle science, comme les phénomènes électriques, magnétiques, etc.

Sans contester la justesse du fond, M. Painlevé trouve que les conclusions de M. Poincaré sont d'un scepticisme excessif. Les principes de la Mécanique sont *imposés* par l'expérience, ils sont la *quintessence* d'innombrables expériences, grossières ou précises; et, quand ils semblent tomber en défaut, les faits nouveaux qu'on est obligé d'introduire pour combler l'écart se prétent d'eux-mêmes à une théorie scientifique, c'est-à-dire se soumettent au principe de causalité; en un mot, ils apparaissent comme des phénomènes *vrais*, non comme des fantômes et des fictions. Au contraire, il suffit de remplacer un seul des principes par un principe différent, pour être submergé par des complications innombrables dans l'étude des faits les plus simples.

Exemple : la loi de gravitation se vérifie dans une foule d'observations; mais dans d'autres elle paraît en défaut; on explique cette divergence en disant que les corps en présence sont électrisés, ou magnétiques, etc., et l'on mesure ces nouveaux phénomènes précisément par l'écart entre l'attraction (ou répulsion) vraie et l'attraction newtonienne. Ne pourrait-on pas dire alors : « La loi de Newton n'est qu'une convention que les faits ne contrediront jamais; car, dès qu'ils semblent la contredire, on invente des faits nouveaux pour la justifier. » Qui songerait pourtant à remplacer la loi de Newton par la convention suivante : « Deux corps se repoussent proportionnellement à leur distance et en raison inverse de leurs masses », quitte à combler l'écart entre celle-ci et l'expérience au moyen d'hypothèses complémentaires? On sent que la loi de Newton est une convention de choix, entre toutes les autres, parce qu'elle est sensiblement imposée par les faits. Or les principes de la Mécanique sont imposés par les faits bien plus impérieusement encore que la loi de Newton.

Pour se résumer, M. Painlevé conçoit la science physique comme une méthode d'approximations successives, orientée au début par l'empirisme et guidée par quelques principes généraux d'origine expérimentale. La *convergence* de cette méthode n'est pas garantie *a priori*, mais bien justifiée par le succès, par l'accord de plus en plus naturel et parfait des théories avec la réalité. Dans la recherche des lois de la nature, c'est la divergence et la complication croissantes qui avertissent qu'on s'égare.

M. POINCARÉ répond qu'il n'y a pas entre lui et M. Painlevé de désaccord véritable. Il reconnaît que la science a toujours procédé et procédera toujours par approximations successives. Mais il a tenu à faire remarquer par quelle série d'artifices plus ou moins conscients les fondateurs de la Mécanique sont parvenus à transformer la première approximation, non en une vérité provisoire et susceptible de correction, mais en une vérité définitive et rigoureuse; et cela, au grand bénéfice de la clarté des énoncés, et par conséquent de la science elle-même.

M. HADAMARD observe que si, avec Kirchhoff, on donne pour objet à la Mécanique, non d'*expliquer* les phénomènes du mouvement, mais de les *décrire* de la manière la plus simple et la plus exacte, les principes de cette science, tels que nous les posons, se trouvent pleinement justifiés à ce point de vue. Lorsqu'on a observé des faits en contradiction apparente avec ces principes, on était parfaitement fondé à faire intervenir une force nouvelle, laquelle s'est toujours trouvée rendre compte très simplement des phénomènes, au lieu de changer les principes généraux, ce qui eût conduit à des contradictions avec l'ensemble des autres faits connus. D'ailleurs, conformément à une remarque de M. Duhem, ce n'est pas *une* hypothèse déterminée, mais *l'ensemble* des hypothèses de la mécanique que l'on peut essayer de vérifier expérimentalement.

Sur la définition de la force, M. Hadamard estime que l'on ne saurait se contenter de présenter celle-ci comme le produit de la masse par l'accélération, parce qu'ainsi l'on ne fait pas intervenir un des caractères essentiels de la force, qui est de représenter l'action d'un corps sur un autre. Pour tenir compte de ce caractère, il est absolument nécessaire d'adjoindre au principe d'inertie le principe dit de *l'indépendance des effets des forces*, énoncé comme suit : Lorsqu'un corps est mis en présence de plusieurs autres, l'accélération qu'il éprouve est la somme géométrique de plusieurs segments dont chacun ne dépend que de l'état du corps influencé et de celui d'un des corps influençants. La notion de *force exercée par un corps sur un autre*, telle qu'elle s'introduit au moyen de ce principe, est d'ailleurs nécessaire pour énoncer dans toute sa généralité le principe de *l'égalité de l'action et de la réaction* : elle permet, en effet, de l'appliquer à un système non isolé, grâce à la définition des forces *intérieures* à ce système.

M. POINCARÉ convient que les sciences expérimentales ne peuvent

jamais vérifier qu'un ensemble d'hypothèses. Chaque expérience nous fournit pour ainsi dire *une* équation entre un très grand nombre d'inconnues. Notre science encore imparfaite ne nous donne pas assez d'équations; nous en avons moins que d'inconnues. On pourrait compter sur de nouvelles expériences pour nous donner sans cesse de nouvelles équations, qui diminueraient l'indétermination du problème. Mais en ce qui concerne les « inconnues » introduites par la Géométrie (courbure de l'espace) ou par la Mécanique rationnelle (ses principes les plus généraux) il y a quelque chose de plus. Non seulement l'expérience ne nous donne pas assez d'équations pour les déterminer, mais il est absurde et contradictoire de supposer qu'elle puisse jamais nous les donner; et cela parce que ces inconnues entrent pour ainsi dire dans les problèmes expérimentaux comme des variables auxiliaires et surrogatoires. C'est pourquoi les hypothèses que l'on pourrait faire au sujet de ces inconnues ne sont ni vraies ni fausses.

En ce qui concerne le principe de l'indépendance des effets des forces, il n'est pas vrai, selon M. Poincaré. Si un morceau de fer est soumis à l'action simultanée d'un aimant et d'un autre morceau de fer, l'effet qu'il éprouve n'est pas la somme géométrique de ceux que lui feraient éprouver séparément ce morceau de fer et cet aimant. Le principe ne peut être sauvé que par un coup de pouce : on dit que le second morceau de fer est modifié par la présence de l'aimant.

M. PADOA dit que la distinction des axiomes et des définitions n'a qu'une valeur logique et subjective; dans le monde réel, il n'y a que des faits tous donnés sur le même plan. Il n'y a pas d'idées plus simples ni de principes plus évidents que les autres; il y a simplement des idées non définies et des propositions non démontrées, par rapport au système logique qu'on adopte. Et ce système logique pourra être ou n'être pas vérifié par les faits, suivant l'interprétation qu'on donnera aux idées non définies. En un mot, M. Padoa conclut à l'indépendance réciproque, à la scission complète du logique et du réel.

M. AARS répond à M. Padoa que ce n'est pas du tout dans le monde réel qu'on ne rencontre que des faits, mais au contraire dans le monde psychique et subjectif. Il soutient, contre M. Poincaré, que les axiomes mécaniques doivent viser l'existence mécanique, et par conséquent doivent pouvoir être vrais ou faux, comme toute autre proposition qui se rapporte à une existence quelconque.

M. POINCARÉ répond que les questions d'existence de cette nature lui semblent aussi dépourvues de sens que la question de la vérité ou de l'objectivité des principes de la Mécanique.

M. RIBERT proteste, lui aussi, contre le scepticisme de M. Poincaré ; il soutient que les lois de la Mécanique ont une valeur objective, et ne sont pas des créations de l'esprit humain. Le monde existait bien avant l'humanité, il existera encore après elle. Or il obéissait déjà, il obéira encore aux lois de la Mécanique. Donc la science est vraie en ce sens qu'elle porte sur des existences réelles.

M. POINCARÉ remarque que l'on soulève ici la question de la réalité du monde extérieur, qui serait mieux à sa place dans la section I. (*Métaphysique*).

M. B. RUSSELL, Trinity College (Cambridge), lit des extraits de son mémoire sur *L'Idée d'ordre et la position absolue dans l'espace et dans le temps*. Après avoir distingué les séries absolues, c'est-à-dire dont les éléments sont des positions, et les séries relatives, dont les éléments ont des positions par corrélation avec ceux d'une série absolue, il définit la théorie *absolue* (dans le temps), selon laquelle un événement est daté par son rapport avec l'instant où il existe, et la théorie *relative*, selon laquelle il ne l'est que par les relations de simultanéité ou de succession avec d'autres événements. Pour que celle-ci fût soutenable, il faudrait qu'entre deux événements, considérés simplement comme des qualités, il existât une relation temporelle constante et déterminée, ce qui n'est pas. De même, la simultanéité de plusieurs événements ne peut se réduire à aucune propriété commune à ces événements, si ce n'est à ce fait qu'ils occupent le même instant. Il faut donc admettre les positions temporelles comme absolues.

De même, il faut admettre comme absolues les positions spatiales, et pour les mêmes raisons. L'auteur discute les arguments invoqués par Leibniz et Lotze en faveur de la théorie relative pour l'espace. Elle soutient que la position d'un point n'est que l'ensemble de ses distances à d'autres points, ce qui suppose que la seule relation qui puisse exister entre deux points est leur distance. Or cela est faux, ils ont une autre relation qui est la direction de la droite (projective) qui les joint. Sans cela, il n'y a pas moyen de concevoir l'angle, qui est une relation entre deux directions, non entre deux distances. La définition du plan postule encore une nouvelle relation fondamen-