in Rouché et de Comberousse

Traité de géométrie [illegible] édition.

Gauthier-Villars, Paris, 1922.

Deuxième partie. Géométrie dans l'espace.

L'éd. de 1912 a [illegible] est augmentée, par lequel la citat. de Poincaré a été introduite. Le texte est [illegible] du cours de la Sc. Hyp. Voir [illegible] dans Dernières pensées, il y a peut-être des analogues, et s'il a été repris dans les [illegible].

[illegible], l'analogue, etc...

NOTE II.

SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

La théorie des parallèles n'a fait aucun progrès depuis Euclide jusqu'au commencement de notre siècle. Tous les efforts pour démontrer le *postulatum* d'Euclide ou une proposition équivalente étaient restés infructueux, lorsque Lobattcheffsky en 1829 et Bolyai en 1832, changeant résolument de voie, conçurent et exécutèrent séparément le projet hardi de supposer que la proposition à démontrer n'était pas vraie et de constituer un nouveau système de géométrie non contradictoire, en poussant jusqu'à ses dernières limites le développement de leur hypothèse. Gauss qui, par ses propres méditations, avait obtenu les mêmes résultats dès 1792, sans toutefois avoir rien publié sur ce sujet, assura par son patronage le succès de l'œuvre de Lobattcheffsky qui, écrivait-il à Schumacher, « avait traité la matière de main de maître ». Depuis lors un grand nombre de géomètres, parmi lesquels il faut surtout citer Riemann et Beltrami, ont considérablement agrandi le champ de ces spéculations qui, on ne saurait le méconnaître, ont jeté une vive lumière sur la véritable origine des vérités géométriques.

L'analyse de ces nombreux travaux (1) serait fort longue; nous nous proposons ici uniquement d'en faciliter la lecture en exposant les principes fondamentaux de cette partie de la Science qui, après avoir été appelée successivement *Géométrie astrale*, *Géométrie imaginaire*, *Pangéométrie*, a reçu définitivement le nom de *Géométrie non euclidienne*.

---

(1) LOBATTCHEFFSKY, *Nouveaux principes de Géométrie* (*Mémoires de l'Université de Kasan et Courrier de Kasan*, 1826, 1829, 1836-1838); *Géométrie imaginaire* (J. de Crelle, 1837); *Études géométriques sur la théorie des parallèles* (Berlin, 1840); *Pangéométrie* (Kasan, 1855). — BOLYAI, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* (Maros-Vasarhely, 1832). — RIEMANN, *Sur les hypothèses de la Géométrie* (Académie de Göttingue, 1867). — HELMHOLTZ, *Sur les faits fondamentaux de la Géométrie* (Heidelberg, 1868). — BATTAGLINI, *Sur la Géométrie de Lobattcheffsky* (*Giornale*; Naples, 1868). — BELTRAMI, *Interprétation de la Géométrie non euclidienne* (Naples, 1868); *Sur les espaces de courbure constante* (Milan, 1868). — KLEIN, *Sur la Géométrie non euclidienne* (*Math. Annalen*, 1871). — DE TILLY, *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (*Mémoires de l'Académie de Bordeaux*, 1879).

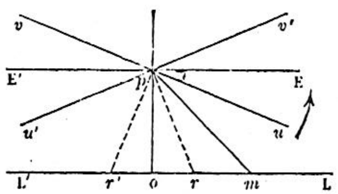
Plusieurs de ces Mémoires ont été traduits en français par M. Houël.

POINCARÉ 1900

I.

1° Considérons dans un plan un point p et une droite LL′; soient po la perpendiculaire abaissée de p sur LL′ et EpE′ la perpendiculaire élevée par p sur po (*fig.* 625). On sait (57) que cette perpendiculaire ne rencontre pas LL′. Mais cette droite est-elle, parmi celles qui passent par p, la seule qui jouisse de cette propriété? C'est ce que l'on admettait depuis Euclide. Cependant tout ce qu'on peut affirmer, et c'est là le point de départ de Lobattcheffsky, c'est que, si une droite illimitée tourne autour du point p dans le sens de la flèche, depuis la position po jusqu'à la position E′pE, elle passera nécessairement par une position opu, telle que toutes les droites contenant le point p et situées dans l'angle upE (et dans son opposé) ne coupent pas LL′, tandis que toutes les droites situées dans l'angle opu (et dans son opposé) coupent oL.

Fig. 625.



D'après cela, en désignant par $v'pu'$ la symétrique de vpu par rapport à po, on voit que toutes les droites menées par le point p dans le plan peuvent être rangées par rapport à LL′ en deux catégories suivant qu'elles coupent LL′ ou qu'elles ne la rencontrent pas; les *sécantes* sont comprises dans les angles upu' et vpv'; les *non-sécantes* dans les angles upv' et vpu'. Les deux lignes de démarcation uv et $u'v'$ sont dites parallèles à LL′ relativement au point p. Ainsi, par chaque point p d'un plan, on peut mener à toute droite LL′ de ce plan deux parallèles, l'une vu pour le côté oL de la droite, l'autre $v'u'$ pour l'autre côté oL′. On désigne par *angle de parallélisme* relatif au point p l'angle opu ou son égal opu'.

2° Ce qui distingue une parallèle vu ou $v'u'$ d'une non-sécante quelconque, c'est que la parallèle devient sécante dès qu'on la dévie en diminuant d'aussi peu qu'on veut son inclinaison opu ou opu' sur la perpendiculaire po.

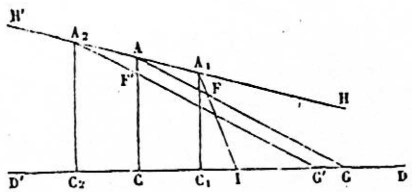
Dans le cas où l'angle de parallélisme est droit, la classe des droites non-sécantes disparaît et les deux parallèles se réduisent à une seule EpE′.

3° Voici maintenant deux propositions qui sont les compléments indispensables de la définition des parallèles.

Une droite conserve le caractère du parallélisme en tous ses points. — En d'autres termes, si H′H est parallèle à D′D relativement au point A, elle est encore parallèle à D′D relativement à tout autre A_1 ou A_2 de ses points (*fig.* 626).

En effet, supposons d'abord un point A_1 situé sur la partie AH de H′H qui fait avec la perpendiculaire AC un angle CAH égal à l'angle de parallélisme. Abaissons A_1C_1 perpendiculaire sur DD′, menons A_1F dans l'intérieur de l'angle C_1A_1H, et prenons sur cette droite un point F aussi voisin qu'on pourra de A_1; la droite AF ira couper CD en un certain point G, et l'on aura un triangle ACG dont le contour étant rencontré

Fig. 626.



une première fois en F par la droite A_1F devra être rencontré une deuxième fois par la même droite; or A_1F, d'après sa construction, ne peut couper le côté AC, elle ne peut pas non plus avoir un second point commun avec le côté AG; donc elle coupe le côté CG, et, par suite, A_1H est parallèle à D′D relativement au point A_1, puisque toute droite A_1F, située dans l'angle C_1A_1H, rencontre D′D, si petit que soit l'angle HA_1F.

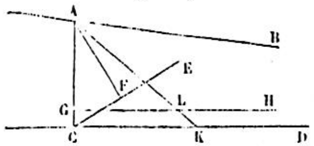
Considérons, en second lieu, un point A_2 situé sur AH′, et soit A_2C_2 la perpendiculaire abaissée de A_2 sur D′D; prenons sur AC un point F′ aussi voisin de A qu'on voudra, et menons AF faisant avec AH un angle HAF égal à HA_2F′; la droite AF ira couper CD en un certain point G, et la droite A_2F′ coupant une première fois, en F′, le contour du triangle ACG, devra couper ce contour une seconde fois. Or elle ne peut couper une seconde fois le côté AC; d'autre part, puisque les angles correspondants HAF, HA_2F′ sont égaux, A_2F′ ne peut rencontrer AF (1); donc A_2F′ coupe le côté CD; etc.

(1) Nous admettons ici que, si deux droites AB, CD (*fig.* 43), forment avec une troisième FE des angles correspondants FGB, FHD, égaux, ces deux droites ne peuvent se rencontrer. La démonstration de ce théorème, donnée au n° 64, dépend du postulatum d'Euclide; mais on peut démontrer le fait indépendamment de tout postulatum. En effet, on peut, par une rotation autour du milieu O de GH, amener la figure BGHD sur la figure CHGA, de façon que GB

Le parallélisme de deux droites est réciproque. — En d'autres termes, si AB est parallèle à CD (*fig.* 627), CD est parallèle à AB.

En effet, soit AC une perpendiculaire sur CD; menons dans l'angle ACD une droite CE faisant avec CD un angle DCE aussi petit qu'on voudra; enfin abaissons AF perpendiculaire sur CE; AF sera moindre que AC: prenons sur AC une longueur AG = AF et faisons tourner la figure BAFE autour de A, de façon que AF vienne sur AG; soient GH et AK les positions que prennent FE et AB; AK coupera CD quelque part en K, et l'on aura un triangle ACK dont le contour étant rencontré une première fois, en G, par GH, devra être rencontré une deuxième fois par cette même droite; mais GH étant comme CD perpendiculaire à AC ne peut rencontrer CD; donc GH coupe AK en un certain point L. Donc, en ramenant le triangle LAG en sa position primitive, c'est-à-dire en le faisant tourner autour de A de façon que AG vienne sur AF, AK sur AB et GH sur

Fig. 627.



FE, on voit que CF doit couper AB, quelque petit que soit l'angle DCE; donc (2°) CD est parallèle à AB.

II.

1° *Dans tout triangle rectiligne* ABC, *la somme des angles ne peut surpasser deux angles droits.*

En effet, soit A le plus petit angle du triangle; en prolongeant la médiane AI d'une quantité IE égale à elle-même et joignant EC, on forme un triangle ACE dans lequel (on le voit sans peine) la somme des angles est la même que dans le triangle primitif et la somme des deux plus petits angles est égale à A. Le plus petit angle du nouveau triangle est donc au plus égal à $\frac{1}{2}$ A. En opérant de même sur ce second triangle, puis sur le suivant, etc., on obtient une suite de triangles, dont la somme des angles reste la même et dont le plus petit angle est successivement moindre que $\frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \frac{A}{8}, \ldots$ et, par suite, peut devenir aussi petit qu'on

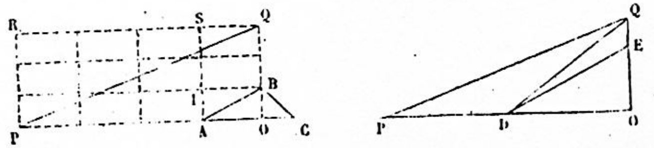
recouvre HC et que DH recouvre GA; si donc GB et HD se rencontraient, HC et GA se rencontreraient aussi, et les deux droites AB, CD auraient deux points communs sans coïncider.

veut. Or, si la somme des angles du triangle primitif surpassait deux droits d'une certaine quantité α, en opérant sur ce triangle, comme nous venons de le dire, on obtiendrait, après un nombre suffisant d'opérations, un triangle ayant son plus petit angle inférieur à α; le triangle suivant aurait à la fois la somme de ses trois angles égale à $2\mathrm{R} + \alpha$, R désignant un angle droit, et la somme des deux plus petits angles moindre que α: le troisième angle de ce triangle surpasserait donc $2\mathrm{R}$, ce qui est absurde.

2° *Si dans un triangle rectiligne* ABC *la somme des angles est égale à deux angles droits, il en est de même pour tout autre triangle* (*fig.* 628).

En effet, deux au moins des angles du triangle ABC sont alors aigus; soient, par exemple, A et C, ces deux angles; la perpendiculaire BO abaissée du sommet B sur AC partage le triangle ABC en deux triangles rectangles ABO, CBO dans chacun desquels la somme des angles est égale à $2\mathrm{R}$, sans quoi la somme totale des angles de ces deux triangles serait

Fig. 628.



(1°) inférieure à $4\mathrm{R}$ et, par suite, en retranchant les deux angles en O, qui sont droits, la somme des angles du triangle proposé ABC serait inférieure à $2\mathrm{R}$. Il suit de là que, si l'on construit sur AB un triangle BAI, égal à ABO, on aura un quadrilatère AOBI, dont les côtés opposés sont égaux deux à deux et dont les angles sont droits. En superposant q quadrilatères égaux à celui-là et juxtaposant p figures égales à la figure AOQS, ainsi obtenue, on obtient un quadrilatère POQR, dont tous les angles sont droits et dont les côtés opposés, égaux deux à deux, peuvent devenir aussi grands qu'on veut, en prenant les nombres p et q assez grands. Ce quadrilatère sera partagé par la diagonale PQ en deux triangles rectangles égaux et l'on verra, comme ci-dessus, que la somme des angles de chacun de ces triangles est égale à $2\mathrm{R}$. Donc on peut construire un triangle rectangle POQ, dans lequel la somme des angles est égale à $2\mathrm{R}$ et assez grand pour contenir dans son intérieur tout triangle rectangle donné DOE, lorsqu'on aura fait coïncider les angles droits de ces triangles. Or la droite QD décompose POQ en deux triangles QDP, QDO, dans chacun desquels la somme des angles est égale à $2\mathrm{R}$, sans quoi la somme des angles du triangle total POQ serait moindre que $2\mathrm{R}$; de même, la droite DE partage QDO en deux triangles DEO, DEQ, dans chacun desquels la somme des angles est égale à 2R, sans quoi la somme des angles du triangle total QDO serait inférieure à 2R. Il est donc démontré que, par suite de l'hypothèse, la somme des angles serait égale à 2R dans un triangle rectangle quelconque DOE; il en serait de même, par suite, pour tout triangle rectiligne, puisqu'un tel triangle peut toujours être décomposé en deux triangles rectangles.

3° *Par un point donné A, extérieur à une droite BC, on peut toujours mener une droite faisant avec la première un angle aussi petit qu'on veut* (*fig.* 629).

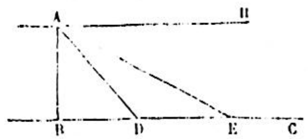
En effet, soit AB perpendiculaire sur BC, D un point pris à volonté sur BC, et DE une longueur égale à AD et portée sur BC à la suite de BD. La somme des angles du triangle ADE ne pouvant surpasser 2R, on a, puisque ce triangle est isocèle,

$$2\,\mathrm{AEB} + (2\mathrm{R} - \mathrm{ADB}) \leqq 2\mathrm{R}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AEB} \leqq \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ADB}.$$

Ainsi, étant donnée une droite AD, coupant BC sous un certain angle, on peut toujours en trouver une autre AE, faisant avec BC un angle au plus égal à la moitié du précédent; en opérant sur cette nouvelle droite comme sur la première et continuant ainsi, on parviendra à une droite faisant avec BC un angle aussi petit qu'on voudra.

4° *Si deux perpendiculaires AH, BC à une même droite AB sont parallèles, la somme des angles est égale à deux angles droits dans tout triangle rectiligne* (*fig.* 629).

Fig. 629.



En effet, menons dans l'angle BAH une droite AE, faisant avec AH un angle HAE aussi petit qu'on voudra; cette droite AE coupera BC, et l'on peut supposer, d'après le numéro précédent, que l'angle AEB, sous lequel AE coupe BC, soit aussi petit qu'on veut. Cela posé, D étant pris à volonté entre B et E, menons AD et désignons respectivement par $2\mathrm{R} - \alpha$, $2\mathrm{R} - \beta$ les sommes des angles dans les triangles ABD, ADE. La somme des angles du triangle ABE sera $2\mathrm{R} - \alpha - \beta$; on aura donc

$$2\mathrm{R} - \alpha - \beta = \mathrm{R} + \mathrm{AEB} + (\mathrm{R} - \mathrm{HAE}),$$

d'où

$$\alpha + \beta = \mathrm{HAE} - \mathrm{AEB};$$

mais, chacune des parties du second membre pouvant devenir moindre

que toute quantité donnée, on a $\alpha + \beta = 0$, et, par suite, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, puisque α et β ne peuvent être négatifs. C. Q. F. D.

5° Il résulte des propositions précédentes que deux hypothèses sont seules possibles :

Ou bien, dans tous les triangles rectilignes, la somme des angles est égale à deux angles droits; alors l'angle de parallélisme est toujours droit, et par un point quelconque on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Ou bien, dans tous les triangles rectilignes, la somme des angles est inférieure à deux angles droits; alors, par un point quelconque, on peut mener deux parallèles à une droite, et l'angle de parallélisme, toujours aigu, varie avec la distance du point à la droite.

La première hypothèse sert de fondement à la Géométrie ordinaire ou euclidienne. La seconde peut être également admise sans conduire à aucune contradiction; elle est la base de la Géométrie non euclidienne que Lobatcheffsky a établie, jusqu'au développement complet des équations entre les côtés et les angles d'un triangle, soit rectiligne, soit sphérique[1].

H. Poincaré

III.

Toutefois il y a encore lieu de se demander si, en poussant plus loin les déductions, Lobatcheffsky n'aurait pas fini par se heurter à une contradiction. En d'autres termes, y a-t-il contradiction d'une part entre les axiomes admis par les géomètres (en mettant de côté le postulatum d'Euclide), et d'autre part le postulatum de Lobatcheffsky? Pour nous en rendre compte, nous allons énoncer ces axiomes sous la forme suivante, en mettant en évidence ceux que les géomètres ne formulent pas d'ordinaire et qu'ils se contentent d'admettre implicitement.

Axiome 1. — Par deux points, on peut faire passer une droite et une seule; par trois points, un plan et un seul.

Axiome 2. — Toute droite qui a deux points dans un plan est tout entière dans ce plan, ou bien, ce qui revient au même, l'intersection de deux plans est une droite.

Axiome 3. — Si deux figures sont égales, les lignes et les surfaces de la seconde qui sont homologues aux droites et aux plans de la première, sont aussi des droites et des plans.

(1) Tout ce qui va suivre, dans cette Note, est dû à M. Poincaré.

Axiome 4. — Dans deux figures égales, les angles homologues sont égaux, ainsi que les distances des couples de points homologues.

Axiome 5. — Une figure peut se déplacer en restant égale à elle-même et de telle sorte que tous les points d'une droite restent fixes (mouvement de rotation).

Axiome 6. — Une figure peut se déplacer en restant égale à elle-même et de telle sorte que tous les points d'une droite se déplacent, mais en restant sur cette droite (mouvement de glissement).

Axiome 7. — Si un point B est sur la droite AC, la distance AC est égale à la somme des distances AB et AC; dans le cas contraire elle est plus petite.

Y a-t-il contradiction entre ces sept axiomes et le *postulatum de Lobatcheffsky*, d'après lequel : On peut par un point mener une infinité de plans qui ne rencontrent pas un plan donné.

Afin de lever les derniers doutes à ce sujet, il faut employer un détour. Considérons une sphère qu'on appelle la *sphère absolue;* appelons *domaine intérieur* l'ensemble des points intérieurs à la sphère absolue.

Considérons une sphère qui coupe orthogonalement la sphère absolue; la partie de cette sphère qui est dans le domaine intérieur s'appellera *faux plan*.

Soit de même un cercle qui coupe orthogonalement la sphère absolue; la partie de ce cercle qui est dans le domaine intérieur s'appellera *fausse droite*.

Nous pouvons alors énoncer les deux propositions suivantes :

Proposition 1. — Par deux points du domaine intérieur on peut faire passer une fausse droite et une seule; par trois points du domaine intérieur on peut faire passer un faux plan et un seul.

Proposition 2. — L'intersection de deux faux plans est une fausse droite.

Supposons maintenant que l'on fasse une transformation par rayons vecteurs réciproques (n° 952), en prenant pour sphère d'inversion un faux plan, c'est-à-dire une sphère coupant orthogonalement la sphère absolue.

Les sphères se transformeront en sphères et les cercles en cercles; de plus, les angles seront conservés; la sphère absolue, coupant orthogonalement la sphère d'inversion, se transformera en elle-même; et à cause de la conservation des angles, les faux plans se transformeront en faux plans et les fausses droites en fausses droites.

Le rapport anharmonique de quatre points sur un cercle, tel qu'il a été défini au n° 321, n'est pas non plus altéré par l'inversion.

Soient A et B deux points quelconques du domaine intérieur; joignons ces deux points par une fausse droite qui viendra couper la sphère absolue en C et en D.

Appelons *fausse distance* des points A et B le logarithme du rapport anharmonique (ABCD), multiplié par le rayon R de la sphère absolue.

L'inversion transformera A et B en deux points A' et B' et la fausse droite qui les joint en une fausse droite qui coupera la sphère absolue en deux points C' et D' transformés de C et D. On aura donc

$$\log(\mathrm{ABCD}) = \log(\mathrm{A'B'C'D'}).$$

La fausse distance n'est pas altérée par l'inversion.

Soit une figure F quelconque; faisons-lui subir un certain nombre de transformations telles que celle dont je viens de parler, c'est-à-dire un certain nombre d'inversions, la sphère d'inversion étant un faux plan. Je dirai que la figure transformée est *congruente* à F; la congruence sera *directe* si elle résulte d'un nombre pair d'inversions et *inverse* dans le cas contraire.

Nous pouvons alors énoncer les propositions suivantes :

Proposition 3. — Si deux figures sont congruentes, les lignes et les surfaces de la seconde qui sont homologues aux fausses droites et aux faux plans de la première sont aussi des fausses droites et des faux plans.

Proposition 4. — Dans deux figures congruentes, les angles homologues sont égaux; les fausses distances de deux couples de points homologues sont égales.

Les angles étant conservés, deux figures congruentes infiniment petites sont semblables. Le rapport de similitude est $\frac{R^2-\rho_1^2}{R^2-\rho_2^2}$, R étant le rayon de la sphère absolue, ρ_1 et ρ_2 les distances des deux figures à l'*origine*, c'est-à-dire au centre de la sphère absolue. Dans le cas où la sphère absolue se réduit à un plan, ce rapport se réduit à $\frac{y_1}{y_2}$, y_1 et y_2 étant les distances des deux figures au plan absolu.

Soient D une fausse droite, S et S' deux faux plans passant par D. Soient F une figure quelconque, F_1 la figure inverse de F par rapport à S, F_2 la figure inverse de F_1 par rapport à S'. Les points de D n'ont pas été altérés par ces deux inversions.

Supposons que, D et S restant fixes, S' varie d'une manière continue, mais en passant toujours par D. La figure F_2 variera d'une manière continue, mais en restant congruente à elle-même. Ce déplacement continu (accompagné d'ailleurs de déformation) s'appellera une *fausse rotation;* les points de D resteront fixes.

Soient encore D une fausse droite, S et S' deux faux plans orthogonaux à D.

Soient encore F une figure quelconque, F_1 la figure inverse de F par rapport à S, F_2 la figure inverse de F_1 par rapport à S'. La droite D n'est pas altérée par ces deux inversions; les points de D sont déplacés, mais ils restent sur D.

Supposons que, D et S restant fixes, S' varie d'une manière continue, mais en restant orthogonal à D. La figure F_2 variera d'une manière continue en restant congruente à elle-même. Ce déplacement continu s'appellera un *faux glissement;* dans ce mouvement, les points de D se mouvront, mais en restant sur D.

Nous pouvons donc énoncer les deux propositions suivantes :

Proposition 5. — Une figure peut se déplacer en restant congruente à elle-même, et de telle sorte que tous les points d'une fausse droite restent fixes (fausse rotation).

Proposition 6. — Une figure peut se déplacer en restant congruente à elle-même et de telle sorte que tous les points d'une fausse droite se déplacent, mais en restant sur cette fausse droite (faux glissement).

Le lieu des points dont la fausse distance au point A est constante ne doit pas être altéré par les inversions qui ont lieu par rapport à un faux plan passant par A; ce lieu doit donc couper normalement tous les faux plans qui passent par A.

Considérons la sphère S, lieu des points dont la fausse distance à A est constante; et d'autre part la sphère S', lieu des points dont la fausse distance à B est constante. Si ces deux sphères sont tangentes, le point de contact ne doit pas être altéré par les inversions qui ont lieu par rapport à un faux plan passant par A et B, puisque ces inversions n'altèrent aucune des deux sphères. Ce point de contact doit donc être sur la fausse droite AB. D'où cette conséquence : de tous les points C qui sont à une fausse distance donnée de A, celui dont la fausse distance à B est la plus petite est sur la fausse droite AB.

Mais si C est sur la fausse droite AB, il résulte des définitions que la fausse distance AB est la somme des fausses distances AC et BC. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 7. — Si un point B est sur une fausse droite AC, la fausse distance AC est la somme des fausses distances AB et BC. Dans le cas contraire, elle est plus petite.

Il est aisé de vérifier d'autre part que :

Proposition 8. — On peut par un point du domaine intérieur mener une infinité de faux plans qui ne rencontrent pas un faux plan donné.

On remarquera immédiatement que ces huit propositions sont, pour ainsi dire, la traduction des sept axiomes de la Géométrie et du postulatum de Lobatcheffsky. Il suffit pour passer des uns aux autres de remplacer partout les mots

(1) *espace, plan, droite, distance, égal, angle,*

par les mots

(2) *domaine intérieur, faux plan, fausse droite, fausse distance, directement congruent, angle.*

(La congruence inverse correspondrait à la symétrie.)

Supposons donc que Lobatcheffsky, en tirant les conséquences logiques des axiomes et de son postulatum, soit arrivé à deux propositions contradictoires. Alors, en traduisant son raisonnement de la façon que je viens de dire, c'est-à-dire en remplaçant les mots (1) par les mots (2) correspondants, on arriverait également à deux propositions contradictoires qui seraient des conséquences logiques des propositions 1 à 8 que nous venons d'énoncer.

Il y aurait donc contradiction entre ces huit propositions; mais cela est impossible, puisque ces huit propositions sont vraies et appartiennent à la Géométrie ordinaire.

Il est donc certain que Lobatcheffsky ne pouvait arriver à une contradiction et que l'on n'y arrivera jamais, quelque loin que l'on pousse les déductions.

Ajoutons qu'un faux plan divise le domaine intérieur (de même qu'un plan divise l'espace) en deux régions entièrement séparées l'une de l'autre.

IV.

La puissance de l'origine par rapport à un faux plan (n° 193) est égale à R^2, R étant le rayon de la sphère absolue; elle est donc constante.

Convenons d'appeler *faux plan* toute sphère telle que la puissance de l'origine par rapport à cette sphère soit égale à une constante donnée K, mais en *supposant cette constante négative*. En d'autres termes, supposons que le rayon de la sphère absolue soit imaginaire.

Nous désignerons toujours par *fausse droite* l'intersection de deux faux plans.

Ici, il n'y a plus lieu de distinguer un domaine intérieur : un faux plan n'est plus une portion de sphère, mais une sphère entière.

Un faux plan et une fausse droite se coupent alors en deux points que j'appellerai *points antipodes*. Ces deux points sont en ligne droite avec l'origine et le produit des rayons vecteurs sera égal à K.

Dans le cas du § III (c'est-à-dire quand K était positif et la sphère absolue réelle), une sphère et un cercle orthogonaux à cette sphère absolue se coupaient encore en deux points antipodes; mais un seul de ces deux points appartenait au domaine intérieur et par conséquent au faux plan et à la fausse droite envisagés.

Si K était positif, les deux points antipodes seraient d'un même côté de l'origine.

Si K est négatif, ils sont de part et d'autre de l'origine.

Quand un point se rapproche de l'origine, son antipode s'éloigne indéfiniment; nous sommes ainsi amenés à regarder tous les points à l'infini comme un point unique, antipode de l'origine.

Dans ces conditions, un faux plan et une fausse droite se rencontrent toujours, et il en résulte qu'un triangle curviligne dont les côtés sont des fausses droites, a la somme de ses angles plus grande que deux droits (cette somme était au contraire plus petite que deux droits dans le cas du § III).

Nous conserverons la définition de la fausse distance AB; seulement les points C et D qui figurent dans cette définition sont maintenant imaginaires, puisque la sphère absolue est devenue imaginaire. On peut éviter la considération de ces points imaginaires en remarquant que si A' et B' sont les antipodes de A et B, la fausse distance AB est égale à

$$\sqrt{K}\log\frac{1+i\sqrt{(A'AB'B)}}{1-i\sqrt{(A'AB'B)}},$$

(A'AB'B) représentant le rapport anharmonique des quatre points.

Nos sept premières propositions subsistent avec un seul changement : la proposition 1 comporte une exception; si deux points sont antipodes; on peut faire passer par ces deux points une infinité de fausses droites, de même par trois points, dont deux sont antipodes, on peut faire passer une infinité de plans.

Quant à la huitième proposition, elle doit être remplacée par la suivante :

Proposition 8 *bis*. — Par un point donné, non seulement on ne peut pas mener une infinité de faux plans qui ne rencontrent pas un faux plan donné, mais on n'en peut mener aucun

On peut conclure de là que l'on pourrait, sans contradiction logique, construire une Géométrie où l'on conserverait les sept axiomes ordinaires, mais en admettant que l'axiome 1 cesse d'être vrai dans certains cas d'exception; nous voulons dire qu'il y aurait certains couples de points exceptionnels par lesquels on pourrait faire passer, non pas une droite, mais une infinité de droites. De même, par un de ces couples de points exceptionnels et par un troisième point de l'espace, on pourrait faire passer une infinité de plans.

Quant au postulatum d'Euclide ou à celui de Lobatcheffsky, ils devraient être remplacés par le suivant : par un point, on ne peut mener aucun plan parallèle à un plan donné.

« Traduisons » en effet ces axiomes en remplaçant les mots (1) par les mots (2) nous retrouverons nos huit nouvelles propositions qui étant vraies ne sauraient être contradictoires.

Dans cette nouvelle Géométrie non euclidienne, qui est connue sous le nom de *Géométrie de Riemann*, la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits. Nous avons vu plus haut que Lobatcheffsky avait démontré que cette somme ne peut-être qu'égale ou inférieure à deux droits; c'est que le géomètre russe admettait que l'axiome 1 est vrai *sans aucune exception*.

Ainsi en « traduisant » une proposition quelconque de la Géométrie de Lobatcheffsky ou de celle de Riemann, on retrouvera une proposition euclidienne.

Démontrons maintenant que les formules de la Trigonométrie sphérique sont les mêmes dans les trois Géométries. En effet, considérons dans la Géométrie de Lobatcheffsky (ou celle de Riemann) une proposition de Trigonométrie sphérique; ce sera une relation entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique, ou, ce qui revient au même, une relation entre les angles plans et les dièdres d'un trièdre non euclidien T. Traduisons cette proposition en remplaçant les mots (1) par les mots (2) : nous obtiendrons une relation entre les angles sous lesquels se coupent trois faux plans, et les angles sous lesquels se coupent les trois fausses droites intersections mutuelles de ces trois faux plans; c'est-à-dire entre les angles plans et les dièdres du trièdre T' formé par les plans tangents à nos trois faux plans en leur point d'intersection.

La relation n'aura d'ailleurs pas été altérée par la traduction, puisque le mot *angle* se traduit par *angle*. La relation est donc la même entre les éléments du trièdre non euclidien T et ceux du trièdre euclidien T'.

V.

Introduisons maintenant une transformation nouvelle que j'appellerai la transformation T. Soit O l'origine, A un point quelconque, A′ son antipode; B le conjugué harmonique de O par rapport au segment AA′; le point B sera regardé comme le transformé du point A.

Dans cette transformation T :

1° La sphère absolue n'est pas altérée;

2° Un faux plan est transformé en un plan proprement dit qui n'est autre que le plan polaire de l'origine par rapport à la sphère dont fait partie ce faux plan;

3° Une fausse droite se transforme en une droite proprement dite;

4° La fausse distance de deux points A, B est par définition le logarithme du rapport anharmonique (ABCD), les points C et D étant les intersections de la sphère absolue et de la fausse droite AB. Par notre transformation T, les points C et D ne changeront pas, les points A et B seront transformés en A′ et B′. Les quatre points A′B′CD seront en ligne droite et le rapport anharmonique (A′B′CD) sera le carré de (ABCD).

Nous pourrons alors appeler *fausse distance de deuxième sorte* des points A′ et B′ le demi-logarithme de (A′B′CD), ce sera la même chose que la fausse distance des points A et B.

5° Les angles seront altérés par la transformation T conformément aux règles du n° 1185. Soient deux plans quelconques, et les deux plans tangents (imaginaires) menés par leur intersection à la sphère absolue, soit ρ le rapport anharmonique de ces quatre plans; l'expression $\frac{\log \rho}{2\sqrt{-1}}$ s'appellera le *faux angle* de ces deux plans. L'angle de deux faux plans est égal au faux angle des deux plans qui sont leurs transformés

6° Soient deux points A et B inverses l'un de l'autre par rapport au faux plan P; soient A′ et B′ leurs transformés, P′ le transformé de P (ce sera un plan). Soit Q le pôle du plan P′ par rapport à la sphère absolue. Les points Q, A′, B′ sont sur une même droite qui coupe le plan P′ en un point R conjugué harmonique de Q par rapport au segment A′B′. Les points A′ et B′ sont donc transformés l'un de l'autre par homologie; mais cette homologie satisfait à des conditions particulières, puisque (*voir* n° 938) le centre d'homologie est le pôle du plan d'homologie par rapport à la sphère absolue et que le rapport d'homologie est égal à -1.

Considérons une figure, et ses transformées successives par une série d'homologies satisfaisant à ces conditions. On dira que ces diverses figures sont *congruentes de la seconde manière*. Il est clair que si deux figures sont congruentes de la première manière, leurs transformées par la transformation T seront congruentes de la seconde manière.

Ces considérations nous font connaître une autre manière de déduire une proposition de la Géométrie ordinaire de toute proposition de la Géométrie non euclidienne.

Il suffit pour cela de la traduire en remplaçant les mots :

(1) *espace, plan, droite, distance, égal, angle.*

par les mots :

(3) *domaine intérieur, plan, droite, fausse distance de la deuxième sorte, directement congruent de la deuxième manière, faux angle.*

Voilà donc une nouvelle interprétation qui, en ce qui concerne la Géométrie de Riemann, soulève l'observation suivante :

Deux points antipodes ont le même transformé par la transformation T; par conséquent, dans la nouvelle manière d'interpréter la Géométrie de Riemann, un plan et une droite ne peuvent avoir qu'un point commun; l'axiome I est vrai sans comporter aucune exception. Comment se fait-il alors que, contrairement à la démonstration de Lobatcheffsky, la somme des angles d'un triangle soit supérieure à deux droits? C'est que nous avons abandonné une autre des hypothèses fondamentales de la Géométrie : il n'est plus vrai de dire qu'un plan partage l'espace en deux régions de telle façon qu'on ne puisse passer d'une de ces régions à l'autre sans traverser ce plan.

Il est inutile d'ajouter que toutes ces propriétés peuvent être transformées d'une manière quelconque par homologie. La sphère absolue sera alors remplacée par un ellipsoïde ou un hyperboloïde absolu. A part ce changement, les définitions de la fausse distance de la seconde sorte, de la congruence de la seconde manière, du faux angle ne seront pas changées; le caractère projectif de ces définitions est en effet manifeste.

VI.

La Géométrie non euclidienne à trois dimensions, étant ainsi constituée, contient, comme cas particulier, la Géométrie plane non euclidienne. Aux figures situées dans un plan non euclidien, correspondront dans l'espace euclidien, les figures situées dans un faux plan quelconque que nous pourrons d'ailleurs choisir arbitrairement. Nous choisirons un faux plan P passant par l'origine et qui sera par conséquent à la fois un faux plan et un plan au sens ordinaire du mot.

Ce faux plan P coupera la sphère absolue suivant un cercle qu'on appellera le *cercle absolu*. Les fausses droites de P couperont orthogonalement ce cercle absolu; la puissance de l'origine par rapport à ces fausses droites sera égale à K.

Nous allons voir d'abord que la Géométrie de Riemann à deux dimensions ne diffère pas essentiellement de la Géométrie sphérique. Supposons donc K négatif; construisons une sphère S de rayon $\sqrt{-K}$ ayant pour centre l'origine. Soit F une figure de la sphère, projetons-la stéréographiquement sur le plan P (n° 958). Cette projection conservera les angles, les grands cercles de la sphère se projetteront suivant des fausses droites; la longueur d'un arc de grand cercle n'est autre chose que la fausse distance des projections de ses extrémités.

Les projections de deux points antipodes de la sphère seront deux points antipodes au sens du paragraphe IV; c'est ce qui justifie cette dénomination.

A chaque théorème de la Géométrie de Riemann correspondra donc un théorème de la Géométrie sphérique; il suffit, pour la traduire, de remplacer les mots :

(1) *droite, égal, longueur, angle,*

par les mots :

(4) *grand cercle, égal, longueur, angle,*

En particulier, les formules de la Trigonométrie plane de Riemann seront les mêmes que celles de la Trigonométrie sphérique ordinaire. On a, par exemple, en Trigonométrie sphérique,

$$(5)\qquad \frac{\sin A}{\sin\frac{a}{\sqrt{-K}}} = \frac{\sin B}{\sin\frac{b}{\sqrt{-K}}} = \frac{\sin C}{\sin\frac{c}{\sqrt{-K}}},$$

A, B, C étant les angles d'un triangle sphérique, et a, b, c les longueurs de ses côtés (le rayon de la sphère étant supposé égal à $\sqrt{-K}$), de telle façon que $\frac{a}{\sqrt{-K}}$, $\frac{b}{\sqrt{-K}}$, $\frac{c}{\sqrt{-K}}$ soient les longueurs des côtés correspondants du triangle semblable construit sur la sphère de rayon 1.

La formule (5) sera encore vraie d'un triangle plan dans la Géométrie de Riemann.

Elle sera encore vraie (par continuité) d'un triangle plan dans la

Géométrie de Lobatcheffsky. Seulement, K étant positif, la formule se présente sous une forme imaginaire. Pour lui rendre la forme réelle servons-nous d'une formule d'Analyse

$$2\sin ix = e^{-x} - e^{x};$$

notre formule (5) deviendra :

$$(5\ bis)\qquad \frac{\sin A}{e^{\frac{a}{\sqrt{K}}} - e^{-\frac{a}{\sqrt{K}}}} = \frac{\sin B}{e^{\frac{b}{\sqrt{K}}} - e^{-\frac{b}{\sqrt{K}}}} = \frac{\sin C}{e^{\frac{c}{\sqrt{K}}} - e^{-\frac{c}{\sqrt{K}}}}.$$

Soient F une figure sphérique quelconque, F' sa projection stéréographique sur le plan P. Comment pourrait-on obtenir la transformée F'' de F' par la transformation T du paragraphe V? Pour cela menons à la sphère S un plan tangent parallèle à P; faisons la perspective de F sur ce plan, en prenant pour point de vue le centre de la sphère; et enfin projetons orthogonalement sur le plan P la perspective obtenue; il est aisé de montrer que la figure ainsi construite n'est autre chose que F''. On vérifie immédiatement qu'aux grands cercles de F correspondent les droites de F''.

Lorsque K est positif, la sphère S est imaginaire; on peut donc dire que la Géométrie plane de Lobatcheffsky est la Géométrie d'une sphère imaginaire; mais il y a bien des moyens d'éviter cette sphère imaginaire et d'arriver à la formule (5 *bis*) et aux formules analogues sans passer par la considération des imaginaires. Nous nous bornerons à indiquer sommairement le suivant :

Considérons un hyperboloïde de révolution à deux nappes. Soit P le plan de symétrie qui ne rencontre pas la surface; soient N l'une des nappes et V le point où l'axe de symétrie perpendiculaire à P vient rencontrer l'autre nappe. Soit F une figure quelconque tracée sur la nappe N : faisons-en la perspective sur le plan P, en prenant V pour point de vue. Toutes les sections planes de l'hyperboloïde se projetteront suivant des cercles.

Menons par V des parallèles aux génératrices du cône asymptote. Nous obtiendrons un certain cône de révolution qui viendra couper le plan P suivant un certain cercle C. Ce cercle est la projection des points à l'infini de l'hyperboloïde.

Si nous prenons C pour cercle absolu, les sections diamétrales de l'hyperboloïde se projetteront suivant des fausses droites.

A chaque point de la nappe N correspond ainsi un point du domaine intérieur et par conséquent un point du plan non euclidien. Cette construction joue, pour la Géométrie de Lobatcheffsky, le rôle que jouait tout à l'heure la projection stéréographique pour la Géométrie de Riemann.

Soient, dans le plan P, deux figures congruentes, F_1 et F'_1, qui soient les projections de deux figures F et F' de la nappe N; les coordonnées d'un point de F' sont alors des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées du point homologue de F; il suffit de montrer qu'il en est ainsi quand on suppose que F_1 et F'_1 sont transformées l'une de l'autre par une seule inversion, le cercle d'inversion étant une fausse droite; or cela se vérifie immédiatement.

Soient

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

l'équation de l'hyperboloïde, et

$$(x, y, z), \quad (x', y', z')$$

les coordonnées de deux points de N. Soit δ la fausse distance des projections de ces deux points; on vérifie aisément que

$$2(zz' - xx' - yy') = e^{\delta} + e^{-\delta}.$$

Cette formule, d'où l'on peut déduire toutes celles de la Trigonométrie plane non euclidienne, est l'équivalent de la formule de Géométrie analytique qui donne le cosinus de l'angle de deux directions en fonction de leurs cosinus directeurs.

VII.

Dans les pages qui précèdent nous n'avons fait usage que des principes de la Géométrie élémentaire; tout au plus dans le paragraphe précédent avons-nous invoqué une formule d'Analyse, et quelques formules de Géométrie analytique, ce que nous aurions pu éviter au prix de quelques longueurs. Nous ne saurions cependant clore cette Note sans dire quelques mots des liens qui rattachent la Géométrie plane non euclidienne à la Géométrie infinitésimale des surfaces. Nous renverrons d'ailleurs pour les théorèmes dont nous aurons à nous servir, à l'Ouvrage classique de M. Darboux.

1873?

Deux surfaces sont dites *applicables l'une sur l'autre*, si l'on peut déformer l'une d'elles (sans altérer les longueurs des lignes tracées sur cette surface et les angles sous lesquels ces lignes se coupent) de manière à l'appliquer sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

Une géodésique d'une surface est, par définition, le plus court chemin d'un point à un autre sur cette surface. Il est clair que si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, les géodésiques de l'une

correspondront aux géodésiques de l'autre, puisque la déformation, n'altérant pas les longueurs, conserve les géodésiques.

La courbure totale d'une surface est l'inverse du produit des deux rayons de courbure principaux. On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit applicable sur une sphère de rayon R, c'est que cette surface ait sa courbure totale constante et égale à $\frac{1}{R^2}$.

Une sphère est applicable d'une infinité de manières sur elle-même; une surface à courbure totale constante sera donc aussi applicable sur elle-même d'une infinité de manières.

Il est clair que la Géométrie des lignes tracées sur une surface sera la même que la Géométrie des lignes tracées sur une surface applicable sur la première.

Or nous avons vu que la Géométrie plane de Riemann ne diffère pas de la Géométrie de la sphère; elle ne différera donc pas non plus de la Géométrie des surfaces à courbure totale constante positive.

Les triangles dont les côtés sont trois géodésiques tracées sur une pareille surface auront la somme de leurs angles supérieure à deux droits et leurs éléments seront liés par les formules de la Trigonométrie sphérique.

Mais il y a également des surfaces réelles à courbure totale négative, connues sous le nom de *surfaces de Beltrami*. La Géométrie de ces surfaces ne différera pas de celle de Lobatcheffsky.

Les triangles dont les côtés sont trois géodésiques tracées sur une surface de Beltrami auront la somme de leurs angles inférieure à deux droits et leurs éléments seront liés par les formules de la Trigonométrie plane non euclidienne.