F. TISSERAND. — LEÇONS SUR LA DÉTERMINATION DES ORBITES, PROFESSÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS. Rédigées et développées pour les calculs numériques, par *J. Perchot*, avec une préface de *H. Poincaré*.

Nous devons être reconnaissants à M. Perchot qui nous a conservé les Leçons de Tisserand sur la détermination des Orbites. Les nombreux lecteurs du *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand, qui connaissaient la clarté de son exposition et qui appréciaient la simplicité et l'élégance de sa méthode, croyaient sa voix éteinte à jamais. Grâce à M. Perchot, ils auront la joie de l'entendre de nouveau.

Les idées que Tisserand exposait dans les Leçons qu'il professait à la Sorbonne se retrouvent presque toutes dans le grand Traité précédemment publié et qui est maintenant entre les mains de tous les astronomes. Elles n'y sont pas toutes cependant; bien des questions qu'il a traitées dans son Cours ont été laissées de côté dans son Ouvrage. Il faut espérer que M. Perchot et ses autres élèves feront revivre la partie inédite de son Œuvre et sauveront de sa pensée tout ce qu'une mort prématurée permet d'en sauver.

La détermination des orbites des planètes et des comètes, ce problème si important pour l'astronome, n'avait pas été étudiée dans le *Traité de Mécanique céleste :* c'est là le sujet des Leçons recueillies par M. Perchot; le seul Ouvrage écrit en français sur cette question est la traduction du *Traité d'Oppolzer*. Cet utile Volume est consulté tous les jours par les calculateurs; mais il faut reconnaître que la lecture en est difficile et rébarbative.

Les débutants ne seront pas seuls à s'applaudir d'avoir à leur disposition un Traité où ils retrouveront la limpidité française. Grâce à ce Guide, les étudiants avanceront sans fatigue; j'ajoute que ce Guide peut les mener jusqu'au bout, car M. Perchot a fait suivre les Leçons de Tisserand d'un résumé général des formules mises sous leur forme définitive, c'est-à-dire sous une forme propre au calcul et même d'un modèle de calcul où aucun détail n'est omis.

Pour déterminer les six éléments d'une orbite on dispose de trois observations; chacune de ces observations nous fournissant deux données, nous avons six équations pour calculer nos six inconnues.

Géométriquement, il s'agit de déterminer l'orbite d'une planète, sachant que cette planète se trouvait à trois instants donnés sur trois droites données dans l'espace.

Dans le cas où l'orbite de la planète serait dans le plan de l'écliptique, on n'aurait plus que quatre éléments au lieu de six. Mais, d'autre part, chaque observation ne fournirait qu'une seule donnée, la longitude. Il faudrait donc quatre observations pour déterminer l'orbite ; ce qui veut dire pratiquement que, si l'inclinaison est faible, il sera plus exact d'employer une quatrième observation de longitude que de se servir des trois observations de latitude. N'insistons pas sur ce point et revenons au cas général.

Comme le nombre des équations est le même que celui des inconnues le problème est théoriquement possible, mais les ressources actuelles de l'Analyse ne permettent pas de le résoudre en toute rigueur et dans toute sa généralité.

Il y a cependant un cas où une solution complète serait possible, c'est celui des orbites paraboliques. Pour la plupart des comètes, on peut admettre, en première approximation, que leur trajectoire est une parabole; mais une orbite parabolique ne dépend plus que de cinq éléments au lieu de six et, comme nous avons toujours nos six équations, nous avons une équation surabondante. De plus, dans ce cas, nos six équations peuvent être mises sous la forme algébrique.

Cette double circonstance suffit pour rendre le problème résoluble.

Nous avons en effet six relations algébriques entre cinq inconnues et un certain nombre de données. En éliminant quatre des inconnues, on aura deux équations algébriques entre une seule inconnue et les données. Les premiers membres de ces deux équations seront deux polynomes entiers par rapport à l'inconnue. Cherchons le plus grand commun diviseur de ces deux polynomes et arrêtons l'opération quand nous arriverons à un reste qui sera un polynome du premier degré. En égalant ce reste à zéro, nous aurons l'inconnue en fonction rationnelle des données.

En résumé, nous aurons les éléments de l'orbite parabolique sous la forme de fonctions rationnelles des époques des observations, ainsi que des cosinus et des sinus des trois ascensions droites et des trois déclinaisons observées.

Nul doute d'ailleurs qu'un algébriste habile ne puisse arriver à ce résultat beaucoup plus rapidement que par l'application brutale de la méthode que je viens d'esquisser.

Une pareille méthode éviterait l'emploi des approximations successives; elle permettrait d'utiliser non seulement trois observations distantes de peu de jours, mais trois observations quelconques.

Il n'y a aucune raison pour qu'elle soit illusoire, ou moins exacte que les méthodes ordinaires. Serait-elle plus rapide et plus commode pour les calculs numériques? C'est une question sur laquelle il convient de faire des réserves jusqu'à ce que l'on ait entièrement développé les formules auxquelles elle conduirait.

On pourrait aussi supposer que l'on dispose de trois observations : les deux premières très voisines l'une de l'autre, la troisième suffisamment éloignée des deux autres. On pourrait ainsi considérer comme connues : 1° l'ascension droite, la déclinaison et leurs dérivées du premier ordre à l'instant t; 2° l'ascension droite et la déclinaison à l'instant t''. Les cinq éléments inconnus nous seraient encore donnés par six équations algébriques. Comme on aurait encore une équation surabondante, on pourrait appliquer le même procédé qui conduirait cette fois à des calculs plus simples.

Aucune méthode de ce genre n'a jamais été employée.

Dans le cas des orbites elliptiques, une pareille solution n'est plus possible. D'une part, en effet, il n'y a plus d'équation surabondante; d'autre part, les équations sont transcendantes. Pour avoir des équations surabondantes, il faudrait plus de trois observations; mais, pour pouvoir arriver à une solution analogue à celle dont je viens de montrer la possibilité dans le cas des orbites paraboliques, il faudrait éliminer les transcendantes, et pour cela il faudrait six observations (à moins que, se contentant d'une approximation, on remplace les fonctions transcendantes par des fonctions algébriques qui en diffèrent fort peu).

En ne faisant pas intervenir les époques des observations et en écrivant que l'ellipse décrite par la planète rencontre six droites données dans l'espace, on obtiendrait six équations de forme algébrique entre les cinq éléments qui définissent la forme et la position de l'ellipse. On se trouverait donc dans les mêmes conditions que pour les orbites paraboliques. Inutile d'ajouter qu'une pareille méthode ne saurait être recommandée à aucun point de vue.

Les méthodes rigoureuses sont donc ou inapplicables, ou inappliquées, et il faut bien recourir à des procédés d'approximations successives. Pour que ces approximations soient possibles, il faut supposer que les trois observations se font à des époques très rapprochées l'une de l'autre. Les intervalles des observations sont alors regardés comme de très petites quantités et c'est par rapport aux puissance de ces intervalles que l'on développe.

Il y a là une nécessité qui nous est imposée par les difficultés analytiques du problème. Si l'on n'avait pas à tenir compte de ces difficultés, il est évident qu'on aurait d'autant plus de garantie d'exactitude que les observations employées seraient plus éloignées les unes des autres; mais, si les intervalles étaient trop grands, les méthodes d'approximations successives seraient inapplicables ou trop pénibles.

La première de ces méthodes est celle de Laplace ; aujourd'hui elle n'est plus employée et elle est tombée dans un discrédit peut-être injuste; disons-en quelques mots cependant, pour la comparer avec celle de Gauss et d'Olbers qui sont exposées dans cet Ouvrage.

Avec trois observations, ou en en faisant intervenir un plus grand nombre s'il y a lieu, on calcule par interpolation les valeurs, à un certain instant t, de l'ascension droite α, de la déclinaison δ et de leurs dérivées $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d^2\delta}{dt^2}$.

Ce sont ces six quantités que noxs regarderons comme les données de la question. Prenons, d'autre part, pour inconnues la distance ρ de la planète à la Terre et ses deux dérivées $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d^2\rho}{dt^2}$.

Les trois composantes de l'accélération de la planète seront des fonctions linéaires non homogènes de ρ, $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d^2\rho}{dt^2}$. Les coefficients de ces fonctions linéaires seront des quantités connues dépendant directement des données. D'autre part, la loi de Newton nous donne ces trois composantes en fonctions des coordonnées de la planète, et ces coordonnées dépendent seulement, d'une part, de ρ, et, d'autre part, de α et de δ qui sont des données. Ainsi, la loi de Newton nous donne les trois composantes en fonctions de ρ. En égalant les deux valeurs de chacune de ces trois composantes, nous obtiendrons un système de trois équations que j'appellerai pour abréger *les équations* (1) *de Laplace.*

Comment tirer de ces trois équations les valeurs des inconnues? Nous commencerons par éliminer $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d^2\rho}{dt^2}$. Pour cela, projetons l'accélération sur une droite perpendiculaire à la fois au rayon vecteur qui joint la Terre à la planète à l'instant t, et au rayon vecteur infiniment voisin qui joint ces deux astres à l'instant $t+dt$. Égalons les deux expressions de cette projection, nous obtiendrons une équation que j'appellerai *l'équation* (2) *de Laplace.* Cette équation est algébrique et elle ne contient d'autre inconnue que ρ.

Quand on aura tiré ρ, les équations (1) ne contiendront plus les inconnues restantes $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ que sous la forme linéaire. Le calcul de ces deux inconnues se ramènera donc à la résolution d'équations du premier degré.

Telle est la méthode de Laplace, dont l'avantage est de tenir compte, non seulement de trois observations, mais de toutes celles dont on dispose.

Passons à la méthode de Gauss qui est exposée dans le Chapitre II de cet Ouvrage; elle est fondée sur la considération des trois triangles formés par le Soleil et les trois positions de la planète et dont les aires sont désignées (page 12) par

$$\frac{1}{2}[r, r'], \qquad \frac{1}{2}[r', r''], \qquad \frac{1}{2}[r, r''].$$

Ces aires peuvent être développées suivant les puissances des intervalles des observations, ou des petites quantités θ, θ', θ'' que l'on définit page 13 et qui sont proportionnelles à ces intervalles.

En première approximation, ces triangles se confondront avec les secteurs correspondants; ils seront donc proportionnels à θ'', θ et $\theta' = \theta + \theta''$.

L'erreur commise est donc égale au segment compris entre un petit arc d'ellipse et sa corde; elle est donc du troisième ordre.

On verrait aisément que ce segment est sensiblement au secteur correspondant comme l'accélération (qui est toujours dirigée vers le Soleil), multipliée par le carré de l'intervalle correspondant, est à six fois le rayon vecteur. Après cette correction, l'erreur n'est plus que du quatrième ordre. C'est ainsi que s'expliquent les termes en $\frac{\theta^2}{6\,r'^3}$ dans les formules qui sont à la fin de la page 14. On aurait pu d'ailleurs, avec la même approximation, remplacer dans la première de ces formules par exemple r' par r'', c'est-à-dire qu'on aurait pu introduire, au lieu du rayon vecteur au commencement de l'intervalle, le rayon vecteur final ou un rayon vecteur intermédiaire quelconque. C'est ainsi que le rayon vecteur r', qui figure au dénominateur du second terme dans nos trois formules, est le rayon initial pour la première formule, un rayon intermédiaire pour la seconde, le rayon final pour la troisième.

L'examen de la seconde formule montre que si les observations sont équidistantes le terme en $\frac{dr'}{dt}$ disparaît. Cela signifie que si dans le calcul du terme correctif on introduit, au lieu du rayon initial ou final, celui qui correspond au milieu de l'intervalle, l'erreur commise n'est plus que du cinquième ordre. Cela revient, dans la première formule, par exemple, à changer r' en $r' + \frac{\theta}{2}\frac{dr'}{\mathrm{K}\,dt}$. Ainsi s'explique l'introduction du second terme correctif en $\frac{dr'}{dt}$.

Telle est la signification géométrique des formules de la page 14. L'examen de ces formules nous apprend encore un autre fait, utilisé dans la méthode d'Olbers : c'est que si les observations sont équidistantes, le rapport de $[r', r'']$ à $[r, r']$ est égal à celui de θ à θ'' *au troisième ordre près*.

On arrive ensuite à des équations linéaires par rapport aux trois distances de la planète à la Terre, ρ, ρ' et ρ'' : ce sont les équations (1) de la page 45, identiques aux notations près aux équations (1) de la page 17. Ces équations correspondent aux équations (1) de Laplace et peuvent s'y réduire en première approximation. Comme on pourrait ne pas les y reconnaître, il convient d'insister un peu sur ce point.

Comme θ et θ'' sont très petits, nous pourrons développer ρ et ρ'' suivant les puissances de ces quantités et écrire, en nous arrêtant aux termes du second ordre,

$$\rho = \rho' - \frac{d\rho'}{K\,dt}\theta + \frac{d^2\rho'}{K^2\,dt^2}\frac{\theta^2}{2},$$

$$\rho'' = \rho' + \frac{d\rho'}{K\,dt}\theta'' + \frac{d^2\rho'}{K^2\,dt^2}\frac{\theta''^2}{2}.$$

Développons de même α', β', α'', β'' et leurs lignes trigonométriques, en nous arrêtant toujours au second ordre. Remplaçons $[r, r'']$, etc. par leurs développements de la page 14 en conservant les deux premiers termes.

Substituons dans les équations (1) : les termes du premier et du second ordre disparaîtront d'eux-mêmes ; nous négligerons ceux qui sont du quatrième ordre ou d'ordre supérieur. Quant aux termes du troisième ordre, ils contiendront en facteur le produit $\theta\theta'\theta''$; si l'on supprime ce facteur, on retombera aux notations près sur les équations de Laplace.

Nos équations (1), analogues à celles de Laplace, se traiteront de la même manière ; on les combinera de façon à éliminer ρ et ρ''. Quel est le sens géométrique de cette opération? La première des équations (1) est la traduction de l'équation de la page 17 :

$$[r', r'']\,x - [r, r'']\,x' + [r, r']\,x'' = 0.$$

La même équation a lieu évidemment entre les coordonnées y ou z, ou encore entre les projections des rayons vecteurs r, r', r'' sur une droite quelconque. Choisissons cette droite.

Soient

S le Soleil ;
P, P′, P″ les trois positions de la planète ;
T, T′, T″ celles de la Terre ;
D une droite perpendiculaire à la fois à PT et à P″T″.

Si nous projetons sur D, les deux distances ρ et ρ'' se trouveront éliminées, et nous tomberons sur l'équation (2) de la page 46 dont le sens géométrique se trouve ainsi défini.

On voit ainsi que K, A, B, C sont entre eux comme le cosinus de l'angle de P′T avec D, et les projections sur D des trois rayons vecteurs SP, SP″ et SP′.

Cette équation (2) correspond à l'équation (2) de Laplace. En première approximation, il y a identité entre les deux équations. Toutes deux sont linéaires en ρ' et $\frac{1}{r'^3}$ [*voir* les équations (24), page 51, et (26), page 53]; les coefficients sont à peu près les mêmes; la différence provient de ce que la droite D est perpendiculaire aux deux vecteurs PT et P″T″ qui sont très voisins, mais non infiniment voisins. Dans la méthode de Laplace, au contraire, on projette sur la perpendiculaire commune à deux vecteurs infiniment voisins.

Mais, et c'est là l'avantage de la méthode de Gauss, la même équation peut servir dans les approximations suivantes. Dans l'équation (26), les coefficients K, A, B, C, d'après leur définition même, restent les mêmes à toutes les approximations; il n'y a à changer que le coefficient Q, et le changement est d'ailleurs très faible, de sorte que, connaissant la solution de l'équation approchée, on en déduit, par un calcul rapide, celle de l'équation exacte.

Ayant calculé ρ', on obtiendra ρ et ρ'' par des équations linéaires; de même que, dans la méthode de Laplace, le calcul de $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, après la détermination de ρ, se ramène à la résolution de deux équations du premier degré.

Ainsi, et c'est là le point que je voulais faire comprendre, la méthode de Gauss en première approximation ne diffère que par la forme de celle de Laplace; l'avantage qu'elle présente c'est qu'il suffit d'un petit changement dans les équations pour passer aux approximations suivantes.

Il est clair qu'il ne serait pas difficile de conférer à la méthode de Laplace un avantage analogue; on pourrait écrire par exemple, en appelant α, α', α'' les trois longitudes, β, β', β'' les trois latitudes et en s'arrêtant au troisième ordre,

$$\alpha = \alpha' - \theta \frac{d\alpha'}{K\,dt} + \frac{\theta^2}{2} \frac{d^2\alpha'}{K^2\,dt^2} - \frac{\theta^3}{6} \frac{d^3\alpha'}{K^3\,dt^3},$$

avec des équations analogues pour α'', β, β''. On trouverait d'ailleurs aisément l'expression de $\frac{d^3\alpha'}{dt^3}$ en fonction de α', β', ρ', $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d\beta'}{dt}$, $\frac{d\rho'}{dt}$. En première approximation on ferait

$$\frac{d^3\alpha'}{dt^3} = 0,$$

et l'on aurait de premières valeurs approchées de $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d^2\alpha'}{dt^2}$ dont on se servirait pour le calcul. Dans l'expression de $\frac{d^3\alpha'}{dt^3}$, on remplacerait ensuite α', β', ρ', $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d\beta'}{dt}$, $\frac{d\rho'}{dt}$ par leurs valeurs déduites de cette première approximation, et l'on aurait de nouvelles valeurs approchées de $\frac{d\alpha'}{ds}$, $\frac{d^2\alpha'}{dt^2}$ et ainsi de suite.

C'est au reste ce qu'a exposé Laplace au Livre II, n° 32, de sa *Mécanique céleste*. On peut donc se demander si, même à ce point de vue, les deux méthodes ne sont pas équivalentes.

Dans le Chapitre Ier, Tisserand étudie la méthode d'Olbers pour la détermination des orbites paraboliques. Les calculs, d'après cette méthode, se divisent en deux parties.

Dans la première Partie, on ne se sert pas de l'hypothèse que l'orbite est une parabole, et l'on combine les six équations données par les trois observations de façon à en tirer une équation unique.

Dans la seconde Partie, on introduit l'hypothèse de l'orbite parabolique; on n'a donc plus que cinq inconnues, et, si l'on ne veut pas d'équation surabondante, il faut seulement cinq équations. On prendra les quatre équations données par les observations extrêmes et l'on y joindra l'équation finale obtenue dans la première Partie.

Il est clair que, dans la première Partie, on pourrait combiner d'une infinité de manières les six équations dont on dispose et en tirer une infinité d'équations différentes, et l'on ne voit pas bien du premier coup d'œil pour quelle raison on choisira l'une plutôt que l'autre.

Quoi qu'il en soit, voici ce que fait Olbers. Reprenons les équations (1) des pages 17 et 45. Elles expriment, nous l'avons dit, que les projections sur une droite quelconque des trois vecteurs SP, SP', SP'', multipliées respectivement par $[r', r'']$, $-[r, r'']$, $[r, r']$, ont pour somme zéro. Projetons sur une droite perpendiculaire au plan SP'T' les projections des trois vecteurs SP', ST', P'T' seront nulles et ces trois vecteurs se trouveront éliminés.

Les projections de SP'' et de SP sont entre elles comme les triangles SP''P', SPP'. Or le rapport de ces triangles est égal au rapport des vecteurs, c'est-à-dire à $\frac{\theta''}{\theta}$ au second ordre près ; il est encore égal à $\frac{\theta''}{\theta}$ au troisième ordre près, si les observations sont équidistantes.

Pour la même raison, le rapport des triangles ST″T′, STT′, c'est-à-dire le rapport des projections de ST″ et de ST, sera encore égal à $\frac{\theta''}{\theta}$.

Or, si l'on a

$$\frac{\text{proj.ST}''}{\text{proj.ST}} = \frac{\text{proj.SP}''}{\text{proj.SP}} = \frac{\theta''}{\theta},$$

on aura également

$$\frac{\text{proj.P}''\text{T}''}{\text{proj.PT}} = \frac{\text{proj.ST}'' - \text{proj.SP}''}{\text{proj.ST} - \text{proj.SP}} = \frac{\theta''}{\theta}.$$

Connaissant le rapport des projections de P″T″ et PT, il est aisé d'en déduire le rapport de ces deux vecteurs eux-mêmes et, par conséquent, le rapport de ρ'' à ρ.

Tel est le sens géométrique de l'analyse du n° 7, pages 16 et suivantes.

Il est aisé maintenant de comprendre la raison du choix fait par Olbers. L'équation à laquelle il parvient est d'une forme remarquablement simple, et elle conserve cette simplicité en deuxième approximation dans le cas où les observations sont équidistantes.

Passons à la seconde Partie du calcul. Nous avons à résoudre quatre équations à quatre inconnues. Ces équations sont algébriques, mais leur résolution rigoureuse est impossible, et il faut procéder à des approximations successives. Pour que ces approximations soient rapides, il faut que la valeur dont on fait usage dans le premier tâtonnement soit déjà suffisamment approchée.

La méthode qui consiste à faire d'abord $\rho = 1$ (*voir* la fin de la page 24) n'est donc pas justifiée : il vaut mieux profiter de ce que les observations sont très rapprochées et faire d'abord $s = 0$; c'est là le sens de la méthode d'approximation exposée aux paragraphes 9 et 10. Il est aisé de voir en effet que, si les deux observations sont infiniment rapprochées, s et θ' sont nuls et que l'on a

$$\eta = 0, \qquad \mu = 1.$$