SUR LES QUADRATURES MÉCANIQUES;

PAR M. H. POINCARÉ.

1. Quand l'excentricité du corps troublé est trop grande pour que l'on puisse développer suivant les puissances de cette quantité, on a ordinairement recours aux quadratures mécaniques. Le plus souvent, le corps troublé reste sur une partie de son orbite très éloigné de la planète troublante, de sorte que dans cette partie les perturbations sont très petites et souvent presque négligeables. Dans l'autre partie de l'orbite, au contraire, il se rapproche beaucoup de la planète troublante et les perturbations sont relativement considérables.

On est donc obligé, au moins dans cette seconde partie de l'orbite, de multiplier beaucoup les intervalles, non seulement parce que la quantité à intégrer est très grande, mais surtout parce qu'elle varie très rapidement. Je me suis demandé s'il n'y avait pas moyen d'abréger un peu le travail de ces quadratures mécaniques en s'affranchissant de cette circonstance.

2. Je supposerai d'abord que l'orbite du corps troublé soit très excentrique et celle de la planète troublante circulaire. Je prendrai pour variable l'anomalie excentrique du corps troublé que j'appellerai u. Les coordonnées du corps troublé, le temps et, par conséquent, les coordonnées du corps troublant seront des fonctions entières de u. Si donc j'appelle $F(u)$ le carré de la distance des deux corps, la fonction $F(u)$ sera aussi une fonction entière de u, c'est-à-dire développable suivant les puissances de u, quelque grande que soit cette variable.

Les intégrales qu'il s'agit de calculer sont de la forme

$$\int G(u)[F(u)]^{-\frac{s}{2}}du,$$

s étant un entier positif impair et $G(u)$ une autre fonction entière.

Je suppose que le moment où les deux corps sont le plus rapprochés l'un de l'autre correspond à la valeur $u = u_0$.

La difficulté provient de ce que, pour u voisin de u_0, $F(u)$ devient très petit et que, par conséquent, $[F(u)]^{-\frac{s}{2}}$ est grand et varie rapidement.

Considérons les racines de l'équation

$$F(u) = 0.$$

Soient u_1, u'_1; u_2, u'_2; les quatre racines, imaginaires conjuguées deux à deux, les plus rapprochées de u_0.

Soit

$$P(u) = (u - u_1)(u - u'_1)(u - u_2)(u - u'_2), \tag{1}$$

$$F(u) = P(u)Q(u). \tag{2}$$

$Q(u)$ sera encore une fonction entière; mais elle ne deviendra plus très petite pour u voisin de u_0.

Si alors nous considérons la fonction

$$G(u)[Q(u)]^{-\frac{s}{2}},$$

cette fonction, dans le voisinage de $u = u_0$, ne deviendra plus très grande et ne variera plus très rapidement; j'ajouterai que dans le voisinage de $u = u_0$, elle pourra être développée en série ordonnée suivant les puissances de $u - u_0$ et que la convergence de cette série sera rapide. Nous pourrons donc poser

$$G(u)[Q(u)]^{-\frac{s}{2}} = H(u) + R(u)[P(u)]^p, \tag{3}$$

p étant un entier plus grand que $\frac{s}{2}$, $H(u)$ un polynome et $R(u)$ une fonction qui reste très petite. Il vient alors

$$\int G(u)[F(u)]^{-\frac{s}{2}} du = \int H(u)[P(u)]^{-\frac{s}{2}} du + \int R(u)[P(u)]^{p-\frac{s}{2}} du.$$

La première intégrale est une intégrale elliptique; la seconde peut se calculer d'une façon relativement rapide, puisque la fonction sous le signe $\int$ est petite et ne varie pas rapidement.

J'ajouterai que l'intégrale elliptique en question est à peu de chose près égale à une intégrale elliptique *complète,* c'est-à-dire à une période de l'intégrale indéfinie. Comparons, en effet, l'intégrale complète

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(u)[P(u)]^{-\frac{s}{2}} du$$

et l'intégrale à calculer

$$\int_{u_2}^{u_1} \mathrm{H}(u)[\mathrm{P}(u)]^{-\frac{s}{2}} du.$$

La valeur u_0 sera comprise entre les deux limites d'intégration u_1 et u_2; or, c'est seulement dans le voisinage de u_0 que la fonction sous le signe $\int$ acquiert une valeur notable; la différence des deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{u_1} + \int_{u_2}^{+\infty}$$

est donc petite et le calcul n'en présente pas de difficulté.

3. Supposons maintenant que l'orbite du corps troublant ne soit plus circulaire, mais elliptique, quoique très peu excentrique.

Les coordonnées du corps troublant seront encore des fonctions entières de l'anomalie excentrique du corps troublant; mais celle-ci, qui ne sera plus proportionnelle au temps, ne sera plus une fonction entière de u, c'est-à-dire de l'anomalie excentrique du corps troublé.

Soit donc v l'anomalie excentrique du corps troublant; v n'est plus fonction entière de u; mais v peut se développer suivant les puissances de l'excentricité et la convergence de ce développement est très rapide puisque cette excentricité est très petite.

Soit donc

$$v = v_0 + e v_1 + \ldots + e^m v_m + \ldots$$

ce développement et soit v' la somme des m premiers termes. La différence $v - v'$ sera très petite et v' sera une fonction entière de u.

Ce que je viens de dire de v s'applique à une fonction entière quelconque de v et de u et, en particulier, aux coordonnées du corps troublant et au carré de la distance des deux corps.

Les deux fonctions que j'ai appelées $\mathrm{F}(u)$ et $\mathrm{G}(u)$ ne sont donc plus des fonctions entières de u; mais elles diffèrent très peu de deux fonctions entières $\mathrm{F}'(u)$ et $\mathrm{G}'(u)$.

On peut ainsi remplacer l'intégrale

$$\int \mathrm{G}(u)[\mathrm{F}(u)]^{-\frac{s}{2}} du$$

par la suivante

$$\int G'(u)[F'(u)]^{-\frac{s}{2}}du$$

(où F' et G' sont des fonctions entières), en commettant une erreur qui est de l'ordre de la $m^{\text{ième}}$ puissance de l'excentricité de la planète troublante (et cela en prenant m aussi grand que l'on veut).

Cette seconde intégrale se traiterait comme celle du numéro précédent.

4. On pourrait objecter que le calcul des racines u_1, u'_1, u_2, u'_2 pourra présenter autant de difficulté que le calcul direct lui-même; mais il faut observer qu'il n'est pas nécessaire de calculer ces racines exactement.

Si u_1, u'_1, u_2, u'_2 désignent non plus les racines de $F = 0$, mais des valeurs approchées de ces racines, et si l'on conserve les formules (1), (2) et (3) qui définissent P, Q, H et R, la fonction R restera encore petite, si l'approximation des racines est suffisante, et les mêmes procédés resteront applicables.

Je crois qu'il suffira le plus souvent de prendre pour $P(u)$ les cinq premiers termes du développement de $F(u)$ suivant les puissances de $u - u_0$.

5. On pourra aussi quelquefois, au lieu de quatre racines u_1, u'_1, u_2, u'_2, en considérer deux seulement u_1 et u'_1 et poser

$$P(u) = (u - u_1)(u - u'_1).$$

Les intégrales elliptiques seront alors remplacées par des intégrales circulaires.

On pourra surtout introduire cette simplification, si la masse troublante est très petite et si les perturbations ne deviennent sensibles que parce qu'à un moment donné les deux corps se rapprochent beaucoup.

Soit, par exemple,

$$F(u) = (u - u_1)(u - u'_1)Q(u);$$

nous pourrons poser

$$(u - u_1)(u - u'_1) = (u - u_0)^2 + \alpha^2,$$

puis

$$u = u_0 + \frac{\alpha}{2}(e^{\xi} - e^{-\xi}),$$

d'où

$$du = \frac{\alpha\, d\xi}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi}),$$

$$(u - u_0)^2 + \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{4}(e^{\xi} + e^{-\xi})^2$$

et

$$\int G(u)[F(u)]^{-\frac{s}{2}} du = \int G(u)[Q(u)]^{-\frac{s}{2}} d\xi \left[\frac{\alpha}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi})\right]^{1-s}.$$

Or la fonction

$$G(u)[Q(u)]^{-\frac{s}{2}}$$

peut se développer suivant les puissances de $u - u_0$; soit

$$(\beta) \qquad \beta_0 + \beta_1(u - u_0) + \beta_2(u - u_0)^2 + \ldots$$

ce développement.

Si $s = 1$, il reste à calculer l'intégrale

$$\int d\xi \left[\beta_0 + \frac{\alpha\beta_1}{2}(e^{\xi} - e^{-\xi}) + \frac{\alpha^2\beta_2}{4}(e^{\xi} - e^{-\xi})^2 + \ldots\right]$$

et l'on trouve pour l'intégrale indéfinie une série dont le terme le plus important est

$$\xi\left(\beta_0 - \frac{\alpha^2\beta_2}{4}2 + \frac{\alpha^4\beta_4}{16}6 - \ldots\right)$$

et dont les autres termes sont de la forme

$$A_n(e^{n\xi} + e^{-n\xi}).$$

Il n'y a plus qu'à substituer dans cette série les limites d'intégration; mais il nous reste à nous rendre compte de la rapidité de la convergence de cette série.

J'observe d'abord que les coefficients β_n sont du même ordre de grandeur que

$$\frac{1}{(u_2 - u_0)^n}.$$

D'autre part,

$$\int (e^{\xi} - e^{-\xi})^n d\xi = C\xi + \Sigma\lambda_n e^{n\xi},$$

où $C = 0$ si n est impair et où $C = \pm \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2}$ si n est pair et où

$$\Sigma\lambda_n e^{n\xi} < (e^{\xi} + e^{-\xi})^n.$$

Pour n très grand et pair, C est du même ordre de grandeur que 2^{2n}, de sorte que le coefficient du terme en ξ, dans notre série, convergera avec la même rapidité qu'une progression géométrique dont la raison est

$$\frac{\alpha^2}{(u_2 - u_0)^2} = \frac{(u_1 - u_0)(u'_1 - u_0)}{(u_2 - u_0)^2}.$$

Quant à l'ensemble des termes exponentiels, il convergera avec la même rapidité qu'une progression géométrique dont la raison est

$$\frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{u_2 - u_0} = \frac{\sqrt{(\mathrm{U} - u_1)(\mathrm{U} - u'_1)}}{u_2 - u_0} = \left|\frac{\mathrm{U} - u_1}{u_2 - u_0}\right|,$$

U représentant l'une des valeurs de u qui correspondent à l'une des limites d'intégration, c'est-à-dire à l'une des limites de l'intervalle auquel la méthode doit s'appliquer.

Ceci nous fait voir quelle est la condition pour que cette méthode puisse s'appliquer avec avantage. Il faut, d'une part, que $u_1 - u_0$ soit petit par rapport à $u_2 - u_0$; d'autre part, que $\mathrm{U} - u_1$ et, par conséquent, $\mathrm{U} - u_0$ soient petits par rapport à $u_2 - u_0$.

Rappelons que u_0, U, u_1, u_2 représentent les valeurs de u qui correspondent respectivement à la distance minima des deux corps, à l'une des limites de l'intervalle d'intégration, à la racine de $\mathrm{F} = 0$ la plus voisine de u_0, et enfin à la racine de cette même équation la plus voisine de u_0 après u_1 et sa conjuguée. Il faut donc que deux racines conjuguées soient beaucoup plus voisines de u_0 que les autres; sans quoi, il vaudrait mieux avoir recours aux fonctions elliptiques.

Le cas de $s > 1$ se ramène facilement à celui de $s = 1$, car les intégrales de la forme

$$\int \frac{(u - u_0)^n \, du}{[(u - u_0)^2 + \alpha^2]^{\frac{s}{2}}}$$

se ramènent facilement par des procédés connus au cas de $s = 1$.