MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR L'ÉQUILIBRE D'UN FLUIDE EN ROTATION;

PAR M. H. POINCARÉ.

Dans ce qui va suivre, je considérerai l'équilibre d'une masse fluide homogène en rotation, obéissant à la loi de Newton. La masse étant homogène, je prendrai sa densité pour unité, de telle sorte que le potentiel V s'écrira

$$V = \int \frac{d\tau'}{r},$$

r étant la distance de l'élément de volume $d\tau'$ au point attiré.

J'appellerai W l'énergie potentielle

$$W = \frac{1}{2} \int V\, d\tau,$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ de la masse fluide; le travail virtuel de l'attraction sera égal à la variation δW.

Si ω est la vitesse de rotation et que l'axe de rotation soit l'axe des z, je poserai

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

de telle sorte qu'on aura

$$\Delta U = 2\omega^2 - 4\pi.$$

La condition d'équilibre, c'est que l'on ait à la surface

$$U = U_0,$$

U_0 étant une constante. Dans le cas où il n'y a pas de rotation, ω est nul et l'on doit avoir à la surface

$$V = V_0,$$

V_0 étant une constante.

Si l'on suppose $\omega = 0$, on sait que la sphère est une figure d'équilibre; mais on ne sait pas si c'est la seule figure d'équilibre possible; on ne sait même pas si c'est la seule figure *stable* possible, c'est-à-dire si W n'a pas d'autre maximum *relatif* que celui qui correspond à la sphère. En revanche M. Liapounoff a démontré que la sphère correspond au maximum *absolu* de W. Je voudrais d'abord rappeler rapidement la forme simple que j'ai donnée à la démonstration du théorème de Liapounoff.

Je désignerai par T le volume de la masse fluide.

1° Le potentiel d'un volume quelconque par rapport à un point quelconque est plus petit que le potentiel d'une sphère de même volume par rapport à son centre; on aura donc

$$V < 2\pi R^2,$$

en posant

$$T = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

2° On aura

$$W = \frac{1}{2}\int V\,d\tau < \pi R^2 T.$$

Donc l'énergie potentielle W d'une masse fluide de volume T a un maximum. Il reste à démontrer que ce maximum ne peut être atteint que pour la sphère.

3° Je dis maintenant que la capacité électrostatique C d'un conducteur de volume T a un minimum. Chargeons en effet ce conducteur d'une charge électrique égale à T, on aura

$$\frac{T^2}{2C} < W < \pi R^2 T,$$

d'où

$$C > \frac{T}{2\pi R^2}, \quad C > \frac{2}{3}R.$$

Il reste à montrer que ce minimum ne peut être atteint que pour la sphère.

4° Soit, en effet, M la charge du conducteur, μ la densité électrique sur l'élément de surface $d\sigma$, de telle façon que

$$M = \int \mu\,d\sigma.$$

Supposons que le conducteur se déforme de telle façon que le centre de gravité de l'élément $d\sigma$ subisse un petit déplacement dont la projection sur la normale à l'élément $d\sigma$ sera égale à ζ; alors la capacité et le volume subiront des accroissements dC et

dT et l'on aura

$$\frac{M^2 dC}{C^2} = \int 4\pi\mu^2\zeta d\sigma; \qquad dT = \int \zeta d\sigma.$$

Comme je suppose C minimum, l'équation $dT = 0$ doit entraîner $dC = 0$, et l'on doit avoir

$$\mu = \text{const.} = \frac{M}{S}.$$

S étant la surface du conducteur; d'où si dT n'est pas nul,

$$\frac{M^2 dC}{C^2} = 4\pi\mu^2 dT$$

ou

$$\frac{S^2 dC}{C^2} = 4\pi dT.$$

Mais si le conducteur se dilate, en restant semblable à lui-même, la capacité varie en raison directe de la racine cubique du volume, en sorte que

$$(1) \qquad \frac{dC}{C} = \frac{1}{3}\frac{dT}{T}.$$

On en déduit

$$C = \frac{S^2}{12\pi T}.$$

Or, parmi tous les corps de même volume, celui qui a la plus petite surface est la sphère; donc celui qui a la plus petite capacité est la sphère. C. F. Q. D.

On a donc

$$C > R.$$

5° Les formules précédentes supposent que la capacité est minimum. Si elle n'a pas atteint son minimum, μ ne sera plus une constante, mais si μ_0 et μ_1 représentent la plus grande et la plus petite valeur de μ, on aura

$$4\pi\mu_1^2 dT < \frac{M^2 dC}{C^2} < 4\pi\mu_0^2 dT.$$

Si le corps est une forme d'équilibre, de telle sorte qu'à la surface on ait

$$V = V_0,$$

on aura

$$T = CV_0.$$

Si je désigne par F_0 et F_1 la plus grande et la plus petite valeur de l'attraction à la surface du corps, on aura, en supposant $M = T$,

$$4\pi\mu_0 = F_0, \qquad 4\pi\mu_1 = F_1;$$

d'où

$$F_1^2\,dT < \frac{4\pi T^2\,dC}{C^2} < F_0^2\,dT,$$

ou, à cause de la relation (1),

$$F_1^2 < \frac{4}{3}\pi V_0 < F_0^2.$$

6° Nous avons vu que W a un maximum; je veux maintenant démontrer que ce maximum ne peut être atteint que pour la sphère (c'est le théorème de M. Liapounoff).

Supposons, en effet, que notre corps se déforme; nous aurons

$$dW = \int V\zeta\,d\sigma, \qquad dT = \int \zeta\,d\sigma.$$

Pour que W soit maximum, il faut que dW s'annule toutes les fois que $dT = 0$; et, pour cela, il faut que la valeur de V à la surface se réduise à une constante V_0; c'est ce que nous savions déjà.

Si maintenant dT n'est pas nul, on aura

$$dW = V_0\,dT.$$

D'autre part, si le corps reste semblable à lui-même, W sera proportionnel à la puissance $\frac{5}{3}$ de T, c'est-à-dire qu'on aura

$$\frac{dW}{W} = \frac{5}{3}\frac{dT}{T},$$

d'où

$$W = \frac{3}{5} V_0 T$$

ou

$$W = \frac{3}{5}\frac{T^2}{C}.$$

De tous les corps de volume T, la sphère ayant la plus petite capacité aura la plus grande énergie W. C. Q. F. D.

Cherchons maintenant à étendre ces résultats au cas où il y a un mouvement de rotation. Nous avons encore

$$dW = \int V\zeta\, d\sigma.$$

D'autre part, si J est le moment d'inertie, on aura

$$dJ = \int \zeta(x^2+y^2)\, d\sigma,$$

d'où

$$dW + \frac{\omega^2}{2}\, dJ = \int U\zeta\, d\sigma.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que $dW + \frac{\omega^2}{2} dJ$ soit nul toutes les fois que $dT = 0$; il faut donc que la valeur de U à la surface se réduise à une constante U_0; c'est ce que nous savions déjà.

Si alors dT n'est pas nul, on a

$$dW + \frac{\omega^2}{2}\, dJ = U_0\, dT.$$

D'autre part, si le corps reste semblable à lui-même, J est comme W proportionnel à la puissance $\frac{5}{3}$ de T, de sorte que

$$\frac{dW + \frac{\omega^2}{2}\, dJ}{W + \frac{\omega^2}{2}\, J} = \frac{5}{3}\,\frac{dT}{T},$$

d'où

$$W + \frac{\omega^2}{2}\, J = U_0 T. \tag{2}$$

De cette formule on peut tirer différentes conséquences.

1° Soient V le potentiel dû à l'attraction de notre masse fluide et V′ celui qui serait dû à une charge électrique égale à T et qui serait en équilibre à la surface du corps regardé comme un conducteur.

A la surface du corps, V′ aura la valeur constante $\frac{T}{C}$.

Soit une sphère de rayon très grand dont le centre sera fixe, mais dont nous ferons varier le rayon. On aura, en étendant les intégrales à tous les éléments $d\sigma$ de la surface de cette sphère,

$$\int \frac{dV}{dn}\, d\sigma = \int \frac{dV'}{dn}\, d\sigma = -4\pi T; \qquad \int \frac{d(V-V')}{dn}\, d\sigma = 0.$$

On en conclut que la valeur moyenne de $V - V'$ à la surface de la sphère est indépendante du rayon de cette sphère. Or, cette valeur doit s'annuler à l'infini; donc cette valeur moyenne est toujours nulle. Donc $V - V'$ ne peut être ni toujours positif, ni toujours négatif.

Or, si $V - V'$ était toujours positif (ou toujours négatif) à la surface du corps, il serait toujours positif (ou toujours négatif) à l'extérieur du corps. Donc la valeur constante de V' doit être comprise entre le maximum et le minimum de V.

Soient r_0 la plus grande distance du corps à l'axe de rotation et r_1 la plus petite distance. Pour des figures d'équilibre telles que les ellipsoïdes de Mac Laurin et de Jacobi par exemple, l'axe de rotation rencontre la surface du corps et r_1 est nul; mais il n'en serait plus de même pour une figure annulaire d'équilibre.

On a alors à la surface

$$V = U_0 - \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2),$$

et par conséquent

$$U_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{2} < V < U_0 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2}.$$

Donc, d'après le résultat obtenu plus haut,

$$U_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{2} < \frac{T}{C} < U_0 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2},$$

d'où nous déduirons les inégalités

$$\frac{3}{5}\frac{T^2}{C} + \frac{3}{10}\omega^2 r_1^2 < W + \frac{\omega^2}{2} J < \frac{3}{5}\frac{T^2}{C} + \frac{3}{10}\omega^2 r_0^2,$$

et dans tous les cas

$$\frac{3}{5}\frac{T^2}{C} < W + \frac{\omega^2}{2} J.$$

Ce sont des relations entre l'énergie potentielle du corps, son moment d'inertie, son volume, sa capacité électrostatique et r_0, c'est-à-dire ce qu'on pourrait appeler le rayon de l'équateur.

2° D'après ce que nous avons vu plus haut, ΔU est négatif si $\omega^2 < 2\pi$, nul si $\omega^2 = 2\pi$, positif si $\omega^2 > 2\pi$. Dans le premier cas, U peut avoir un maximum, mais pas de minimum; dans le second cas, U ne peut avoir ni maximum ni minimum; dans le troisième cas, U peut avoir un minimum, mais pas de maximum.

J'ai démontré ailleurs (*Bull. astr.*, t. II, p. 109) que dans les deux derniers cas l'équilibre ne saurait être stable.

Dans le premier cas, on a $U < U_0$ à l'intérieur du corps; dans le second cas on a $U = U_0$, dans le troisième on a $U > U_0$.

Or

$$\int U\,d\tau = \int V\,d\tau + \frac{\omega^2}{2}\int (x^2+y^2)\,d\tau = 2W + \frac{\omega^2}{2}J;$$

dans le premier cas, on a donc

$$2W + \frac{\omega^2}{2}J > U_0 T;$$

dans le second

$$2W + \frac{\omega^2}{2}J = U_0 T;$$

dans le troisième

$$2W + \frac{\omega^2}{2}J < U_0 T.$$

En rapprochant de la formule (2), on voit que :

Si

$$\omega^2 < 2\pi,$$

on a

$$W > \omega^2 J;$$

si

$$\omega^2 = 2\pi,$$

on a

$$W = \omega^2 J;$$

si

$$\omega^2 > 2\pi,$$

on a

$$W < \omega_2 J.$$

3° Je suppose que ω varie d'une manière continue ainsi que la figure d'équilibre (le volume T demeurant constant bien entendu).

La figure devant satisfaire à la condition d'équilibre, on aura

$$dW + \frac{\omega^2}{2}dJ = 0,$$

et par conséquent, en différentiant l'équation (2),

$$\omega J\,d\omega = \frac{3}{5}T\,dU_0.$$

Cela nous montre que U_0 croît avec ω.

Ce résultat est vrai pour toutes les figures d'équilibre, mais pour les figures d'équilibre qui rencontrent l'axe de rotation, il peut s'énoncer autrement : le potentiel au pôle croît quand la vitesse de rotation augmente.

4° Pour les figures d'équilibre qui rencontrent l'axe de rotation, U_0 étant le potentiel au pôle est, d'après ce que nous avons vu au début, plus petit que $2\pi R^2$.

Donc U_0 ne peut croître indéfiniment, et cela nous fait déjà prévoir que ω ne peut non plus croître indéfiniment.

Pour le démontrer, je pars de l'égalité suivante, conséquence immédiate de celle que je viens d'établir

$$\int \frac{d\omega}{\omega} = \frac{3T}{5}\int \frac{dU_0}{\omega^2 J}.$$

Soit Ω la plus petite valeur de $\omega^2 J$, il vient

$$\int \frac{d\omega}{\omega} < \frac{3T}{5\Omega}\int dU_0 < \frac{6\pi R^2 T}{5\Omega}.$$

Pour que ω puisse croître indéfiniment, il faudrait que Ω fût nul; c'est-à-dire que quand ω croît indéfiniment, $\omega^2 J$ tend vers zéro.

Or, dès que ω a dépassé la valeur $\sqrt{2\pi}$, on a $W < \omega^2 J$; donc W devrait aussi tendre vers zéro. Donc

$$U_0 = \frac{5}{3T}\left(W + \frac{\omega^2}{2} J\right)$$

devrait tendre vers zéro. Mais cela n'est pas possible puisque U_0 croît avec ω.

D'où la conclusion suivante :

Quand on fera varier d'une manière continue la vitesse ω ainsi que la figure d'équilibre, de deux choses l'une : ou bien la vitesse ω, après avoir crû, finira par décroître; ou bien la figure d'équilibre cessera à un certain moment de rencontrer l'axe de rotation.

C'est ainsi que, si l'on suit la série des ellipsoïdes de révolution, ω^2 croît depuis 0 jusqu'à $4\pi \times 0,112$, et décroît ensuite jusqu'à 0; de même si l'on suit la série des ellipsoïdes de Jacobi, ω^2 croît depuis 0 jusqu'à $4\pi \times 0,093$, et décroît ensuite jusqu'à 0.

Je dois ajouter que la démonstration qui précède n'exclut pas l'hypothèse suivante : ω pourrait croître au delà de toute limite sans que la figure cessât de rencontrer l'axe de rotation, mais à la condition de croître par une série d'oscillations en présentant une infinité de maxima ou de minima.

J'ajouterai que si $W + \frac{\omega^2}{2} J$ est maximum (ce qui est une condition suffisante, mais non nécessaire pour la stabilité de l'équilibre), J va en croissant avec ω.

Soient, en effet, ω et ω' deux valeurs très voisines de la vitesse de rotation; soient W et W', J et J' les valeurs correspondantes de l'énergie et du moment d'inertie. Comme $W + \frac{\omega^2}{2} J$ est maximum, on aura

$$W + \frac{\omega^2}{2} J > W' + \frac{\omega^2}{2} J'.$$

Comme $W' + \frac{\omega'^2}{2} J'$ est de son côté maximum, on aura

$$W + \frac{\omega'^2}{2} J < W' + \frac{\omega'^2}{2} J';$$

d'où, en retranchant ces deux inégalités,

$$\frac{(\omega'^2 - \omega^2)}{2} (J' - J) > 0,$$

ou

$$J' > J.$$

C. Q. F. D.

OBSERVATIONS DE COMÈTES,

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE PARIS (équatorial de la Tour de l'Ouest, de $0^m,305$ d'ouverture)

PAR M. G. FAYET.

1897 III (Perrine).

Dates.	T. m. de Paris.	ΔR.	ΔD.	N. de c.	R app.	log f. p.	D app.	log f. p.	★
1897.	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Oct. 18.	8.52. 7	−1.18,09	+ 7.48,8	8.8	3.26. 4,90	0,018 n	+69.18.33,1	$\bar{1}$,745	1
20.	12.17.33	+0.19,30	+ 7.27,0	8.8	3. 7.57,21	$\bar{1}$,462 n	+72.32.30,5	0,534 n	2
22.	12.12.48	−1.35,49	− 1. 4,0	8.8	2.43.44,42	$\bar{1}$,213 n	+75.24.47,6	0,596 n	3
25.	12.31. 3	−0.33,32	+ 6.44,3	8.8	1.43.48	$\bar{1}$,766	+79. 7	0,628 n	4