PRIX DÉCERNÉS.

ANNÉE 1898.

GÉOMÉTRIE.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(Commissaires : MM. Darboux, C. Jordan, Hermite; Picard et Poincaré, rapporteurs.)

La Commission décerne le prix à l'auteur du Mémoire n° 3, elle accorde une mention honorable au Mémoire n° 2.

La question mise au concours était :

Chercher à étendre le rôle que peuvent jouer en Analyse les séries divergentes.

Quatre Mémoires ont été soumis au jugement de l'Académie.

Le Mémoire n° 1, portant pour épigraphe ὁ βίος βραχὺς, ἡ δὲ τέχνη μακρή, contient un certain nombre de résultats intéressants se rapportant à la fonction entière dont les zéros sont les nombres premiers et à la distribution des nombres premiers; malheureusement on ne voit pas très bien quel lien rattache ces résultats à la question posée par l'Académie. L'auteur a, il est vrai, introduit au début une notation symbolique qui lui permet de combiner formellement les séries divergentes, d'après les mêmes règles que les séries convergentes ; mais il semble que cette considération, d'ailleurs sans intérêt par elle-même, ne lui soit d'aucune utilité réelle dans la suite de son travail. La Commission a donc dû écarter le Mémoire n° 1, malgré les vues ingénieuses qui y sont exposées, comme ne traitant pas la question proposée.

Le Mémoire n° 4, portant pour épigraphe *Simplex sigillum veri*, reste également un peu à côté de cette question ; il s'en éloigne moins cependant. Si deux séries sont convergentes, par exemple, pour $x < 1$, mais deviennent divergentes pour $x = 1$, quelle est la limite vers laquelle tend le rapport des sommes de ces deux séries quand x tend vers 1 ? Telle est la question que l'auteur se pose d'abord et qu'il résout dans un cas très étendu. On remarquera l'analogie de ce problème avec celui que s'est posé M. Darboux dans son Mémoire aujourd'hui classique sur les fonctions de très grands nombres ; on ne doit donc pas s'étonner si les résultats sont ceux de M. Darboux, présentés sous une autre forme et généralisés.

Le reste du Mémoire est consacré à la théorie des fonctions entières. Le genre d'une fonction entière dont les zéros sont

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

dépend de la rapidité avec laquelle la série $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge. Tel est le lien assez lâche qui rattache encore cette théorie des fonctions entières à la question proposée.

Ce problème, extrêmement difficile, a été l'objet de travaux déjà nombreux dans le cas général. L'auteur n'est pas arrivé à des résultats plus précis que ses devanciers ; mais il a habilement profité des méthodes qu'ils avaient créées pour obtenir des propositions intéressantes qui restent vraies toutes les fois que l'on fait certaines hypothèses sur la distribution des zéros.

Tout cela malheureusement ne se rapporte que trop indirectement à la question posée, de sorte que la Commission a cru devoir écarter le Mémoire n° 4 comme elle avait fait du Mémoire n° 1.

Les mêmes raisons n'existent pas pour le Mémoire n° 2, qui porte pour épigraphe Ὡς εἴπους ὑπὸ πόσσιν, etc. L'auteur de ce Mémoire a obtenu une série de résultats bien dignes d'intérêt et se rapportant directement au problème proposé. Il cherche d'abord à déterminer les points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor, connaissant les coefficients du développement. On sait depuis longtemps déterminer les points singuliers qui se trouvent sur le cercle de convergence : c'est ce qu'ont fait M. Darboux et M. Hadamard. L'auteur applique des méthodes analogues, mais il les combine avec la méthode de sommation de M. Borel, ce qui lui permet de déterminer également les points singuliers qui se trouvent sur le périmètre de la région de sommabilité où cette méthode est applicable.

L'auteur du Mémoire donne également une généralisation de cette méthode de sommation de M. Borel; généralisation que, par une coïncidence curieuse, nous retrouvons également dans le Mémoire n° 3. Il définit ainsi des régions de sommabilité plus étendues et peut déterminer les points singuliers qui se trouvent sur le périmètre de ces nouvelles régions.

Par une généralisation facile d'un théorème de M. Hadamard, il montre comment on peut déduire les points singuliers de la série

$$\Sigma c_n u_n(z)$$

quand on connaît ceux des séries

$$\Sigma u_n(z)\lambda^n, \quad \Sigma c_n t^n.$$

Dans la seconde partie de son travail, l'auteur s'efforce de calculer la valeur d'une fonction définie par une série de Taylor (ou plus généralement par une série de polynomes) en des points où cette série diverge et de résoudre ce problème dans des régions de plus en plus étendues. Il y parvient par une combinaison de toutes les méthodes connues : multiplication de la série par un polynome pour faire disparaître les pôles, méthode de M. Borel et ses généralisations, considération du développement de la fonction inverse, emploi de la représentation conforme.

Il y a une combinaison ingénieuse des procédés proposés, mais nous n'y trouvons pas l'invention d'une méthode véritablement nouvelle. Nous ajouterons que les résultats ne s'appliquent pas aux séries de Taylor dont le rayon de convergence est nul, mais seulement à celles dont le rayon de convergence est fini. Or, pour celles-ci, le problème est virtuellement résolu depuis longtemps par la méthode classique du prolongement analytique, et les solutions nouvelles qu'on en a données depuis pourront être plus rapides, mais non pas plus complètes.

Bien qu'inférieur au dernier Mémoire qui nous reste à examiner, le Mémoire n° 2 a semblé, à la Commission, digne d'une mention honorable.

L'auteur du Mémoire inscrit sous le n° 3 et portant pour devise une phrase de Gauss est un géomètre qui a beaucoup réfléchi sur les principes fondamentaux de l'Analyse, et il aime à mettre en lumière les idées qui l'ont guidé. Aussi, en dehors de résultats positifs dont quelques-uns sont, comme on va voir, d'un grand intérêt, ce Mémoire contient encore des vues judicieuses et originales qui en rendent, dans maintes pages, la lecture attrayante, et l'indication de problèmes variés dont l'étude semble devoir être féconde. Dans le premier Chapitre, on trouve d'abord diverses considérations sur l'ordre d'infinitude d'une fonction d'une variable réelle x, quand celle-ci augmente indéfiniment par valeurs positives; c'est là une question en relation étroite avec la représentation asymptotique des fonctions. L'application de ces remarques conduit à un théorème curieux sur l'ordre d'infinitude des solutions d'une équation différentielle algébrique, dont nous énoncerons seulement un cas particulier relatif aux équations du premier ordre : pour une telle équation, toute intégrale restant finie à partir d'une certaine valeur de x et grandissant indéfiniment avec cette variable reste inférieure à e^{e^x}. Sans insister sur ce premier Chapitre, qui ne rentre qu'indirectement dans le sujet proposé, passons aux parties du Mémoire où sont spécialement étudiées les séries divergentes. Dans le Chapitre II, l'auteur reprend, en la généralisant, la méthode de sommation indiquée par M. Borel dans ses études sur les séries divergentes sommables, et il applique cette méthode aux séries de Taylor ayant un cercle de convergence de rayon fini. En se servant de l'intégrale de Cauchy, on est ainsi conduit à une région de sommabilité et à une expression analytique où figure une fonction entière associée étroitement à la série proposée, qui permet de résoudre quelques problèmes intéressants relatifs au prolongement analytique. Tout ce Chapitre est une application heureuse des idées de M. Borel sur la sommation des séries divergentes; on y retrouve quelques-uns des résultats du Mémoire n° 2, mais les méthodes y sont présentées d'une manière plus large et qui en fait mieux saisir la portée. Nous arrivons enfin au troisième Chapitre, de beaucoup le plus important et le plus nouveau du Mémoire; il est consacré aux séries de Taylor *dont le rayon de convergence est nul*, et à l'étude de cas étendus dans lesquels une telle série peut être regardée comme conduisant à une fonction déterminée. Pour les séries de Taylor à rayon fini de convergence on avait, par la série même, un élément de fonction qu'un procédé ou un autre pouvait permettre d'étendre; le problème à traiter se présentait de lui-même. Dans le cas actuel, au contraire, il faut commencer par poser la question. L'auteur se propose de déterminer, au moyen de la série divergente $\Sigma a_n z^n$, une fonction dans le voisinage de l'origine et dans un certain angle ayant ce point pour sommet, fonction dont la dérivée d'ordre quelconque n tende vers $1.2\ldots n.a_n$, quand z tend vers zéro par un chemin intérieur à l'angle. Si pour un angle A les coefficients a_n remplissent certaines conditions, la fonction cherchée est complètement déterminée, et l'on dira, pour abréger, que la série est d'espèce A et qu'elle définit une fonction d'espèce A. Une application extrêmement remarquable de ces résultats généraux est faite aux équations différentielles algébriques. On sait qu'on peut, dans bien des cas, former des séries de Taylor à rayon de convergence nul satisfaisant formellement à une telle équation différentielle. Quel parti peut-on en tirer? On établit que, si la série est d'espèce A, elle définit une fonction d'espèce A satisfaisant à l'équation différentielle. La voie qui se trouve ainsi ouverte pour l'étude de certaines intégrales sera sans doute féconde, et il y aura grand intérêt à traiter des exemples un peu plus étendus que ceux du Mémoire. L'auteur termine son travail par l'étude et l'interprétation à son point de vue des beaux théorèmes dus à Stieltjes sur une classe particulière de séries divergentes liées à certaines fractions continues.

Nous croyons avoir suffisamment montré, par cette courte analyse, la haute valeur du Mémoire n° 3; la Commission est unanime à lui accorder le prix.

En résumé, la Commission décerne :

Le grand prix des Sciences mathématiques au Mémoire inscrit sous le n° 3, et portant pour devise : ... *Methodorum diversitas ad res obscuriores illustrandas plurimum conferri solet* (Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ*);

Une mention honorable au Mémoire inscrit sous le n° 2 et portant pour devise : Ὥς εἴποῦς ὑπὸ πόσσιν ... (Homère, *Odyssée*).

M. le Président ouvre en séance les plis cachetés annexés aux Mémoires nos 2 et 3.

L'auteur du Mémoire couronné est M. **Émile Borel**.

L'auteur du Mémoire ayant obtenu une mention honorable est M. **Maurice Servant**.

PRIX BORDIN.

(Commissaires : MM. Poincaré, É. Picard, Maurice Lévy, Appell; Darboux, rapporteur.)

Un seul Mémoire a été envoyé au Concours. Il contient des résultats très dignes d'intérêt; mais son auteur annonçait l'envoi d'un supplément qui vient seulement de parvenir aujourd'hui, 1er décembre, à l'Académie. Dans ces conditions la Commission propose de laisser le Concours ouvert en maintenant pour l'année prochaine la question qui avait été proposée pour cette année.

PRIX FRANCOEUR.

(Commissaires : MM. Hermite, J. Bertrand, Poincaré, Picard; Darboux, rapporteur.)

La Commission décerne le prix à M. **Vaschy**.

PRIX PONCELET.

(Commissaires : MM. Hermite, J. Bertrand, Poincaré, Sarrau; Darboux, rapporteur.)

La Commission décerne le prix à M. **Hadamard**.

MÉCANIQUE.

PRIX EXTRAORDINAIRE DE SIX MILLE FRANCS.

(Commissaires : MM. de Bussy, Guyou, de Jonquières, Sarrau, Bouquet de la Grye.)

Rapport sur les travaux de M. Baule, par M. **E. Guyou**.

M. **Baule**, dont l'Académie a déjà récompensé en 1896 un important Mémoire sur la théorie de l'horizon gyroscopique de l'amiral Fleuriais, est l'auteur d'une série d'études théoriques et expérimentales sur les lochs remorqués, dont les conclusions sont du plus grand intérêt pour la pra-