MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

AVIS COMMUNIQUÉ PAR LA SOCIÉTÉ ROYALE DE GÖTTINGEN.

La *Société royale des Sciences de Göttingen* a l'intention d'achever promptement la publication commencée des Œuvres de Gauss. Dans ce but elle prie toutes les personnes ou sociétés qui ont en leur possession des manuscrits se rapportant à Gauss ou à son œuvre, de vouloir bien l'en avertir et lui faciliter l'étude de ces manuscrits.

SUR LA FAÇON DE GROUPER LES TERMES DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES QU'ON RENCONTRE EN MÉCANIQUE CÉLESTE;

PAR M. H. POINCARÉ.

1. J'ai exposé, dans le *Bulletin astronomique* (juillet 1897) une méthode qui permet de développer les coordonnées des astres en séries ne contenant que des sinus et des cosinus.

Je voudrais aujourd'hui revenir sur ce sujet pour montrer comment il convient de grouper les termes afin d'obtenir une convergence aussi rapide que possible et les diverses particularités que l'on peut mettre en évidence en décomposant et groupant les termes de différentes manières.

Ce que j'ai à dire s'applique au cas général avec quelques changements de détail. Néanmoins, pour simplifier et abréger cet exposé, je me bornerai au cas particulier connu sous le nom de *problème restreint*.

Je supposerai un corps central S autour duquel circulent une masse troublante J très petite et une masse troublée P infiniment petite. La masse P étant infiniment petite, le mouvement de J doit obéir aux lois de Képler; je supposerai l'orbite de J circulaire; l'inclinaison nulle de façon que P se meuve dans le plan de l'orbite de J et enfin l'excentricité de P très petite, de façon que P se meuve dans le même sens que J dans une orbite sensiblement circulaire.

J'appelle a et e le demi grand axe et l'excentricité de P; μ la masse de J, l l'anomalie moyenne de P et g la longitude de son périhélie, l' la longitude de J, et je pose

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \sqrt{a} - \sqrt{a(1-e^2)}, & x_2 = \sqrt{a} + \sqrt{a(1-e^2)}, \\ 2y_1 = l - g + l', & 2y_2 = l + g - l'. \end{cases}$$

Je vois alors que les équations du mouvement prennent la forme canonique

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{dF}{dy_1}, & \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{dF}{dy_2}, \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_1}, & \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{dF}{dx_2}. \end{cases}$$

F est une fonction développable suivant les puissances de μ et périodique par rapport aux y.

Pour $\mu = 0$, cette fonction F se réduit à

$$F_0 = \frac{2}{(x_1+x_2)^2} + \frac{(x_2-x_1)}{2}$$

(à la condition de choisir convenablement les unités de longueur, de masse et de temps) et ne dépend que des x.

Nous nous trouvons donc dans les conditions du problème B (*Bull. astr.*, t. XIV, p. 242). Les résultats obtenus à propos de ce problème sont donc applicables ici; ils peuvent s'énoncer sous la forme suivante.

Soient z_1, z_2, ϖ_1, ϖ_2 quatre constantes d'intégration; soient n_1 et n_2 deux nouvelles constantes dépendant de z_1, de z_2 et de μ,

$$w_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad w_2 = n_2 t + \varpi_2.$$

Les variables x et y peuvent se développer en séries procédant suivant les puissances de μ,

$$(3)\qquad \begin{cases} x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots, \\ y_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots. \end{cases}$$

Les x_i^k et les y_i^k (sauf y_1^0 et y_2^0 qui sont égaux à w_1 et w_2) sont développables en séries trigonométriques procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de w_1 et w_2; le coefficient de chaque terme dépendant de z_1 et de z_2.

Enfin n_1 et n_2 peuvent se développer suivant les puissances de μ, chaque terme étant une fonction de z_1 et de z_2, de sorte que

$$n_i = n_i^0 + \mu n_i^1 + \ldots. \tag{4}$$

Nous supposerons d'ailleurs

$$x_1^0 = z_1, \qquad x_2^0 = z_2,$$

d'où

$$n_1^0 = \frac{4}{(z_1+z_2)^3} + \frac{1}{2}, \qquad n_2^0 = \frac{4}{(z_1+z_2)^3} - \frac{1}{2}. \tag{5}$$

La constante $z_1 = x_1^0$ est très petite et de l'ordre du carré de l'excentricité, et il n'est pas inutile de remarquer que nos expressions x_i^k et y_i^k (sauf y_1^0 et y_2^0) peuvent se développer suivant les puissances de

$$\sqrt{z_1}\cos w_1, \quad \sqrt{z_1}\sin w_1,$$

chaque terme dépendant encore de w_2 et de z_2 et étant périodique par rapport à w_2.

2. Observons d'abord que de ces séries on en peut déduire une infinité d'autres de même forme.

Remplaçons, en effet, les constantes z et ϖ par les développements suivants procédant suivant les puissances de μ :

$$\left\{\begin{array}{l} z_i = z_i^0 + \mu z_i^1 + \mu^2 z_i^2 + \ldots, \\ \varpi_i = \varpi_i^0 + \mu\varpi_i^1 + \mu^2\varpi_i^2 + \ldots. \end{array}\right. \tag{6}$$

Les z_i^k et les ϖ_i^k sont des fonctions de quatre nouvelles constantes

$$z'_1, \quad z'_2, \quad \varpi'_1, \quad \varpi'_2;$$

on a

$$z_i^0 = z'_i, \quad \varpi_i^0 = \varpi'_i$$

et les autres z_i^k, ϖ_i^k sont des fonctions *quelconques* de z'_1 et z'_2, de ϖ'_1 et ϖ'_2.

Il est clair que si, dans les séries (3), je remplace les constantes z_i et ϖ_i par leurs développements (6), puis que j'ordonne de nouveau par rapport à μ, j'obtiendrai pour les x_i et les y_i de nouveaux développements qui seront de même forme que les séries (3), c'est-à-dire qui procéderont d'une part suivant les puissances de μ, d'autre part suivant les sinus et cosinus des multiples de

$$w'_1 = n_1 t + \varpi'_1, \qquad w'_2 = n_2 t + \varpi'_2,$$

et dont les coefficients dépendront des nouvelles constantes z' et ϖ'.

Le cas le plus remarquable sera celui où ces coefficients dépendront seulement des z' et seront indépendants des ϖ', ainsi qu'il arrivait pour les séries (3) elles-mêmes.

3. Comment peut se faire le choix si largement arbitraire de ces développements (6) qui définissent les constantes z'_i et ϖ'_i?

On peut d'abord s'arranger pour que le rapport des deux moyens mouvements n_1 et n_2 soit indépendant de μ et que l'on ait

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{8+(z'_1+z'_2)^3}{8-(z'_1+z'_2)^3}. \tag{7}$$

Les équations (5) nous donnent

$$n_1^0 - n_2^0 = 1.$$

Si nous n'avions pas ainsi une relation entre n_1^0 et n_2^0, nous pourrions choisir les développements (6) de telle façon, que les moyens mouvements n_1 et n_2 soient tous deux indépendants de μ; malheureusement l'existence de cette relation s'y oppose.

Soit

$$n_1^1 - n_2^1 = \varphi(z_1, z_2).$$

Formons alors les équations

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{4}{(z'_1+z'_2)^3} + \frac{1}{2}\right][1+\mu\varphi(z'_1, z'_2)] = n_1^0 + \mu n_1^1 + \mu^2 n_1^2 + \ldots, \\ &\left[\frac{4}{(z'_1+z'_2)^3} - \frac{1}{2}\right][1+\mu\varphi(z'_1, z'_2)] = n_2^0 + \mu n_2^1 + \mu^2 n_2^2 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Comme les n_i^k sont des fonctions connues de z_1 et z_2, nous pouvons, de ces équations (8), tirer z'_1 et z'_2 en fonctions de z_1, de z_2 et de μ, et il est aisé de voir que l'on obtient ainsi des développements de la forme (6) (les z_i^k et les ϖ_i^k dépendant seulement des z' et non pas des ϖ').

Les équations (8) entraînent d'ailleurs la relation (7).

4. On peut aussi choisir pour les constantes z'_i et ϖ'_i les valeurs initiales des x_i et des y_i pour $t=0$.

Prenons, en effet, les équations (3) et remplaçons-y t par zéro,

x_i et y_i par z'_i et ϖ'_i; nous trouverons ainsi

$$(9)\qquad \begin{cases} z'_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots, \\ \varpi'_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots. \end{cases}$$

Dans les expressions x_i^k et y_i^k, les arguments w_1 et w_2 doivent être remplacés par ϖ_1 et ϖ_2.

Les seconds membres des équations (9) sont des fonctions connues des z, des ϖ et de μ; pour $\mu = 0$, ces seconds membres se réduisent à

$$x_i^0 = z_i, \qquad y_i^0 = \varpi_i.$$

On tirera donc facilement de ces équations (9) les z et les ϖ en fonctions des nouvelles constantes z' et ϖ' et de μ, sous forme de développements procédant suivant les puissances de μ et qui ne seront autre chose que les développements (6) cherchés.

L'inconvénient de ce choix, c'est que les constantes z et les différences $\varpi - \varpi'$ dépendent non seulement de z'_1 et z'_2, mais de ϖ'_1 et ϖ'_2. Il n'en était pas ainsi quand nous procédions comme au n° 3.

Il en résulte que les séries (3) se trouvent remplacées par des séries (3 *bis*) de même forme, mais dont les coefficients dépendent, non seulement de z'_1 et z'_2, mais de ϖ'_1 et ϖ'_2. Au contraire, en procédant comme au n° 3, on trouve des séries de même forme encore et dont les coefficients sont indépendants des deux constantes ϖ'.

5. Je me propose d'abord de montrer comment on pourra déduire des séries (3) les développements auxquels aurait conduit l'application des procédés de l'ancienne Mécanique céleste.

Adoptons les constantes z' et ϖ' du n° 4 et envisageons les séries (3 *bis*) obtenues à la fin de ce numéro.

Les équations (4) nous donnent n_1 et n_2 en fonctions de μ, de z_1 et de z_2. En les combinant avec les équations (6), nous aurons n_1 et n_2 en fonctions de μ, des z' et des ϖ'; soit donc

$$(4\ bis)\qquad n_i = n_i'^0 + \mu n_i'^1 + \mu^2 n_i'^2 + \ldots.$$

Les $n_i'^k$ seront donnés en fonctions des z' et des ϖ' et l'on aura

$$(4\ bis)\qquad n_i'^0 = \frac{4}{(z'_1 + z'_2)^3} \pm \frac{1}{2}.$$

Considérons alors les séries

(3 *bis*) $$x_i = \Sigma \mu^k x_i'^k; \qquad y_i = \Sigma \mu^k y_i'^k.$$

Soit

$$A \sin(m_1 w_1' + m_2 w_2')$$

un terme de $x_i'^k$ ou $y_i'^k$. Le coefficient A dépend des z' et des ϖ'; m_1 et m_2 sont deux entiers; enfin le signe sin pourrait être remplacé par le signe cos.

Ce terme dépend *indirectement* de μ, puisque l'on a

$$m_1 w_1' + m_2 w_2' = (m_1 n_1 + m_2 n_2) t + (m_1 \varpi_1' + m_2 \varpi_2')$$

et que, d'après les équations (4 *bis*), n_1 et n_2 dépendent de μ.

Développons donc ce terme suivant les puissances de μ, il viendra

(10) $$A \sin(m_1 w_1' + m_2 w_2') = A \sin \omega + \mu A t (m_1 n_1'^1 + m_2 n_1'^2) \cos \omega + \ldots$$

où

$$\omega = (m_1 n_1'^0 + m_2 n_2'^0) t + (m_1 \varpi_1' + m_2 \varpi_2').$$

Remplaçons maintenant chaque terme des séries (3 *bis*) par son développement (10) et ordonnons de nouveau par rapport à μ; nous obtiendrons ainsi des séries

(3 *ter*) $$\begin{cases} x_i = x_i''^0 + \mu x_i''^1 + \mu_2 x_i''^2 + \ldots \\ y_i = y_i''^0 + \mu y_i''^1 + \mu_2 y_i''^2 + \ldots. \end{cases}$$

Les séries (3 *ter*) comprennent comme les séries (3) des termes purement trigonométriques, mais elles comprennent en outre des termes où le temps sort des signes trigonométriques, tels que le second terme et les termes suivants du développement (10).

Chaque terme est d'ailleurs tout à fait indépendant de μ.

Les séries (3 *ter*) *sont celles auxquelles auraient conduit les anciens procédés.*

6. Nous observerons d'abord que ce rapprochement nous fournit immédiatement un théorème applicable aux séries obtenues par les anciens procédés.

Ces séries contiennent des termes non séculaires, ne contenant qu'une ligne trigonométrique de

$$m_1 w_1'' + m_2 w_2''$$

où les w_i'' sont des fonctions linéaires du temps

$$w_i'' = n_i'^0 t + \varpi_i'.$$

Elles contiennent en outre des termes où une pareille ligne trigonométrique est multipliée par t, ou par t^2 ou par une puissance supérieure de t. Séparons ces diverses sortes de termes et écrivons par exemple le développement de x_1,

$$x_1 = \Sigma \mathrm{A} \sin \omega + t \Sigma \mathrm{B} \cos \omega + t^2 \Sigma \mathrm{C} \sin \omega + \ldots,$$

où

$$\omega = m_1 w_1'' + m_2 w_2'' + h,$$

h étant une constante.

Le théorème en question, c'est que les coefficients B, C, etc. peuvent se déduire des coefficients A à l'aide des formules suivantes

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}}{1} (m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2), \qquad \mathrm{C} = \frac{-\mathrm{A}}{1.2} (m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

où α_1 et α_2 sont les constantes $n_1 - n_1'^0$ et $n_2 - n_2'^0$.

Ainsi la connaissance de ces deux constantes α_1 et α_2 et des termes non séculaires suffit pour donner immédiatement celle de tous les termes séculaires. On voit de plus que les termes « purement séculaires » contenant une puissance de t et pas de ligne trigonométrique doivent toujours se détruire quelque loin qu'on pousse l'approximation.

7. Si nous cherchons à comparer les séries (3 *ter*) données par les anciens procédés avec les séries (3) données par les procédés nouveaux, nous remarquerons d'abord que les séries (3 *ter*), ordonnées suivant les puissances de μ, convergent pourvu que le temps soit suffisamment petit; la convergence cesse si le temps dépasse une certaine valeur.

En ce qui concerne les séries (3), nous sommes certains que les premiers termes convergent assez vite pour les besoins de la pratique; mais nous n'avons pas le moyen de démontrer que la série converge, même pour les petites valeurs du temps, au sens que les analystes attachent à ce mot. Nous pouvons affirmer au contraire que la convergence, si elle a lieu, ne saurait être uniforme pour toutes les valeurs du temps d'une part, et d'autre part pour toutes les valeurs des constantes comprises entre certaines limites.

Dans ces conditions, on est tenté de se demander si les méthodes nouvelles où l'on évite les développements procédant suivant les puissances du temps présentent des avantages bien réels.

On se rendra mieux compte des cas où les avantages sont réels et de ceux où ils sont illusoires si l'on prend garde aux réflexions suivantes.

On peut se proposer deux buts différents, ou bien représenter les positions des astres pendant un temps très long avec une approximation médiocre, ou bien les représenter pendant un temps assez court avec une grande approximation.

Supposons que l'une des séries (3) contienne deux termes

$$A \sin \alpha t, \quad B \sin \beta t$$

et que

$$A > B, \quad A\alpha < B\beta.$$

Il pourra très bien se faire que, si l'on se propose le premier but, on doive tenir compte du premier de ces termes et négliger le second qui est plus petit si t est assez grand; et qu'au contraire, si l'on se propose le second but, on doive tenir compte du second de ces termes et négliger le premier qui est plus petit si l'on ne donne à t que de petites valeurs.

On voit donc que le choix des termes que l'on doit conserver ou négliger ne peut se faire sans qu'on se soit bien rendu compte du but que l'on cherche à atteindre.

Supposons donc qu'on veuille représenter les mouvements pendant un temps T et avec une approximation H; nous devons négliger le terme $A \sin \alpha t$, si A est plus petit que H, ou encore si $A\alpha T$ est plus petit que H.

Il pourra se faire que αT soit très petit, pas assez cependant pour que le terme doive être négligé. Dans ce cas, ce terme $A \sin \alpha t$ différera très peu de $A\alpha t$. On ne voit pas bien alors quel avantage il peut y avoir à lui conserver la forme trigonométrique et s'il ne vaut pas mieux le développer suivant les puissances de t, en bornant le développement à un ou deux termes. Un très grand nombre de termes, se réduisant à une constante multipliée par t, t^2 ou t^3, peuvent alors être réunis en un seul.

Supposons encore que l'on ait un certain nombre de termes

$$A \sin\alpha t + A_1 \sin\alpha_1 t + A_2 \sin\alpha_2 t + \ldots + A_n \sin\alpha_n t$$

dont les périodes soient très peu différentes. Si les expressions $(\alpha_k - \alpha)T$ sont assez petites pour qu'on puisse en négliger le carré, on pourra remplacer ces $n+1$ termes par deux termes seulement

$$A \sin\alpha t + t \cos\alpha t [A_1(\alpha_1 - \alpha) + A_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + A_n(\alpha_n - \alpha)],$$

ce qui sera une simplification évidente. L'approximation plus grande que semble donner la formule complète serait d'ailleurs le plus souvent illusoire parce que les périodes ne seraient pas exactement connues.

On voit que dans certains cas on peut avoir intérêt à revenir aux développements qui procèdent suivant les puissances du temps, et à adopter, pour ainsi dire, une méthode mixte entre les anciens procédés et les nouveaux. Certains termes conservent la forme trigonométrique, d'autres se développent de manière à faire sortir le temps des signes sinus et cosinus. Le choix des termes auxquels la forme trigonométrique doit être conservée dépend du but que l'on se propose.

Au point de vue de la convergence, ces développements mixtes seraient équivalents aux séries (3 *ter*) des anciens procédés, le temps pendant lequel elles resteraient convergentes étant en général plus grand.

8. Laissons maintenant de côté les anciens procédés et revenons aux développements (3). Nous devrons observer que ces développements contiennent certains termes qui peuvent être très grands, mais que le plus souvent on peut obtenir une sorte de compensation en groupant les termes d'une manière convenable.

Il arrivera fréquemment qu'un groupe contiendra des termes très grands et que la somme des termes d'un même groupe sera néanmoins très petite.

Rappelons, en effet, que les divers termes des séries (3) ont été obtenus par une série d'opérations, comprenant des intégrations, des additions, des multiplications, des différentiations.

Supposons donc que l'on ait à intégrer un terme de la forme

$$A \cos \alpha t,$$

on trouvera

$$\frac{A \sin \alpha t}{\alpha}.$$

Si α est très petit, ce terme sera susceptible de devenir très grand; il ne le deviendra pas cependant pour les valeurs finies de t, car il sera toujours plus petit que At.

Si nous avions à intégrer un terme

$$A \sin \alpha t$$

nous trouverions $-\frac{A \cos \alpha t}{\alpha}$, ou, en ajoutant une constante,

$$\frac{A}{\alpha} - \frac{A \cos \alpha t}{\alpha}.$$

Chacun de ces deux termes est très grand, mais l'ensemble des deux termes est fini et plus petit que $\frac{A \alpha t^2}{2}$.

On voit quel intérêt il y a à grouper les termes d'une manière convenable.

Partons maintenant du terme $A \cos \alpha t$ et supposons qu'une première intégration ait donné

$$\frac{A \sin \alpha t}{\alpha}.$$

Supposons qu'on ait ensuite à multiplier ce terme par $\sin \beta t$, ce qui donne

$$\frac{A \sin \alpha t \sin \beta t}{\alpha} = \frac{A}{2\alpha} \cos(\beta - \alpha) t - \frac{A}{2\alpha} \cos(\beta + \alpha) t;$$

puis à intégrer de nouveau ce qui donne

$$\frac{A \sin(\beta - \alpha) t}{2\alpha(\beta - \alpha)} - \frac{A \sin(\beta + \alpha) t}{2\alpha(\beta + \alpha)}.$$

Si β est fini et α très petit, chacun de ces deux termes est très grand; ils ont tous deux à peu près même période et si on les réduit ils se compensent presque exactement, car leur ensemble est de l'ordre de $\frac{At}{\beta}$.

C'est ce qui explique une circonstance qui se présente bien souvent dans le calcul des perturbations du second ordre. On trouve des termes qui, individuellement, ont une valeur considérable, mais qui se détruisent presque complètement deux à deux.

Ces exemples suffisent pour montrer l'influence du groupement des termes sur la rapidité de la convergence.

9. Considérons maintenant les différents termes des développements (3) et voyons quelle est leur forme.

Soit

$$\mu^p A \frac{\sin}{\cos}(m_1 w_1 + m_2 w_2)$$

l'un de ces termes, A étant une fonction de z_1 et z_2.

Nous pouvons toujours supposer que les développements (4) se réduisent à leurs deux premiers termes de telle façon que

$$n_1 = n_1^0 + \mu n_1^1, \qquad n_2 = n_2^0 + \mu n_2^1$$

et que

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1^0}{n_2^0} = \frac{8 + (z_1 + z_2)^3}{8 - (z_1 + z_2)^3},$$

soit indépendant de μ et ne dépende que de $z_1 + z_2$.

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, nous n'aurions qu'à passer des constantes z aux constantes z' définies au n° 3.

Cela posé, voyons quelle sera la forme de la fonction A. On sait que les intégrations successives introduisent dans cette fonction des diviseurs de la forme

$$q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0,$$

q_1 et q_2 étant des entiers; c'est ce que nous appellerons les *petits diviseurs*.

Nous écrirons donc

$$A = \frac{B}{\Pi},$$

Π étant le produit des petits diviseurs et B une fonction de z_1 et z_2. La fonction B reste finie pour toutes les valeurs envisagées des constantes z_1 et z_2. Au contraire, comme certains petits diviseurs peuvent s'annuler quand $\frac{n_1^0}{n_2^0}$ est commensurable, la fonction A pourrait devenir infinie.

Je puis considérer B comme fonction de z_1 et $z_1 + z_2$, ou, ce qui revient au même, de z_1 et de n_1^0. Quant à Π, c'est un polynome entier en n_1^0, car le petit diviseur

$$q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0 = (q_1 + q_2) n_1^0 - q_2.$$

Si donc je regarde un instant z_1 comme une constante, A sera égal à une fonction de n_1^0, holomorphe dans le domaine considéré, divisée par un polynome en n_1^0.

Je puis poser

$$B = C\Pi + D,$$

où C est une autre fonction holomorphe en n_1^0 et D un polynome d'ordre moindre que Π. Il vient donc

$$A = C + \frac{D}{\Pi}$$

et si l'on décompose la fraction rationnelle en éléments simples, on aura décomposé le terme envisagé en plusieurs autres

$$(11) \quad \mu^p C \frac{\sin}{\cos}(m_1 w_1 + m_2 w_2) + \Sigma \mu^p \frac{E}{(q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0)^h} \frac{\sin}{\cos}(m_1 w_1 + m_2 w_2),$$

où C est une fonction holomorphe de z_1 et n_1^0 et où les autres termes contiennent au numérateur une fonction E, holomorphe en z_1 seulement et au dénominateur une puissance entière h d'un seul petit diviseur.

Si l'on se rappelle la manière dont les différents termes des développements (3) ont été obtenus, on verra que le polynome Π sera le produit d'au plus $2p - 1$ petits diviseurs, en ce qui concerne le développement de x_1 et x_2, et d'au plus $2p$ petits diviseurs, en ce qui concerne le développement de y_1 et y_2. Ce polynome est donc au plus de degré $2p - 1$ (ou $2p$), p étant l'exposant de μ dans le terme considéré.

Dans chaque terme de (11) l'exposant h est au plus égal à $2p - 1$ (ou $2p$); j'ajoute que s'il atteint sa limite $2p - 1$ (ou $2p$), on doit avoir

$$\frac{m_1}{q_1} = \frac{m_2}{q_2}.$$

10. Supposons maintenant que, partant des séries (3), nous décomposions chaque terme en plusieurs autres par la formule (11). Nous pourrons répartir les termes de la série ainsi obtenue de la manière suivante.

Un premier groupe comprendra tous les termes qui ne contiennent au dénominateur aucun petit diviseur [tels que le premier terme de l'expression (11)].

Chacun des autres groupes sera formé des divers termes qui contiennent au dénominateur une puissance d'un même petit diviseur.

Considérons, par exemple, le groupe des termes qui contiennent au dénominateur une puissance de

$$\delta = q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0,$$

et qu'on peut appeler le groupe (q_1, q_2).

Chacun des termes du groupe (g_1, g_2) contiendra en facteur $\frac{\mu}{\delta^h}$, où la différence $2p - 1 - h$, en ce qui concerne x_1 et x_2 (ou $2p - h$ en ce qui concerne y_1 et y_2), est positive ou nulle.

Rangeons dans un même sous-groupe les termes où cette différence a la même valeur; nous appellerons *sous-groupe principal* celui où cette différence est nulle.

Voici ce qui justifie ce groupement. Si δ est très petit et par exemple de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, certains termes d'ordre élevé par rapport à μ pourront devenir sensibles par suite de la présence d'une puissance de δ au dénominateur.

L'importance du terme se trouve alors mesurée par la valeur de la différence $2p - 1 - h$. Les termes pour lesquels cette différence est nulle sont évidemment les plus importants; ce sont même, le plus souvent, les seuls dont on ait à tenir compte.

Les deux nombres q_1 et q_2 peuvent toujours être supposés premiers entre eux, de sorte qu'on peut toujours trouver deux entiers r_1 et r_2 tels que

$$q_1 r_2 - q_2 r_1 = 1$$

et poser

$$m_1 = \alpha q_1 + \beta r_1,$$
$$m_2 = \alpha q_2 + \beta r_2,$$

α et β étant deux nouveaux entiers. Nous pourrons classer dans une même série partielle tous les termes d'un même sous-groupe qui correspondent à une même valeur de β.

Le diviseur δ étant en effet très petit, $q_1 n_1 + q_2 n_2$ est aussi très petit, de sorte que tous les termes d'une des séries partielles ainsi formées auront à peu près même période, je veux dire une période voisine de

$$\frac{2\pi}{\beta(r_1 n_1 + r_2 n_2)}.$$

Le sous-groupe principal ne contiendra qu'une seule série partielle, car pour ce sous-groupe on a

$$\frac{m_1}{q_1} = \frac{m_2}{q_2},$$

d'où $\beta = 0$.

A part les termes du premier groupe qui, ne contenant pas de petits diviseurs, sont généralement très petits, tous nos termes vont se trouver ainsi répartis en séries partielles.

Or, il arrive cette circonstance singulière que *chacune de ces séries partielles peut être facilement sommée,* je veux dire que sa sommation se ramène à un nombre fini de quadratures.

Généralement on n'aura à tenir compte que d'un petit nombre de termes isolés et en outre d'un petit nombre de séries partielles. On peut dire que dans les cas les plus difficiles traités jusqu'ici on n'a jamais eu à considérer qu'une seule série partielle provenant d'un seul sous-groupe principal.

C'est là, sous une forme nouvelle, la méthode de M. Bohlin qui se trouve ainsi rattachée à la méthode qui nous a donné les séries (3) et par elle aux anciens procédés.

Si l'on se borne à sommer la série partielle qui correspond au sous-groupe principal, et que l'on a seule à envisager en général, on retombe sur la méthode de Delaunay.

Si les moyens mouvements sont presque commensurables, il peut arriver que les séries partielles divergent. L'expression analytique à laquelle conduit leur sommation n'en conserve pas moins un sens. C'est ainsi que l'expression $\frac{1}{1-x}$ conserve un sens alors même que, x étant plus grand que 1, la série

$$1 + x + x^2 + \ldots$$

a cessé d'être convergente.

Lors même qu'une série partielle diverge, on peut encore légitimement la remplacer par cette expression analytique. C'est ce qui permet aux méthodes de Delaunay et de Bohlin d'être applicable à des cas où l'emploi direct des séries (3) deviendrait illusoire et même au cas de la libration où la forme des orbites est si différente de la forme ordinaire.

C'est ainsi que, malgré ces différences, ce cas de libration peut encore se rattacher à la méthode qui nous a fourni les séries (3).

11. Voyons maintenant comment les solutions périodiques et asymptotiques peuvent se déduire des séries (3). Nous avons vu que nos séries sont développables suivant les puissances de

$$\sqrt{z_1}\cos w_1, \quad \sqrt{z_1}\sin w_1,$$

les coefficients du développement dépendant d'ailleurs de z_2 et w_2.

Si nous donnons alors à la constante z_1 la valeur zéro, nos séries ne contiendront plus que l'argument w_2; elles seront périodiques. On retombe ainsi sur les solutions périodiques de la première sorte.

12. Cherchons maintenant à obtenir les solutions périodiques de la deuxième sorte. Pour cela reprenons nos séries (3) en supposant comme au n° 9

$$n_i = n_i^0 + \mu n_i^1, \qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1^0}{n_2^0}.$$

Si nous donnons au rapport $\frac{n_1^0}{n_2^0}$ une valeur commensurable, un des petits diviseurs

$$q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0$$

s'annulera, de sorte que certains termes du développement pourraient devenir infinis.

Supposons $\varpi_2 = 0$ et remplaçons la constante ϖ_1 par un développement procédant suivant les puissances de μ

$$\varpi_1 = \varpi_1^0 + \mu\varpi_1^1 + \mu^2\varpi_1^2 + \ldots \tag{12}$$

et dont les coefficients sont des nouvelles constantes que je me réserve de déterminer plus loin.

Considérons un terme quelconque des séries (3) et remplaçons-y la constante ϖ_1 par son développement (12). Ce terme deviendra développable suivant les puissances de μ. Développons de même tous les termes des séries (3) et ordonnons de nouveau suivant les puissances de μ. Nous obtiendrons ainsi de nouvelles séries que j'appellerai (3 a).

Soit

$$\frac{\mu^p}{(q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0)^h} A \frac{\sin}{\cos}(m_1 w_1 + m_2 w_2)$$

un terme de ces nouvelles séries, le coefficient A ne contenant plus le petit diviseur $q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0$.

Pour plus de brièveté dans l'exposition, introduisons quelques dénominations nouvelles et d'abord définissons ce que nous appellerons l'*ordre* de ce terme. Pour les termes du développement de x_1 et x_2, ce sera le nombre

$$2p - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2},$$

$$2p - 1 - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} \gtrless \frac{q_1}{q_2}.$$

Pour les termes du développement de y_1 et y_2, ce sera le nombre

$$2p + 1 - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

$$2p - h, \quad \text{si} \quad \frac{m_1}{m_2} \gtrless \frac{q_1}{q_2}.$$

Cette classification laisse de côté les termes où $h = 0$, qui ne contiennent pas de petits diviseurs et dont nous n'avons pas à nous occuper.

J'appellerai *termes principaux* de chaque ordre les termes du développement de x_1 et de x_2 qui sont de cet ordre et qui de plus sont tels que

$$h = 1, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Il n'y aura, d'après cette définition, de termes principaux que dans les ordres impairs.

Les termes du premier et du second ordre ne dépendent que de ϖ_1^0; ceux du troisième et du quatrième ordre dépendent de ϖ_1^0

et ϖ_1^1; ceux du cinquième et du sixième ordre de ϖ_1^0, ϖ_1^1 et ϖ_1^2, et ainsi de suite.

L'ensemble des termes principaux du premier ordre dans x_1 se présente sous la forme d'un certain numérateur divisé par

$$q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0.$$

Comme pour tous ces termes on a

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{-n_2^0}{n_1^0} = \frac{-n_2}{n_1},$$

il vient

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0.$$

Le coefficient de t disparaît donc dans tous ces termes.

Notre numérateur est donc une constante qui dépend de ϖ_1^0; *je disposerai de ϖ_1^0 de façon à annuler ce numérateur,* ce qui détermine ϖ_1^0. Ces termes principaux, que nous pouvions craindre de voir devenir infinis, disparaissent donc.

Les termes principaux du premier ordre dans x_2 disparaissent *ipso facto,* en vertu de l'équation des forces vives.

Mais ce n'est pas tout : *tous les termes du premier et du second ordre disparaissent* ipso facto *dans les quatre développements.*

Considérons maintenant les termes principaux du troisième ordre dans x_1; leur ensemble est encore égal à un numérateur divisé par $q_1 n_1^0 + q_2 n_2^0$. Ce numérateur se réduit à une constante dépendant de ϖ_1^0 et ϖ_1^1; nous déterminerons ϖ_1^1 de façon à le faire disparaître et, avec lui, les termes principaux considérés.

Du même coup, disparaîtront les termes principaux du troisième ordre dans x_2 et, dans les quatre développements, tous les termes du troisième et du quatrième ordre.

On déterminerait de même ϖ_1^2 de façon à annuler les termes principaux du cinquième ordre dans x_1, ce qui annule du même coup tous les termes du cinquième et du sixième ordre; et ainsi de suite.

Ainsi disparaîtront tous les termes qui auraient pu devenir infinis; d'ailleurs, le rapport des moyens mouvements étant commensurable, nos séries ne dépendent plus que d'un argument unique et les solutions sont périodiques. Il est à noter que les séries ainsi obtenues sont convergentes, tandis que les séries (3) ne l'étaient pas, au sens rigoureux du mot.

13. Soit C la constante des forces vives; la valeur de C dépendra des deux constantes z_1 et z_2 ou, ce qui revient au même, de n_1 et de n_2. Elle se présentera sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de μ et dont les termes seront des fonctions de z_1 et z_2 ou de n_1 et n_2.

Dans certains cas, on peut considérer C comme une des données de la question. Alors la relation

$$F = C,$$

où le second membre C est regardé comme donné, sera une relation entre z_1 et z_1, ou entre n_1 et n_2.

On pourra en tirer par exemple n_2 en fonction de n_1 sous la forme d'une série procédant suivant les puissances de μ et dont les coefficients seront des fonctions de n_1.

14. Nous venons de voir la manière de retrouver les solutions périodiques en partant des séries (3); on pourrait se proposer de se retrouver de la même façon les solutions asymptotiques.

Nous savons en effet qu'en dehors des développements (3) qui procèdent suivant les sinus et les cosinus des multiples de deux arguments w, nous pouvons représenter les coordonnées du corps troublé par des développements d'une forme toute différente.

A chaque solution périodique correspond un de ces développements.

Soient, en effet,

$$x_i = \varphi_i^{00}(W), \qquad \cos y_i = \psi_i^{00}(W), \qquad \sin y_i = \theta_i^{00}(W)$$

les équations d'une solution périodique, où φ_i^{00}, ψ_i^{00}, θ_i^{00} sont des fonctions périodiques de période 2π d'un argument unique

$$W = N_0 t + h;$$

N_0 et h sont deux constantes; la première doit être regardée comme donnée, la seconde est une constante arbitraire d'intégration.

Nous appellerons C_0 la valeur correspondante de la constante C des forces vives.

Nous pouvons alors représenter la solution générale sous la forme de développements

$$(13)\quad \begin{cases} x_i = \Sigma(A e^{\alpha t})^p (A' e^{-\alpha t})^q \varphi_i^{p.q}(W), \\ \cos y_i = \Sigma(A e^{\alpha t})^p (A' e^{-\alpha t})^q \psi_i^{p.q}(W), \\ \sin y_i = \Sigma(A e^{\alpha t})^p (A' e^{-\alpha t})^q \theta_i^{p.q}(W), \end{cases}$$

où les fonctions $\varphi_i^{p.q}$, $\psi_i^{p.q}$, $\theta_i^{p.q}$ sont des fonctions périodiques de

$$W = Nt + h.$$

Dans ces développements A, A′ et h sont des constantes d'intégration, α et N sont des constantes données qui peuvent se développer suivant les puissances du produit AA′ et de la différence $C - C_0$.

Si l'on développe les $\varphi_i^{p.q}$, $\psi_i^{p.q}$, $\theta_i^{p.q}$ en séries de Fourier, les coefficients de ces séries seront également développables suivant les puissances de $C - C_0$.

Si l'on fait $C = C_0$, et qu'on annule l'une des constantes A ou A′, N se réduit à la constante N_0 définie plus haut et α à une constante α_0.

Il ne reste dans les séries (13) que les termes où $p = 0$ (ou les termes où $q = 0$). On obtient ainsi les solutions dites *asymptotiques;* les séries sont alors convergentes.

Si les deux constantes A et A′ s'annulent à la fois, il reste seulement

$$x_i = \varphi_i^{0.0}(W)$$

et l'on retombe sur la solution périodique.

15. On peut alors se proposer de voir comment on pourrait passer des développements (3) aux développements (13).

On remarquera d'abord que ces séries (13) sont ordonnées suivant les puissances des deux constantes A et A′. On pourrait donc être tenté d'opérer de la manière suivante : introduire les deux constantes d'intégration A et A′; développer chaque terme des séries (3) suivant les puissances de A et A′; réunir les termes semblables et ordonner suivant les puissances de ces constantes.

On ne peut pas arriver au résultat par cette voie. On rencontrerait des difficultés analogues à celle qui se présenterait dans l'exemple simple suivant.

Envisageons la série

$$\Sigma_n \alpha e^{-n\alpha} \sin n\alpha t = \frac{\alpha e^{-\alpha} \sin \alpha t}{1 - 2e^{-\alpha} \cos \alpha t + e^{-2\alpha}}.$$

La somme de la série est développable suivant les puissances de α et de t. Il en est de même de chacun des termes de la série. Cependant si l'on développe chaque terme de la série, qu'on réunisse les termes semblables, puis qu'on ordonne suivant les puissances de α et de t, on n'obtiendra pas du tout le même développement qu'en développant directement la somme de la série.

16. Pour bien faire comprendre la façon de passer d'un développement à l'autre, je prendrai d'abord un exemple simple; je supposerai

$$F = x_2 + x_1^2 + \mu \cos y_1.$$

On voit tout de suite que x_2 doit être une constante puisque $\frac{dF}{dy_2}$ est nul. On a donc

$$x_1^2 = C - \mu \cos y_1$$

et l'on en tire

$$t + h = \int \frac{dy_1}{\sqrt{C - \mu \cos y_1}}.$$

On voit ainsi que x_1, $\cos y_1$ et $\sin y_1$ sont des fonctions doublement périodiques de $t + h$. L'une des périodes que j'appellerai ω est réelle, l'autre que j'appellerai $i\omega'$ est purement imaginaire.

La fonction x_1, par exemple, étant périodique de période ω sera développable par la formule de Fourier suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{\omega}$. Le développement sera valable pour toutes les valeurs réelles de t.

D'autre part, cette fonction x_1 admettant la période $i\omega'$ sera développable par cette même formule de Fourier suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{i\omega'}$ ou, ce qui revient au même, suivant les puissances des exponentielles $e^{\frac{2\pi t}{\omega'}}$ et $e^{-\frac{2\pi t}{\omega'}}$. Ce développement nouveau ne sera plus valable pour toutes les valeurs réelles de t, mais seulement pour les valeurs comprises entre t_0 et $t_0 + \omega$; entre les valeurs $t_0 + \omega$ et $t_0 + 2\omega$, ou entre les valeurs $t_0 + 2\omega$ et $t_0 + 3\omega$, ..., il faudrait le remplacer par d'autres développements de même forme.

Et bien, *le premier de ces développements correspond aux séries* (3) *et le second aux séries* (13).

La théorie des fonctions doublement périodiques nous enseigne plusieurs moyens de passer de l'un à l'autre.

La méthode de Delaunay conduit à des équations analogues à celle que nous venons de traiter, quand on ne conserve dans la fonction perturbatrice qu'un seul terme périodique.

17. Dans le cas général, on peut donner des quatre variables x_i et y_i des développements d'où l'on peut tirer facilement d'une part les séries (3), d'autre part les séries (13).

Les quantités x_1, x_2, $\cos y_1$, $\sin y_1$, $\cos y_2$, $\sin y_2$ seront développées suivant les puissances de μ, du produit AA' et de la différence $C - C_0$ qui joueront le rôle de constantes d'intégration. Chaque coefficient de ce développement sera lui-même développé en série dont les différents termes seront le produit de deux facteurs.

Le premier de ces facteurs sera le cosinus ou le sinus d'un multiple d'un certain argument W.

Le second facteur sera une fonction doublement périodique d'un second argument W'.

Les deux arguments W et W' seront des fonctions linéaires du temps.

On aura

$$W = Nt + \Pi,$$
$$W' = N't + \Pi'.$$

Π et Π' seront des constantes d'intégration. Nous pourrons donner à N' une valeur arbitraire.

J'appellerai ω et $i\omega'$ les périodes de la fonction périodique considérée comme fonction de W'; de sorte que ses périodes seront $\frac{\omega}{N'}$ et $\frac{i\omega'}{N'}$ quand on la regardera comme fonction de t. Ces périodes seront d'ailleurs les mêmes pour tous les termes.

Les quantités N, $\frac{\omega}{N'}$, $\frac{i\omega'}{N'}$ seront développables suivant les puissances de μ, AA', $C - C_0$.

De ce développement, on pourra facilement passer aux séries (3). Il suffira pour cela de développer chaque fonction doublement périodique suivant les cosinus et sinus des multiples de $\frac{2\pi W'}{\omega}$. On aura alors des séries procédant suivant les cosinus et sinus des multiples des deux arguments W et $\frac{2\pi W'}{\omega}$, ou, ce qui revient au même, des multiples des deux arguments

$$w_1 = n_1 t + \varpi_1,$$
$$w_2 = n_2 t + \varpi_2,$$

si l'on suppose

$$W = r_1 w_1 + r_2 w_2,$$
$$W' = q_1 w_1 + q_2 w_2,$$

q_1, q_2, r_1, r_2 étant les quatre entiers définis au n° **10**. On a alors

$$N = r_1 n_1 + r_2 n_2, \qquad \Pi = r_1 \varpi_1 + r_2 \varpi_2,$$
$$N' = q_1 n_1 + q_2 n_2, \qquad \Pi' = q_1 \varpi_1 + q_2 \varpi_2.$$

On retrouve ainsi les séries (3) en regardant AA' et $C - C_0$ comme des fonctions des constantes z_1 et z_2.

De ce même développement, on peut passer tout aussi facilement aux séries (13). Développons, en effet, chaque fonction doublement périodique suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi W'}{i\omega'}$ ou suivant les puissances des exponentielles $e^{\pm\frac{2\pi W'}{\omega'}}$.

On retrouvera les séries (13) en posant

$$\alpha = \frac{2\pi N'}{\omega'}, \qquad A = \sqrt{AA'}\,e^{\frac{2\pi\Pi'}{\omega'}}, \qquad A' = \sqrt{AA'}\,e^{-\frac{2\pi\Pi'}{\omega'}}.$$

On me pardonnera la longueur de cet exposé. Bien qu'il ne nous apprenne rien d'essentiellement nouveau, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile de montrer comment se rattachent les unes aux autres les diverses séries auxquelles nous conduisent d'une façon qui paraît d'abord tout à fait indépendante les différentes théories proposées.