DISCUSSIONS

RÉPONSE A QUELQUES CRITIQUES

J'ai publié dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* de juillet 1894 un article intitulé : « Sur la nature du raisonnement mathématique ». M. Lechalas en a fait une critique dans le numéro de novembre 1894.

D'autre part j'ai publié dans le numéro de novembre 1895 un article intitulé : « L'espace et la géométrie », que M. Couturat a critiqué dans le numéro de septembre 1896. Je voudrais exposer en quelques mots les réflexions que m'ont suggérées les articles de MM. Lechalas et Couturat.

Je ne veux pas engager une polémique qui, en pareille matière, serait forcément stérile ; il est aisé de comprendre pourquoi. Dans les études de ce genre, on s'efforce de s'affranchir du joug de certaines habitudes d'esprit ; on cherche à rompre quelques-unes des associations d'idées auxquelles nous sommes accoutumés.

L'idéal serait de les rompre toutes, mais il ne peut être atteint. S'il l'était, la pensée se trouverait en présence d'une poussière sur laquelle elle n'aurait plus aucune prise ; elle ne serait plus possible, et le serait-elle qu'on n'aurait plus de langage pour l'exprimer.

Qu'arrive-t-il alors ? Un auteur rompt telle association d'idées et conserve telle autre ; un second auteur fait le contraire. Dès lors, ils se sont interdit tout espoir de jamais se rencontrer. Ils travailleront plus utilement en poursuivant leur voie chacun de son côté qu'en cherchant une rencontre impossible.

Des échanges d'observations, sans pouvoir aboutir à un accord, ont cependant un bon côté. Nul de nous ne peut se flatter d'être toujours parfaitement clair, mais souvent il ne s'apercevra qu'il a été obscur qu'en voyant qu'il n'a pas été compris. Les objections qu'on lui fera seront donc pour lui un avertissement, et en même temps une occasion d'exprimer plus complètement et plus clairement sa pensée.

C'est dans cet esprit que j'entreprends cette réponse. Je ne veux pas, à proprement parler, réfuter les objections de MM. Lechalas et Couturat, mais préciser le but que j'ai poursuivi et les conclusions auxquelles j'ai cru pouvoir m'arrêter.

Ces deux savants m'excuseront donc si je ne les suis pas toujours sur le terrain qu'ils ont choisi.

I

Je répondrai en premier lieu à M. Lechalas.

Un mot d'abord au sujet de la dénomination de raisonnement par récurrence. Cette expression est consacrée par l'usage universel des mathématiciens. Son sens étymologique est oublié et je ne m'en suis pas inquiété, j'ai pris le mot dans son sens usuel.

Le but que je me suis proposé, ainsi que mon titre l'indique, est simplement d'étudier le mécanisme du raisonnement mathématique, et ce que j'ai dit ne s'applique pas plus particulièrement à l'arithmétique qu'à toute autre partie des mathématiques.

Je n'ai pas voulu répondre à M. Ballue; je n'avais pas connaissance de son article quand j'ai écrit le mien; après l'avoir lu, j'ai seulement ajouté une phrase où je le citais incidemment, mais le sujet que je traite est absolument différent du sien.

Je n'ai pas cherché à faire une théorie des pluralités et je ne l'ai pas fait parce que c'était hors de mon sujet. C'est pour la même raison que je n'ai pas parlé de la question d'Orient.

Je n'ai pas défini le nombre 0, ni le nombre 1, ni l'opération $+1$; c'est avec intention; ces définitions ne jouent aucun rôle dans mes recherches et je pouvais, sans m'en occuper, étudier le mécanisme du raisonnement mathématique, comme on pourrait étudier le mécanisme d'un moulin sans donner l'analyse chimique du blé qu'il a à moudre.

Je n'ai pas donné non plus la définition du signe $=$; si j'avais cru nécessaire d'en donner une, j'aurais adopté celle de Helmholtz dans sa célèbre *Jubelschrift* intitulée « Zählen und Messen ».

Voici à peu près comment il s'exprime :

On appellera égalité une relation jouissant des propriétés suivantes :

1° Si l'on a $a = b$, on aura $b = a$.

2° Si l'on a $a = b$ et $b = c$, on aura $a = c$.

Maintenant, dans les applications, on *conviendra* d'appeler égalité telle ou telle relation, et on en aura le droit dès qu'on aura constaté que cette relation jouit des propriétés que je viens d'énoncer.

Cette définition peut évidemment prêter à de graves objections, puisqu'elle ne tient aucun compte de l'origine psychologique de la notion d'égalité. Mais c'est celle qui aurait le mieux convenu au point de vue purement formel où je m'étais placé.

Évidemment on pourrait adopter telle autre définition que l'on voudrait, il y aurait alors lieu d'établir que deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles et on poursuivrait ensuite la série de mes raisonnements sans y rien changer. La définition de l'égalité est indifférente au point de vue où je me place. C'est une sorte d'élément étranger que j'ai cherché à éliminer le plus possible et si je préfère celle de Helmholtz, c'est parce que c'est pour ainsi dire un minimum de définition.

II

On a le droit de faire la théorie générale des opérations sans définir l'opération que l'on considère, de même qu'on fait la théorie de l'addition sans définir la nature des termes à additionner.

Ce n'est qu'un pas de plus dans la voie où se sont engagés les mathématiciens; ceux-ci cherchent en effet de plus en plus à séparer les formes pures qui font l'objet de leurs études des éléments matériels qui participent encore de la réalité. Ce n'est qu'à ce prix qu'ils peuvent atteindre la rigueur qui leur est nécessaire.

Il faut que cette tendance soit bien impérieuse. L'éminent physicien Helmholtz ne saurait être soupçonné d'avoir voulu sacrifier la réalité; c'est à lui pourtant qu'est due la définition si caractéristique de l'égalité que je citais tout à l'heure.

Quant à moi, j'ai été aussi loin que possible dans ce chemin qui nous éloigne de la réalité et qui nous conduit à un domaine où règnent la forme pure et la rigueur absolue. Voici pourquoi :

Je me proposais de prouver que le raisonnement mathématique *rigoureux*, comme le comprennent les analystes contemporains, n'est pas un raisonnement analytique. Mais le raisonnement mathématique ne devient rigoureux que quand la forme pure a été vidée de toute matière.

Si j'avais étudié un de ces raisonnements que l'on faisait il y a cinquante ans, avant que ce travail d'épuration ne fût terminé, je n'aurais rien prouvé; j'aurais montré sans peine qu'un pareil raisonnement n'est pas analytique, mais comme il n'est pas rigoureux, cela n'aurait pas montré qu'un raisonnement peut être rigoureux sans être analytique.

D'autre part, j'ai rejeté toute démonstration ou toute définition qui ne serait pas intelligible en dehors d'un mode particulier de représentation spatiale.

M'étant efforcé de me débarrasser de toute représentation matérielle, je m'étonne qu'on puisse prétendre qu'en n'en choisissant aucune, j'en ai « imposé » une; que je suis forcé, pour être logique, de l'adopter avec toutes ses conséquences, à tel point que je n'ai plus le droit de considérer les nombres positifs en laissant de côté les nombres négatifs.

III

« On doit noter, d'autre part, dit M. Lechalas, que ces démonstrations supposent qu'on ait le droit de faire subir aux égalités certaines transformations dont la légitimité résulte de nos définitions ».

Est-ce à dire que, faute de définitions précises, les transformations que j'ai faites n'étaient pas légitimes? Oui, peut-être, si j'avais eu pour but de démontrer certaines propriétés des pluralités. J'aurais dû alors démontrer d'abord, par exemple, que deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles, etc., justifier en d'autres termes deux ou trois règles tout à fait analogues à celles de la logique formelle. Pour cela, j'aurais dû, ou bien adopter des définitions précises et montrer qu'elles sont d'accord avec ces règles, ou bien, comme le fait Helmholtz, prendre ces règles elles-mêmes pour définitions de l'égalité et de l'opération.

Mais ce n'est pas cela que j'ai voulu faire; je ne me suis pas préoccupé de justifier ces règles, je les ai *admises*; et je me suis demandé si un raisonnement mathématique était une simple application de ces règles convenablement combinées; il aurait alors été purement analytique, puisque ces règles le sont elles-mêmes.

Mes écritures sont-elles dénuées de signification? Oui, si le nombre 5 n'a pas de signification, parce qu'on ne sait s'il représente 5 chevaux ou 5 hommes; si la lettre a en algèbre n'a pas de signification, parce qu'on ne sait si elle représente un 5 ou un 6.

Mes écritures n'ont pas de signification *particulière*; mais on peut leur attribuer telle signification que l'on voudra; ce que j'ai dit restera vrai.

IV

Je suis parfaitement d'accord avec M. Lechalas, sur la parenté du raisonnement par récurrence et du principe de raison suffisante.

Ce principe est la source de l'induction mathématique comme de toute induction. Malheureusement, en s'élevant jus qu'à lui, on perd en précision ce qu'on gagne en généralité.

Il importe donc d'étudier en détail le mécanisme de chacune de ses applications.

En mathématique pure il se plie à trois usages très différents, mais en se transformant profondément.

1° On peut dire : je viens de démontrer telle proposition, telle autre se démontrerait *de même*;

2° On peut dire aussi, par exemple : la résultante de deux forces égales est dirigée suivant leur bissectrice parce qu'*il n'y a pas de raison* pour qu'elle se rapproche plus de l'une des forces que de l'autre;

3° Enfin on peut l'employer dans le raisonnement par récurrence.

Dans ces trois cas, on doit invoquer trois jugements synthétiques *a priori* différents, quoique étroitement apparentés. Rien ne saurait dispenser de les distinguer et de les étudier à part.

En résumé, l'article de M. Lechalas contient une foule d'idées intéressantes; mais je ne vois pas pourquoi il se croit en désaccord avec moi. Nous poursuivions des buts différents, nous ne pouvions nous rencontrer, ou plutôt nous ne pouvions le faire qu'en un point et sur ce point nous sommes parfaitement d'accord.

Tout raisonnement analytique est stérile.

V

Mon désaccord avec M. Couturat semble plus profond. Peut-être cependant serons-nous plus près l'un de l'autre quand je me serai mieux expliqué; je m'étonne en effet que ma pensée ait été si mal comprise, je ne croyais pas avoir été si obscur.

Suivons pas à pas la critique de M. Couturat.

L'ensemble des déplacements possibles d'un corps solide forme un groupe de transformations; ce groupe constitue l'espace; ce groupe est d'ordre 6.

« Mais, demande M. Couturat, comment sait-on que ce groupe est d'ordre 6? Parce que tout déplacement peut être regardé comme la combinaison de six mouvements élémentaires indépendants, c'est-à-dire, au fond, parce que la position d'un corps dans l'espace est déterminée par six variables indépendantes. Or, si l'on cherche la raison de ce dernier fait, on trouve finalement que c'est parce que l'espace a trois dimensions. La pétition de principe est donc évidente. »

Mais ce n'est pas du tout comme cela que j'ai raisonné.

Voici la marche que j'attribue à l'esprit dans la formation de la notion d'espace :

1° Il commence par distinguer, parmi les changements dont il est témoin, certains d'entre eux qu'il appelle déplacements (voir mon article, page 636);

2° Il est amené à regarder deux changements différents comme le *même* déplacement (page 639);

3° Il reconnait que deux déplacements consécutifs sont équivalents à un déplacement unique qui est comme leur résultante (loi d'homogénéité, page 640).

A ce moment, il ne sait pas encore la géométrie, il ne sait pas que l'espace a trois dimensions, il ne sait pas que la position d'un corps est déterminée par six quantités.

Mais il commence à étudier *expérimentalement* les lois suivant lesquelles se composent les déplacements. L'expérience lui apprend qu'ils se comportent comme les substitutions d'un groupe d'ordre 6.

Elle lui apprendrait autre chose s'il était placé dans un de ces mondes que j'ai appelés non-euclidiens.

« Comment donc sait-on que le groupe est d'ordre 6? » Ce n'est pas par un raisonnement géométrique, c'est par *expérience*.

Mais il faut bien s'entendre. L'expérience nous apprend seulement que les déplacements se comportent *à peu près* comme les substitutions d'un groupe d'ordre 6. Ce n'est donc pas l'expérience qui nous fournit la notion de ce groupe. Cette notion préexiste ou plutôt ce qui préexiste dans l'esprit c'est la puissance de former cette notion.

L'expérience n'est pour nous qu'une occasion d'exercer cette puissance. Elle nous apprend que parmi tous les groupes simples que nous pouvons former, c'est un certain groupe qui s'écarte le moins de l'observation.

L'esprit juge alors qu'il est plus *commode* de regarder le déplacement observé comme la résultante de deux changements : 1° un changement peu différent du déplacement observé et qui sera considéré comme le déplacement réel; 2° un autre changement *très petit* et qui sera regardé comme une petite variation des propriétés sans caractère géométrique.

Grâce à cette *convention*, les déplacements réels se composent *rigoureusement* comme les substitutions du groupe.

Rien ne serait possible si l'entendement ne possédait d'avance la notion de groupe, mais cette notion n'est pas une forme *imposée* à notre sensibilité. Il nous reste en effet le droit de choisir, en tenant compte des indications de l'expérience, entre tous les groupes possibles.

VI

« La pétition de principe, continue M. Couturat, n'est pas moins manifeste dans la définition du point. Certains déplacements ont un caractère commun : on dit qu'ils laissent fixe un point de l'espace. Qu'est-ce à dire? Est-ce une simple convention de langage ou la constatation d'un fait? Dans le premier cas, pourquoi dit-on que les diverses positions ont un point commun plutôt qu'une ligne commune? Dans le second cas..... » Mais il est inutile de parler du second cas, à la question posée par M. Couturat je réponds : c'est une simple convention de langage.

Ici je savais bien que j'avais été obscur, je me résigne donc à être un peu prolixe et à employer le langage mathématique que je ne vois guère le moyen d'éviter.

Au point où nous sommes parvenus, nous avons reconnu que les déplacements se composent d'après les mêmes lois que les substitutions d'un certain groupe G, et nous sommes ainsi conduits pour ainsi dire à choisir ce groupe G comme la norme à laquelle nous rapporterons ces déplacements.

Le choix n'est pas terminé cependant; il existe plusieurs groupes dont les substitutions se composent d'après les mêmes lois. On dit que ces groupes sont isomorphes.

Nous pouvons donc prendre comme « groupe normal » au lieu de G, un groupe quelconque isomorphe à G.

Parmi tous les groupes isomorphes à G, quel est celui que nous choisirons?

Nous connaissons les propriétés du groupe G, puisque, comme je l'ai dit plus haut, la notion de ce groupe préexiste dans l'esprit. Nous savons qu'il contient trois sous-groupes différents ou plutôt trois catégories de sous-groupes.

1° Les sous-groupes g_1 qui sont d'ordre 3.

2° Les sous-groupes g_2 qui sont d'ordre 2.

3° Les sous-groupes g_3 qui sont d'ordre 1.

A chaque substitution de G, correspond : 1° une substitution S_1 qui change chaque sous-groupe g_1 en un autre sous-groupe g_1; 2° une substitution S_2 qui change chaque sous-groupe g_2 en un autre sous-groupe g_2; 3° une substitution S_3 qui change chaque sous-groupe g_3 en un autre sous-groupe g_3.

Les substitutions S_1 forment un groupe G_1; les substitutions S_2 un groupe G_2; les substitutions S_3 un groupe G_3. Tous ces groupes sont isomorphes à G.

Le groupe G_1 a trois dimensions, le groupe G_2 en a quatre, le groupe G_3 en a cinq.

Si l'on choisit G_1 comme groupe normal, le sous-groupe g_1 conserve un point; le sous-groupe g_2 conserve une ligne (c'est cette ligne qu'on appelle ligne droite par définition); le sous-groupe g_3 conserve tous les points d'une ligne.

Si l'on choisit G_2 comme groupe normal, le sous-groupe g_2 conserve un point, le sous-groupe g_1 conserve une surface à deux dimensions et le sous-groupe g_3 conserve un point et une infinité de surfaces à deux dimensions passant par ce point. (Observons en passant que l'espace correspondant à G_2 a quatre dimensions, et par conséquent que deux de ces surfaces se coupent, non suivant une ligne, mais en un seul point.)

Si l'on choisit G_3 comme groupe normal, le sous-groupe g_3 conserve un point, le sous-groupe g_1 conserve une surface à deux dimensions et le sous-groupe g_2 conserve une ligne.

Cela posé, la question de M. Couturat :

« Pourquoi dit-on que les diverses positions ont un point commun plutôt qu'une ligne commune? »

équivaut à la suivante :

« Pourquoi dit-on que g_1 conserve un point plutôt qu'une ligne? » ou encore à la suivante :

« Pourquoi choisit-on comme groupe normal G_1 et non G_2 ou G_3? »

Je répondrai qu'on choisit G_1 parce qu'on trouve cela plus commode, et cela pour deux sortes de raisons :

1° Pour des raisons d'ordre rationnel et par exemple parce que de tous les groupes isomorphes à G, c'est G_1 qui donne à l'espace le moins grand nombre de dimensions. C'est donc G_1 qui est le plus *simple*.

2° Pour diverses raisons d'ordre expérimental.

Un mot encore avant de quitter ce sujet; je dois donner une explication afin d'éviter une confusion. Le groupe G est d'ordre 6, le sous-groupe g_1 d'ordre 3; le nombre des dimensions est égal à la différence $6 - 3$; *cela ne serait pas vrai avec un groupe et un sous-groupe quelconques.*

VII

Je passe à la seconde partie de la critique de M. Couturat, où il discute ce qu'il appelle « la genèse psychologique de l'espace esquissée par M. Poincaré ».

Ici, ou je me méprends sur le sens de ses objections, ou M. Couturat a mal compris ma pensée. Dans toute cette partie de mon article je me suis efforcé de prouver que l'espace sensible n'a rien de commun avec l'espace géométrique; M. Couturat paraît croire que j'ai précisément poursuivi le but opposé.

De tous les arguments que j'ai accumulés pour prouver ma thèse, les uns lui paraissent destinés à démontrer la thèse contraire; ils lui semblent d'ailleurs peu probants. Quant aux autres, il les enregistre comme des « aveux ».

Nous sommes donc bien près de nous entendre.

Entrons cependant dans le détail :

« Il y aurait d'abord, dit M. Couturat, à faire d'expresses réserves sur l'assimilation des sensations musculaires à des grandeurs variables dont nous connaîtrions exactement les valeurs et les variations. Mais admettons ce postulat. »

C'est parfaitement bien dit; j'aurais eu également à faire ces réserves, et, si je ne les ai pas formulées, on peut trouver ma pensée à ce sujet dans mon article sur le Continu mathématique, inséré dans le premier numéro de cette *Revue*. Mais, comme je ne pouvais traiter toutes les questions à la fois, j'ai, comme M. Couturat, « admis ce postulat ». Pour représenter une sensation par les variations d'une grandeur, il faut un premier travail d'élaboration dont je n'ai pas parlé et que l'expérience ne peut faire à elle seule.

En n'insistant pas sur ce point, je faisais une concession aux adversaires de la thèse que je soutenais; j'en faisais une autre en traitant les six muscles de l'œil comme un « bloc ».

VIII

« Ainsi que M. Poincaré l'avoue de bonne grâce, on raisonne comme si l'on savait déjà la géométrie » (p. 638).

J'ai dit cela en effet à la fin d'un paragraphe où j'avais énoncé certaines propositions, je voulais conclure que ces propositions qui nous semblent nécessaires, à nous qui savons la géométrie, ne nous sont pas réellement imposées et qu'une discussion plus complète est indispensable. Cette discussion, je me suis ensuite efforcé de la faire.

« On commence par plonger l'homme physique dans l'espace à trois dimensions, et on cherche comment il entre en relation avec cet espace. »

Mais ce n'est pas cela que j'ai fait; j'ai transporté l'homme physique dans les milieux les plus différents, milieux imaginaires bien entendu : dans le monde non-euclidien (p. 641), dans le monde à quatre dimensions (p. 644).

J'ai vu que, dans ces divers milieux, il devait créer des géométries différentes.

Je voulais faire voir que l'espace représentatif peut s'adapter à une foule de géométries différentes, qu'il n'est par lui-même ni plan ni courbe, qu'il n'est par lui-même ni forcément homogène, ni nécessairement isotrope, qu'on n'est pas obligé de lui attribuer trois dimensions. Pour cela, il fallait précisément cesser de raisonner comme si je savais la géométrie.

IX

Malgré ces explications, je n'espère pas arriver à un accord complet avec M. Couturat.

Qu'on me permette de transcrire les passages de son article qui m'ont enlevé cet espoir :

« Ou bien le caractère par lequel on définit le point est purement analytique, et alors c'est arbitrairement qu'on lui attribue un sens géométrique... » (p. 660).

« D'autre part, l'effort d'accommodation ne donne par lui-même aucune indication sur la distance de l'objet... » (p. 661).

« L'espace géométrique est le seul qui ait une valeur objective, à la fois scientifique et pratique, c'est celui où nous localisons nos perceptions, où nous projetons nos figures, et où nous construisons le monde physique... » (p. 662).

Ainsi M. Couturat croit avoir l'intuition directe du point géométrique, et il considère par conséquent toute définition, ou comme inutile, ou comme arbitraire.

Ou du moins il exige que toute définition du point, comme celle de toute notion géométrique, ait un caractère « géométrique » et non pas purement analytique.

Mais qu'entend-il par caractère géométrique? Qu'est-ce qui distingue les notions géométriques des notions purement analytiques? Est-ce d'être susceptibles de représentation?

Cela ne paraît pas être la pensée de M. Couturat : l'effort d'accommodation, dit-il, ne nous donne aucune indication sur la distance; or les « visuels » se représentent habituellement la distance d'un objet en se représentant l'effort d'accommodation correspondant. C'est donc que la distance est autre chose que la représentation de la distance, et cependant elle doit conserver ce que M. Couturat appelle le « caractère géométrique ».

Moi, je ne comprends pas ce que c'est que ce « caractère géométrique ». Or M. Couturat juge probablement cette notion tellement claire qu'aucune définition n'en est possible et qu'il sera hors d'état de me l'expliquer.

Le troisième passage que j'ai cité plus haut est encore plus explicite.

C'est dans l'espace géométrique que nous localisons nos perceptions. Qu'est-ce à dire? Cela veut-il dire que nous nous représentons les objets dans l'espace géométrique? Mais nos représentations ne peuvent être que la reproduction de nos sensations; on ne peut donc se représenter les objets que dans l'espace sensible, tout à fait différent (nous sommes d'accord sur ce point) de l'espace géométrique.

Cela veut-il dire, au contraire, que nous raisonnons sur le monde extérieur comme s'il était dans l'espace géométrique? Où est alors

« ce caractère géométrique » si profondément distinct du caractère analytique?

M. Couturat, d'accord en ce point avec le sens commun, croit avoir l'intuition de je ne sais quoi d'intermédiaire entre l'espace sensible que l'on peut se représenter et l'espace analytique sur lequel on ne peut que raisonner.

Quant à moi, cette intuition me manque, et si ce que j'appelle l'espace analytique est déjà autre chose que le nombre pur, puisqu'il est continu, il n'est pas une forme de la sensibilité, puisqu'il ne se prête pas à la représentation, et d'ailleurs il n'a pas nécessairement trois dimensions.

H. POINCARÉ.