LES IDÉES DE HERTZ SUR LA MÉCANIQUE

En 1890, le grand électricien Hertz était arrivé à l'apogée de sa gloire; toutes les Académies d'Europe lui avaient prodigué les récompenses dont elles disposaient. Tout le monde espérait que de longues années lui étaient encore réservées et qu'elles seraient aussi brillantes que l'avaient été celles de ses débuts.

Malheureusement, la maladie qui devait l'emporter si prématurément l'avait déjà atteint et bientôt ralentissait et arrêtait presque complètement son activité expérimentale. Il eut à peine le temps d'installer son nouveau laboratoire de Bonn; des maux divers le privèrent et nous privèrent des découvertes qu'il se promettait d'y faire.

Il servait encore les sciences physiques par l'influence énorme qu'il exerçait, par les conseils qu'il donnait à ses élèves; mais cette période n'est marquée que par une seule découverte personnelle, d'une importance capitale, il est vrai, celle de la transparence de l'aluminium pour les rayons cathodiques.

Mais s'il était ainsi cruellement détourné des études qui lui avaient été si chères, il ne demeurait pas inactif; si ses sens le trahissaient, son intelligence lui restait, et il l'employait à de profondes réflexions sur la philosophie de la Mécanique. Les résultats de ces réflexions ont été publiés dans un ouvrage posthume et je voudrais les résumer et les discuter ici brièvement.

Hertz critique d'abord les deux principaux systèmes proposés jusqu'ici et que j'appellerai le système classique et le système énergétique, et il en propose un troisième que j'appellerai le système hertzien.

I. — Système classique.

§ 1. — Définition de la force.

La première tentative de coordination des faits mécaniques est celle que nous appellerons *le système classique;* c'est, dit Hertz, « la grande route royale dont les principales stations portent les noms d'Archimède, Galilée, Newton et Lagrange.

« Les notions fondamentales que l'on trouve au point de départ sont celles de l'*espace*, du *temps*, de la *force* et de la *masse*. La force, dans ce système, est regardée comme la cause du mouvement; elle préexiste au mouvement et est indépendante de lui. »

Je vais chercher à expliquer pour quelles raisons Hertz n'a pas été satisfait de cette manière de considérer les choses.

Nous avons d'abord les difficultés que l'on rencontre quand on veut définir les notions fondamentales. Qu'est-ce que la *masse?* C'est, répond Newton, le produit du volume par la densité. — Il vaudrait mieux dire, répondent Thomson et Tait, que la densité est le quotient de la masse par le volume. — Qu'est-ce que la *force?* C'est, répond Lagrange, une cause qui produit le mouvement d'un corps ou qui tend à le produire. — C'est, dira Kirchhoff, le produit de la masse par l'*accélération*. Mais alors, pourquoi ne pas dire que la masse est le quotient de la force par l'accélération?

Ces difficultés sont inextricables.

Quand on dit que la force est la cause d'un mouvement, on fait de la métaphysique, et cette définition, si on devait s'en contenter, serait absolument stérile. Pour qu'une définition puisse servir à quelque chose, il faut qu'elle nous apprenne à *mesurer* la force; cela suffit d'ailleurs, il n'est nullement nécessaire qu'elle nous apprenne ce que c'est que la force *en soi*, ni si elle est la cause ou l'effet du mouvement.

Il faut donc définir d'abord l'égalité de deux forces. Quand dira-t-on que deux forces sont égales? C'est, répondra-t-on, quand, appliquées à une même masse, elles lui impriment une même accélération, ou quand, opposées directement l'une à l'autre, elles se font équilibre. Cette définition n'est qu'un trompe-l'œil. On ne peut pas décrocher une force appliquée à un corps pour l'accrocher à un autre corps, comme on décroche une locomotive pour l'atteler à un autre train. Il est donc impossible de savoir quelle accélération telle force, appliquée à tel corps, imprimerait à tel autre corps, *si* elle lui était appliquée. Il est impossible de savoir comment se comporteraient deux forces qui ne sont pas directement opposées, *si* elles étaient directement opposées.

C'est cette définition que l'on cherche à matérialiser, pour ainsi dire, quand on mesure une force avec un dynamomètre, ou en l'équilibrant par un poids. Deux forces F et F′, que je supposerai verticales et dirigées de bas en haut pour simplifier, sont respectivement appliquées à deux corps C et C′; je suspends un même corps pesant P d'abord au corps C, puis au corps C′; si l'équilibre a lieu dans les deux cas, je conclurai que les deux forces F et F′ sont égales entre elles, puisqu'elles sont égales toutes deux au poids du corps P.

Mais suis-je sûr que le corps P a conservé le même poids quand je l'ai transporté du premier corps au second? Loin de là, *je suis sûr du contraire;* je sais que l'intensité de la pesanteur varie d'un point à un autre, et qu'elle est plus forte, par exemple, au pôle qu'à l'équateur. Sans doute la différence est très faible et, dans la pratique, je n'en tiendrai pas compte; mais une définition bien faite devrait avoir une rigueur mathématique: cette rigueur n'existe pas. Ce que je dis du poids s'appliquerait évidemment à la force du ressort d'un dynamomètre, que la température et une foule de circonstances peuvent faire varier.

Ce n'est pas tout; on ne peut pas dire que le poids du corps P soit appliqué au corps C et équilibre directement la force F. Ce qui est appliqué au corps C, c'est l'action A du corps P sur le corps C; le corps P est soumis de son côté, d'une part à son poids, d'autre part à la réaction R du corps C sur P. En définitive, la force F est égale à la force A, parce qu'elle lui fait équilibre; la force A est égale à R, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction; enfin, la force R est égale au poids de P, parce qu'elle lui fait équilibre. C'est de ces trois égalités que nous déduisons comme conséquence l'égalité de F et du poids de P.

Nous sommes donc obligés de faire intervenir dans la définition de l'égalité de deux forces, le principe même de l'égalité de l'action et de la réaction; *à ce compte, ce principe ne devrait plus être regardé comme une loi expérimentale, mais comme une définition.*

Nous voici donc, pour reconnaître l'égalité de deux forces, en possession de deux règles: égalité de deux forces qui se font équilibre; égalité de l'action et de la réaction. Mais, nous l'avons vu plus haut, ces deux règles sont insuffisantes; nous sommes obligés de recourir à une troisième règle et d'admettre que certaines forces comme, par exemple, le poids d'un corps, sont constantes en grandeur et en direction. Mais cette troisième règle, je l'ai dit, est une loi expérimentale; elle n'est qu'approximativement vraie; *elle est une mauvaise définition.*

Nous sommes donc ramenés à la définition de Kirchhoff: *la force est égale à la masse multipliée par l'accélération.* Cette « loi de Newton » cesse à son tour d'être regardée comme une loi expérimentale, elle n'est plus qu'une définition. Mais cette définition est encore insuffisante, puisque nous ne savons pas ce que c'est que la masse. Elle nous permet sans doute de calculer le rapport de deux forces appliquées à un même corps à des instants différents; elle ne nous apprend rien sur le rapport de deux forces appliquées à deux corps différents.

Pour la compléter, il faut de nouveau recourir à la troisième loi de Newton (égalité de l'action et de la réaction), regardée encore, non comme une loi expérimentale, mais comme une définition. Deux corps A et B agissent l'un sur l'autre; l'accélération de A multipliée par la masse de A est égale à l'action de B sur A; de même, le produit de l'accélération de B par sa masse est égal à la réaction de A sur B. Comme, par définition, l'action est égale à la réaction, les masses de A et de B sont en raison inverse des accélérations de ces deux corps. Voilà le rapport de ces deux masses défini et c'est à l'expérience à vérifier que ce rapport est constant.

Cela serait très bien si les deux corps A et B étaient seuls en présence et soustraits à l'action du reste du monde. Il n'en est rien; l'accélération de A n'est pas due seulement à l'action de B, mais à celle d'une foule d'autres corps C, D... Pour appliquer la règle précédente, il faut donc décomposer l'accélération de A en plusieurs composantes, et discerner quelle est celle de ces composantes qui est due à l'action de B.

Cette décomposition serait encore possible, si nous *admettions* que l'action de C sur A s'ajoute simplement à celle de B sur A, sans que la présence du corps C modifie l'action de B sur A, ou que la présence de B modifie l'action de C sur A; si nous admettions, par conséquent, que deux corps quelconques s'attirent, que leur action mutuelle est dirigée suivant la droite qui les joint et ne dépend que de leur distance; si nous admettions, en un mot, *l'hypothèse des forces centrales.*

On sait que, pour déterminer les masses des corps célestes, on se sert d'un principe tout différent. La loi de la gravitation nous apprend que l'attraction de deux corps est proportionnelle à leurs masses; si r est leur distance, m et m' leurs masses, k une constante, leur attraction sera

$$\frac{k\,m\,m'}{r^2}.$$

Ce qu'on mesure alors, ce n'est pas la masse, rapport de la force à l'accélération, c'est la masse attirante; ce n'est pas l'inertie du corps, c'est son pouvoir attirant.

C'est là un procédé indirect, dont l'emploi n'est pas théoriquement indispensable. Il aurait très bien pu se faire que l'attraction fût inversement proportionnelle au carré de la distance, sans être proportionnelle au produit des masses, qu'elle fût égale à:

$$\frac{f}{r^2},$$

mais sans que l'on eût:

$$f = k\,m\,m'.$$

S'il en était ainsi, on pourrait néanmoins, par l'observation des mouvements *relatifs* des corps célestes, mesurer les masses de ces corps.

Mais avons-nous le droit d'admettre l'hypothèse des forces centrales? Cette hypothèse est-elle rigoureusement exacte? Est-il certain qu'elle ne sera jamais contredite par l'expérience? Qui oserait l'affirmer? Et si nous devons abandonner cette hypothèse, tout l'édifice si laborieusement élevé s'écroulera.

Nous n'avons plus le droit de parler de la composante de l'accélération de A qui est due à l'action de B. Nous n'avons aucun moyen de la discerner de celle qui est due à l'action de C ou d'un autre corps. La règle pour la mesure des masses devient inapplicable.

Que reste-t-il alors du principe de l'égalité de l'action et de la réaction? Si l'hypothèse des forces centrales est rejetée, ce principe doit évidemment s'énoncer ainsi : la résultante géométrique de toutes les forces appliquées aux divers corps d'un système soustrait à toute action extérieure, sera nulle. Ou, en d'autres termes, *le mouvement du centre de gravité de ce système sera rectiligne et uniforme.*

Voilà, semble-t-il, un moyen de définir la masse; la position du centre de gravité dépend évidemment des valeurs attribuées aux masses; il faudra disposer de ces valeurs de façon que le mouvement de ce centre de gravité soit rectiligne et uniforme; cela sera toujours possible si la troisième loi de Newton est vraie, et cela ne sera possible en général que d'une seule manière.

Mais il n'existe pas de système soustrait à toute action extérieure; toutes les parties de l'Univers subissent plus ou moins fortement l'action de toutes les autres parties. *La loi du mouvement du centre de gravité n'est rigoureusement vraie que si on l'applique à l'Univers tout entier.*

Mais alors il faudrait, pour en tirer les valeurs des masses, observer le mouvement du centre de gravité de l'Univers. L'absurdité de cette conséquence est manifeste; nous ne connaissons que des mouvements relatifs; le mouvement du centre de gravité de l'Univers restera pour nous une éternelle inconnue.

Il ne reste donc rien et nos efforts ont été infructueux; nous sommes acculés à la définition suivante, qui n'est qu'un aveu d'impuissance : *les masses sont des coefficients qu'il est commode d'introduire dans les calculs.*

Nous pourrions refaire toute la Mécanique en attribuant à toutes les masses des valeurs différentes. Cette Mécanique nouvelle ne serait en contradiction ni avec l'expérience, ni avec les principes généraux de la Dynamique (principe de l'inertie, proportionnalité des forces aux masses et aux accélérations, égalité de l'action et de la réaction, mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité, principe des aires).

Seulement les équations de cette Mécanique nouvelle seraient *moins simples.* Entendons-nous bien : ce seraient seulement les premiers termes qui seraient moins simples, c'est-à-dire ceux que l'expérience nous a déjà fait connaître; peut-être pourrait-on altérer les masses de petites quantités sans que les équations *complètes* gagnent ou perdent en simplicité.

J'ai insisté plus longuement que Hertz lui-même sur cette discussion; mais je tenais à bien montrer que Hertz n'a pas cherché à Galilée et à Newton une simple querelle d'Allemand; nous devons conclure, qu'avec le système classique, *il est impossible de donner de la force et de la masse une idée satisfaisante.*

§ 2. — Objections diverses.

Hertz se demande ensuite si les principes de la Mécanique sont rigoureusement vrais. « Dans l'opinion de beaucoup de physiciens, dit-il, il apparaîtra comme inconcevable que l'expérience la plus éloignée puisse jamais changer quelque chose aux inébranlables principes de la Mécanique; et cependant ce qui sort de l'expérience peut toujours être rectifié par l'expérience. »

Après ce que nous venons de dire, ces craintes paraîtront superflues. Les principes de la Dynamique nous apparaissaient d'abord comme des vérités expérimentales; mais nous avons été obligés de nous en servir comme de définitions. C'est *par définition* que la force est égale au produit de la masse par l'accélération; voilà un principe qui est désormais placé hors de l'atteinte d'aucune expérience ultérieure. C'est de même par définition que l'action est égale à la réaction.

Mais alors, dira-t-on, ces principes invérifiables sont absolument vides de toute signification; l'expérience ne peut les contredire; mais ils ne peuvent rien nous apprendre d'utile; à quoi bon alors étudier la Dynamique?

Cette condamnation trop rapide serait injuste. Il n'y a pas, dans la Nature, de système *parfaitement* isolé, parfaitement soustrait à toute action extérieure; mais il y a des systèmes *à peu près* isolés.

Si l'on observe un pareil système, on peut étudier non seulement le mouvement relatif de ses diverses parties l'une par rapport à l'autre, mais le mouvement de son centre de gravité par rapport aux autres parties de l'Univers. On constate alors que le mouvement de ce centre de gravité est *à peu près* rectiligne et uniforme, conformément à la troisième loi de Newton.

C'est là une vérité expérimentale, mais elle ne pourra être infirmée par l'expérience; que nous apprendrait en effet une expérience plus précise? Elle nous apprendrait que la loi n'était qu'à peu près vraie; mais, cela, nous le savions déjà.

On s'explique maintenant comment l'expérience a *pu servir de base aux principes de la Mécanique et cependant ne pourra jamais les contredire.*

Mais revenons à l'argumentation de Hertz. Le système classique est incomplet, car tous les mouvements qui sont compatibles avec les principes de la Dynamique ne sont pas réalisés dans la Nature, ni même réalisables. En effet, il est évident que les principes des aires et du mouvement du centre de gravité ne sont pas les seules lois qui régissent les phénomènes naturels? Sans doute, il serait déraisonnable d'exiger de la Dynamique qu'elle embrassât dans une même formule toutes les lois que la Physique a découvertes ou pourra découvrir. Mais il n'en est pas moins vrai qu'on doit regarder comme incomplet et insuffisant un système de Mécanique où le principe de la conservation de l'énergie est passé sous silence.

« Notre système, conclut Hertz, embrasse, il est vrai, *tous* les mouvements naturels, mais il en embrasse en même temps beaucoup *d'autres* qui ne sont pas naturels. Un système qui exclura une partie de ces mouvements, sera plus conforme à la nature des choses et constituera par conséquent un progrès. » Tel sera, par exemple, le système énergétique dont nous parlerons plus loin et dans lequel le principe fondamental de la conservation de l'énergie s'introduit tout naturellement.

Peut-être ne comprendra-t-on pas très bien ce qui empêche d'annexer tout simplement ce principe fondamental aux autres principes du système classique.

Mais Hertz se pose encore une autre question :

Le système classique nous donne une image du monde extérieur. Cette image est-elle *simple ?* y a-t-on épargné les traits parasites, introduits arbitrairement à côté des traits essentiels? Les forces que nous sommes conduits à introduire ne sont-elles pas de véritables rouages inutiles, tournant à vide ?

Sur cette table repose un morceau de fer; un observateur non prévenu croira que, puisqu'il n'y a pas de mouvement, il n'y a pas de force. Combien il se tromperait! La Physique nous enseigne que chaque atome du fer est attiré par tous les autres atomes de l'Univers. De plus, chaque atome du fer est magnétique et par conséquent soumis à l'action de tous les aimants de l'Univers. Tous les courants électriques du monde agissent aussi sur cet atome. J'allais oublier les forces électrostatiques, les forces moléculaires, etc.

Si quelques-unes de ces forces agissaient seules, leur action serait énorme; le morceau de fer volerait en éclats. Heureusement elles agissent toutes et elles se contrebalancent, de sorte qu'il ne se passe rien du tout. Votre observateur non prévenu, qui ne voit qu'une chose, un morceau de fer en repos, conclura évidemment que toutes ces forces n'existent que dans votre imagination.

Sans doute, toutes ces suppositions n'ont rien d'absurde, mais un système qui nous en débarrasserait serait, par cela seul, meilleur que le nôtre.

Il est impossible de n'être pas frappé de la portée de cette objection. Pour montrer, d'ailleurs, qu'elle n'est pas purement artificielle, il me suffira de rappeler le souvenir d'une polémique qui a eu lieu, il y a quelques années, entre deux savants tout à fait éminents, von Helmholtz et M. Bertrand, à propos des actions mutuelles des courants. M. Bertrand, cherchant à traduire dans le langage classique la théorie de von Helmholtz, se heurtait à des contradictions insolubles. Chaque élément du courant devait être soumis à un couple; mais un couple se compose de deux forces parallèles, égales et de sens contraire. M. Bertrand calculait que chacune de ces deux composantes devait être considérable, assez grande pour amener la destruction du fil, et il concluait au rejet de la théorie. Au contraire, von Helmholtz, partisan du système énergétique, ne voyait là aucune difficulté.

Ainsi, d'après Hertz, le système classique doit être abandonné : 1° parce qu'une bonne définition de la force est impossible; 2° parce qu'il est incomplet; 3° parce qu'il introduit des hypothèses parasites et que ces hypothèses peuvent engendrer souvent des difficultés purement artificielles et assez grandes cependant pour arrêter les meilleurs esprits.

II. — Système énergétique.

§ 1. — Objections diverses.

Le système énergétique a pris naissance à la suite de la découverte du principe de la conservation de l'énergie. C'est von Helmholtz qui lui a donné sa forme définitive.

On commence par définir deux quantités qui jouent le rôle fontamental dans cette théorie. Ces deux quantités sont : d'une part, l'*énergie cinétique* ou force vive; d'autre part, l'*énergie potentielle*.

Tous les changements que peuvent subir les corps de la nature sont régis par deux lois expérimentales.

1° La somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est une constante. C'est le principe de la conservation de l'énergie.

2° Si un système de corps est dans la situation A à l'époque t_0 et dans la situation B à l'époque t_1, il va toujours de la première situation à la seconde par un chemin tel que la valeur *moyenne* de la différence entre les deux sortes d'énergie, dans l'intervalle de temps qui sépare les deux époques t_0 et t_1, soit aussi petite que possible.

C'est là le principe de Hamilton, qui est une des formes du principe de moindre action.

La théorie énergétique présente sur la théorie classique les avantages suivants :

1° Elle est moins incomplète; c'est-à-dire que les principes de la conservation de l'énergie et de Hamilton nous apprennent plus que les principes fondamentaux de la théorie classique et excluent certains mouvements que la Nature ne réalise pas et qui seraient compatibles avec la théorie classique ;

2° Elle nous dispense de l'hypothèse des atomes, qu'il était presque impossible d'éviter avec la théorie classique.

Mais elle soulève à son tour de nouvelles difficultés ; avant de parler des objections de Hertz, j'en signale deux qui me viennent à l'esprit :

Les définitions des deux sortes d'énergie soulèveraient des difficultés presque aussi grandes que celles de la force et de la masse dans le premier système. Cependant on s'en tirerait plus facilement, au moins dans les cas les plus simples.

Supposons un système isolé formé d'un certain nombre de points matériels; supposons que ces points soient soumis à des forces ne dépendant que de leur position relative et de leurs distances mutelles et indépendantes de leurs vitesses. En vertu du principe de la conservation de l'énergie, il devra y avoir une fonction des forces.

Dans ce cas simple, l'énoncé du principe de la conservation de l'énergie est d'une extrême simplicité. Une certaine quantité, accessible à l'expérience, doit demeurer constante. Cette quantité est la somme de deux termes ; le premier dépend seulement de la position des points matériels et est indépendant de leurs vitesses; le second est proportionnel au carré de ces vitesses. Cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.

Le premier de ces termes, que j'appellerai U, sera l'énergie potentielle ; le second, que j'appellerai T, sera l'énergie cinétique.

Il est vrai que si $T + U$ est une constante, il en est de même d'une fonction quelconque de $T + U$,

$$\varphi(T + U).$$

Mais cette fonction $\varphi(T + U)$ ne sera pas la somme de deux termes l'un indépendant des vitesses, l'autre proportionnel au carré de ces vitesses. Parmi les fonctions qui demeurent constantes, il n'y en a qu'une qui jouisse de cette propriété, c'est $T + U$ (ou une fonction linéaire de $T + U$, ce qui ne fait rien, puisque cette fonction linéaire peut toujours être ramenée à $T + U$ par un changement d'unité et d'origine). C'est alors ce que nous appellerons l'énergie; c'est le premier terme que nous appellerons l'énergie potentielle et le second qui sera l'énergie cinétique. La définition des deux sortes d'énergie peut donc être poussée jusqu'au bout sans aucune ambiguïté.

Il en est de même de la définition des masses. L'énergie cinétique ou force vive s'exprime très simplement à l'aide des masses et des vitesses relatives de tous les points matériels, par rapport à l'un d'entre eux. Ces vitesses relatives sont accessibles à l'observation, et, quand nous aurons l'expression de l'énergie cinétique en fonction de ces vitesses relatives, les coefficients de cette expression nous donneront les masses.

Ainsi, dans ce cas simple, on peut définir les notions fondamentales sans difficulté. Mais les difficultés reparaissent dans les cas plus compliqués et, par exemple, si les forces, au lieu de dépendre seulement des distances, dépendent aussi des vitesses. Par exemple, Weber suppose que l'action mutuelle de deux molécules électriques dépend non seulement de leur distance, mais de leur vitesse et de leur accélération. Si les points matériels s'attiraient d'après une loi analogue, U dépendrait de la vitesse, et il pourrait contenir un terme proportionnel au carré de la vitesse.

Parmi les termes proportionnels aux carrés des vitesses, comment discerner ceux qui proviennent de T ou de U? Comment, par conséquent, distinguer les deux parties de l'énergie?

Mais il y a plus, comment définir l'énergie elle-même? Nous n'avons plus aucune raison de prendre comme définition $T + U$ plutôt que toute autre fonction de $T + U$, quand a disparu la propriété qui caractérisait $T + U$, celle d'être la somme de deux termes d'une forme particulière.

Mais ce n'est pas tout, il faut tenir compte, non seulement de l'énergie mécanique proprement dite, mais des autres formes de l'énergie, chaleur, énergie chimique, énergie électrique, etc. Le principe de la conservation de l'énergie doit s'écrire :

$$T + U + Q = \text{const.}$$

où T représenterait l'énergie cinétique sensible, U l'énergie potentielle de position, dépendant seulement de la position des corps, Q l'énergie interne moléculaire, sous la forme thermique, chimique ou électrique.

Tout irait bien si ces trois termes étaient absolument distincts, si T était proportionnel au carré des vitesses, U indépendant de ces vitesses et de l'état des corps, Q indépendant des vitesses et des positions des corps et dépendant seulement de leur état interne.

L'expression de l'énergie ne pourrait se décomposer que d'une seule manière en trois termes de cette forme.

Mais il n'en est pas ainsi; considérons des corps électrisés : l'énergie électrostatique due à leur action mutuelle dépendra évidemment de leur charge, c'est-à-dire de leur état ; mais elle dépendra également de leur position. Si ces corps sont en mouvement, ils agiront l'un sur l'autre électrodynamiquement et l'énergie électrodynamique dépendra non seulement de leur état et de leur position, mais de leurs vitesses.

Nous n'avons donc plus aucun moyen de faire le triage des termes qui doivent faire partie de T, de U et de Q et de séparer les trois parties de l'énergie.

Si $(T+U+Q)$ est constant, il en est de même d'une fonction quelconque

$$\varphi\,(T+U+Q).$$

Si $T+U+Q$ était de la forme particulière que j'ai envisagée plus haut, il n'en résulterait pas d'ambiguïté; parmi les fonctions $\varphi\,(T+U+Q)$ qui demeurent constantes, il n'y en aurait qu'une qui serait de cette forme particulière, et ce serait celle-là que je conviendrais d'appeler énergie.

Mais je l'ai dit, il n'en est pas rigoureusement ainsi; parmi les fonctions qui demeurent constantes, il n'y en a pas qui puissent rigoureusement se mettre sous cette forme particulière; dès lors, comment choisir parmi elles celle qui doit s'appeler l'énergie? Nous n'avons plus rien qui puisse nous guider dans notre choix.

Il ne nous reste plus qu'un énoncé pour le principe de la conservation de l'énergie ; *il y a quelque chose qui demeure constant*. Sous cette forme, il se trouve à son tour hors des atteintes de l'expérience et se réduit à une sorte de tautologie. Il est clair que si le monde est gouverné par des lois, il y aura des quantités qui demeureront constantes. Comme les principes de Newton, et pour une raison analogue, le principe de la conservation de l'énergie, fondé sur l'expérience, ne pourrait plus être infirmé par elle.

Cette discussion montre qu'en passant du système classique au système énergétique, on a réalisé un progrès ; mais elle montre, en même temps, que ce progrès est insuffisant.

Une autre objection me semble encore plus grave : le principe de moindre action est applicable aux phénomènes réversibles; mais il n'est nullement satisfaisant en ce qui concerne les phénomènes irréversibles ; la tentative de von Helmholtz pour l'étendre à ce genre de phénomènes n'a pas réussi et ne pouvait réussir; sous ce rapport tout reste à faire.

Ce sont d'autres objections, d'ordre presque métaphysique, que Hertz développe le plus longuement.

Si l'énergie est pour ainsi dire *matérialisée*, elle devra être toujours positive. Or, il y a des cas où il est difficile d'éviter la considération de l'énergie négative. Considérons, par exemple, Jupiter tournant autour du Soleil ; l'énergie totale a pour expression :

$$a\,v^2 - \frac{b}{r} + c$$

où a, b, c sont trois constantes positives, v la vitesse de Jupiter ; r sa distance au Soleil.

Comme nous disposons de la constante c, nous pouvons la supposer assez grande pour que l'énergie soit positive ; il y a déjà là quelque chose d'arbitraire qui choque l'esprit.

Mais, il y a plus. Imaginons, maintenant, qu'un corps céleste d'une masse énorme et d'une vitesse énorme vienne à traverser le système solaire ; quand il aura passé et qu'il se sera éloigné de nouveau à d'immenses distances, les orbites des planètes auront subi des perturbations considérables. Nous pouvons imaginer, par exemple, que le grand axe de l'orbite de Jupiter soit devenu beaucoup plus petit, mais que cette orbite soit restée sensiblement circulaire. Quelque grande que soit la constante c, si le nouveau grand axe est très petit, l'expression :

$$a\,v^2 - \frac{b}{r} + c$$

sera devenue négative, et on verra reparaître la difficulté que nous avions cru éviter en donnant à c une grande valeur.

En résumé, nous ne pouvons pas assurer que l'énergie demeurera toujours positive.

D'autre part, pour *matérialiser* l'énergie, il faut la *localiser* ; pour l'énergie cinétique, cela est facile, mais il n'en est pas de même pour l'énergie potentielle. Où localiser l'énergie potentielle due à l'attraction de deux astres ? Est-ce dans l'un des deux astres ? Est-ce dans les deux ? Est-ce dans le milieu intermédiaire ?

L'énoncé même du principe de moindre action a quelque chose de choquant pour l'esprit. Pour se rendre d'un point à un autre, une molécule matérielle, soustraite à l'action de toute force, mais assujettie à se mouvoir sur une surface, prendra la ligne géodésique, c'est-à-dire le chemin le plus court.

Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable. L'énoncé nous la présente pour ainsi dire comme un être animé et libre. Il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes.

§ 2. — Objection de la Boule.

La dernière objection, qui paraît être celle qui a le plus frappé Hertz, est d'une nature un peu différente.

On sait ce qu'on appelle un système à liaisons ; imaginons d'abord deux points réunis par une tringle rigide de façon que leur distance soit maintenue invariable ; ou, plus généralement, supposons qu'un mécanisme quelconque maintienne une relation entre les coordonnées de deux ou plusieurs points du système. C'est là une première sorte de liaison qu'on appelle « liaison solide ».

Supposons maintenant qu'une sphère soit assujettie à rouler sur un plan. La vitesse du point de contact doit être nulle ; nous avons donc une seconde sorte de liaison qui s'exprime par une relation non plus seulement entre les coordonnées des divers points du système, mais entre leurs coordonnées et leurs vitesses.

Les systèmes où il y a des liaisons de la seconde sorte jouissent d'une propriété curieuse que je vais chercher à expliquer sur l'exemple simple que je viens de citer, celui d'une boule roulant sur un plan horizontal.

Soit O un point du plan horizontal et C le centre de la sphère.

Pour bien définir la situation de la sphère mobile, je prendrai trois axes de coordonnées fixes Ox, Oy et Oz, les deux premiers situés dans le plan horizontal sur lequel roule la sphère ; et trois axes de coordonnées invariablement liées à la sphère $C\xi$, $C\eta$ et $C\zeta$.

La situation de la sphère sera entièrement définie quand on se donnera les deux coordonnées du point de contact et les neuf cosinus directeurs des axes mobiles par rapport aux axes fixes. Soit A une position de la sphère où le point de contact est en O à l'origine et où les axes mobiles sont parallèles aux axes fixes.

Les coordonnées du point de contact sont :

$$x = 0; \quad y = 0$$

et les neuf cosinus directeurs :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Donnons à la sphère une rotation infiniment petite ε autour de l'axe $C\xi$; elle viendra dans une position B où les coordonnées du point de contact deviennent :

$$x = 0, \quad y = 0$$

et les neuf cosinus :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{array}$$

Mais cette rotation est impossible puisqu'elle ferait glisser et non rouler la sphère sur le plan. Il est donc impossible de passer de la position A à la position infiniment voisine B *directement*, c'est-à-dire par un mouvement infiniment petit.

Mais nous allons voir que ce passage peut se faire *indirectement*, c'est-à-dire par un mouvement fini.

Partons de la position A. Faisons rouler la sphère sur le plan de telle façon que l'axe instantané de rotation soit situé dans le plan horizontal et à chaque instant parallèle à l'axe Oy, et arrêtons-nous quand l'axe $C\xi$ sera devenu vertical et parallèle à Oz. Nous serons arrivés dans une position D où les coordonnées du point de contact seront devenues :

$$x = \frac{\pi}{2} R, \quad y = 0$$

R étant le rayon de la sphère et les neuf cosinus :

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{array}$$

Dans la position D le point de contact est à l'extrémité de l'axe $C\xi$ qui est vertical.

Imprimons à la sphère une rotation ε autour de l'axe $C\xi$; cette rotation est un pivotement autour de l'axe vertical passant par le point de contact, elle ne comporte aucun glissement, elle est donc compatible avec les liaisons.

La sphère est venue alors dans une position E où les coordonnées de contact sont :

$$x = \frac{\pi}{2} R, \quad y = 0,$$

et les cosinus :

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \end{array}$$

Faisons maintenant rouler la sphère de façon que l'axe instantané de rotation reste constamment parallèle à Oy et, par conséquent, que le contact ait tout le temps lieu sur l'axe Ox. Arrêtons-nous quand le point de contact sera revenu à l'origine O. Il est aisé de voir que nous sommes arrivés à la position B.

On peut donc aller de la position A à la position B en passant par l'intermédiaire des positions D et E.

Hertz appelle *holonomes* les systèmes tels que, si les liaisons ne permettent pas de passer directement d'une certaine position à une autre infiniment voisine, elles ne permettent pas non plus de passer de l'une à l'autre indirectement. Ce sont les systèmes où il n'y a que des liaisons solides.

On voit que notre sphère n'est pas un système holonome.

Or, il arrive ceci que le principe de moindre action n'est pas applicable aux systèmes non holonomes.

En effet, on peut passer de la position A à la position B par le chemin que je viens de dire, et sans doute par beaucoup d'autres chemins; parmi tous ces chemins il y en a évidemment un qui correspond à une action plus petite que tous les autres; la sphère devrait donc pouvoir le suivre pour aller de A en B; il n'en est rien; quelles que soient les conditions initiales du mouvement, la sphère n'ira jamais de A en B.

Il y a plus, si la sphère va effectivement de la position A à une autre position A', elle ne prendra pas toujours le chemin qui correspond à l'action minimum.

Le principe de moindre action n'est plus vrai.

« Dans ce cas, dit Hertz, une sphère qui obéirait à ce principe, semblerait un être vivant qui poursuivrait consciemment un but déterminé, tandis qu'une sphère, qui suivrait la loi de la Nature, offrirait l'aspect d'une masse inanimée roulant uniformément..... Mais, dira-t-on, de semblables liaisons n'existent pas dans la Nature; ce prétendu roulement sans glissement n'est qu'un roulement avec un petit glissement. Ce phénomène rentre dans les phénomènes irréversibles tels que le frottement, encore mal connus et auxquels nous ne *savons* pas encore appliquer les vrais principes de la Mécanique.

« Un roulement sans glissement, répondrons-nous, n'est contraire ni au principe de l'énergie ni à aucune des lois connues de la Physique; ce phénomène peut être réalisé dans le monde visible avec une telle approximation qu'on a pu s'en servir pour construire les machines d'intégration les plus délicates (planimètres, analyseurs harmoniques, etc.). Nous n'avons aucun droit de l'exclure comme impossible; mais le serait-il et ne pourrait-il se réaliser qu'approximativement que les difficultés ne disparaîtraient pas. Pour adopter un principe, nous devons exiger qu'appliqué à un problème dont les données sont approximativement exactes, il donne aussi des résultats approximativement exacts. Et d'ailleurs les autres liaisons, les liaisons solides ne sont aussi qu'approximativement réalisées dans la Nature; on ne les exclut pas cependant... »

III. — Système Hertzien.

Voici maintenant quel est le système que Hertz propose de substituer aux deux théories qu'il critique. Ce système repose sur les hypothèses suivantes :

1° Il n'y aurait dans la Nature que des systèmes à liaisons, mais soustraits à l'action de toute force extérieure;

2° Si certains corps nous paraissent obéir à des forces, c'est qu'ils sont *liés* à d'autres corps qui, pour nous, sont invisibles.

Un point matériel qui nous semble libre ne décrit pas cependant une trajectoire rectiligne; les anciens mécaniciens disaient qu'il s'en écarte parce qu'il est soumis à une force; Hertz dit qu'il s'en écarte parce qu'il n'est pas libre, mais lié à d'autres points invisibles.

Cette hypothèse semble étrange au premier abord : pourquoi en dehors des corps visibles introduire des corps invisibles hypothétiques? Mais, répond Hertz, les deux anciennes théories sont obligées également de supposer en dehors des corps visibles, je ne sais quels êtres invisibles; la théorie classique introduit les forces; la théorie énergétique introduit l'énergie; mais ces êtres invisibles, force et énergie, sont d'une nature inconnue et mystérieuse; les êtres hypothétiques que j'imagine sont, au contraire, tout à fait de même nature que les corps visibles.

N'est-ce pas plus simple et plus naturel?

On pourrait discuter sur ce point et soutenir que les entités des anciennes théories doivent être retenues précisément à cause de leur nature mystérieuse. Respecter ce mystère, c'est un aveu d'ignorance; et puisque notre ignorance est certaine, ne vaut-il pas mieux l'avouer que la dissimuler?

Mais passons, et voyons quel parti tire Hertz de ses hypothèses.

Les mouvements des systèmes à liaisons, sans force extérieure, sont régis par une loi unique.

Parmi les mouvements compatibles avec les liaisons, celui qui se réalisera sera celui qui sera tel que la somme des masses multipliées par le carré des accélérations soit minimum.

Ce principe équivaut à celui de la moindre action si le système est holonome, mais il est plus général, car il s'applique aussi aux systèmes non holonomes.

Pour bien nous rendre compte de la portée de ce principe, prenons un exemple simple : celui d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface. Ici nous n'avons qu'un seul point matériel; l'accélération doit donc être minimum; pour cela, il faut que l'accélération tangentielle soit nulle; or, cette accélération est égale à $\frac{dv}{dt}$, v étant la vitesse et t le temps; donc v est une constante, et le mouvement du point est uniforme; il faut, de plus, que l'accélération normale soit minimum; or elle est égale à $\frac{v^2}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire, ou à $\frac{v^2}{R\cos\varphi}$, R étant le rayon de courbure de la section normale à la surface, et φ, l'angle du plan osculateur à la trajectoire avec la normale à la surface.

Or la vitesse est supposée connue en grandeur et en direction. Donc v et R sont connus.

Il faut donc que $\cos \varphi = 1$, c'est-à-dire que le plan osculateur soit normal à la surface; c'est-à-dire que le point mobile décrive une ligne géodésique.

Pour faire comprendre maintenant comment peut s'expliquer le mouvement des systèmes qui nous *paraissent* soumis à des forces, je prendrai encore un exemple simple, celui du régulateur à boules. Cet appareil bien connu se compose d'un parallélogramme articulé ABCD: les angles opposés B et D de ce parallélogramme portent des boules dont la masse est notable; l'angle supérieur A est fixe; l'angle inférieur C porte un anneau qui peut glisser le long d'une tige verticale fixe AX; tout l'appareil est animé d'un mouvement de rotation rapide autour de la tige AX. A l'anneau C est suspendue une tringle T.

La force centrifuge tend à écarter les boules et par conséquent à soulever l'anneau C et la tringle T. Cette tringle T est donc soumise à une traction qui est d'autant plus forte que la rotation est plus rapide.

Supposons maintenant un observateur qui voie seulement cette tringle et imaginons que les boules, la tige AX, le parallélogramme, soient faits d'une matière invisible pour lui. Cet observateur constatera la traction exercée sur la tringle T; mais comme il ne verra pas les organes qui la produisent, il l'attribuera à une cause mystérieuse, à une « force », à une attraction exercée par le point A sur la tringle.

Eh bien, d'après Hertz, toutes les fois que nous imaginons une force, nous sommes dupes d'une illusion analogue.

Une question se pose alors : peut-on imaginer un système articulé qui imite un système de forces, défini par une loi quelconque ou en approchant autant qu'on voudra ? La réponse doit être affirmative ; je me contenterai de rappeler un théorème de M. Kœnigs qui pourrait servir de base à une démonstration. Voici ce théorème : On peut toujours imaginer un système articulé, tel qu'un point de ce système décrive une courbe ou une surface algébrique quelconque; ou, plus généralement, on peut imaginer un système articulé tel qu'en vertu de ses liaisons, les coordonnées des divers points du système soient assujetties à des relations algébriques données quelconques.

Seulement, les hypothèses auxquelles on serait conduit pourraient être très compliquées.

Ce n'est pas d'ailleurs la première tentative que l'on faisait dans ce sens. Il est impossible de ne pas rapprocher les hypothèses de Hertz de la théorie de lord Kelvin sur l'élasticité gyrostatique.

Lord Kelvin, on le sait, a cherché à expliquer les propriétés de l'éther sans faire intervenir aucune force. Il a même donné une forme définitive à son hypothèse et représente l'éther par un de ces modèles mécaniques comme les aiment les Anglais. Les savants anglais, satisfaits d'avoir donné un corps à leurs idées, de les avoir rendues tangibles, ne sont pas effrayés par la complication de ces modèles où l'on a multiplié les tringles, les bielles, les coulisses, comme dans un atelier de mécanicien.

Décrivons, pour en donner une idée, le modèle qui représente l'éther gyrostatique. L'éther serait formé d'une sorte de réseau. Chaque maille de ce réseau est un tétraèdre. Chacune des arêtes de ce tétraèdre est formée de deux tiges, l'une pleine et l'autre creuse, coulissant l'une dans l'autre; cette arête est donc extensible, mais non flexible.

Dans chaque maille se trouve un appareil formé de trois tiges invariablement fixées l'une à l'autre et formant un trièdre trirectangle. Chacune de ces trois tiges s'appuie sur deux des arêtes opposées du tétraèdre; enfin, chacune d'elles porte quatre gyroscopes.

Dans le système que je viens de décrire, il n'y a pas d'énergie potentielle; mais seulement de l'énergie cinétique, celle des tétraèdres, et celle des gyroscopes. Cependant, un milieu ainsi constitué se comporterait comme un milieu élastique; il transmettrait des ondulations transversales absolument comme l'éther.

J'ajouterai une chose encore : avec des systèmes articulés de ce genre, contenant des gyroscopes, on peut non seulement imiter toutes les forces que nous trouvons dans la Nature, mais encore en imiter d'autres que la Nature ne saurait réaliser; c'est précisément là le but que lord Kelvin se proposait; il voulait expliquer certaines propriétés de l'éther dont les hypothèses ordinaires lui paraissaient incapables de rendre compte.

On sait que l'axe du gyroscope tend à conserver une direction fixe dans l'espace; quand il en est écarté, il tend à y revenir comme s'il était sollicité par une force dirigeante. Cette force apparente qui tend à maintenir la direction du gyroscope, n'est pas, comme les forces réelles, contrebalancée par une réaction égale et contraire. Elle est donc affranchie de la loi de l'action et de la réaction, et de ses conséquences telles que la loi des aires, auxquelles sont soumises les forces naturelles.

On conçoit donc que l'hypothèse gyrostatique, où l'on est affranchi de cette règle restrictive, ait rendu compte de faits que ne pouvaient expliquer les hypothèses ordinaires qui y restent assujetties.

Que doit-on penser, en définitive, de la théorie de Hertz? Intéressante à coup sûr, elle ne me satisfait pas entièrement parce qu'elle fait la part trop grande à l'hypothèse.

Hertz s'est mis à l'abri de quelques-unes des objections qui l'avaient tourmenté; il ne paraît pas les avoir écartées toutes.

Les difficultés que nous avons longuement discutées au début de cet article pourraient se résumer ainsi :

On a exposé les principes de la Dynamique de bien des manières: mais jamais on n'a suffisamment distingué ce qui est définition, ce qui est vérité expérimentale, ce qui est théorème mathématique. Dans le système hertzien, la distinction n'est pas encore parfaitement nette, et, de plus, un quatrième élément est introduit : l'hypothèse.

Néanmoins, par cela seul qu'il est nouveau, ce mode d'exposition est utile : il nous force à réfléchir, à nous affranchir de vieilles associations d'idées. Nous ne pouvons pas encore voir le monument tout entier; c'est quelque chose d'en avoir une perspective nouvelle, prise d'un point de vue nouveau.

H. Poincaré,
de l'Académie des Sciences,
Professeur de Mécanique céleste
à la Sorbonne.

ÉTAT ACTUEL
DE L'INDUSTRIE DE L'AMMONIAQUE CAUSTIQUE
DE L'AMMONIAQUE LIQUÉFIÉE ET DES SELS AMMONIACAUX

Nous avons étudié, dans un précédent article[1], l'état de la production et de la récupération de l'ammoniaque, dans les diverses industries qui sont la source de cette base. Après avoir passé en revue les divers modes d'obtention de l'ammoniaque, il nous paraît intéressant de compléter cette étude par la description des procédés actuels de préparation de l'ammoniaque caustique à divers degrés et des sels ammoniacaux.

Comme nous l'avons vu, les deux produits obtenus directement soit dans les usines à gaz, soit des fours à coke, etc., sont l'ammoniaque caustique et le sulfate d'ammoniaque, ce dernier servant presque toujours de matière première pour l'obtention des autres sels ammoniacaux.

Nous allons donc décrire d'abord, avec quelques détails, les divers perfectionnements apportés à la fabrication de ces deux corps, puis nous passerons à l'étude des autres sels ammoniacaux.

I. — Ammoniaque caustique.

Nous comprendrons sous le nom d'ammoniaque caustique :

1° Les eaux concentrées, quoique celles-ci soient composées non seulement d'ammoniaque libre, mais de carbonate, sulfure et autres sels d'ammonium;

2° L'alcali volatil à ses divers degrés commerciaux 22° B., 24° B. et 29° B.;

3° L'ammoniaque pure, liquéfiée et anhydre.

§ 1. — Eaux concentrées.

Les eaux ammoniacales, telles qu'elles sont obtenues dans la fabrication du gaz, ont un titre de 3° B. à 10° B., suivant les points où les eaux sont prélevées. Leur concentration dépend entièrement des laveurs et des scrubbers employés à la condensation, ainsi que de la conduite de ces appareils.

Le fabricant devra donc toujours chercher à obtenir, après le dernier scrubber, les eaux les plus riches possible, de façon à diminuer dans la plus grande proportion les frais de concentration.

Dans le lavage réside presque toute la question des bons rendements en ammoniaque.

Il est facile, en Angleterre, de contrôler les divers rendements de chacune des usines, grâce à une publication anglaise ayant pour titre *Gas Work's Statistics*, qui reproduit tous ces renseignements. Nous n'avons malheureusement en France aucune publication de ce genre qui puisse nous fournir de semblables données.

Les petites usines, en général, ne transforment pas leur ammoniaque en sels ammoniacaux, ce qui serait, parfois cependant, plus rémunérateur, surtout pour la fabrication des sels purs; elles ne font que concentrer leurs eaux en les amenant de 3° B. à 17°-19° B.

La concentration de ces eaux se fait dans les appareils Solvay, Chevalet, Elwert, etc., à l'aide de serpentins ou de faisceaux tubulaires, refroidis par un courant d'eau froide. Il est difficile, à cause du carbonate d'ammoniaque, qui occasionne facilement des obstructions, de dépasser un titre de 15 %. On obtient ainsi des eaux de couleur jaunâtre,

[1] Voyez la *Revue générale des Sciences* du 28 février 1897.