COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 5 AVRIL 1897,

PRÉSIDENCE DE M. A. CHATIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le Secrétaire perpétuel annonce à l'Académie que le Tome CXXII des *Comptes rendus* est en distribution au Secrétariat.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. — *Les solutions périodiques et le principe de moindre action*. Note de M. H. Poincaré.

« Je considère un point mobile dans un plan, les équations du mouvement s'écriront

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy},$$

et celle des forces vives s'écrira

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right) = U + h,$$

U étant la fonction des forces. Je me propose d'étudier à un point de vue nouveau les solutions périodiques de ces équations. La trajectoire qui correspond à une solution périodique sera une courbe fermée (T).

» A chaque solution périodique correspondront deux *exposants caractéristiques*, égaux et de signe contraire. Si ces deux exposants sont imaginaires, la solution périodique sera stable; s'ils sont réels, elle sera instable. Mais la considération du principe de moindre action va nous conduire à pousser plus loin cette classification et à distinguer deux sortes de solutions instables.

» On sait, par le principe de Maupertuis, que l'intégrale

$$J = \int \sqrt{U + h}\, ds,$$

appelée *action*, est plus petite pour une trajectoire satisfaisant aux équations (1) que pour une courbe infiniment voisine ayant mêmes extrémités. Cela est vrai si ces deux extrémités sont très voisines l'une de l'autre; mais, en général, tout ce que nous savons c'est que la variation première δJ de l'intégrale J est nulle.

» C'est là une condition nécessaire, mais non suffisante pour qu'il y ait minimum.

» Si l'on veut pousser plus loin la discussion, il faut avoir recours à la notion des foyers cinétiques dont je vais rappeler la définition. Soit M un point situé sur une trajectoire T; par ce point je mène une autre trajectoire infiniment voisine de T; si cette trajectoire vient recouper T en un point M', ce point M' sera le foyer de M.

» L'étude des foyers cinétiques, dans le cas des solutions périodiques, m'a conduit aux résultats suivants :

» Supposons d'abord la solution périodique stable; soient s l'arc de la trajectoire fermée (T) correspondante, compté à partir d'une origine quelconque, et S la longueur totale de cette trajectoire. Il existera une fonction $f(s)$ constamment croissante, augmentant de 2π quand s augmente de S, de telle sorte que

$$f(s + S) = f(s) + 2\pi.$$

» La relation entre la valeur s de l'arc correspondant à un point M de (T) et la valeur s' correspondant à son foyer M' sera

$$f(s') = f(s) + \text{const}.$$

» Si la solution périodique est instable, deux cas sont à distinguer : La solution sera de la première sorte, si aucun point de la trajectoire n'a de foyer. Alors les trajectoires correspondant aux solutions asymptotiques seront des courbes spirales s'enroulant autour de (T) et s'en rapprochant asymptotiquement.

» Les spires de ces courbes spirales ne coupent pas (T) et ne se coupent pas entre elles, au moins si l'on se borne à la partie de la courbe qui ne s'écarte pas trop de (T).

» Mais un autre cas peut se présenter et nous dirons alors que la solution périodique instable est de la seconde sorte. La courbe fermée (T) sera divisée en un nombre pair d'arcs; soient $2p$ ce nombre et $A_0, A_1, \ldots, A_{2p-1}$ les points de division. Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment le point A_q par les notations $A_q, A_{q+2p}, A_{q+4p}, \ldots$.

» 1° Le point A_{q+1} sera le foyer de A_q.

» 2° Si un point M est sur l'arc $A_q A_{q+1}$, son foyer sera sur l'arc $A_{q+1} A_{q+2}$.

» 3° Soient M_1 le foyer de M, M_2 le second foyer de M, c'est-à-dire le foyer de M_1, M_q le $q^{\text{ième}}$ foyer de M. Si le point M est sur l'arc $A_0 A_1$, il en sera de même des points $M_{2p}, M_{4p}, \ldots, M_{2kp}, \ldots$ et ces points se rapprocheront indéfiniment et constamment de l'un des points A_0 ou A_1.

» 4° Il existera sur l'arc $A_0 A_1$ un point B_0 qui coïncidera avec son $2p^{\text{ième}}$ foyer et, quand k tendra vers $-\infty$, le point M_{-2kp} se rapprochera indéfiniment de B_0.

» Les solutions asymptotiques sont représentées alors par des courbes qui ne présentent plus la même forme que dans le cas précédent : elles coupent une infinité de fois la courbe (T), et les points d'intersection admettent comme points limites le point A_0 et ses foyers ou le point B_0 et ses foyers.

» Cela posé, il y a deux faits sur lesquels je veux appeler l'attention :

» 1° La condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution périodique représentée par une courbe fermée (T) corresponde à une action moindre que toutes les courbes fermées infiniment voisines, c'est que cette solution soit une solution instable de la première sorte.

» 2° Supposons que l'on fasse varier d'une façon continue la fonction U et les conditions initiales du mouvement et que l'on envisage une solution périodique variant aussi d'une manière continue. On ne pourra jamais passer directement d'une solution instable de la première sorte à une solution instable de la deuxième sorte; on pourra passer seulement d'une solution instable de l'une des deux sortes à une solution stable ou inversement.

» Ce que je viens de dire s'appliquerait sans changement au cas du mouvement relatif.

» Supposons que le point mobile soit rapporté à des axes mobiles, animés d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω.

» Les équations s'écriraient alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\frac{dy}{dt} = \frac{dU}{dx},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dy},$$

en comprenant dans la fonction des forces U le terme provenant de la force centrifuge ordinaire.

» L'équation des forces vives serait encore

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right) = U + h$$

et l'expression de l'action deviendrait

$$J = \int\left[ds\sqrt{U+h} + \omega(x\,dy - y\,dx)\right]. \text{ »}$$

CHIMIE MINÉRALE. — *Préparation du carbure de fer par union directe du métal et du carbone.* Note de M. **Henri Moissan**.

« L'étude du carbure de fer a fixé depuis longtemps l'attention des chimistes. Il me suffira de rappeler les nombreuses recherches publiées sur ce sujet et, en particulier, les travaux de Sir F. Abel, de Deering, de Muller, Osmond et Wœrth (1885); Arnolds et Read (1894); le Mémoire de Mylius, Fœrster et Schwenz (1896), qui est un modèle de patientes recherches et d'habileté expérimentale; celui de Campbell (1896), qui a plus particulièrement étudié la décomposition du carbure de fer par l'acide chlorhydrique étendu et la production des carbures gazeux et liquides; et les travaux de Jüptner (1896) sur le pouvoir de saturation du fer par le carbone. Je laisse de côté nombre de publications sur le même sujet.

» De l'ensemble de ces recherches il résulte nettement que l'acier fondu ou recuit renferme un carbure cristallisé, répondant à la formule Fe^3C, que l'on prépare avec la plus grande facilité.