COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 2 MARS 1896,

PRÉSIDENCE DE M. A. CORNU.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *Sur la divergence des séries de la Mécanique céleste.* Note de M. **H. Poincaré.**

« M. Hill a publié, dans le *Bulletin of the American Mathematical Society*, une Note intitulée : *On the convergence of the series used in the subject of perturbations,* et dont les résultats semblent au premier abord en contradiction avec ceux que j'ai obtenus. Je crois donc nécessaire de montrer que cette contradiction n'est qu'apparente; j'ajouterai même que le principal théorème de M. Hill avait déjà été démontré par moi.

» Je rappelle succinctement les propositions que j'ai énoncées (*Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste,* t. II, Chap. XIII) :

» Mettons les équations de la Mécanique céleste sous la forme

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

La fonction F est périodique par rapport aux y_i; elle dépend des x_i d'une manière quelconque. De plus, certains de ses termes sont très petits par rapport aux autres, et nous pouvons mettre en évidence l'ordre de grandeur de ces différents termes en introduisant une quantité très petite μ et en développant F suivant les puissances de μ sous la forme

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots;$$

F_0 ne dépend pas de y_i.

» On trouve alors qu'on peut satisfaire formellement aux équations (1) par des séries de la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots \\ y_i = w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots \end{array} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les x_i^k et les y_i^k sont des fonctions périodiques des quantités

$$w_i = n_i t + \varpi_i;$$

les ϖ_i sont des constantes d'intégration; les n_i sont des constantes (dites *moyens mouvements*) qui sont développables en séries ordonnées suivant les puissances de μ.

» Les x_i^k ou y_i^k sont eux-mêmes développables en séries de la forme

$$(3) \qquad x_i^k (\text{ou } y_i^k) = \Sigma A \cos(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \ldots + m_n w_n + h).$$

On peut alors se demander :

» 1° Si les séries (3) convergent;

» 2° Si [en admettant que les séries (3) convergent et que, par conséquent, on puisse former les séries (2)] les séries (2) convergent.

» Pour simplifier l'exposition de cette discussion, je supposerai deux arguments seulement w_1 et w_2 et deux moyens mouvements n_1 et n_2. Commençons par l'étude des séries (3).

» Si le rapport des moyens mouvements est commensurable, un des termes de la série devient infini; laissons de côté ce cas.

» J'ai montré (p. 96, 97) que les valeurs incommensurables du rapport des moyens mouvements peuvent se répartir en deux catégories : celles pour lesquelles la série converge, celles pour lesquelles la série diverge, et que dans tout intervalle, *si petit qu'il soit*, il y a des valeurs de la première catégorie et des valeurs de la deuxième.

» J'ai démontré, en particulier, que la série converge pour les valeurs incommensurables dont le carré est commensurable.

» C'est ce dernier résultat que retrouve M. Hill par une démonstration de tout point semblable à la mienne, mais il le généralise en montrant qu'il en est de même pour toutes les valeurs qui satisfont à une équation algébrique à coefficients entiers.

» Il n'y a donc, on le voit, aucun désaccord.

» Le point essentiel n'en subsiste pas moins, quelle que soit l'approximation avec laquelle les moyens mouvements seront connus; nous ne pourrons assigner une limite supérieure à l'erreur commise en s'arrêtant à un terme de la série.

» La convergence de la série ne peut être uniforme.

» Passons maintenant au second point : je veux dire à la convergence des séries (2). Cette question n'est pas abordée par M. Hill.

Il semble d'abord qu'elle ne doive même pas se poser, puisque la convergence des séries (3), quand elle a lieu, n'est pas uniforme. Mais un artifice très simple permet de former néanmoins les séries (2).

» Si, en effet, les fonctions F_1, F_2, etc. ne contiennent chacune qu'un nombre fini de termes, chacune des séries (3) se réduira également à un nombre fini de termes. Sa convergence sera donc assurée.

» A la vérité, il n'en est pas ainsi quand μ représente une des masses perturbatrices; il en serait ainsi, au contraire, dans la théorie de la Lune, ou bien encore si l'on développait à la fois suivant les puissances des masses et des excentricités.

» Dans tous les cas, μ ne joue d'autre rôle que celui de quantité très petite, et rien n'empêche de grouper ensemble, sous la notation $\mu^n F_n$, tous les termes dont les coefficients sont des quantités du $n^{\text{ième}}$ ordre de grandeurs.

» Grâce à cet artifice, les séries (3) deviennent convergentes et il s'agit d'envisager les séries (2).

» Malheureusement, ici, le mode de démonstration employé par M. Hill, et dont je m'étais également servi pour les séries (3), cesse d'être applicable; je n'ai donc rien à changer à mes conclusions, dont il importe de bien se rappeler la portée exacte, que j'ai cherché à préciser autant que possible. »