Remarques diverses sur les fonctions abéliennes;

PAR M. H. POINCARÉ.

1. — Définitions.

Je considère un système de fonctions abéliennes de genre p dépendant des p variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

et admettant $2p$ périodes.

J'écrirai souvent pour abréger

$$F(u_i) \quad \text{ou} \quad F(u_i - e_i),$$

au lieu de

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_p) \quad \text{ou} \quad F(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p),$$

$e_1, e_2, \ldots, e_p$ étant des constantes quelconques.

Si $F(u_i)$ est une des fonctions abéliennes considérées et si l'on a

$$F(u_i) = F(u_i + a_i),$$

on dit que

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p$$

est une période; on sait qu'on peut toujours supposer que l'on a choisi les variables *normales* et les périodes *normales* de sorte que le Tableau complet des $2p$ périodes s'écrive

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} 2i\pi, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 2i\pi, & \ldots, & 0, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ 0, & 0, & \ldots, & 2i\pi, \\ a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,p}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,p}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{p,1}, & a_{p,2}, & \ldots, & a_{p,p}, \end{array}\right.$$

avec la condition

$$a_{i,k} = a_{k,i}.$$

Les p premières périodes du Tableau (1) seront les périodes de première espèce et les p dernières les périodes de seconde espèce.

Une fonction θ d'ordre n est une fonction entière qui jouit des propriétés suivantes :

1° Quand on augmente les u_i de la $k^{\text{ième}}$ période de première espèce (c'est-à-dire quand on change u_k par exemple en $u_k + 2i\pi$, les autres u_i ne changeant pas), la fonction θ est multipliée par un facteur constant, que j'appelle α_k;

2° Quand on augmente les u_i de la $k^{\text{ième}}$ période de seconde espèce, la fonction θ est multipliée par un facteur exponentiel de la forme

$$e^{nu_k+\gamma_k},$$

de sorte que

$$\theta(u_i + a_{ik}) = e^{nu_k+\gamma_k}\,\theta(u_i).$$

Les facteurs

$$\alpha_k \quad \text{et} \quad e^{nu_k+\gamma_k}$$

s'appelleront les *multiplicateurs*.

Si deux fonctions θ ont les mêmes multiplicateurs, on dira qu'elles appartiennent au même *faisceau*.

Il est bien connu que, dans un faisceau d'ordre n et de genre p, il y a

$$n^p$$

fonctions θ linéairement indépendantes dont toutes les autres fonctions θ du faisceau sont des combinaisons linéaires.

Parmi les fonctions θ il y en a une qui est particulièrement remarquable et que j'appellerai Θ.

C'est la fonction bien connue

$$\sum e^{m_1u_1+m_2u_2+\ldots+m_pu_p-\frac{1}{2}\sum_{ik}a_{ik}m_im_k},$$

qui est une fonction θ du premier ordre.

Le cas le plus simple est celui que j'appellerai le *cas singulier elliptique;* c'est celui où dans le Tableau (1) des périodes normales tous les a_{ik} sont nuls si $i \gtrless k$.

La fonction Θ est alors le produit de p fonctions Θ elliptiques.

Vient ensuite le cas que j'appellerai *cas singulier abélien.* Il se présentera dans les circonstances suivantes.

Soit

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_q.$$

Prenons les p dernières lignes du Tableau (1), nous obtiendrons ainsi un Tableau à p lignes et p colonnes. Je suppose que tous les éléments de ce Tableau soient nuls, sauf :

1° Ceux qui appartiennent à la fois aux p_1 premières lignes et aux p_1 premières colonnes;

2° Ceux qui appartiennent à la fois aux p_2 lignes suivantes et aux p_2 colonnes suivantes;

. . . .

Et enfin ceux qui appartiennent à la fois aux p_q dernières lignes et aux p_q dernières colonnes.

S'il en est ainsi la fonction Θ à p variables sera le produit de q fonctions Θ admettant respectivement p_1, p_2, ... et p_q variables.

On sait comment les fonctions abéliennes ont été imaginées; on a considéré une courbe algébrique quelconque de genre p et les p intégrales abéliennes de première espèce correspondantes que j'appellerai $v_1, v_2, \ldots, v_p$; supposons alors qu'on prenne sur la courbe p points quelconques, qu'on considère une des intégrales abéliennes v_i, et qu'on fasse la somme Σv_i des valeurs de cette intégrale en ces p points.

Alors toute fonction symétrique des coordonnées de nos p points sera une fonction abélienne de

$$\Sigma v_1, \quad \Sigma v_2, \quad \ldots, \quad \Sigma v_p.$$

Mais on sait également que toutes les fonctions abéliennes ne peuvent pas être obtenues de cette manière.

Un système S de fonctions abéliennes de genre p dépend de

$$\frac{p(p+1)}{2}$$

constantes qui sont les périodes normales a_{ik}.

Une courbe algébrique de genre p, si l'on ne regarde pas comme distinctes deux courbes dérivées l'une de l'autre par une transformation birationnelle, ne dépend que de $3p-3$ constantes.

Ces deux nombres sont égaux pour $p=2$ et pour $p=3$; mais, pour $p>3$, le premier est plus grand; il existe donc des fonctions abéliennes qui n'ont pas pour origine une courbe algébrique de genre p.

J'appellerai fonctions abéliennes *spéciales* celles qui admettent cette origine.

2. — Zéros des θ.

Après ces préliminaires sur lesquels j'ai peut-être un peu longuement insisté, j'arrive à l'objet de mon travail qui est l'étude des zéros des fonctions Θ. Cette question a été abordée par deux voies très différentes; et par l'une comme par l'autre on a pénétré assez loin à l'intérieur du domaine inconnu qu'il s'agissait d'explorer; mais ces deux voies ne se sont pas encore rejointes, pour ainsi dire; c'est là le résultat que je voudrais atteindre, car je crois qu'il ne doit plus nous coûter qu'un léger effort.

Dans le Tome X du *Bulletin de la Société mathématique de France*, j'ai démontré le théorème suivant :

Soit p fonctions θ qui soient respectivement d'ordre

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p;$$

le nombre de leurs zéros communs sera

$$n_1 n_2 \ldots n_p (p!).$$

Bien entendu, je ne considère pas comme distincts deux zéros qui ne diffèrent que par des multiples des périodes.

Si en particulier l'on considère p fonctions θ d'ordre n appartenant à un même faisceau, le nombre de leurs zéros communs sera

$$n^p p!$$

Il en résulte que la relation algébrique qui existe entre $p+2$ fonctions θ d'ordre n, appartenant à un même faisceau, est d'ordre

$$n^p p!$$

ou d'ordre moindre; et il est aisé de vérifier ensuite qu'en général elle n'est pas d'ordre moindre.

Mais il ne sera peut-être pas sans intérêt de montrer comment on peut arriver au même résultat par un chemin entièrement différent.

Considérons donc $p+2$ fonctions θ d'ordre n appartenant à un même faisceau; soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p+2}$ ces fonctions.

Considérons un polynome homogène et d'ordre m par rapport à ces $p+2$ fonctions θ.

Les coefficients arbitraires de ce polynome sont au nombre de

$$\frac{(m+p+1)!}{(m)!\,(p+1)!}.$$

Mais ce polynome sera une fonction θ d'ordre

$$mn,$$

et tous les polynomes ainsi obtenus seront des fonctions θ *appartenant au même faisceau.*

Or un faisceau de genre p et d'ordre mn ne peut contenir que

$$m^p n^p$$

fonctions θ linéairement indépendantes.

Il y a donc *au moins*

$$\varphi(m) = \frac{(m+p+1)!}{(m)!\,(p+1)!} - (m)^p n^p$$

de nos polynomes qui s'annulent et qui d'ailleurs sont linéairement indépendants.

Il y a donc *au moins*, entre nos $p+2$ fonctions θ d'ordre n, $\varphi(m)$ relations algébriques homogènes d'ordre m, linéairement distinctes.

Soit, d'autre part,

$$F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p+2}) = 0$$

celle de toutes les relations algébriques entre les $p+2$ fonctions θ dont le degré est le plus petit.

Soit q ce degré; c'est le nombre q qu'il s'agit de déterminer.

Toutes les autres relations algébriques homogènes entre les $p+2$ fonctions θ s'obtiendront en multipliant

$$F = 0$$

par un polynome quelconque homogène par rapport aux θ.

Nous pouvons maintenant répondre à la question suivante :

Combien y a-t-il entre les θ de relations algébriques et homogènes d'ordre $q+h$ linéairement distinctes?

Il y en aura autant que de polynomes homogènes d'ordre h linéairement indépendantes; car on obtiendra toutes ces relations en multipliant $F = 0$ par l'un de ces polynomes.

Il y aura donc entre les $p+2$ fonctions θ

$$\frac{(h+p+1)!}{h!\,(p+1)!}$$

relations algébriques homogènes d'ordre $q+h$ et il n'y en aura pas davantage.

Nous aurons donc, quel que soit le nombre h,

$$\frac{(h+p+1)!}{h!\,(p+1)!} \geqq \varphi(q+h)$$

ou bien

$$(1)\qquad \frac{(h+p+1)!}{h!\,(p+1)!}-\frac{(q+h+p+1)!}{(q+h)!\,(p+1)!}+(q+h)^p n^p \gtreqq 0,$$

ou bien

$$(1\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{(h+p+1)(h+p)\dots(h+2)(h+1)}{(p+1)!}\\ &\quad-\frac{(q+h+p+1)(q+h+p)\dots(q+h+1)}{(p+1)!}\\ &\qquad\qquad\qquad+(q+h)^p n^p \gtreqq 0.\end{aligned}\right.$$

Tous les termes du premier membre de (1) ou de (1 *bis*) sont des polynomes entiers en h.

Le premier terme

$$\frac{(h+p+1)!}{h!\,(p+1)!}$$

est un polynome d'ordre $p+1$ dont les deux premiers termes sont

$$\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{(p+1)(p+2)}{2(p+1)!}h^p.$$

Le second terme

$$-\frac{(q+h+p+1)!}{(q+h)!\,(p+1)!}$$

est un polynome d'ordre $p+1$ dont les deux premiers termes sont

$$-\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}-\frac{qh^p}{p!}-\frac{(p+1)(p+2)}{2(p+1)!}h^p.$$

Enfin le troisième terme est un polynome d'ordre p dont le premier terme est

$$n^p h^p.$$

Il résulte de tout cela que les termes en h^{p+1} se détruisent et que le premier membre de (1) est un polynome d'ordre p en h dont le premier terme est

$$h^p\left(n^p-\frac{q}{p!}\right).$$

Comme le premier membre de (1) ne peut être négatif, quelle que soit la valeur positive ou nulle attribuée à l'entier h, le coefficient du terme en h^p ne peut pas être négatif, ce qui donne

$$(2) \qquad q \leqq n^p p!$$

Il nous reste à faire voir qu'*en général* le nombre q n'est pas inférieur à $n^p p!$ c'est-à-dire qu'en général il n'existe pas entre nos $p+2$ fonctions θ de relation algébrique de degré plus petit que $n^p p!$

On peut présenter la chose dans un autre langage.

Envisageons les n^p fonctions θ d'un même faisceau de genre p et d'ordre n; considérons ces n^p fonctions θ comme les coordonnées homogènes d'un point M dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions.

Si nous donnons aux p variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$ toutes les valeurs possibles, ce point M va décrire une certaine variété V.

Cette variété V sera située dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions; elle aura elle-même p dimensions; elle sera algébrique; son degré sera au plus égal à $n^p p!$

Je me propose d'établir qu'en général ce degré n'est pas inférieur à $n^p p!$

3. — Cas singulier elliptique.

Pour cela, il me suffit de montrer qu'il en est ainsi dans un cas particulier; car, si la réduction du degré avait lieu en général, elle devrait avoir lieu aussi dans ce cas particulier.

Le cas particulier que je choisirai est celui que j'ai appelé *cas singulier elliptique.*

Voyons comment on peut dans ce cas former les n^p fonctions θ du faisceau.

Considérons un premier système de fonctions elliptiques dépendant de la variable u_1; formons avec cette variable u_1 un faisceau d'ordre n et de genre 1 de fonctions θ elliptiques. Soient

$$(1) \qquad \theta_{1,1}, \quad \theta_{1,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{1,n}$$

les n fonctions de ce faisceau.

Soient de même

$$(2) \qquad \theta_{2,1}, \quad \theta_{2,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{2,n}$$

n fonctions θ elliptiques de la variable u_2, formant un faisceau d'ordre n et de genre 1.

Et ainsi de suite.

Soient enfin

$$(p) \qquad \theta_{p,1}, \quad \theta_{p,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{p,n}$$

n fonctions θ elliptiques de la variable u_p, formant un faisceau d'ordre n et de genre 1.

Cela posé, prenons une fonction dans le Tableau (1), une dans le Tableau (2), etc., et enfin une dans le Tableau (p). Faisons le produit de ces p fonctions; nous obtiendrons une fonction θ abélienne à p variables répondant au cas singulier elliptique.

Comme chacun des Tableaux (1), (2), ..., (p) contient n fonctions différentes, on obtiendra n^p fonctions θ abéliennes à p variables, linéairement indépendantes et formant un faisceau d'ordre n et de genre p.

Ce sont ces n^p fonctions θ abéliennes que je regarde comme les coordonnées homogènes du point M qui engendre la variété V, dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions.

Un premier point, fort important, est le suivant : pour que deux systèmes de valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ correspondent à un même point de V, il faut et il suffit que la différence de ces deux systèmes de valeurs soit une période.

En effet, pour que ces deux systèmes correspondent à un même point de V, il faut et il suffit :

1° Que les rapports des fonctions θ elliptiques

$$(1) \qquad \theta_{1,1}, \quad \theta_{1,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{1,n}$$

reprennent les mêmes valeurs, c'est-à-dire que les deux valeurs de u_1 diffèrent d'une période;

2° Que les rapports des fonctions θ elliptiques (2) reprennent les mêmes valeurs, c'est-à-dire que les deux valeurs de u_2 diffèrent d'une période, etc., et enfin que les rapports des fonctions θ elliptiques (p) reprennent les mêmes valeurs, c'est-à-dire que les deux valeurs de u_p diffèrent d'une période.

Il y a exception pour $n = 2$; dans ce cas, en effet, il n'y a dans le Tableau (1), par exemple, que deux fonctions elliptiques $\theta_{1,1}$, $\theta_{1,2}$ et le rapport de ces deux fonctions peut reprendre la même valeur, sans que les deux valeurs de u_1 diffèrent d'une période.

Pour évaluer le degré de la variété V, il faut la *couper* par une variété plane (c'est-à-dire algébrique et du premier degré) ayant $n^p - p - 1$ dimensions et compter le nombre des points d'intersection. Une pareille variété plane, que nous pouvons d'ailleurs choisir arbitrairement, sera définie par p équations linéaires entre les coordonnées courantes.

Soient donc

$$\eta_{1,1}, \quad \eta_{1,2}, \quad \ldots, \quad \eta_{1,p}$$

p combinaisons linéaires des fonctions θ elliptiques (1).

Soient de même

$$\eta_{2,1}, \quad \eta_{2,2}, \quad \ldots, \quad \eta_{2,p}$$

p combinaisons linéaires des fonctions elliptiques (2), etc.

Soient enfin

$$\eta_{p,1}, \quad \eta_{p,2}, \quad \ldots, \quad \eta_{p,p}$$

p combinaisons linéaires des fonctions elliptiques (p).

Considérons les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \eta_{1,1}\,\eta_{2,1}\ldots\eta_{p,1} = 0, \\ \eta_{1,2}\,\eta_{2,2}\ldots\eta_{p,2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta_{1,p}\,\eta_{2,p}\ldots\eta_{p,p} = 0. \end{cases}$$

Les premiers membres seront des fonctions linéaires des n^p fonctions θ abéliennes de notre faisceau, c'est-à-dire des coordonnées courantes.

Les équations (3) définiront donc une variété plane P.

Il est aisé d'évaluer le nombre des solutions distinctes des équations (3) en ne considérant pas comme distincts deux systèmes de valeurs des u qui ne diffèrent que d'une période.

Cette évaluation est presque immédiate, et je l'ai déjà faite dans le Mémoire cité plus haut du *Bulletin de la Société mathématique de France*. Le nombre des solutions est $n^p p!$

A chacune de ces solutions correspond, comme nous l'avons vu, un point de V et un seul.

Ainsi le nombre des points d'intersection de V et de P est égal à $n^p p!$

La variété V est donc du degré $n^p p!$

En résumé, le degré de la variété V ne peut s'abaisser que dans des cas exceptionnels.

Je ne m'arrêterai pas à rechercher quels sont ces cas exceptionnels. Je rappellerai seulement que le cas de $n = 2$ est toujours excepté et qu'il y a de cette exception un exemple bien connu.

Soit

$$p = 2, \; n = 2;$$

d'où

$$n^p p! = 8, \qquad n^p = 4;$$

dans ce cas la variété V se réduit à une surface dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

Dans ce cas, le degré se réduit; et V est une surface de Kummer du quatrième degré.

4. — Théorèmes de Riemann.

Dans les deux numéros qui précèdent et dans mon Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai exposé un premier moyen d'étudier les zéros des fonctions θ. Mais il y en a un autre, entièrement différent et qui est dû à Riemann.

Il ne s'applique qu'aux fonctions abéliennes *spéciales*, au sens donné à ce mot dans le n° **1**.

Considérons donc un système S de fonctions abéliennes spéciales, c'est-à-dire devant leur existence à une courbe algébrique C de genre p.

A cette courbe appartiendront p intégrales abéliennes de première espèce

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p,$$

correspondant aux variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p.$$

Soit (x, y) un point de la courbe C; les v_i seront des fonctions de x et de y qui ne sont pas des variables indépendantes, mais qui sont liées par l'équation de la courbe.

On aura

$$v_i(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv_i.$$

dv_i est une fonction rationnelle bien déterminée de (x, y), de dx et de dy; mais v_i ne sera entièrement définie en fonction de x et de y (à une période près, bien entendu) que quand on se sera donné la limite inférieure d'intégration, c'est-à-dire le point (x_0, y_0).

Nous verrons un peu plus loin comment ce point (x_0, y_0) doit être choisi; mais je dis tout de suite que ce point ne sera pas le même, en général, pour les p intégrales

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p,$$

de sorte qu'en général ces p intégrales ne pourront pas s'annuler à la fois.

Voici maintenant l'énoncé des théorèmes découverts par Riemann :

Considérons la fonction Θ définie plus haut, qui est paire et du premier ordre.

Soient e_1, e_2, $\ldots$, e_p p constantes quelconques; formons l'équation

$$(1) \qquad \Theta(v_i - e_i) = 0.$$

Comme les v_i sont des fonctions de x et de y, cette équation (1) est une équation en x et y, définissant un point (x, y) de la courbe C. Comme y et x ne sont pas deux variables indépendantes, je dirai désormais, pour abréger le langage, le point x au lieu du point (x, y).

Riemann a démontré que cette équation (1) admet p solutions.

Soient

$$x^{(1)},\quad x^{(2)},\quad \ldots,\quad x^{(p)}$$

ces p solutions et soient

$$v_i^{(1)},\quad v_i^{(2)},\quad \ldots,\quad v_i^{(p)}$$

les valeurs correspondantes de l'intégrale v_i; Riemann a montré que l'on a

$$e_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p)} + c_i \tag{2}$$

(les c_i étant des constantes indépendantes de $e_1, e_2, \ldots, e_p$), cela, bien entendu, à un multiple près des périodes.

Je dis maintenant qu'on peut choisir les limites inférieures d'intégration, de façon que les constantes c_i soient nulles.

Ces limites d'intégration, que j'ai appelées plus haut (x_0, y_0), sont restées jusqu'ici arbitraires.

Changer les limites d'intégration, c'est changer v_i en $v_i + h_i$, les h_i étant des constantes. Mais il faut en même temps changer e_i en $e_i + h_i$, de façon que $v_i - e_i$ ne change pas.

Quant aux

$$c_i = e_i - v_i^{(1)} - v_i^{(2)} - \ldots - v_i^{(p)},$$

ils se changent en

$$c_i + (1 - p) h_i.$$

Il suffit donc de prendre

$$h_i = \frac{c_i'}{p - 1},$$

pour satisfaire à la question.

Nous pouvons donc toujours choisir les limites inférieures d'intégration de façon que les relations (2) s'écrivent

$$e_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p)}. \tag{2 bis}$$

Cette démonstration est en défaut quand le dénominateur $p-1$ s'annule; c'est-à-dire pour les fonctions elliptiques.

Dans ce cas, en effet, la relation (2),

$$e_i = v_i^1 + c_i \qquad (i=1)$$

ne peut pas se mettre sous la forme (2 *bis*) et c_i, quelle que soit la limite inférieure d'intégration, est égal à la demi-somme des périodes normales. On sait, en effet, que la fonction Θ elliptique s'annule quand la variable est égale à cette demi-somme.

Le théorème le plus important est le suivant :

Pour que

$$\Theta(u_i) = 0,$$

il faut et il suffit que u_i puisse se mettre sous la forme

$$u_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p-1)};$$

ou bien encore (ce qui revient au même) :

Pour que

$$\Theta(u_i) = 0,$$

il faut et il suffit que u_i puisse se mettre sous la forme

$$u_i = -v_i^{(1)} - v_i^{(2)} - \ldots - v_i^{(p-1)}.$$

Insistons un peu sur la signification de ce résultat.

Supposons, par exemple, $p=3$ et considérons l'équation

$$\Theta(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Si nous regardons u_1, u_2, u_3 comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace, cette équation représente une surface, et les équations de cette surface peuvent être mises sous la forme

$$u_1 = v_1^{(1)} + v_1^{(2)},$$
$$u_2 = v_2^{(1)} + v_2^{(2)},$$
$$u_3 = v_3^{(1)} + v_3^{(2)};$$

$v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$, $v_3^{(1)}$ sont fonctions d'une seule variable $x^{(1)}$; $v_1^{(2)}$, $v_2^{(2)}$, $v_3^{(2)}$ sont fonctions d'une seule variable $x^{(2)}$.

Il en résulte que notre surface peut être engendrée de la manière suivante : Une courbe se déplace d'un mouvement de translation sans se déformer et de telle façon qu'un de ses points décrive une courbe fixe. Une surface susceptible de ce mode de génération s'appelle une *surface de translation*.

Plus généralement, si l'équation

$$(3)\qquad F(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0$$

admet une solution de la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} u_1 = \varphi_1^{(1)}(t_1) + \varphi_1^{(2)}(t_2) + \ldots + \varphi_1^{(p-1)}(t_{p-1}), \\ u_2 = \varphi_2^{(1)}(t_1) + \varphi_2^{(2)}(t_2) + \ldots + \varphi_2^{(p-1)}(t_{p-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_p = \varphi_p^{(1)}(t_1) + \varphi_p^{(2)}(t_2) + \ldots + \varphi_p^{(p-1)}(t_{p-1}), \end{cases}$$

$t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$ étant $p-1$ variables indépendantes; je dirai que l'équation (3) est *translative*.

Alors, d'après ce qui précède, l'équation

$$\Theta = 0$$

sera translative pour tout système de fonctions abéliennes *spécial* au sens donné à ce mot au n° **1**.

On peut alors se demander si cette propriété est encore vraie pour des fonctions abéliennes non spéciales.

Parmi les autres résultats obtenus par Riemann, je citerai seulement les suivants :

Un système de valeurs quelconque

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_p$$

peut être toujours mis sous la forme

$$e_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p)},$$

et en général il ne peut l'être que d'une seule manière; pour que cela puisse se faire de plusieurs manières (et alors d'une infinité de manières), il faut et il suffit que

$$\Theta(v_i - e_i)$$

soit identiquement nulle; ou ce qui revient au même, il faut et il suffit qu'on puisse mettre les e_i sous la forme

$$e_i = -v_i^{(1)} - v_i^{(2)} - \ldots + v_i^{(p-2)}.$$

Soit maintenant un système de valeurs

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_p$$

tel que

$$\Theta(r_i) = 0.$$

Les r_i peuvent toujours être mis sous la forme

$$r_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p-2)}.$$

En général, cela n'est possible que d'une manière et il n'y a exception que si toutes les dérivées du premier ordre de Θ s'annulent en même temps que Θ.

5. — Extension du théorème de Riemann.

Considérons maintenant un faisceau d'ordre n et de genre p.

Soit θ une fonction de ce faisceau; formons l'équation

$$\theta(v_i) = 0. \tag{1}$$

En raisonnant tout à fait comme l'a fait Riemann, on verrait que cette équation (si elle n'est pas identiquement satisfaite) admet np solutions.

Soient

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad \ldots, \quad x^{(np)}$$

ces np solutions, c'est-à-dire les np points de la courbe C qui satisfont à la question. Soient

$$v_i^{(1)},\quad v_i^{(2)},\quad \ldots,\quad v_i^{(np)}$$

les valeurs correspondantes de l'intégrale v_i.

Le raisonnement prouve encore que l'on a

$$(2)\qquad v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(np)} = C_i,$$

les C_i étant des constantes qui sont les mêmes pour toutes les fonctions θ du faisceau.

Je dis que les équations (2) peuvent nous permettre de déterminer p des points $x^{(i)}$ quand on connaît les $(n-1)p$ autres.

En effet, considérons l'une quelconque des fonctions θ du faisceau et soient

$$(3)\qquad x_0^{(1)},\quad x_0^{(2)},\quad \ldots,\quad x_0^{(np)}$$

les np solutions correspondantes de l'équation (1); par les np points $x_0^{(i)}$ je fais passer une courbe adjointe quelconque H. Cette courbe H coupera la courbe C, en dehors des points doubles et des points $x_0^{(i)}$, en un certain nombre d'autres points que j'appelle

$$x_1^{(1)},\quad x_1^{(2)},\quad \ldots,\quad x_1^{(\mu)}.$$

Alors les équations (2) signifieront que les points $x^{(i)}$ et les points $x_1^{(k)}$ sont sur une même courbe adjointe de même degré que H.

Je puis toujours supposer que le degré de H est supérieur à celui de C diminué de trois unités. On sait que dans ce cas on peut choisir arbitrairement tous les points d'intersection, sauf p d'entre eux.

Par les μ points $x_1^{(k)}$ et par $(n-1)p$ des points $x^{(i)}$ je pourrai donc toujours faire passer une courbe adjointe de même degré que H et, en général, je n'en pourrai faire passer qu'une seule. Les p autres points $x^{(i)}$ se trouveront donc ainsi déterminés.

J'ai dit que dans un faisceau il y a n^p fonctions θ linéairement indépendantes. Le premier membre de l'équation (1) (si la fonction θ est la plus générale du faisceau) contient donc n^p coefficients arbitraires que j'appellerai A et dont il dépend linéairement.

Disposons des A de telle façon que l'équation (1) soit satisfaite pour $(n-1)p$ points donnés quelconques de la courbe C, à savoir

$$(4)\qquad x^{(1)},\quad x^{(2)},\quad \ldots,\quad x^{(np-p)},$$

il en résultera, d'après ce qui précède, qu'elle sera également satisfaite pour p autres points de la courbe C, à savoir

$$(5)\qquad x^{(np-p+1)},\quad \ldots,\quad x^{(np)},$$

qui sont déterminés par les $(n-1)p$ premiers.

Disposons encore des A de telle façon que l'équation (1) soit satisfaite pour un autre point de C différent des points (4) et (5).

La fonction θ devrait alors s'annuler pour $np+1$ points différents, ce qui ne peut arriver que si elle est identiquement nulle.

Or nous avons introduit, entre les A, des relations linéaires au nombre de $np-p+1$; il reste donc

$$n^p+p-np-1$$

coefficients A arbitraires.

Il existe donc dans notre faisceau $n^p+p-np-1$ fonctions θ linéairement indépendantes et qui s'annulent identiquement quand on y remplace les variables indépendantes u_i par les intégrales v_i.

Cela peut se traduire dans un autre langage.

Reprenons la variété algébrique V définie au n° **3**. Je rappelle qu'elle est de degré $n^p p!$, qu'elle appartient à l'espace à n^p-1 dimensions et qu'elle a elle-même p dimensions.

Considérons un point dont les coordonnées homogènes soient précisément les n^p fonctions $\theta(v_i)$; ce sera un point de la variété V.

Et quand le point x décrira la courbe C, ce point de la variété V décrira une certaine *courbe* (ou variété à une dimension) que j'appelle B.

Cette courbe B, qui fait partie de V, est de genre p comme la courbe C à laquelle elle correspond point par point.

Pour trouver son degré, il suffit de chercher le nombre de ses points d'intersection avec une variété plane à $n^p - 2$ dimensions; c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation (1).

Nous avons vu que ce nombre est égal à np : la courbe B est donc de degré np.

Enfin, d'après ce qui précède, il y a entre les coordonnées d'un point de B

$$n^p - np + p - 1$$

relations linéaires à coefficients constants. Ces relations définissent un espace plan à $(n-1)p$ dimensions.

La courbe B fait donc partie d'un espace plan à $(n-1)p$ dimensions.

Soient par exemple $n=2$, $p=2$; d'où

$$n^p - 1 = 3, \qquad n^p p! = 8, \qquad (n-1)p = 2;$$

la variété V est alors une surface de Kummer du 4e degré dans l'espace ordinaire et la courbe B, qui sera du 4e degré, sera plane.

Considérons maintenant l'équation

$$\theta(v_i - e_i) = 0, \tag{6}$$

les quantités

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_p \tag{7}$$

étant p constantes quelconques. Elle jouira des mêmes propriétés que l'équation (1); la démonstration serait la même; elle est d'ailleurs inutile, car, si les fonctions $\theta(u_i)$ forment un faisceau, il en sera de même des fonctions $\theta(u_i - e_i)$.

Si donc les n^p fonctions $\theta(v_i - e_i)$ sont les coordonnées homogènes d'un point, ce point, quand x décrira la courbe C, décrira une certaine courbe B′ située sur V.

Cette courbe B′ sera de degré np, de genre p et sera située dans un espace plan à $(n-1)p$ dimensions.

Il y aura une p-uple infinité de courbes B′; par chaque point de V passera une infinité de ces courbes.

Deux de ces courbes en général ne se rencontreront pas; les deux courbes correspondant à deux systèmes de valeurs,

$$e_i \quad \text{et} \quad e'_i,$$

des quantités (7) ne pourraient en effet se rencontrer que si l'on peut trouver deux points x et x' sur C tels que

$$e_i - e'_i = v_i - v'_i.$$

Cela n'arrivera pas en général sauf pour $p = 2$.

Nous savons toutefois que l'on peut trouver sur une variété V quelconque deux courbes B' qui ont au moins un point commun, puisque par tout point de V passent une infinité de courbes B'. Mais on peut se demander si deux courbes B' peuvent se rencontrer en deux points.

Pour cela il faudrait que l'on pût trouver sur C quatre points, x, x', x'', x''', tels que

$$e_i - e'_i = v_i - v'_i = v''_i - v'''_i;$$

d'où

$$(8) \qquad v_i + v'''_i = v'_i + v''_i.$$

Une égalité telle que (8) est-elle possible?

Les théorèmes de Riemann énoncés à la fin du numéro précédent nous fourniront la réponse.

Si $p = 2$, l'égalité (8) est possible; nous pouvons supposer que la courbe C est une courbe du 4e ordre avec un point double. La condition pour que l'égalité (8) soit satisfaite, c'est alors que les points x et x''' d'une part, x' et x'' d'autre part soient en ligne droite avec le point double.

Si $p > 2$, l'égalité (8) ne serait possible que si la fonction Θ pouvait s'annuler en même temps que toutes ses dérivées du premier ordre. Or cela n'arrivera pas en général, je veux dire pour un système S quelconque de fonctions abéliennes.

Par conséquent on ne peut pas, en général, trouver sur la variété V deux courbes B' qui se coupent en plus d'un point.

6. — Examen des cas singuliers elliptiques.

Voyons ce que deviennent ces résultats dans les cas singuliers et commençons par le cas singulier elliptique, où la fonction Θ est le produit de p fonctions Θ elliptiques.

Soit d'abord $p = 2$.

Considérons notre variété V de degré $2n^2$ et les courbes B′ de degré $2n$ tracées sur cette variété.

Considérons en particulier la courbe B.

Cette courbe peut être regardée comme définie par l'équation

$$u_i = v_i$$

ou bien

$$\Theta(u_i) = 0.$$

Dans le cas singulier elliptique on a

$$\Theta(u_i) = \Theta_1(u_1)\Theta_2(u_2),$$

Θ_1 et Θ_2 étant des fonctions Θ elliptiques; de sorte que l'équation de la courbe B se décompose en deux

$$\Theta_1(u_1) = 0, \qquad \Theta_2(u_2) = 0.$$

La première nous donne

$$u_1 = \alpha_1,$$

α_1 étant la demi-somme des périodes de la fonction Θ_1; la seconde nous donne de même

$$u_2 = \alpha_2.$$

La courbe B se décompose donc en deux autres, ayant respectivement pour équations

$$u_1 = \alpha_1; \qquad u_2 = \alpha_2.$$

Quel est le degré de chacune d'elles et en particulier de la courbe $u_1 = \alpha_1$?

Soit $\theta(u_i)$ une fonction quelconque du faisceau qui nous a servi à former la variété V; ce sera une fonction θ abélienne d'ordre n et de genre 2 qui sera une fonction linéaire à coefficients constants des n^2 fonctions θ fondamentales du faisceau; c'est-à-dire (avec le mode de représentation géométrique adopté pour la définition de la variété V) des coordonnées homogènes courantes dans l'espace à $n^2 - 1$ dimensions.

L'équation

$$\theta(u_i) = 0 \tag{1}$$

est donc celle d'une variable *plane* P à $n^2 - 2$ dimensions. Pour déterminer le degré de la courbe $u_1 = \alpha_1$, il faut chercher en combien de points elle coupe la variété P.

Or si l'on fait $u_1 = \alpha_1$ le premier membre de (1) devient une fonction θ elliptique d'ordre n par rapport à u_2; l'équation (1) admet alors n solutions.

La courbe $u_1 = \alpha_1$ est donc de degré n.

Ainsi la courbe B qui, dans le cas général, est de degré $2n$ et de genre 2, se décompose dans le cas singulier en deux courbes de degré n et de genre 1.

Il est clair qu'il en est de même de toutes les courbes B'.

Le cas de $n = 2$ est toujours excepté; examinons donc le cas de $n = 3$.

Dans le cas général, si $n = 3$, la courbe est du sixième degré et du genre 2; c'est une courbe gauche dans l'espace à $(n-1)p = 4$ dimensions. Dans le cas singulier, elle se décompose en deux courbes du degré 3 et du genre 1 qui doivent être toutes deux planes. Ces deux courbes ont un point commun $u_1 = \alpha_1$, $u_2 = \alpha_2$.

Si nous projetons la courbe B sur un plan quelconque, la projection sera, dans le cas général, une courbe du sixième ordre avec huit points doubles; dans le cas singulier, elle se décomposera en deux cubiques se coupant en neuf points; elle acquerra donc un point double de plus.

Passons au cas de $p = 3$ et proposons-nous de trouver ce que devient la courbe B dans le cas singulier elliptique.

Cette courbe a pour équation

$$u_i = v_i$$

et doit satisfaire aux théorèmes de Riemann.

Il est clair que l'on peut satisfaire à ces théorèmes en supposant que la courbe B se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, & u_2 = \frac{\alpha_2}{2}. \end{array} \right.$$

Par exemple,

$$(3) \qquad \Theta(v_i + v'_i) = \theta_1(v_1 + v'_1)\,\theta_2(v_2 + v'_2)\,\theta_3(v_3 + v'_3)$$

sera identiquement nul.

En effet, si la courbe B se décompose en trois autres définies par les équations (2), il est clair que deux des trois équations

$$v_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad v_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v_3 = \frac{\alpha_3}{2}$$

devront être satisfaites. De même deux des trois équations

$$v'_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad v'_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v'_3 = \frac{\alpha_3}{2}$$

devront être satisfaites. Il en résulte que l'une des trois équations

$$v_i + v'_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

devra être satisfaite. Donc l'un des trois facteurs du second membre de (3) devra s'annuler. Donc

$$\Theta(v_i + v'_i) = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Malheureusement cette solution n'est pas unique. On satisfait également aux théorèmes de Riemann en supposant que la courbe B se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$(4)\qquad \begin{cases} u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2} + h, \\ u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2} - h, \\ u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, & u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \end{cases}$$

h désignant une constante quelconque.

Un examen plus approfondi est donc nécessaire.

Voici comment nous y procéderons. Ne nous supposons plus dans le cas singulier elliptique, mais dans un cas très voisin de ce cas singulier. Supposons, en d'autres termes, que, dans le Tableau (1) du n° 1, les quantités

$$a_{ii}$$

(que j'appellerai *termes diagonaux*) sont finies, mais que les quantités

$$a_{ik} \qquad (i \gtrless k)$$

(que j'appellerai *termes latéraux*) sont infiniment petites du premier ordre sans être nulles.

Étudions maintenant la courbe définie par les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} \Theta(u_i - e_i) = 0, \\ \Theta(u_i - e'_i) = 0, \end{cases}$$

où les e_i et les e'_i sont six constantes quelconques. Cette courbe, que nous appellerons Λ, jouit de diverses propriétés.

Nous savons que, pour un choix convenable des constantes e_i et e'_i, elle se décompose en plusieurs autres, parmi lesquelles la courbe B (ou bien une courbe B').

Pour aborder l'étude de cette courbe Λ, observons que la fonction Θ dépend non seulement des u, mais des a_{ik}, et peut se développer suivant les puissances de ces quantités. Nous allons effectuer le développement suivant les puissances des termes latéraux que nous avons supposés très petits. Nous avons

$$\Theta = \Sigma e^{m_1 u_1 + \ldots + m_p u_p - \frac{1}{2}\Sigma a_{ik} m_i m_k};$$

calculons les premiers termes du développement, à savoir ceux d'ordre o et d'ordre 1.

D'abord le terme d'ordre o s'obtiendra en annulant les termes latéraux a_{ik} $(i \gtrless k)$; on voit que la fonction Θ se réduit au produit de trois fonctions Θ elliptiques, à savoir

$$\Theta = \theta_1 \theta_2 \theta_3,$$

où

$$\theta_i = \Sigma e^{m_i u_i - \frac{a_{ii} m_i^2}{2}}.$$

Cherchons maintenant le coefficient de a_{23} par exemple.

Le terme général de Θ contient le facteur

$$e^{-a_{23} m_2 m_3}.$$

Si nous développons ce facteur suivant les puissances croissantes de a_{23}, il devient, en négligeant les termes du deuxième ordre,

$$1 - a_{23} m_2 m_3.$$

Le coefficient de a_{23} dans le développement de Θ sera donc

$$-\Sigma m_2 m_3 e^{\Sigma m_i u_i - \frac{a_{ii} m_i^2}{2}}$$

c'est-à-dire

$$-\theta_1 \theta'_2 \theta'_3.$$

Je pose, bien entendu,

$$\theta'_i = \frac{d\theta_i}{du_i}.$$

Ainsi les premiers termes du développement de Θ (en négligeant les termes du second ordre) seront

$$(6)\qquad \Theta = \theta_1\theta_2\theta_3 - a_{23}\theta_1\theta'_2\theta'_3 - a_{13}\theta_2\theta'_1\theta'_3 - a_{12}\theta_3\theta'_1\theta'_2 + \ldots.$$

J'aurai à revenir dans la suite sur ce développement et à calculer les termes d'ordre supérieur. Ceux-ci me suffisent pour le moment.

Étudions l'équation

$$(7)\qquad \Theta = 0.$$

Comme les θ et leurs dérivées ne peuvent devenir infinis, Θ ne peut s'annuler que si le premier terme du développement (6)

$$\theta_1\theta_2\theta_3$$

est infiniment petit du premier ordre, sans quoi ce terme ne pourrait se détruire avec aucun autre.

L'un au moins des trois facteurs θ_1, θ_2, θ_3 doit être infiniment petit, c'est-à-dire que l'une au moins des trois quantités u_i doit être infiniment voisine de α_i (à une période près, bien entendu).

Comme je puis choisir deux d'entre elles arbitrairement, je supposerai que u_2 et u_3 aient des valeurs qui ne soient pas très voisines de α_2 et α_3, mais d'ailleurs quelconques.

Alors les deux facteurs θ_2 et θ_3 sont finis; et le facteur θ_1, de même que $u_1 - \alpha_1$, doit être un infiniment petit du premier ordre.

Le premier membre de l'équation (7) est développable suivant les puissances croissantes de

$$u_1 - \alpha_1,\quad a_{12},\quad a_{23},\quad a_{13}.$$

L'équation est satisfaite quand toutes ces quantités s'annulent.

Enfin le coefficient du terme en $u_1 - \alpha_1$ est égal à

$$\theta'_1(\alpha_1)\,\theta_2(u_2)\,\theta_3(u_3)$$

et ne s'annule pas puisque u_2 n'est pas égal à α_2 ni u_3 à α_3.

Donc, en vertu d'un théorème bien connu, l'équation (7) pourra être résolue par rapport à $u_1 - \alpha_1$, cette quantité étant développable suivant les puissances croissantes des termes latéraux a_{ik}.

Les premiers termes du développement, en négligeant ceux du second ordre, seront

$$(8) \qquad u_1 = \alpha_1 + a_{12}\frac{\theta_2'}{\theta_2} + a_{13}\frac{\theta_3'}{\theta_3} + \ldots$$

Ce développement est valable quand les termes latéraux a_{ik} sont assez petits et quand u_2 n'est pas voisin de α_2, ni u_3 de α_3.

Donnons donc à u_2 et à u_3 des valeurs quelconques u_2^0 et u_3^0 que je suppose n'être pas très voisine de α_2 et de α_3; le développement (8) nous donnera la valeur correspondante u_1^0 de u_1 qui sera très voisine de α_1.

Puisque

$$\Theta(u_i^0) = 0,$$

nous pourrons poser

$$u_i^0 = v_i^0 + v_i^1,$$

où v_i^0 et v_i^1 sont deux valeurs particulières de l'intégrale que j'ai appelée v_i, correspondant à deux points particuliers de la courbe C que j'appellerai x_0 et x_1.

Alors il existera deux courbes remarquables

$$u_i = v_i + v_i^1 \quad \text{(courbe } B_1\text{)},$$
$$u_i = v_i + v_i^0 \quad \text{(courbe } B_0\text{)}.$$

Je dis que ce sont deux courbes; en effet v_i^1 et v_i^0 sont des constantes puisque je regarde les points x_0 et x_1 comme fixes; v_i est une fonction d'une seule variable indépendante, puisque cette intégrale dépend seulement du point x, mobile sur la courbe C.

Ces deux courbes B_0 et B_1 passeront toutes deux par les points

$$u_i = u_i^0 = v_i^0 + v_i^1.$$

Ce sont ces deux courbes que je me propose d'étudier en détail.

J'ai supposé que je faisais tendre les termes latéraux a_{ik} vers zéro; pour fixer les idées, je vais poser

$$a_{ik} = t\beta_{ik} \qquad (i \gtrless k),$$

les β_{ik} étant des constantes et t un paramètre que je vais faire tendre vers o.

Écrivons alors l'équation (8) sous la forme

$$u_1 = F(u_2, u_3); \tag{8 bis}$$

le second membre se trouve développé suivant les puissances croissantes de t.

Désignons par

$$\frac{dv_i}{dx}, \quad \frac{d^2 v_i}{dx^2}$$

les dérivées de v_i par rapport à x et par

$$\frac{dv_i^0}{dx_0}, \quad \frac{d^2 v_i^0}{dx_0^2}, \quad \frac{dv_i^1}{dx_1}, \quad \frac{d^2 v_i^1}{dx_1^2}$$

les valeurs de ces dérivées pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$.

Le long de la courbe B_0, on aura

$$dv_1^0 = \frac{dF}{du_2} dv_2^0 + \frac{dF}{du_3} dv_3^0.$$

Au point $u_i = u_i^0$ en particulier, on aurait

$$dv_1^0 = \frac{dF_0}{du_2} dv_2^0 + \frac{dF_0}{du_3} dv_3^0,$$

en appelant $\frac{dF_0}{du_i}$ la valeur de $\frac{dF}{du_i}$ pour $u_i = u_i^0$.

On en déduira

$$dv_2^0\left(\frac{dF}{du_2} - \frac{dF_0}{du_2}\right) + dv_3^0\left(\frac{dF}{du_3} - \frac{dF_0}{du_3}\right) = 0. \tag{9}$$

On trouverait de même, pour la courbe B_1,

$$dv_2^1\left(\frac{dF}{du_2} - \frac{dF_0}{du_2}\right) + dv_3^1\left(\frac{dF}{du_3} - \frac{dF_0}{du_3}\right) = 0. \tag{10}$$

Les équations (8), (9) et (10) suffiraient pour définir les courbes

B_0 et B_1 si l'on connaissait les deux constantes

$$\frac{dv_3^0}{dv_2^0}, \quad \frac{dv_3^1}{dv_2^1}.$$

Pour abréger l'écriture, je supposerai que v_3^0 a été exprimé en fonction de v_2^0 et v_2^1 en fonction de v_3^1 et je poserai

$$\frac{dv_3^0}{dv_2^0} = \xi, \qquad \frac{d^2 v_3^0}{dv_2^{0\,2}} = \xi',$$

$$\frac{dv_2^1}{dv_3^1} = \eta, \qquad \frac{d^2 v_2^1}{dv_3^{1\,2}} = \eta',$$

de sorte que les équations (9) et (10) s'écriront

$$(9\,bis) \qquad \left(\frac{dF}{du_1} - \frac{dF_0}{du_2}\right) + \xi\left(\frac{dF}{du_3} - \frac{dF_0}{du_3}\right) = 0,$$

$$(10\,bis) \qquad \eta\left(\frac{dF}{du_2} - \frac{dF_0}{du_2}\right) + \left(\frac{dF}{du_3} - \frac{dF_0}{du_3}\right) = 0.$$

Cherchons à déterminer les deux constantes ξ et η.

Soient x et x' deux points quelconques mobiles sur la courbe C, v_i et v'_i les valeurs correspondantes de l'intégrale v_i.

Si l'on reprend alors l'équation (8) et qu'on y fasse

$$u_2 = v_2 + v'_2,$$

$$u_3 = v_3 + v'_3,$$

on aura aussi

$$u_1 = v_1 + v'_1.$$

Considérons v_1 et v_3 comme fonctions de v_2, v'_1 et v'_2 comme fonctions de v'_3.

Alors u_1, u_2 et u_3, et aussi $F(u_2, u_3)$, seront des fonctions des deux variables indépendantes v_2 et v'_3. On devra avoir

$$\frac{d^2 u_i}{dv_2\, dv'_3} = 0,$$

puisque

$$u_i = v_i + v'_i,$$

dépendant seulement de v_2 et v'_i de v'_3.

Nous pourrons donc écrire, en tenant compte de (8),

$$(11)\quad \frac{d^2 F}{dv_2\, dv'_3} = 0, \qquad \frac{d^3 F}{dv_2^2\, dv'_3} = 0, \qquad \frac{d^3 F}{dv_2\, dv'^2_3} = 0, \qquad \frac{d^4 F}{dv_2^2\, dv'^2_3} = 0.$$

Les premiers membres des équations (11) s'expriment aisément à l'aide des dérivées de F par rapport aux u et des quatre dérivées

$$(12)\qquad \frac{dv_3}{dv_2},\quad \frac{d^2 v_3}{dv_2^2},\quad \frac{dv'_2}{dv'_3},\quad \frac{d^2 v'_2}{dv'^2_3}.$$

Les équations (11) sont donc quatre relations entre les quatre dérivées (12). Si l'on y fait

$$v_i = v_i^0, \qquad v'_i = v_i^1,$$

elles deviendront quatre relations entre les quantités

$$\xi,\quad \xi',\quad \eta,\quad \eta'.$$

Ce sont ces quatre relations que nous appellerons les équations (13).

Nous tirerons ξ et η de ces équations (13) et les équations (9 *bis*) et (10 *bis*) nous feront connaître alors toutes les courbes B_0 et B_1.

Les premiers membres de toutes nos équations sont développées suivant les puissances de t; mais les équations (9) à (13) contiennent t en facteur et il convient de le faire disparaître; nous remplacerons donc les équations (9 *bis*), (10 *bis*) et (13) par les équations $(9\ ter)_2$, (10 *ter*) et (13 *bis*) obtenues en divisant les premières par t.

Si nous supposons $t = 0$ ces équations vont prendre une forme très particulière. On a en effet, pour $t = 0$,

$$\frac{F - \alpha_1}{t} = \beta_{12}\frac{\theta'_2(u_2)}{\theta_2(u_2)} + \beta_{13}\frac{\theta'_3(u_3)}{\theta_3(u_3)}$$

et je puis observer que le second membre est la somme d'une fonction de u_2 et d'une fonction de u_3 que je puis écrire

$$f_2(u_2) + f_3(u_3).$$

Les premiers membres des équations (13 *bis*) sont alors des polynomes du deuxième degré au plus en ξ et η, du premier degré au plus en ξ' et η'.

Éliminant ξ' et η' entre les trois dernières équations (13 *bis*), il reste deux relations entre ξ et η, l'une du premier degré, l'autre du deuxième. Il semble donc que le problème comporte deux solutions. Mais ces deux solutions se confondent en une seule qui est

$$\xi = \eta = 0, \qquad \xi' = \eta' = 0.$$

Ainsi les équations (13 *bis*) comportent pour $t = 0$ une solution double et l'on en conclura que pour $t = 0$ le jacobien des premiers membres de ces équations par rapport aux quatre inconnues ξ, η, ξ', η', sera nul; d'où il résulte une petite difficulté.

Ne supposons plus $t = 0$; les premiers membres des équations (13 *bis*) sont développables suivant les puissances des inconnues et de t.

Si le jacobien dont je viens de parler n'était pas nul, nous pourrions, par un théorème bien connu de Cauchy, conclure que les inconnues ξ, η, ξ', η' sont développables suivant les puissances de t.

Ici je ne puis raisonner ainsi, mais comme la solution

$$\xi = \eta = \xi' = \eta' = 0$$

est *double* seulement, nous conclurons que ξ, η, ξ', η' sont développables suivant les puissances de $\sqrt{t}$; les développements commenceront par des termes du premier degré au moins en $\sqrt{t}$; et par conséquent infiniment petits au moins d'ordre $\frac{1}{2}$.

Un examen plus approfondi montrerait, je pense, que ξ, η, ξ', η' sont développables suivant les puissances de t, mais je ne l'ai pas vérifié. Cela ne m'est d'ailleurs pas nécessaire pour mon objet actuel.

Substituons la valeur de ξ ainsi trouvée dans l'équation (9 *ter*); le premier membre de cette équation sera développé suivant les puissances de $\sqrt{t}$ (le développement ne contiendrait vraisemblablement que des puissances paires).

Pour $t = 0$, ξ devient nul et l'équation (9 *ter*) se réduit à

$$\beta_{12}\left[\frac{\theta'_2}{\theta_2}(u_2) - \frac{\theta'_2}{\theta_2}(u_2^0)\right] = 0$$

ou à

$$u_2 = u_2^0.$$

On peut alors, d'après le théorème de Cauchy, résoudre l'équation (9 *ter*); on trouve u_2 développé suivant les puissances croissantes de $\sqrt{t}$ et de $u_3 - u_3^0$; pour $t = 0$, u_2 se réduit à u_2^0.

D'où l'équation de la courbe B_0.

$$(14) \qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 + t\left[\beta_{12}\frac{\theta'_2}{\theta_2}(u_2^0) + \beta_{13}\frac{\theta'_3}{\theta_3}(u_3)\right] + ht\sqrt{t}, \\ u_2 = u_2^0 + h\sqrt{t}. \end{cases}$$

Je désigne par ht^k un ensemble de termes procédant suivant les puissances entières de $\sqrt{t}$ et commençant par un terme en t^k.

On aurait de même, pour l'équation de la courbe B_1,

$$(15) \qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 + t\left[\beta_{12}\frac{\theta'_2}{\theta_2}(u_2) + \beta_{12}\frac{\theta'_3}{\theta_3}(u_3^0)\right] + ht\sqrt{t}, \\ u_3 = u_3^0 + h\sqrt{t}. \end{cases}$$

Considérons maintenant une courbe remarquable que je vais appeler B et qui a pour équation

$$u_i = 2v_i.$$

Supposons que le point u_i^0 soit un point de cette courbe; on aura alors

$$v_i^0 = v_i^1$$

et la courbe B_1 devra se confondre avec B_0. La comparaison des équations (14) et (15) montre que ces deux courbes ne peuvent se confondre; à moins toutefois que les développements (14) et (15) ne soient pas valables. Or nous avons vu qu'ils ne cessent de l'être que si u_2 est voisin de α_2 et u_3 de α_3.

Ainsi en un point de B' la fonction Θ devant s'annuler, l'un des u_i devra être très voisin de α_i; soit par exemple u_1 très voisin de α_1, ce qui nous conduit à l'équation (8); alors, d'après ce que nous venons de voir, u_2 devra encore être très voisin de α_2 ou u_3 de α_3.

En un point de B', deux des u_i devront donc être très voisins de α_i; en résumé, dans le cas singulier elliptique, la courbe B' se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$\begin{aligned} u_2 &= \alpha_2, & u_3 &= \alpha_3, \\ u_1 &= \alpha_1, & u_3 &= \alpha_3, \\ u_1 &= \alpha_1, & u_2 &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Il est aisé d'en déduire ce qui arrive pour la courbe B qui a pour équation

$$u_i = v_i.$$

Elle se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 &= \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_1 &= \frac{\alpha_1}{2}, & u_3 &= \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_1 &= \frac{\alpha_1}{2}, & u_2 &= \frac{\alpha_2}{2}. \end{aligned}$$

Voyons maintenant quel est le degré de chacune d'elles.

Soit $p = 3$, $n > 2$; la courbe B est, en général, d'ordre $3n$ et de genre 3; dans le cas singulier elliptique, elle se décompose en trois courbes d'ordre n et de genre 1.

On arriverait au même résultat dans le cas de $p = 4$. Si les *termes latéraux* tendent vers 0, de façon que les fonctions abéliennes restent spéciales (je suis obligé d'ajouter cette restriction parce que, pour $p > 3$, les fonctions ne sont pas toujours spéciales; d'ailleurs, si elles ne l'étaient pas, la courbe B cesserait d'exister), la courbe B se décompose à la limite en quatre autres qui sont de degré n ($n > 2$) et de genre 1 et qui ont respectivement pour équations

$$u_2 = \frac{\alpha_2}{3}, \quad u_3 = \frac{\alpha_3}{3}, \quad u_4 = \frac{\alpha_4}{3},$$

$$u_1 = \frac{\alpha_1}{3}, \quad u_3 = \frac{\alpha_3}{3}, \quad u_4 = \frac{\alpha_4}{3},$$

$$u_1 = \frac{\alpha_1}{3}, \quad u_2 = \frac{\alpha_2}{3}, \quad u_4 = \frac{\alpha_4}{3},$$

$$u_1 = \frac{\alpha_1}{3}, \quad u_2 = \frac{\alpha_2}{3}, \quad u_3 = \frac{\alpha_3}{3}.$$

7. — Généralisation du théorème de Riemann.

Proposons-nous maintenant le problème suivant : Riemann a montré combien l'équation

$$(1) \qquad \Theta(v_i - e_i) = 0$$

admet de solutions; proposons-nous les deux équations simultanées

$$(2) \qquad \begin{cases} \Theta(v_i + v'_i - e_i) = 0, \\ \Theta(v_i + v'_i - e'_i) = 0, \end{cases}$$

où les e_i et les e'_i sont $2p$ constantes quelconques et où nous avons deux inconnues, à savoir les points x et x' de la courbe C qui correspondent aux intégrales v_i et v'_i.

Cherchons combien ces équations admettent de solutions.

De même, considérons les trois équations simultanées suivantes (avec trois inconnues x, x' et x''),

$$(3) \qquad \begin{cases} \Theta(v_i + v'_i + v''_i - e_i) = 0, \\ \Theta(v_i + v'_i + v''_i - e'_i) = 0, \\ \Theta(v_i + v'_i + v''_i - e''_i) = 0. \end{cases}$$

Plus généralement, envisageons q équations simultanées à q inconnues,

$$(4) \qquad \Theta(v_i + v'_i + \ldots + v_i^{(q-1)} - e_i^{(k)}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Combien ces équations admettront-elles de solutions?

On peut, dans l'évaluation du nombre de ces solutions, se placer à deux points de vue différents.

Au premier point de vue, nous ne regarderons pas comme distinctes deux solutions que l'on déduit l'une de l'autre en permutant les q points inconnus de la courbe C,

$$x, \quad x', \quad \ldots, \quad x^{(q-1)},$$

et, par conséquent, les q intégrales correspondantes

$$v_i, \quad v'_i, \quad \ldots, \quad v_i^{(q-1)}.$$

Au second point de vue, on regardera ces deux solutions comme distinctes.

Il est clair que le nombre des solutions, évalué au second point de vue, sera $q!$ fois plus grand que le nombre des solutions évalué au premier point de vue.

Il y a deux cas où nous savons faire cette évaluation.

C'est d'abord celui où $q = 1$, celui de l'équation (1) : c'est celui de Riemann.

Le nombre des solutions est alors égal à p.

C'est ensuite celui où $q = p$; si l'on a les équations

$$(5) \qquad \Theta(u_i - e_i^{(k)}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

j'ai démontré, comme je l'ai rappelé au début de ce travail, que le nombre des solutions est égal à $p!$.

D'un autre côté, les u_i peuvent toujours être mis sous la forme

$$u_i = v_i + v'_i + \ldots + v_i^{(p-1)},$$

et cela d'une seule manière (en général du moins d'après les théorèmes de Riemann); d'une seule manière, veux-je dire, si l'on se place au premier point de vue et de $p!$ manières différentes si l'on se place au second point de vue.

Si donc $q = p$, le nombre des solutions des équations (4) est égal à $p!$ au premier point de vue, à $(p!)^2$ au second point de vue.

Le problème est donc résolu dans les deux cas extrêmes $q = 1$, $q = p$; pour traiter les cas intermédiaires, je vais employer la même méthode dont j'ai fait usage pour les équations (5) dans le Mémoire cité du *Bulletin de la Société mathématique de France*. Cette méthode consiste à évaluer le nombre des solutions dans le cas singulier elliptique; ce nombre étant constant sera encore le même dans le cas général.

Soit d'abord $p = 3$, $q = 2$; dans le cas singulier elliptique on aura

$$\Theta = \theta_1(u_1)\,\theta_2(u_2)\,\theta_3(u_3).$$

Soient alors

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3; \quad e'_1, \quad e'_2, \quad e'_3$$

six constantes quelconques; posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} \theta_i(v_i + v'_i - e_i) &= \theta_i, \\ \theta_i(v_i + v'_i - e'_i) &= \theta'_i. \end{aligned}$$

Les équations (4) s'écriront alors

$$(4\,bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta_1\theta_2\theta_3 &= 0, \\ \theta'_1\theta'_2\theta'_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

En général, on aura

$$e_1 \gtrless e'_1, \qquad e_2 \gtrless e'_2, \qquad e_3 \gtrless e'_3,$$

de sorte que θ_1 ne pourra pas s'annuler en même temps que θ'_1, ni θ_2 en même temps que θ'_2, ni θ_3 en même temps que θ'_3.

Un des facteurs θ_i devra s'annuler ainsi qu'un des facteurs θ'_i; mais ces deux facteurs ne pourront être de même indice.

Nous pourrons donc faire autant d'hypothèses qu'il y a d'arrangements de trois lettres, deux à deux, c'est-à-dire six. Adoptons une quelconque de ces hypothèses, par exemple

$$\theta_1 = \theta'_2 = 0.$$

Pour aller plus loin, il faut se rappeler ce que devient dans le cas singulier elliptique la courbe B qui a pour équation $u_i = v_i$; elle se décompose et l'on doit avoir : soit

$$v_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \quad v_3 = \frac{\alpha_3}{2} \quad \text{(hypothèse 1)},$$

soit

$$v_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \quad v_3 = \frac{\alpha_3}{2} \quad \text{(hypothèse 2)},$$

soit

$$v_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \quad v_2 = \frac{\alpha_2}{2} \quad \text{(hypothèse 3)}.$$

De même en ce qui concerne v'_i, on doit avoir : soit

$$v'_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \quad v'_3 = \frac{\alpha_3}{2} \quad \text{(hypothèse 4)},$$

soit

$$v'_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \quad v'_3 = \frac{\alpha_3}{2} \quad \text{(hypothèse 5)},$$

soit

$$v'_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \quad v'_2 = \frac{\alpha_2}{2} \quad \text{(hypothèse 6)}.$$

On peut combiner les hypothèses 1, 2, 3 avec les hypothèses 4, 5, 6, ce qui fait en tout neuf combinaisons; la plupart doivent être rejetées.

On ne peut pas avoir à la fois

$$v_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \quad v'_2 = \frac{\alpha_2}{2},$$

car alors

$$\theta'_2 = \theta_2(\alpha_2 - e'_2)$$

ne serait pas nul en général. Cela exclut les combinaisons

$$(1,4), \quad (1,6), \quad (3,4), \quad (3,6).$$

On ne peut pas avoir non plus à la fois

$$v_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \quad v'_1 = \frac{\alpha_1}{2}.$$

Cela exclut les combinaisons

$$(2,5),\quad (2,6),\quad (3,5).$$

Il ne reste que deux combinaisons

$$(1,5)\quad \text{et}\quad (2,4).$$

Adoptons la première, les équations

$$\theta_1 = 0,\qquad \theta'_2 = 0$$

deviennent

$$\theta_1\left(v_1 + \frac{\alpha_1}{2} - e_1\right) = 0,$$

$$\theta_2\left(v'_2 + \frac{\alpha_2}{2} - e'_2\right) = 0,$$

d'où, enfin,

$$v_1 = e_1 + \frac{\alpha_1}{2},\qquad v_2 = \frac{\alpha_2}{2},\qquad v_3 = \frac{\alpha_3}{2},$$

$$v'_1 = \frac{\alpha_1}{2},\qquad v'_2 = e'_2 + \frac{\alpha_2}{2},\qquad v'_3 = \frac{\alpha_3}{2}$$

(une solution et une seule). La combinaison $(2,4)$ nous donnerait une autre solution.

Chacune de nos six hypothèses nous donne donc deux solutions; cela fait douze solutions *au second point de vue* et six au premier point de vue.

Raisonnons de la même manière pour des valeurs quelconques de p et de q; plaçons-nous encore dans le cas singulier elliptique. Le premier membre de chacune des q équations (4) sera le produit de p facteurs.

Dans chacun de ces produits, un des p facteurs devra s'annuler; mais, pour la même raison que plus haut, les q facteurs qui s'annuleront devront être d'un indice différent.

Nous pouvons donc faire autant d'hypothèses qu'il y a d'arrangements de p lettres q à q, soit

$$\frac{p!}{(p-q)!}.$$

Adoptons une de ces hypothèses; les q équations (4) seront remplacées par q équations plus simples de la forme

$$(6) \qquad \theta_i(v_i + v'_i + \ldots + v_i^{(q-1)} - e_i^{(k)}) = 0,$$

où i prendra q valeurs différentes comprises entre 1 et p, pendant que k prendra les valeurs $1, 2, \ldots, q$; à chaque valeur de k correspond une valeur de i et une seule.

Cela posé, la courbe B se décompose; nous pouvons donc faire p hypothèses différentes au sujet des v_i; ces hypothèses peuvent se résumer dans la proposition suivante :

Les p quantités v_i devront être égales à $\frac{\alpha_i}{p-1}$, *excepté une d'entre elles.*

La même chose est vraie des quantités

$$v'_i, \quad v''_i, \quad \ldots, \quad v_i^{(q-1)}.$$

Les p quantités $v_i^{(k)}$ (où k a une valeur donnée et où i prend les valeurs $1, 2, \ldots, p$) devront être égales à $\frac{\alpha_i}{p-1}$, excepté une d'entre elles.

Formons un Tableau à p colonnes et q lignes, de telle façon que l'élément de la $i^{\text{ième}}$ colonne et de la $k+1^{\text{ième}}$ ligne soit $v_i^{(k)}$; dans chaque ligne un élément et un seul ne devra pas être égal à $\frac{\alpha_i}{p-1}$.

Il y a donc dans le Tableau q éléments et il n'y en a que q qui ne sont pas égaux à $\frac{\alpha_i}{p-1}$.

Distinguons les colonnes de ce Tableau en deux catégories; nous rangerons dans la première catégorie les colonnes dont l'indice figure parmi les indices i des équations (6). Il y aura donc q colonnes de la première catégorie et $p-q$ de la deuxième.

Je dis que dans une colonne de la première catégorie il y a un élément qui n'est pas égal à $\frac{\alpha_i}{p-1}$; car, s'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$v_i + v'_i + v''_i + \ldots + v_i^{(q-1)} = \frac{q\alpha_i}{p-1},$$

et, en général, c'est-à-dire pour une valeur quelconque de $e_i^{(k)}$, on n'aurait pas

$$\theta_i(v_i + v'_i + \ldots + v_i^{(q-1)} - e_i^{(k)}) = 0.$$

Dans chaque colonne de la première catégorie, il y a donc un élément différent de $\frac{\alpha_i}{p-1}$; je dis qu'il n'y en a qu'un dans chaque colonne; en effet, il y en a un dans chacune des q colonnes de la première catégorie et il n'y en a que q dans tout le Tableau.

Ainsi, en supprimant les $p - q$ colonnes de la deuxième catégorie, il nous restera un Tableau à q lignes et q colonnes; tous les éléments, sauf q éléments singuliers, seront égaux à $\frac{\alpha_i}{p-1}$; dans chaque ligne et dans chaque colonne il y aura un élément singulier et un seul.

Nous pouvons donc faire, au sujet de la position des éléments singuliers $q!$ hypothèses différentes.

A chacune d'elles correspond une solution des équations (6) et, par conséquent, une solution des équations (4).

Chacune des $\frac{p!}{(p-q)!}$ hypothèses faites au début avant la formation des équations (6) nous donnera donc $q!$ solutions des équations (4).

En résumé, les équations (4) admettent (aussi bien dans le cas général que dans le cas singulier elliptique)

$$\frac{p!\,q!}{(p-q)!} \quad \text{solutions.}$$

Cela au second point de vue. Au premier point de vue, le nombre des solutions est

$$\frac{p!}{p-q!},$$

autant que d'arrangements de p lettres q à q.

Dans le cas de $q = 1$ (cas de Riemann), ce nombre d'arrangements est égal à

$$\frac{p!}{p-1)!} = p.$$

C'est le résultat de Riemann.

Dans le cas de $q = p$, ce nombre d'arrangements est celui des permutations de p lettres, c'est-à-dire $p!$. C'est le résultat que j'ai obtenu dans le Mémoire cité du *Bulletin de la Société mathématique de France.*

Ainsi se trouvent réunis dans une formule plus compréhensible le résultat de Riemann et le mien. Un chemin est frayé entre les deux domaines précédemment conquis et le but que je me proposais au début de ce travail est en partie atteint.

Considérons encore le cas de $q = p - 1$.

Les équations (4) sont alors équivalentes aux suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} \Theta(u_i) = 0, \\ \Theta(u_i - e_i^{(k)}) = 0 \end{cases}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p-1).$$

En effet, l'équation $\Theta(u_i) = 0$ équivaut à

$$u_i = v_i + v_i' + \ldots + v_i^{(p-2)}.$$

Or les équations (7) admettent $p!$ solutions.

Les équations (4) doivent donc avoir aussi, au premier point de vue, $p!$ solutions.

Et, en effet,

$$\frac{p!}{p-q)!} = \frac{p!}{1!} = p!.$$

8. — Décomposition de la courbe Λ.

Au n° 6, j'ai défini par les équations (5) une certaine courbe que j'ai appelée Λ; je transcris ces équations en leur donnant le n° (1),

$$(1) \qquad \begin{cases} \Theta(u_i - e_i) = 0. \\ \Theta(u_i - e_i') = 0. \end{cases}$$

J'ai dit que cette courbe doit se décomposer dans certains cas, et c'est sur ce point que je désire revenir.

Il est aisé de comprendre pourquoi cette décomposition doit avoir lieu.

Cherchons en effet le degré de la courbe Λ.

Je suppose $p = 3$, $n > 2$; la courbe Λ est alors tracée sur la variété V qui a été définie plus haut; la variété V est de degré $6n^3$ et est située dans l'espace à $n^3 - 1$ dimensions.

Pour évaluer le degré de Λ, il faut couper par une variété plane ayant $n^3 - 2$ dimensions et compter le nombre des points d'intersection.

Cette variété plane sera définie par une seule équation qui sera de la forme

$$\theta = 0,$$

θ étant l'une des fonctions d'ordre n qui donne naissance à la variété V.

Les trois équations

$$\Theta(u_i - e_i) = 0,$$
$$\Theta(u_i - e'_i) = 0,$$
$$\theta = 0$$

admettent $6n$ solutions; la courbe Λ est donc de degré $6n$.

Maintenant donnons des valeurs particulières aux six constantes e_i et e'_i.

Soient

$$e_i = -v_i^0, \qquad e'_i = -v_i^1,$$

x_0, x_1 étant deux points de la courbe C, et v_i^0, v_i^1 les valeurs correspondantes de v_i.

Il est clair qu'on satisfera aux équations

$$\Theta(u_i + v_i^0) = 0,$$
$$\Theta(u_i + v_i^1) = 0$$

en faisant

$$u_i = v_i.$$

La courbe B fait donc partie de Λ, et comme elle est de degré $3n$, il faut bien que Λ se décompose.

Étudions les circonstances de cette décomposition.

Plaçons-nous d'abord dans le cas singulier elliptique.

La courbe Λ se décompose alors toujours en 6 autres ayant respectivement pour équations

$$
(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_2 = \alpha_2 + e'_2,\\
u_2 = \alpha_2 + e_2, & u_1 = \alpha_1 + e'_1,\\
u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_3 = \alpha_3 + e'_3,\\
u_3 = \alpha_3 + e_3, & u_1 = \alpha_1 + e'_1,\\
u_2 = \alpha_2 + e_2, & u_3 = \alpha_3 + e'_3,\\
u_3 = \alpha_3 + e_3, & u_2 = \alpha_2 + e'_2.
\end{array}\right.
$$

Celle de ces six courbes dont les deux équations occupent la $i^{\text{ème}}$ ligne dans ce tableau, je l'appellerai la courbe $(2, i)$.

Cela posé, supposons

$$e_i = -v_i^0, \qquad e'_i = -v_i^1.$$

On peut faire trois hypothèses différentes sur v_i^0; deux des v_i^0 doivent en effet être égaux à $\frac{\alpha_i}{2}$; on peut faire de même trois hypothèses sur v_i^1. Cela fait en tout neuf hypothèses différentes; je n'en examinerai que deux, toutes les autres s'en déduisant par permutation. Dans l'une comme dans l'autre, la courbe B se décomposant en trois courbes de degré n, nous devrons retrouver ces trois courbes parmi les six courbes (2).

Soient d'abord

$$v_2^0 = v_2^1 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v_3^0 = v_3^1 = \frac{\alpha_3}{2}.$$

Les équations (2) deviendront

$$
(2\ bis)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_2 = \frac{\alpha_2}{2},\\
u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_1 = \alpha_1 + e'_1,\\
u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2},\\
u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, & u_1 = \alpha_1 + e'_1,\\
u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2},\\
u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, & u_2 = \frac{\alpha_2}{2}.
\end{array}\right.
$$

On ne retrouve ainsi que l'une des trois courbes dans lesquelles se décompose B, à savoir

$$u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad u_3 = \frac{\alpha_3}{2}.$$

La contradiction n'est qu'apparente. Si, en effet, nous nous plaçons dans le cas singulier elliptique et si nous faisons

$$e_2 = e'_2 = -\frac{\alpha_2}{2}, \qquad e_3 = e'_3 = -\frac{\alpha_3}{2},$$

les équations (1) de la courbe A ne sont plus distinctes; elles sont satisfaites toutes les fois que

$$u_2 = \frac{\alpha_2}{2},$$

et toutes les fois que

$$u_3 = \frac{\alpha_3}{2}.$$

Les équations ne définissent donc plus une courbe, mais une surface ou variété à deux dimensions. Les trois parties de la courbe B se trouvent sur cette surface.

Mais si, restant dans le cas singulier elliptique, on fait *tendre* e_2, e'_2, e_3, e'_3, vers $-\frac{\alpha_2}{2}$ et $-\frac{\alpha_3}{2}$, la *limite* de la courbe A ne contiendra pas la courbe B tout entière.

Si, au contraire, nous plaçant d'abord dans le cas général, nous faisons tendre les termes latéraux vers o, de façon à nous rapprocher indéfiniment du cas singulier elliptique, si nous prenons

$$e_i = -v_i^0, \qquad e'_i = -v_i^1,$$

et de telle manière que, à mesure qu'on se rapproche du cas singulier, e_2, e'_2, e_3, e'_3 tendent vers $-\frac{\alpha_2}{2}$ et $-\frac{\alpha_3}{2}$, alors, la *nouvelle limite* de A contiendra la courbe B tout entière.

Supposons maintenant

$$v_2^0 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v_3^0 = \frac{\alpha_3}{2}, \qquad v_1^1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad v_3^1 = \frac{\alpha_3}{2};$$

les équations (2) deviendront

$$(2\,ter)\quad \left|\begin{array}{ll} u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_2 = \alpha_2 + e'_2, \\ u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \\ u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, & u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \\ u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, & u_2 = \alpha_2 + e'_2. \end{array}\right.$$

Nous retrouvons ici les trois parties de la courbe B.

Ici encore les équations (2) ne sont pas distinctes.

Elles sont satisfaites par tous les points de la surface

$$u_3 = \frac{\alpha^3}{2},$$

et, en outre, par tous les points des deux courbes (2 *ter*, 1) et (2 *ter*, 2).

Seulement les choses ne se passent pas ici comme dans la première hypothèse, et c'est sur ce point que je désirais attirer l'attention.

Si, restant dans le cas singulier elliptique, nous faisons tendre e_2, e_3, e'_1 et e'_3 vers les limites $-\frac{\alpha_2}{2}, -\frac{\alpha_3}{2}, -\frac{\alpha_1}{2}, -\frac{\alpha_3}{2}$, la limite de la courbe A contiendra la courbe B tout entière.

Étudions maintenant la décomposition de A dans le cas général.

Dans le cas de $p = 3$, on peut supposer que la courbe C est une courbe de quatrième degré sans point double.

Étudions la signification de l'équation

$$(3)\qquad \Theta(u_i - e_i) = 0.$$

On peut toujours poser

$$-e_i = v_i^1 + v_i^2 + v_i^3,$$

v_i^1, v_i^2, v_i^3 étant les valeurs de l'intégrale v_i qui correspondent à trois points de C que j'appellerai les points x_1, x_2, x_3, ou, pour abréger encore, les points 1, 2, 3.

De même, nous pouvons toujours poser

$$u_i = v_i^4 + v_i^5 + v_i^6,$$

les intégrales $v_i^4, \ldots$ correspondant à trois points de C que j'appellerai les points 4, 5, 6.

L'équation (3), en vertu du théorème de Riemann, peut être remplacée par la suivante :

$$u_i - e_i = -v_i^7 - v_i^8, \tag{4}$$

les points 7 et 8, qui correspondent aux deux intégrales du second membre de (4), étant deux points quelconques de C. Mais l'équation (4) peut s'écrire

$$v_i^1 + v_i^2 + v_i^3 + v_i^4 + v_i^5 + v_i^6 + v_i^7 + v_i^8 = 0;$$

elle signifie que les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont sur une même conique.

La signification géométrique de l'équation (3), c'est donc que les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 doivent être sur une même conique. Considérons maintenant l'équation

$$\Theta(u_i - e'_i) = 0. \tag{3 bis}$$

Nous pourrons toujours poser

$$-e'_i = v_i^9 + v_i^{10} + v_i^{11},$$

et l'équation (3 *bis*) signifiera que les six points 4, 5, 6, 9, 10, 11 sont sur une même conique.

La courbe A est définie par les équations simultanées (3) et (3 *bis*);

si l'on veut satisfaire à la fois à ces deux équations, le problème se posera géométriquement de la manière suivante :

On se donne sur la courbe C *six points* 1, 2, 3, 9, 10, 11; *il faut faire passer par* 1, 2, 3 *une conique* K, *et, par* 9, 10, 11, *une conique* K', *et de telle façon qu'il y ait trois points* 4, 5, 6 *communs à* C *et aux deux coniques.*

A chaque solution de ce problème correspondra un point de Λ.

Supposons en particulier que deux des points 1, 2, 3 coïncident avec deux des trois points 9, 10, 11; par exemple, 2 avec 10 et 3 avec 11, de sorte que

$$-e'_i = v_i^9 + v_i^2 + v_i^3.$$

Qu'arrivera-t-il alors? Les équations (3) et (3 *bis*) de la courbe Λ deviendront

$$\Theta(u_i + v_i^1 + v_i^2 + v_i^3) = 0,$$
$$\Theta(u_i + v_i^9 + v_i^2 + v_i^3) = 0,$$

et elles admettront pour solution

$$u_i = v_i - v_i^2 - v_i^3.$$

C'est là l'équation d'une courbe B'; la courbe Λ se décompose donc, une des deux parties étant la courbe B'.

Examinons géométriquement les circonstances de cette décomposition. Les deux coniques K et K' ont déjà deux points communs 2 et 3; si elles doivent en avoir trois autres 4, 5, 6, elles se confondront à moins de se décomposer.

Examinons séparément ces deux hypothèses.

On obtiendra les valeurs de u_i (ou des points de Λ) qui correspondent à la première hypothèse de la manière suivante :

Par les quatre points 1, 2, 3, 9, faisons passer une conique; elle coupera la courbe C en quatre autres points, parmi lesquels j'en choisirai trois qui seront les points 4, 5, 6.

Ce choix peut se faire de trois manières différentes.

Les coniques qui passent par les quatre points 1, 2, 3, 9 forment un faisceau. A chaque conique du faisceau correspondent ainsi trois points de A.

Examinons maintenant la seconde hypothèse.

Pour que deux coniques aient cinq points communs, sans se confondre, il faut que chacune d'elles se décompose en deux droites et que deux de ces droites se confondent. Quatre des cinq points doivent alors se trouver en ligne droite. Les coniques K et K′ ont cinq points communs, 2, 3, 4, 5, 6; quatre de ces points doivent être en ligne droite.

Cela peut se faire de deux manières, de sorte que la seconde hypothèse se subdivise en deux autres que j'appellerai, pour abréger, la *seconde* et la *troisième hypothèse*.

Ou bien, les points 2 et 3 sont en ligne droite avec deux des points 4, 5, 6; par exemple, avec les points 4, 5; ce sera là la deuxième hypothèse.

Ou bien, les points 4, 5 et 6 sont en ligne droite avec un des points 2 et 3; par exemple, avec le point 3; ce sera là la troisième hypothèse.

Examinons d'abord la deuxième hypothèse.

Les points 2, 3, 4, 5 étant en ligne droite, on aura

$$v_i^2 + v_i^3 + v_i^4 + v_i^5 = 0.$$

La conique K se réduira à la droite 2, 3, 4, 5 et à la droite 1, 6; la conique K′ se réduira à la droite 2, 3, 4, 5 et à la droite 9, 6.

Les points 4 et 5 sont fixes et le point 6 est seul mobile; on aura d'ailleurs

$$u_i = v_i^4 + v_i^5 + v_i^6 = v_i^6 - v_i^2 - v_i^3;$$

comme le point 6 est mobile, les points 2 et 3 fixes, je puis écrire cela sous la forme

$$u_i = v_i - v_i^2 - v_i^3,$$

le point x qui correspond à v_i étant un point mobile quelconque de C.

C'est là l'équation de la courbe B′ et l'on voit ainsi d'une autre manière qu'elle doit faire partie de la courbe A. Mais j'ajouterai qu'elle doit faire partie d'une infinité de courbes Λ; et en effet nous pouvons laisser les points 2, 3, 4, 5 fixes et en ligne droite et faire varier les deux autres points 1 et 9 (et par conséquent les quantités e_i et e'_i); nous ne cesserons pas d'avoir

$$u_i = v_i - v_i^2 - v_i^3.$$

Examinons maintenant la troisième hypothèse.

Les points 3, 4, 5, 6 étant en ligne droite, on aura

$$v_i^3 + v_i^4 + v_i^5 + v_i^6 = 0;$$

d'où

$$u_i = - v_i^3.$$

Comme les u_i sont des constantes, on voit qu'à la troisième hypothèse correspond seulement un point de Λ.

La courbe Λ se décompose donc en deux parties correspondant aux deux premières hypothèses; la partie qui correspond à la deuxième hypothèse est la courbe B'.

Nous n'obtenons pas ainsi tous les cas de décomposition de la courbe Λ.

Soient en effet

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3$$

trois constantes quelconques, nous pourrons encore poser

$$\begin{aligned} u_i &= f_i + v_i^4 + v_i^5 + v_i^6, \\ - e_i &= f_i + v_i^1 + v_i^2 + v_i^3, \\ - e'_i &= f_i + v_i^9 + v_i^{10} + v_i^{11}. \end{aligned}$$

Les équations (3) et (3 *bis*) signifieront encore que les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont sur une conique K et les six points 4, 5, 6, 9, 10, 11 sur une conique K'.

Si deux des points 1, 2, 3 coïncident avec deux des points 9, 10, 11, ces deux coniques doivent se confondre ou se décomposer. Il en résulte que la courbe Λ se décomposera encore en deux parties; l'une de ces parties (celle qui correspond à l'hypothèse de la décomposition de K et de K′) a pour équation

$$u_i = v_i + f_i - v_i^2 - v_i^3.$$

C'est encore une courbe B′. On a la courbe B elle-même si l'on suppose

$$f_i = v_i^2 + v_i^3.$$

9. — Cas voisins du cas elliptique.

J'ai déjà eu l'occasion, au n° **6**, d'étudier les cas voisins du cas singulier elliptique. Nous avons vu que, pour les cas suffisamment voisins de ce cas singulier, la fonction Θ peut se développer suivant les puissances croissantes des *termes latéraux*.

C'est le développement (6) du n° **6** dont nous avons formé plus haut les premiers termes.

Il est aisé d'en former le terme général.

Soit par exemple à former le terme en

$$a_{23}^{\lambda} a_{13}^{\lambda'} a_{12}^{\lambda''},$$

en supposant d'abord $p = 3$.

Posons

$$\gamma_1 = \lambda' + \lambda'', \qquad \gamma_2 = \lambda + \lambda'', \qquad \gamma_3 = \lambda + \lambda',$$

le coefficient du terme cherché sera

$$(-1)^{\lambda+\lambda'+\lambda''} \frac{\theta_1^{(\gamma_1)} \theta_2^{(\gamma_2)} \theta_3^{(\gamma_3)}}{\lambda!\, \lambda'!\, \lambda''!}.$$

Je désigne toujours par $\theta_1 \theta_2 \theta_3$ le premier terme du développement (6) et par $\theta_1^{(\gamma_1)}$ la dérivée d'ordre γ_1 de la fonction θ_1.

Supposons maintenant $p = 4$ et soit à trouver dans le développement (6) le coefficient du terme général en

$$a_{12}^{\lambda_{12}} a_{13}^{\lambda_{13}} a_{14}^{\lambda_{14}} a_{23}^{\lambda_{23}} a_{24}^{\lambda_{24}} a_{34}^{\lambda_{34}}.$$

Soient

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}, \\
\gamma_2 &= \lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24}, \\
\gamma_3 &= \lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34}, \\
\gamma_4 &= \lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{42}.
\end{aligned}$$

Il va sans dire que je pose

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}.$$

Le coefficient cherché sera alors

$$(-1)^{\Sigma\lambda} \frac{\theta_1^{(\gamma_1)} \theta_2^{(\gamma_2)} \theta_3^{(\gamma_3)} \theta_4^{(\gamma_4)}}{\lambda_{12}!\, \lambda_{13}!\, \lambda_{14}!\, \lambda_{23}!\, \lambda_{24}!\, \lambda_{34}!}.$$

Il est donc facile dans tous les cas de former le développement (6). Voici maintenant l'usage que j'en ferai.

Nous avons défini plus haut au n° **3** ce qu'on doit entendre par surface de translation et par équation *translative* et nous avons vu que l'équation

$$(1) \qquad \Theta = 0$$

est translative si la fonction Θ est une fonction *spéciale*.

Mais on peut se demander si cette équation est encore translative si la fonction Θ est une fonction *non spéciale*.

Pour résoudre cette question j'étudierai l'équation

$$\Theta = 0,$$

en me servant du développement (6) et en supposant que les *termes latéraux* sont assez petits pour qu'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur de ce développement.

Mais cette étude peut se faire de plusieurs manières.

Nous pouvons d'abord supposer que u_1 est très voisin de α_1, mais que u_2, u_3, u_4 ne sont pas très voisins de α_2, α_3, α_4. C'est ainsi que nous avons obtenu le développement (8) du n° **6** dont nous avons formé les premiers termes.

Nous avons formé les termes du premier ordre et nous avons trouvé, pour $p = 3$,

$$u_1 = \alpha_1 + a_{12}\frac{\theta'_2}{\theta_2} + a_{13}\frac{\theta'_3}{\theta_3}.$$

Dans le cas de $p = 4$, nous aurions trouvé

$$u_1 = \alpha_1 + a_{12}\frac{\theta'_2}{\theta_2} + a_{13}\frac{\theta'_3}{\theta_3} + a_{14}\frac{\theta'_4}{\theta_4}.$$

Cherchons maintenant à former les termes du deuxième ordre.

Soit

$$B = \frac{\theta''_1(\alpha_1)}{\theta'_1(\alpha_1)}.$$

Nous trouverons pour ces termes du deuxième ordre, dans le cas de $p = 4$,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 = \alpha_1 + \sum a_{1i}\frac{\theta_i}{\theta_i} - \sum \frac{a_{1i}^2}{2} B\left(\frac{\theta''_i}{\theta_i} - \frac{\theta'^2_i}{\theta^2_i}\right) \\ - \sum a_{1i} a_{ik}\frac{\theta'_k}{\theta_k}\left(\frac{\theta''_i}{\theta_i} - \frac{\theta'^2_i}{\theta^2_i}\right) \\ (i, k = 2, 3, 4). \end{aligned}\right.$$

Cette équation peut être remplacée par les suivantes, au même degré d'approximation, c'est-à-dire en négligeant les cubes des a_{1i} et de $u_1 - \alpha_1$.

Nous introduisons trois paramètres w_2, w_3, w_4 et nous posons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \sum_i a_{1i}\frac{\theta'_i(w_i)}{\theta_i(w_i)} \\ u_i &= \frac{Ba_{1i}}{2} + w_i + \sum_k a_{ik}\frac{\theta'_k(w_k)}{\theta_k(w_k)} \\ &(i, k = 2, 3, 4;\ i \gtrless r). \end{aligned}\right.$$

Les équations (3) peuvent remplacer l'équation (1) en négligeant les cubes des termes latéraux.

Or *les équations* (3) *ont un caractère manifestement translatif.* Il semblerait donc que l'équation (1) reste translative même pour les fonctions abéliennes non spéciales. Mais on ne doit pas oublier que les équations (3) ne sont qu'approchées et nous ne tarderons pas à voir que le caractère translatif ne subsiste pas à un degré supérieur d'approximation.

Une seconde hypothèse est celle où, p étant égal à 4 par exemple, u_1 et u_2 sont très voisins de α_1 et α_2, u_3 et u_4 très différents de α_3 et α_4.

Posons alors

$$u_1 = \alpha_1 + t\xi_1, \qquad u_2 = \alpha_2 + t\xi_2,$$
$$a_{ik} = t^2\gamma_{ik},$$

t étant un paramètre très petit.

La fonction Θ, représentée par le développement (6), se trouvera alors développée suivant les puissances de t; si t est très petit, nous pourrons ne conserver que le premier terme qui est un terme en t^2 et qui s'écrit

$$t^2\theta'_1\theta'_2\theta_3\theta_4(\xi_1\xi_2 - \gamma_{12}).$$

Alors l'équation (1) se réduit à

$$\xi_1\xi_2 = \gamma_{12}.$$

Dans le cas de $p = 3$, si u_1, u_2, u_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace, cette équation représente un cylindre hyperbolique qui peut, d'une infinité de manières, être regardé comme une surface de translation.

Le caractère translatif est également évident pour $p > 3$.

Nous avons encore trois hypothèses à examiner :

$p = 3$; u_1, u_2 et u_3 très voisins de α_1, α_2, α_3;
$p = 4$; u_1, u_2 et u_3 très voisins de α_1, α_2, α_3; u_4 très différent de α_4;
$p = 4$; u_1, u_2, u_3 et u_4 très voisins de α_1, α_2, α_3 et α_4.

Nous nous en occuperons dans les numéros suivants.

10. — Étude d'une surface de translation.

Les surfaces de translation peuvent être engendrées par la translation d'une courbe gauche et c'est là l'origine du nom qu'on leur a donné. L'équation générale d'une surface de translation est, comme nous l'avons vu,

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f_1(t) + f'_1(u), \\ y = f_2(t) + f'_2(u), \\ z = f_3(t) + f'_3(u), \end{cases}$$

t et u étant deux variables indépendantes; les f et les f' étant six fonctions quelconques.

La surface définie par l'équation (1) peut être, de deux manières différentes, engendrée par la translation d'une courbe gauche, à savoir par celle de la courbe

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t)$$

et par celle de la courbe

$$x = f'_1(u), \qquad y = f'_2(u), \qquad z = f'_3(u).$$

On peut tracer sur la surface deux systèmes de lignes remarquables que j'appellerai *génératrices*.

Ce sont pour le premier système

$$\begin{aligned} x &= f_1(t) + f'_1(a), \\ y &= f_2(t) + f'_2(a), \\ z &= f_3(t) + f'_3(a), \end{aligned}$$

a étant une constante quelconque et t une variable, et pour le second système

$$\begin{aligned} x &= f'_1(u) + f_1(a), \\ y &= f'_2(u) + f_2(a), \\ z &= f'_3(u) + f_3(a), \end{aligned}$$

a étant une constante quelconque et u une variable.

Les génératrices d'un même système sont toutes égales entre elles.

Parmi les surfaces de translation, je distinguerai une classe remarquable de surfaces que j'appellerai *surfaces de translation distinguées*.

On les obtient quand les trois fonctions f'_1, f'_2, f'_3 sont identiques respectivement aux trois fonctions f_1, f_2, f_3. Les deux systèmes de génératrices se confondent alors en un seul.

D'autre part, la surface peut être considérée comme le lieu des milieux des cordes d'une courbe gauche tracée sur la surface et que j'appellerai *courbe directrice*. Elle a pour équations

$$x = 2f_1(t), \qquad y = 2f_2(t), \qquad z = 2f_3(t).$$

Il suffit d'ailleurs, pour qu'une surface soit distinguée, que les différences

$$\begin{gathered} f'_1(t) - f_1(t), \\ f'_2(t) - f_2(t), \\ f'_3(t) - f_3(t) \end{gathered}$$

se réduisent à des constantes; c'est-à-dire qu'une génératrice du second système soit égale à une génératrice du second système et semblablement orientée dans l'espace. Ce cas se ramène en effet au précédent d'une manière immédiate.

La surface

$$\Theta = 0,$$

où u_1, u_2, u_3 sont regardés comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace, est une surface de translation distinguée.

On a en effet

$$\Theta(v_1 + v'_1, v_2 + v'_2, v_3 + v'_3) = 0,$$

de sorte que l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$u_i = v_i + v'_i,$$

où les v_i ne dépendent que de x et les v'_i de x'.

C'est donc bien une surface de translation distinguée dont les génératrices ont pour équation

$$u_i = v_i + v_i^0,$$

x_0 étant un point fixe de C et v_i^0 la valeur correspondante de v_i.

La directrice a pour équation

$$u_i = 2v_i.$$

Mais ce n'est pas tout. On a également

$$\Theta(-v_i - v'_i) = 0,$$

de sorte que l'équation de la surface peut se mettre encore sous la forme

$$u_i = -v_i - v'_i.$$

C'est donc encore le lieu des milieux des cordes de la courbe

$$u_i = -2v_i.$$

C'est donc, de deux manières différentes, une surface de translation distinguée qui a deux courbes directrices

$$u_i = 2v_i, \qquad u_i = -2v_i$$

et deux systèmes de génératrices

$$u_i = v_i + v_i^0, \qquad u_i = -v_i - v_i^0.$$

Avant d'aller plus loin, étudions les points à l'infini des surfaces de translation; elles correspondent évidemment aux points à l'infini des génératrices.

Considérons la courbe

$$x = f'_1(u), \qquad y = f'_2(u), \qquad z = f'_3(u)$$

et l'une des asymptotes de cette courbe. Supposons que l'on ait pris l'axe des z parallèle à cette asymptote, de telle façon que, pour une certaine valeur u_0 de u, $f'_3(u_0)$ devienne infini, $f'_1(u_0)$ et $f'_2(u_0)$ restant finies.

Alors

$$x = f_1(t) + f'_1(u_0), \qquad y = f_2(t) + f'_2(u_0),$$

où t est une variable et u_0 une constante, sera l'équation d'un cylindre asymptotique à la surface.

La projection d'une génératrice quelconque sur le plan des xy sera égale à la section droite de ce cylindre.

Cela posé, voici où je voulais en venir.

Examinons l'hypothèse

$$p = 3; \quad u_1, u_2, u_3 \text{ très voisins de } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.$$

Posons

$$u_i = \alpha_i + t\xi_i, \qquad a_{ik} = t^2\gamma_{ik} \qquad (i \gtrless k);$$

la série (6) du n° 6 se trouve alors développée suivant les puissances de t et le premier terme, qui est en t^2, s'écrit

$$t^2\,\theta'_1\,\theta'_2\,\theta'_3\,(\xi_1\xi_2\xi_3 - \gamma_{23}\xi_1 - \gamma_{13}\xi_2 - \gamma_{12}\xi_3).$$

Si je suppose t très petit, je pourrai négliger les autres.

Donc la surface algébrique du troisième ordre

$$(2) \qquad \xi_1\xi_2\xi_3 = \gamma_{23}\xi_1 + \gamma_{13}\xi_2 + \gamma_{13}\xi_3$$

doit être une surface de translation.

C'est même une surface de translation distinguée.

Sur ce dernier point le passage à la limite que je viens d'opérer pourrait peut-être laisser des doutes.

Soit S une surface de translation distinguée *variable* ayant pour limite une certaine surface S′ (quand le paramètre variable dont dépend la surface S tend vers une certaine limite). Soit M un point de S tendant vers un point M′ de S′. Par le point M passeront deux génératrices de S, que j'appellerai G et H; les deux courbes G et H tendront vers deux courbes limites G′ et H′ passant par le point M′; et la surface S′ pourra, à la limite, être regardée comme engendrée par la translation de G′ ou par celle de H′. C'est donc une surface de translation.

La surface S étant une surface de translation distinguée, les deux courbes G et H sont égales entre elles; s'ensuit-il que les deux courbes G′ et H′ soient égales entre elles? Il n'en est pas forcément ainsi; il peut se faire qu'à la limite la courbe G se décompose et même que, dans cette décomposition, certaines parties de cette courbe soient rejetées à l'infini. De même la courbe H, égale à G, se décomposera; et il peut se faire que G' soit la limite d'une partie de G et H' celle d'une partie de H correspondant à une *autre* partie de G.

Pour mieux faire comprendre ma pensée, je vais essayer de fixer les idées; supposons que G et H soient deux cubiques gauches égales; on pourrait imaginer qu'à la limite G se décompose en une droite à distance finie (qui serait G') et une conique rejetée à l'infini, et que H se décompose en une droite rejetée à l'infini et une conique à distance finie (qui serait H').

C'est d'ailleurs ce qui arrive quand on passe à la limite d'une autre manière et comme nous l'avons fait au n° 6; c'est-à-dire de telle sorte que $u_1 - \alpha_1$ devienne infiniment petit et que $u_2 - \alpha_2$, $u_3 - \alpha_3$ restent finis.

La surface (2) est donc une surface de translation; mais on pourrait se demander si c'est une surface distinguée.

On peut faire de cette surface une transformation homographique très simple qui en simplifie un peu l'équation en lui conservant le caractère translatif.

Nous pouvons toujours trouver des quantités

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

définies par les équations

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -\gamma_{12}, \qquad \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -\gamma_{23}, \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_3 = -\gamma_{13};$$

nous poserons alors

$$\xi_1 = \varepsilon_1 x, \qquad \xi_2 = \varepsilon_2 y, \qquad \xi_3 = \varepsilon_3 z,$$

et l'équation (2) deviendra

$$xyz + x + y + z = 0. \tag{3}$$

La surface du troisième ordre (3) (où x, y, z sont regardés comme les coordonnées rectangulaires d'un point) est donc une surface de translation.

La surface (3) admet trois cylindres asymptotiques qui sont

$$xy + 1 = 0,$$
$$xz + 1 = 0,$$
$$yz + 1 = 0.$$

D'après une remarque faite plus haut sur les cylindres asymptotiques des surfaces de translation, la projection d'une génératrice sur l'un quelconque des plans de coordonnées est une hyperbole équilatère.

Toute génératrice est donc l'intersection de deux cylindres hyperboliques équilatères dont les plans asymptotiques sont parallèles aux plans de coordonnées, à savoir aux plans

$$x = 0, \qquad z = 0$$

pour le premier cylindre, et aux plans

$$y = 0, \qquad z = 0$$

pour le second. L'intersection de ces deux cylindres se décompose en une droite rejetée à l'infini dans la direction du plan $z = 0$ et en une cubique gauche.

Les génératrices de notre surface de translation sont donc des cubiques gauches dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Cela nous fait déjà prévoir que la surface sera une surface de translation distinguée; en effet, la projection d'une génératrice du second système sur le plan des xy doit être, comme celle d'une génératrice du premier système, égale à l'hyperbole

$$xy + 1$$

et semblablement orientée.

Les projections des génératrices des deux systèmes sur l'un des trois plans de coordonnées sont donc égales; donc les génératrices du second système sont égales à celles du premier et semblablement orientées.

C. Q. F. D.

La surface a donc une directrice qui est aussi une cubique gauche, et les deux systèmes de génératrices se confondent en un seul. Mais ce n'est pas tout; la surface admet un centre de symétrie qui est l'origine, et trois plans de symétrie qui sont les plans $x=y$, $x=z$, $y=z$. Elle admet en conséquence trois axes de symétrie binaire et un axe de symétrie ternaire.

Nous pouvons conclure de là que : ou bien la directrice admettra l'origine pour centre de symétrie; ou bien sa symétrique sera encore une directrice. Or une cubique gauche ne peut avoir de centre de symétrie; donc la surface admet *deux directrices*, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine.

On pourrait raisonner de même avec l'un des trois plans de symétrie; car une cubique gauche ne peut pas non plus avoir de plan de symétrie. Les deux directrices sont donc aussi symétriques l'une de l'autre par rapport à l'un de ces trois plans.

On verrait de même que chacune des directrices admet trois axes de symétrie binaire et un axe de symétrie ternaire.

La surface (3) jouit donc de la même propriété que la surface $\Theta=0$; je veux dire qu'elle sera *de deux manières différentes* une surface distinguée et qu'elle aura par conséquent deux directrices et deux systèmes de génératrices.

Nous sommes ainsi amené à rechercher les cubiques gauches que l'on peut tracer sur la surface.

Une cubique gauche est déterminée quand on en connaît six points et en particulier quand on connaît les trois asymptotes.

D'un autre côté une cubique gauche, qui a ses trois asymptotes sur les trois cylindres asymptotiques de la surface, rencontre cette surface en neuf points à l'infini. Elle ne peut donc la rencontrer encore en un point à distance finie sans être tout entière sur la surface.

Voici donc ce que je vais faire.

Je prendrai une droite sur chacun des trois cylindres asymptotiques. Je construirai une cubique ayant pour asymptotes ces trois droites qui seront respectivement parallèles aux trois axes de coordonnées. J'écrirai qu'un point, à distance finie, mais d'ailleurs quelconque de cette cubique est sur la surface; et la cubique sera tout entière sur la surface.

Soient

$$y = u, \qquad z = -\frac{1}{u},$$

$$z = v, \qquad x = -\frac{1}{v},$$

$$x = w, \qquad y = -\frac{1}{w}$$

ces trois asymptotes; u, v, w sont trois constantes quelconques.

On voit que les trois asymptotes sont bien sur les trois cylindres asymptotiques.

Pour qu'un point de la cubique soit sur la surface, il faut et il suffit que

$$uvw = \pm 1;$$

soit d'abord

$$(4) \qquad uvw = 1.$$

Posons

$$(5) \qquad \frac{1}{v} + w = \xi, \quad \frac{1}{w} + u = \eta, \quad \frac{1}{u} + v = \zeta.$$

La *forme* de la cubique gauche dépendra uniquement de ξ, η et ζ; de sorte que deux cubiques gauches, correspondant à un même système de valeurs de ξ, η et ζ, seront égales.

Les trois paramètres u, v, w étant liés par la relation (4), on voit qu'il y a sur la surface une double infinité de cubiques gauches.

Les équations (5) deviennent, en tenant compte de (4),

$$(6) \qquad 1 + \frac{1}{u} = \xi v, \quad 1 + \frac{1}{v} = \eta w, \quad 1 + \frac{1}{w} = \zeta u.$$

Des équations (5) et (6) nous tirons

$$(7) \qquad u = \frac{1+\eta}{1+\zeta}, \quad v = \frac{1+\zeta}{1+\xi}, \quad w = \frac{1+\xi}{1+\eta},$$

avec la condition

$$(8) \qquad \xi\eta\zeta = +\xi + \eta + \zeta + 2.$$

Alors u, v et w étant fonctions rationnelles de ξ, η et ζ, à un système de valeurs de ξ, η, ζ correspondra *un seul* système de valeurs de u, v, w; deux de nos cubiques gauches ne peuvent donc être égales entre elles, *à moins que ces fonctions rationnelles ne se présentent sous une forme indéterminée*. C'est ce qui arrive si l'on fait

$$\xi = \eta = \zeta = -1,$$

valeurs qui satisfont d'ailleurs à la relation (8).

C'est donc ainsi que l'on obtient les génératrices de notre surface qui doivent, en nombre infini, être égales entre elles et semblablement orientées.

Pour obtenir les équations de ces génératrices, il faut donner à ξ, η, ζ non pas la valeur -1, qui rendrait les expressions de u, v, w indéterminées, mais des valeurs très voisines, en les choisissant de telle sorte que la relation (8) ne cesse pas d'être satisfaite, c'est-à-dire que l'on ait sensiblement (en négligeant les carrés de $1+\xi$, $1+\eta$, $1+\zeta$)

$$\xi + \eta + \zeta = -3. \tag{9}$$

On tire de là, en combinant les équations (7) et (9),

$$u = \frac{1}{t}, \qquad v = \frac{t}{1+t}, \qquad w = 1 + t,$$

t étant un paramètre arbitraire; telles sont les valeurs de u, v, w qui correspondent aux génératrices.

De $u^2 v^2 w^2 = 1$ on aurait pu déduire, au lieu de (4), la relation

$$uvw = -1. \tag{4 bis}$$

On peut donc tracer sur la surface deux familles de cubiques gauches, formées chacune d'une double infinité de courbes, et correspondant la première à (4), la seconde à (4 *bis*).

Si nous prenons (4 *bis*) au lieu de (4) et que nous écrivions (5), nous trouverons

$$u = \frac{1-\eta}{\zeta - 1}, \qquad v = \frac{1-\zeta}{\xi - 1}, \qquad w = \frac{1-\xi}{\eta - 1}, \tag{7 bis}$$

avec la condition

$$(8\,bis)\qquad \xi\eta\zeta = \xi + \eta + \zeta - 2.$$

Les génératrices du second système correspondent alors aux valeurs

$$\xi = \eta = \zeta = 1,$$

qui rendent les expressions (7 *bis*) indéterminées et qui satisfont à (8 *bis*).

Quant à la directrice correspondant au premier système, elle correspondra aux valeurs

$$\xi = \eta = \zeta = -2,$$

qui satisfont à (8 *bis*) et qui donnent

$$u = v = w = -1.$$

Enfin la directrice correspondant au deuxième système correspondra aux valeurs

$$\xi = \eta = \zeta = 2,$$

qui satisfont à (8) et qui donnent

$$u = v = w = 1.$$

Ainsi les génératrices du premier système et la directrice du second appartiendront à la première famille de cubiques; les génératrices du second système et la directrice du premier appartiendront à la seconde famille de cubiques.

Notre surface est donc le lieu des milieux, des cordes de deux cubiques gauches qui ont respectivement pour asymptotes

$$(10)\qquad -y = z = 1, \qquad -z = x = 1, \qquad -x = y = 1$$

et

$$y = -z = 1, \qquad z = -x = 1, \qquad x = -y = 1.$$

Étant données trois droites quelconques dans l'espace, je puis toujours choisir des axes obliques tels que ces droites aient pour équations

$$(11)\qquad \begin{cases} y=-b, & z=c, \qquad z=-c, \\ x=a, & x=-a, \qquad y=b. \end{cases}$$

Il suffit ensuite d'une transformation homographique très simple $\left(\text{en changeant } x, y, z \text{ en } \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$ pour ramener les équations (11) aux équations (10).

Si nous nous rappelons qu'une cubique gauche est déterminée par ses asymptotes, nous conclurons que le lieu des milieux des cordes d'une cubique gauche quelconque est une transformée homographique de la surface (3) et par conséquent est une surface à centre.

On peut prendre la question par un autre côté.

Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées d'un point; soit une cubique gauche ayant ses asymptotes parallèles aux axes; les équations de la cubique pourront se mettre sous la forme

$$\xi_i = \frac{2\beta_i}{t-a_i} + b_i,$$

où t est un paramètre variable et les β, a et b des constantes.

La surface lieu des milieux de ses cordes aura pour équation

$$(12)\qquad \xi_i = \frac{\beta_i}{t-a_i} + \frac{\beta_i}{u-a_i} + b_i,$$

où t et u sont deux paramètres.

Soit P un polynome du premier degré par rapport à chacune des trois variables ξ, et par conséquent du troisième degré par rapport à l'ensemble de ces variables; ce polynome contiendra huit coefficients arbitraires.

Si nous y substituons à la place des ξ_i leurs valeurs (12), on obtiendra une fonction rationnelle R tant en t qu'en u et symétrique par rapport à ces variables. Si nous décomposons cette fonction rationnelle en éléments simples, d'abord par rapport à t, puis par rapport à u, nous pourrions obtenir seize éléments différents; on pourrait avoir en effet un terme

$$\frac{1}{t-a_1}\,\frac{1}{u-a_1},$$

où le premier facteur pourrait être remplacé par

$$\frac{1}{t-a_2}, \quad \frac{1}{t-a_3} \quad \text{ou} \quad 1,$$

et le second par

$$\frac{1}{u-a_2}, \quad \frac{1}{u-a_3} \quad \text{ou} \quad 1.$$

Mais on voit d'abord qu'il ne peut y avoir de terme en

$$\frac{1}{(t-a_i)(u-a_i)},$$

mais seulement en

$$\frac{1}{(t-a_i)(u-a_k)} \qquad (i \gtrless k).$$

Le développement de notre fonction rationnelle R en éléments simples comprendra donc treize termes; et si l'on observe que, par raison de symétrie,

$$\frac{1}{(t-a_i)(u-a_k)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(t-a_k)(u-a_i)},$$

$$\frac{1}{t-a_i} \quad \text{et} \quad \frac{1}{u-a_i}$$

doivent avoir même coefficient, on verra que le développement R contient sept coefficients.

En annulant ces sept coefficients, on impose sept conditions aux huit coefficients de P, mais il en reste encore un arbitraire; de sorte que l'équation de la surface (12) peut s'écrire

$$P=0;$$

cette surface est donc du troisième degré.

Jusqu'ici l'origine est restée arbitraire; nous pourrons la choisir de façon à faire disparaître les trois termes du second degré; alors, comme la surface doit avoir un centre, le terme de degré 0 disparaîtra de lui-même.

Passons encore à une autre hypothèse; soit

$$p=4;$$

u_1, u_2, u_3 très voisins de α_1, α_2, α_3; u_4 très voisin de α_4.

Posons encore

$$(i = 1, 2, 3) \qquad u_i = \alpha_i + t\xi_i, \qquad a_{ik} = t^2\gamma_{ik},$$

il viendra, en négligeant les termes en t^4,

$$\Theta = t^3\theta'_1\theta'_2\theta'_3\theta'_4(\xi_1\xi_2\xi_3 - \gamma_{23}\xi_1 - \gamma_{13}\xi_2 - \gamma_{12}\xi_3),$$

et l'équation $\Theta = 0$ s'écrira

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = \gamma_{23}\xi_1 + \gamma_{13}\xi_2 + \gamma_{12}\xi_3.$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas précédent.

11. — Extension au cas de $p = 4$.

Nous allons examiner une dernière hypothèse

$$p = 4;$$

u_1, u_2, u_3, u_4 très voisins de α_1, α_2, α_3, α_4.

Cette hypothèse va enfin nous permettre de montrer que les fonctions non spéciales, c'est-à-dire les fonctions abéliennes de genre p qui ne sont pas engendrées par une courbe algébrique de genre p, ne conservent pas le caractère translatif, c'est-à-dire que les théorèmes de Riemann ne sont plus vrais pour elles.

Posons encore

$$u_i = \alpha_i + t\xi_i, \qquad a_{ik} = t^2\gamma_{ik} \qquad (i \gtrless k);$$

il viendra, en négligeant les termes en t^5,

$$\Theta = t^4\theta'_1\theta'_2\theta'_3\theta'_4(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 - \Sigma\gamma_{12}\xi_3\xi_4 + \Sigma\gamma_{12}\gamma_{34}).$$

La première somme

$$\Sigma\gamma_{12}\xi_3\xi_4$$

comprend six termes que l'on déduit les uns des autres en permutant les indices, de sorte que

$$\Sigma\gamma_{12}\xi_3\xi_4 = \gamma_{12}\xi_3\xi_4 + \gamma_{13}\xi_2\xi_4 + \gamma_{14}\xi_2\xi_3 + \gamma_{23}\xi_1\xi_4 + \gamma_{24}\xi_1\xi_3 + \gamma_{34}\xi_1\xi_2.$$

La seconde somme comprend trois termes déduits les uns des autres par permutations d'indices, de sorte que

$$\Sigma\gamma_{12}\gamma_{34} = \gamma_{12}\gamma_{34} + \gamma_{13}\gamma_{24} + \gamma_{14}\gamma_{23}.$$

L'équation $\Theta = 0$ peut donc, pour t très petit, être remplacée par la suivante

$$(1) \qquad \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 - \Sigma\gamma_{12}\xi_3\xi_4 + \Sigma\gamma_{12}\gamma_{34} = 0.$$

C'est l'équation d'une variété à trois dimensions dans l'espace à quatre dimensions, si l'on regarde les ξ comme des coordonnées rectangulaires dans cet espace. J'appellerai cette variété V. Elle est algébrique et du quatrième degré; elle admet l'origine comme centre de symétrie.

La variété à trois dimensions qui a pour équation

$$\Theta = 0,$$

si l'on y regarde les u comme des coordonnées rectangulaires dans l'espace à quatre dimensions; cette variété, dis-je, jouit, *si la fonction* Θ *est spéciale*, d'une propriété analogue à celle des surfaces de translation distinguées.

Considérons en effet la courbe (variété à une dimension) qui a pour équation

$$u_i = 3v_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Prenons trois points quelconques sur cette courbe; le lieu du centre de gravité de ces trois points sera, d'après les théorèmes de Riemann, la variété $\Theta = 0$.

Nous appellerons donc *variété de translation*, toute variété dont l'équation peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \xi_i = f_i(t) + f'_i(t') + f''_i(t'') \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

t, t' et t'' étant trois paramètres.

En donnant à deux des paramètres t, t', t'' des valeurs constantes et faisant varier le troisième, on obtiendra trois systèmes de génératrices.

Si les trois fonctions f_i, f'_i, f''_i sont identiques, c'est-à-dire si les génératrices des trois systèmes sont égales et semblablement orientées, la variété sera dite *distinguée;* les trois systèmes de génératrices se confondront en un seul; et la courbe

$$\xi_i = 3 f_i(t)$$

s'appellera *directrice.*

Étudions les points à l'infini, considérons une asymptote d'une des génératrices et prenons-la par exemple parallèle à l'axe des ξ_4. Soit t_4 une valeur de t'' telle que

$$f''_4(t_4) = \infty.$$

Posons alors, pour abréger,

$$f''_i(t_4) = a_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Nous voyons que, pour $t'' = t_4$, on a

$$(3) \qquad \xi_4 = \infty; \qquad \xi_i = f_i(t) + f'_i(t') + a_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si donc dans l'équation de la variété (2), obtenue en éliminant t, t' et t'' entre les équations (2), on ne considère que les termes du degré le plus élevé en ξ_4 (ce qui revient à faire $\xi_4 = \infty$), on obtiendra une certaine équation en ξ_1, ξ_2, ξ_3 qui sera l'équation d'une surface de translation. Si la variété (2) est distinguée, il en sera de même de cette surface et sa directrice aura pour équation

$$\xi_i = 2 f_i(t) + a_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La variété V doit être de translation, au moins quand la fonction Θ est spéciale, et l'on peut supposer, par conséquent, qu'on ait mis ses équations sous la forme (2).

Donnons alors à t'' une valeur constante qui rende $f''_4(t'')$ infinie. On obtiendra les équations (3) qui (abstraction faite de l'équation $\xi_4 = \infty$) définissent une certaine surface S_4, qui sera de translation.

On obtiendra l'équation de cette surface S_4 en égalant à o le coefficient de la plus haute puissance de ξ_4 (c'est-à-dire de ξ_4) dans l'équation (1).

On définirait de la même manière les surfaces S_1, S_2 et S_3. L'équation de la surface S_4, ainsi obtenue, s'écrit

$$(4) \qquad \xi_1\xi_2\xi_3 - \gamma_{23}\xi_1 - \gamma_{13}\xi_2 - \gamma_{12}\xi_3 = 0.$$

C'est la surface que nous avons étudiée dans le numéro précédent.

Nous avons vu que c'était une surface de translation distinguée. Les équations (3) doivent donc être celles d'une surface distinguée, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$f_i = f'_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Comme j'aurais pu tout aussi bien raisonner sur f_4 ou f'_4 au lieu de f''_4, que rien ne distingue de f_4 et f'_4, je puis écrire

$$f_i = f'_i = f''_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et comme j'aurais pu raisonner sur S_1, S_2, S_3 comme sur S_4, nous aurons

$$f_i = f'_i = f''_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

c'est-à-dire que V sera une variété de translation distinguée.

Quelle sera maintenant la nature de sa directrice? La directrice de la surface S_4, qui a pour équation

$$\xi_i = 2f_i(t) + a_i,$$

est, comme nous l'avons vu, une cubique gauche ayant ses asymptotes parallèles aux axes. Il en sera donc de même de la courbe

$$\xi_i = 3f_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Or, ce qui caractérise une cubique gauche, dont les asymptotes sont parallèles aux axes, c'est que deux quelconques des trois coordonnées sont liées par une relation homographique. Donc, deux quelconques des trois quantités $3f_1(t)$, $3f_2(t)$, $3f_3(t)$, ou (puisque j'aurais pu raisonner sur S_1 aussi bien que sur S_4) deux quelconques des quatre quantités $3f_1(t)$, $3f_2(t)$, $3f_3(t)$, $3f_4(t)$ sont liées par une relation homographique.

Donc la directrice de la variété V est une courbe de l'espace à quatre dimensions, analogue aux cubiques gauches; c'est une *quartique* que j'appellerai Q et dont l'équation est de la forme

$$\xi_i = \frac{3\beta_i}{t-a_i} + b_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{5}$$

Soient donc

$$\left\{\begin{array}{ll} \xi_i = 3\lambda_1^i & (i = 2, 3, 4), \\ \xi_i = 3\lambda_2^i & (i = 1, 3, 4), \\ \xi_i = 3\lambda_3^i & (i = 1, 2, 4), \\ \xi_i = 3\lambda_4^i & (i = 1, 2, 3) \end{array}\right. \tag{6}$$

les asymptotes de la quartique Q.

La cubique qui sert de directrice à la surface S_4 aura pour asymptotes

$$\xi_i = 2\lambda_k^i + \lambda_4^i \qquad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3;\ i \gtrless k).$$

Or nous connaissons les asymptotes de la directrice de S_4; on peut les déduire de l'analyse du numéro précédent.

J'appellerai $k^{ième}$ *asymptote* $(k = 1, 2, 3)$ de cette directrice celle qui correspond à $\xi_k = \infty$, et j'écrirai la première équation de la première asymptote sous la forme

$$\xi_2 = \pm\sqrt{-\frac{\gamma_{12}\gamma_{23}}{\gamma_{13}}}. \tag{7}$$

La surface S_4 a deux directrices; le signe + correspond à la première directrice, le signe — à la seconde. Nous prendrons, par exemple, la première directrice et le signe +.

Les autres équations de la première asymptote et celles des autres asymptotes se déduiraient de l'équation (7) par permutations d'indices.

Nous aurons ainsi six équations analogues à (7); j'appellerai *équation* (k, h) celle des équations de la $k^{\text{ième}}$ asymptote qui donne ξ_h.

On verrait alors que dans l'équation (k, h) on doit prendre le signe $+$ si h succède à k dans l'ordre circulaire 1, 2, 3, 1, et le signe $-$ si c'est k qui succède à h.

On a donc

$$2\lambda_1^2 + \lambda_4^2 = +\sqrt{-\frac{\gamma_{12}\gamma_{23}}{\gamma_{13}}} \tag{8}$$

avec cinq autres équations analogues.

De ces six équations (8) on déduit d'ailleurs aisément

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_2^1 + \lambda_3^1 + \lambda_4^1 = 0, \\ \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 0, \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_4^3 = 0. \end{array}\right. \tag{9}$$

On peut, en considérant la directrice de S_1, de S_2, ou de S_3 au lieu de S_4, obtenir trois autres groupes de six équations analogues à (8).

Cela ferait en tout vingt-quatre équations; mais elles ne sont pas toutes distinctes. En effet, les équations (8) peuvent être remplacées par trois d'entre elles et par les trois équations (9). Chacun des quatre groupes de six équations peut être remplacé par trois de ces six équations et par un groupe de trois équations analogues à (9). Mais les quatre groupes de trois équations analogues à (9) ne contiennent en réalité que quatre équations distinctes, à savoir les trois équations (9) et l'équation

$$\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 = 0. \tag{9 bis}$$

Il y a donc seulement seize équations distinctes que j'appellerai *les équations* (10).

Il faut dire quelques mots au sujet des radicaux qui entrent dans ces équations. Il semble au premier abord que les six équations (8) contiennent trois radicaux distincts

$$\sqrt{-\frac{\gamma_{12}\gamma_{13}}{\gamma_{23}}},\quad \sqrt{-\frac{\gamma_{12}\gamma_{23}}{\gamma_{13}}},\quad \sqrt{-\frac{\gamma_{13}\gamma_{23}}{\gamma_{12}}};$$

mais ils s'expriment tous rationnellement en fonctions des γ et du radical unique

$$\rho_4 = \sqrt{-\gamma_{23}\gamma_{12}\gamma_{13}}.$$

Nous avons donc en tout dans nos équations (10) quatre radicaux $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ que l'on peut déduire de ρ_4 par permutations d'indices. En réalité, ces quatre radicaux ne sont pas encore distincts; car le produit $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$ est égal au produit des six γ et, par conséquent, rationnel. D'ailleurs, il est impossible, si les γ sont regardés comme indépendants, d'exprimer ρ_3, par exemple, en fonction rationnelle de ρ_1, de ρ_2 et des γ.

Si donc on se donne les γ, il faudra encore *se donner* le signe de ρ_1, ρ_2, ρ_3; le signe de ρ_4 s'en déduira.

Nos seize équations (10) peuvent se répartir en quatre groupes de quatre. Le premier groupe contiendra les équations qui définissent les λ_i^1 et qui s'écrivent

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_2^1 + \lambda_3^1 + \lambda_4^1 &= 0,\\ 2\lambda_3^1 + \lambda_4^1 &= \frac{\rho_4}{\gamma_{23}},\\ 2\lambda_4^1 + \lambda_2^1 &= \frac{\rho_2}{\gamma_{34}},\\ 2\lambda_2^1 + \lambda_3^1 &= -\frac{\rho_3}{\gamma_{24}}.\end{aligned}\right.$$

Voici comment ont été déterminés les signes des seconds membres.

Revenons à l'équation (7); le second membre, en prenant le signe $+$ devant le radical, s'écrit $\frac{\rho_4}{\gamma_{13}}$; j'ai donc pris, pour la première équation (8),

$$(8\,bis)\qquad 2\lambda_1^2 + \lambda_4^2 = \frac{\rho_4}{\gamma_{13}}.$$

Pour obtenir les cinq autres équations (8), il suffit de permuter les indices 1, 2, 3 de toutes les façons possibles, en conservant le signe + devant le second membre si la permutation appartient au groupe alterné et en lui donnant le signe — dans le cas contraire.

On obtiendra ensuite les trois autres groupes de six équations analogues à (8) en permutant *circulairement* les quatre indices 1, 2, 3, 4. Cette règle pourrait toutefois soulever une difficulté. Quand on permute circulairement 1, 2, 3, 4, pour les changer en 2, 3, 4, 1, le carré ρ_4^2 se change en ρ_1^2; mais on ne sait pas si ρ_4 se change en $+\rho_1$ ou en $-\rho_1$.

Pour tenir compte de cette difficulté j'écrirai la première équation (8), non plus sous la forme (8 *bis*), mais sous la forme

$$(8\ ter) \qquad 2\lambda_1^2+\lambda_4^2=\frac{\varepsilon_4\rho_4}{\gamma_{13}},$$

où $\varepsilon_4=\pm 1$ et dans les autres équations (8) je remplacerai de même ρ_4 par $\varepsilon_4\rho_4$. Je ferai ensuite une permutation circulaire d'indices; et j'obtiendrai trois autres groupes d'équations analogues à (8) où entreront trois nombres ε_1, ε_2, ε_3, tous égaux à ± 1.

Cela posé, nous avons vu que de nos quatre radicaux ρ, trois sont indépendants; je puis donc prendre arbitrairement le signe de trois d'entre eux; celui du quatrième s'en déduira; de même, je puis prendre arbitrairement le signe de trois des ε, celui du quatrième s'en déduira. Je puis donc faire

$$\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1.$$

Mais je ne sais pas si ε_1 est égal à $+1$ ou à -1.

C'est ainsi que j'ai obtenu les équations (11). Pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que

$$\frac{\rho_4}{\gamma_{23}}+\frac{\rho_2}{\gamma_{34}}=\frac{\rho_3}{\gamma_{24}}$$

ou que

$$(12) \qquad \sqrt{\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{34}\gamma_{24}}+\sqrt{\gamma_{13}\gamma_{14}\gamma_{23}\gamma_{24}}=\sqrt{\gamma_{12}\gamma_{14}\gamma_{23}\gamma_{34}}.$$

Cette condition ne change pas quand on permute circulairement les quatre indices; les quatre groupes d'équations analogues à (11) seront donc compatibles si l'on suppose la condition (12) satisfaite et que l'on prenne $\varepsilon_1 = 1$.

La condition (12) est donc la condition nécessaire et suffisante pour que les seize équations (10) soient compatibles.

On peut encore se demander s'il existe une quartique Q admettant les asymptotes définies par ces seize équations et si la variété de translation distinguée, dont Q est la directrice, est bien la variété V.

Nous savons que les périodes a_{ik} sont au nombre de $\frac{p(p+1)}{2}$, c'est-à-dire, dans le cas de $p=4$, au nombre de 10. D'un autre côté, le nombre des modules d'une courbe de genre 4 est égal à $3p-3=9$. Il faut donc une condition et une seule pour qu'une fonction Θ de genre 4 soit spéciale; si cette condition unique est remplie, la variété $\Theta = 0$ est une variété de translation distinguée.

Si les termes latéraux $a_{ik} (i \gtrless k)$ sont très petits, cette variété diffère très peu de V; il suffit donc d'une condition pour que V soit une variété de translation distinguée. Or nous venons de voir que, pour que V soit une variété de translation distinguée, il y a une condition nécessaire, c'est la condition (12); donc, comme d'ailleurs l'équation (12) est indécomposable, cette condition sera aussi suffisante.

Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants :

1° *Si une fonction Θ n'est pas spéciale, c'est-à-dire si elle ne doit pas son origine à une courbe algébrique de même genre, l'équation $\Theta = 0$ ne présente pas, en général, le caractère translatif* qu'elle présente, au contraire, d'après les théorèmes de Riemann si la fonction Θ est spéciale.

2° *Pour qu'une fonction Θ de genre 4 doive son origine à une courbe algébrique de genre 4, il faut et il suffit qu'il y ait une certaine relation entre les périodes a_{ik}.*

Cette relation est transcendante et, en général, assez compliquée. *Mais si les périodes a_{ii} étant finies, les périodes $a_{ik} (i \gtrless k)$ sont très petites, cette relation se réduit à*

$$(12\,bis) \quad \sqrt{a_{12}a_{13}a_{34}a_{24}} + \sqrt{a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}} = \sqrt{a_{12}a_{14}a_{23}a_{34}}.$$

Pour l'étude de la variété V, on peut encore raisonner comme il suit :

Reprenons les équations de la quartique Q; la variété dont cette quartique est la directrice aura pour équations

$$(13) \qquad \xi_i = \frac{\beta_i}{t-a_i} + \frac{\beta_i}{u-a_i} + \frac{\beta_i}{v-a_i} + b_i \qquad (i=1,2,3,4),$$

t, u et v étant trois variables auxiliaires.

Soit maintenant P un polynome entier du premier degré par rapport à chacune des quatre variables ξ_i (et, par conséquent, du quatrième degré par rapport à l'ensemble de ces quatre variables). Ce polynome contiendra seize coefficients arbitraires.

Substituons-y à la place des ξ_i leurs valeurs (13); P deviendra une fonction R rationnelle en t, u, v; décomposons cette fonction rationnelle R en éléments simples d'abord par rapport à t, puis par rapport à u, puis par rapport à v. Chaque élément sera le produit d'un coefficient numérique et de trois facteurs. Le premier facteur peut être

$$\frac{1}{t-a_i} \qquad (i=1,2,3,4) \qquad \text{ou } 1,$$

le second

$$\frac{1}{u-a_i} \qquad (i=1,2,3,4) \qquad \text{ou } 1,$$

le troisième

$$\frac{1}{v-a_i} \qquad (i=1,2,3,4) \qquad \text{ou } 1.$$

A ce compte, le développement de R pourrait contenir $5^3 = 125$ éléments simples; mais il faut observer qu'aucun élément ne peut contenir deux des trois facteurs

$$\frac{1}{t-a_i}, \qquad \frac{1}{u-a_i}, \qquad \frac{1}{v-a_i},$$

avec le même indice i; le développement de R contient donc seulement soixante-treize éléments simples.

Si l'on observe ensuite que la fonction R doit être symétrique en t, u, v, on voit que plusieurs des coefficients de ces soixante-treize éléments doivent être égaux, de sorte qu'il ne reste que quinze coefficients distincts.

Si j'annule ces quinze coefficients, j'introduirai quinze relations entre les seize coefficients de P, de sorte qu'un de ces seize coefficients reste encore arbitraire.

L'équation de la variété dont Q est directrice sera donc de la forme

$$P = 0.$$

Nous avons choisi les axes parallèles aux asymptotes de Q, mais les directions des axes sont seules ainsi déterminées, l'origine reste arbitraire; je puis en disposer de façon à faire disparaître les quatre termes du troisième degré du polynome P.

Je dis que les quatre termes du premier degré auront disparu du même coup.

Posons

$$P = P_4 \xi_4 + P'_4,$$

P_4 et P'_4 étant deux polynomes du premier degré par rapport à chacune des trois variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 et, par conséquent, du troisième degré par rapport à l'ensemble de ces trois variables. L'équation $P_4 = 0$ doit être, comme nous l'avons vu plus haut, celle d'une surface de translation distinguée ayant pour équations

$$\xi_i = \frac{\beta_i}{t - a_i} + \frac{\beta_i}{u - a_i} + \frac{\beta_i}{a_4 - a_i} + b_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et pour directrice

$$\xi_i = \frac{2\beta_i}{t - a_i} + \frac{\beta_i}{a_4 - a_i} + b_i.$$

C'est donc, d'après le paragraphe précédent, une surface à centre et, comme les termes du deuxième degré (qui donnent dans P des termes du troisième degré) manquent par suite du choix de l'origine, le centre ne peut être qu'à l'origine. Le terme de degré o doit donc manquer également.

Donc le terme en ξ_4 manque dans P, et l'on démontrerait de même que les autres termes du premier degré manquent également.

Le polynome P ne contient donc que des termes de degré pair et nous pouvons écrire

$$P = \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 - \Sigma\gamma_{12}\xi_3\xi_4 + \delta.$$

Le polynome P contient donc encore sept coefficients, à savoir δ et les six γ.

L'équation de la quartique Q contient douze arbitraires, à savoir les quatre a_i, les quatre β_i et les quatre b_i; mais nous pouvons faire subir à t un changement linéaire en posant

$$t = \frac{\lambda t' + \mu}{\lambda_1 t' + \mu_1},$$

λ, μ, λ_1, μ_1 étant des constantes quelconques que nous pouvons choisir de telle façon que a_1, a_2 et a_3 aient des valeurs données; il reste $12 - 3 = 9$ arbitraires; de plus, nous avons choisi une origine particulière, ce qui revient à attribuer aux quatre b_i des valeurs particulières. Il reste donc $9 - 4 = 5$ arbitraires. Il faut donc $7 - 5 = 2$ conditions pour que $P = 0$ soit une variété admettant une quartique pour directrice.

L'une de ces conditions nous est déjà connue, c'est la condition (12). Nous savons d'autre part, quand cette condition est remplie, déterminer les asymptotes de la quartique Q. C'est ce que les équations (10) nous permettent de faire.

Ces équations nous donnent en effet les λ en fonction des γ. Dans les équations (10) entrent trois irrationalités; nous avons en effet quatre radicaux ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 dont le produit est rationnel, mais qui sont d'ailleurs indépendants. Mais, si l'on introduit entre les γ la relation (12), cette indépendance cesse. En tenant compte de la relation (12) on peut exprimer rationnellement, en fonction des γ, les produits des ρ_i deux à deux.

On obtiendra donc les λ en fonctions rationnelles des γ et de l'un des ρ, et l'on en déduira sous la même forme la valeur de a_4, celles des β_i et celles des b_i.

Toutes les constantes qui entrent dans les formules (13) sont alors déterminées en fonction des γ.

Substituons alors à la place des ξ_i leurs valeurs (13) dans l'équation $P = 0$; nous trouverons une équation qui nous donnera δ, et la valeur de δ ainsi trouvée devra être indépendante de t, u et v et dépendre seulement des γ.

On peut faire ce calcul en donnant à t, u, v des valeurs arbitraires; mais le plus simple est de prendre $t = u = v$; le point qui correspond à $t = u = v$ est un point de la directrice. Voici comment on pourra diriger le calcul :

Nous pouvons, comme je l'ai dit plus haut, remplacer, dans les équations de la quartique Q, la variable t par une autre variable t' liée à la première par une relation homographique. Le plus simple est de prendre

$$t = \xi_4.$$

Les équations de la quartique Q se réduisent à

$$(14) \qquad \xi_i = \frac{3\beta_i}{\xi_4 - a_i} + b_i$$

Substituons les valeurs (14) dans l'équation $P = 0$; nous obtiendrons une équation qui nous donnera δ. La valeur trouvée devra être indépendante de ξ_4.

Supposons ξ_4 très grand et développons ξ_i suivant les puissances décroissantes de ξ_4, il viendra

$$\xi_i = b_i + \frac{3\beta_i}{\xi_4} + \ldots.$$

Substituons ces développements à la place de ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Dans P, nous obtiendrons un développement procédant suivant les puissances décroissantes de ξ_4, et commençant par un terme en ξ_4; le premier terme du développement est

$$\xi_4[b_1 b_2 b_3 + b_1 + b_2 + b_3]$$

et le second

$$3\beta_1(b_2 b_3 - \gamma_{23}) + 3\beta_2(b_1 b_3 - \gamma_{13}) + 3\beta_3(b_1 b_2 - \gamma_{12})$$
$$- \gamma_{14} b_2 b_3 - \gamma_{24} b_1 b_3 - \gamma_{34} b_1 b_2 + \delta.$$

Ces deux termes doivent s'annuler; le premier s'annule de lui-même quand on y remplace les β et les b par leurs valeurs en fonction des γ; en égalant le second à o, on aura une équation qui donnera δ.

On trouve aisément

$$\beta_i = -3\gamma_{i4};$$

on obtient aussi, sans peine, les expressions des b_i et, en tenant compte de (12), on a finalement

$$\delta = \gamma_{12}\gamma_{34} + \gamma_{13}\gamma_{24} + \gamma_{14}\gamma_{23}. \tag{15}$$

Les conditions (12) et (15) sont donc les deux conditions nécessaires pour que $P = 0$ soit l'équation de la variété dont Q est la directrice.

On peut, d'après ce qui précède, obtenir les λ en fonctions rationnelles des γ et de l'un des ρ, et comme ρ est susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire, on trouvera pour chacun des λ deux valeurs.

La variété V admet donc deux directrices Q et elle sera, de deux manières différentes, une variété de translation distinguée.

Par raison de symétrie, il est évident qu'on passera d'une des directrices à l'autre en changeant ξ_i en $-\xi_i$.

Ce résultat ne doit pas nous surprendre; et en effet la variété

$$\Theta = 0$$

est aussi, de deux manières différentes, une variété distinguée et elle admet deux directrices qui ont respectivement pour équations

$$u_i = +3v_i, \qquad u_i = -3v_i.$$

Les mêmes considérations peuvent être étendues au cas de $p > 4$.

Le nombre des quantités a_{ik} est égale à

$$\frac{p(p+1)}{2}.$$

Celui des modules d'une courbe de genre p est $3p - 3$.

Pour qu'une fonction Θ soit spéciale, il faut donc

$$\frac{p(p+1)}{2} - 3p + 3 = \frac{(p-2)(p-3)}{2}$$

conditions.

Supposons maintenant les termes latéraux très petits, u_i très voisin de α_i et posons

$$u_i = \alpha_i + t\xi_i, \qquad a_{ik} = t^2\gamma_{ik}.$$

Conservons seulement dans le développement de Θ le premier terme qui est en t^p et négligeons les suivants.

L'équation $\Theta = 0$ devient alors celle d'une variété algébrique que j'appelle V et qui est de degré p; le premier membre de l'équation de V contient

$$\frac{p(p-1)}{2}$$

indéterminées qui sont les γ.

Si V est une variété de translation, ce sera une variété de translation distinguée et les équations de sa directrice seront de la forme

$$\xi_i = \frac{p\beta_i}{t-a_i} + b_i \qquad (i = 1, 2, \dots p). \tag{16}$$

Les équations (16) contiennent $3p$ indéterminées qui sont les β, les a et les b. Si j'exprime que la variété dont la courbe (16) est la directrice admet l'origine pour centre, j'aurai déterminé les b et il me restera $2p$ indéterminées. D'autre part, je puis choisir le paramètre t de telle façon que a_1, a_2, a_3 aient telles valeurs que je veux. Il me reste encore $2p-3$ arbitraires. Donc, pour que V soit une variété distinguée, il faut

$$\frac{p(p-1)}{2} - (2p-3) = \frac{(p-2)(p-3)}{2}$$

conditions.

C'est le même nombre que plus haut. Quelles sont ces conditions? On voit d'abord que la condition (12) doit encore être remplie, ainsi que toutes celles qu'on en peut déduire par permutations d'indices. Le nombre des conditions ainsi obtenues est égal au nombre des combinaisons de p lettres 4 à 4. Ce nombre est plus grand que $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ d'où il suit que ces conditions ne sont pas toutes distinctes.

12. — Cas voisins des cas singuliers abéliens.

Soit $p = 3$, et considérons la fonction Θ.

Si

$$a_{13} = a_{23} = 0,$$

on tombe sur le cas singulier abélien et l'on a

$$\Theta = \theta\theta_3,$$

θ étant une fonction Θ de genre 2 de u_1 et de u_2, et θ_3 une fonction Θ elliptique de u_3.

Supposons maintenant que a_{13} et a_{23} ne soient pas nuls, mais très petits, de façon qu'on se trouve dans un cas voisin du cas abélien. Posons

$$u_2 = a_3 + t\xi, \qquad a_{i3} = t\gamma_i,$$

t étant un paramètre très petit, et développons suivant les puissances de t; il viendra, en négligeant t^2,

$$\Theta = t\theta'_3\left(\theta\xi - \gamma_1 \frac{d\theta}{du_1} - \gamma_2 \frac{d\theta}{du_2}\right).$$

Je désigne par θ'_3 ce que devient $\frac{d\theta_3}{du_3}$ quand on y remplace u_3 par α_3.

L'équation $\Theta = 0$ se réduit à

$$(1) \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\theta}\frac{d\theta}{du_1} + \frac{\gamma_2}{\theta}\frac{d\theta}{du_2}.$$

Si l'on regarde ξ, u_1, u_2 comme des coordonnées rectangulaires, l'équation (1) doit être celle d'une surface de translation.

Nous avons vu plus haut à plusieurs reprises, et notamment au § 6, qu'une génératrice d'une surface de translation

$$z = f(x, y)$$

doit avoir pour équation

$$\gamma = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy},$$

α, β, γ étant des constantes.

Si donc nous posons

$$\frac{d^2 \log\theta}{du_1^2} = \mathrm{R}, \qquad \frac{d^2 \log\theta}{du_1\, du_2} = \mathrm{S}, \qquad \frac{d^2 \log\theta}{du_2^2} = \mathrm{T},$$

nous aurons pour l'équation d'une génératrice de la surface (1),

$$\beta = \alpha_1 \gamma_1 \mathrm{R} + (\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2)\mathrm{S} + \alpha_1\gamma_2 \mathrm{T},$$

α_1, α_2 et β étant trois constantes.

Ou bien

$$(2) \qquad \alpha_1\gamma_1 \mathrm{R}\theta^2 + (\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2)\mathrm{S}\theta^2 + \alpha_2\gamma_2\mathrm{T}\theta^2 - \beta\,\theta^2 = 0.$$

Or $\mathrm{R}\theta^2$, $\mathrm{S}\theta^2$, $\mathrm{T}\theta^2$, θ^2 sont des fonctions θ de genre 2 et du second ordre ayant mêmes multiplicateurs, appartenant, par conséquent, au même faisceau (toutes ces fonctions sont paires).

Il en est donc de même du premier membre de (2), que j'appellerai

$$\eta(u_i).$$

Notre génératrice a donc pour équation

$$\eta(u_i) = 0.$$

Une autre génératrice aura pour équation

$$(3) \qquad \eta'(u_i) = 0,$$

η' étant une fonction θ ayant mêmes multiplicateurs que η. Mais, comme elle doit être égale à l'autre génératrice, elle devra aussi avoir pour équation

$$(4) \qquad \eta(u_i - h_i),$$

h_1 et h_2 étant deux constantes. Or les fonctions $\eta'(u_i)$ et $\eta(u_i - h_i)$ n'ont pas mêmes multiplicateurs; elles ne peuvent donc être identiques, d'où il résulte que les deux courbes (3) et (4) ne peuvent avoir une partie commune qu'à la condition de se décomposer.

Donc $\eta'(u_i)$, $\eta(u_i - h_i)$ et $\eta(u_i)$ doivent se décomposer en deux facteurs, et l'on aura

$$\eta(u_i) = c\theta(u_i - e_i)\theta(u_i + e_i),$$

c, e_1 et e_2 étant trois constantes. On obtiendra une génératrice en annulant l'un des deux facteurs, c'est-à-dire en faisant $u_i = v_i \pm e_i$; je dirai en faisant $u_i = v_i + e_i$, ce qui ne restreint pas la généralité puisque rien ne distingue e_i de $-e_i$.

Donnons de tout cela une interprétation géométrique. Si R, S et T sont trois coordonnées rectangulaires, le point (R, S, T) sera sur une surface de Kummer; l'équation (2) représentera un plan et pour que la fonction η se décompose, il faut que ce plan soit un plan tangent.

Les génératrices de la surface (1) correspondront donc aux intersections de la surface de Kummer par ses plans tangents, ou plutôt à quelques-unes d'entre elles.

Observons que le plan défini par l'équation (2) est parallèle à la droite

$$(5)\qquad \gamma_1 R + \gamma_2 S = 0, \qquad \gamma_1 S + \gamma_2 T = 0.$$

Les courbes qui, sur la surface de Kummer, correspondent aux génératrices de la surface (1) *sont donc les intersections de cette surface de Kummer avec les plans tangents qui lui sont menés parallèlement à la droite* (5).

La droite (5) se trouve sur le cône du second degré

$$(6)\qquad RT - S^2 = 0.$$

Le plan $\eta = 0$ défini par l'équation (2) est donc tangent à la surface de Kummer en un point M dont les arguments abéliens u_1 et u_2 seront définis par les équations

$$\theta(u_i - e_i) = 0, \qquad \theta(u_i + e_i) = 0.$$

Il est tangent en outre au cylindre N qui est circonscrit à la surface et dont les génératrices sont parallèles à la droite (5).

Au point M je ferai correspondre le point M′ qui a pour arguments abéliens e_1 et e_2 augmentés d'une des dix demi-périodes qui n'annulent pas Θ. Voici quelle en est la signification.

La surface de Kummer est sa propre polaire réciproque par rapport à une quadrique convenablement choisie (et cela de dix manières différentes). Le point M′ sera, d'une de ces dix manières, le réciproque du plan (2), et quand le plan (2) enveloppera le cylindre N, le point M′ décrira une certaine courbe plane Q dont le plan sera le réciproque du point à l'infini défini par les équations (5).

Étudions cette courbe Q.

Supposons que l'on ait mis les équations de la surface (1) sous la forme translative

$$u_i = f_i(t) + f_i'(t').$$

On aura l'équation d'une génératrice en donnant, soit à t soit à t', une valeur constante; mais nous avons trouvé pour l'équation d'une génératrice

$$\theta(u_i - e_i) = 0,$$

d'où

$$u_i = v_i + e_i.$$

On aura donc, si la génératrice a été obtenue en faisant $t' = \text{const.}$,

$$f_i(t) - v_i = e_i - f_i'(t') = \text{const.}$$

On trouverait de même, en considérant la génératrice obtenue en faisant $t = \text{const.}$,

$$f_i'(t') - v_i' = \text{const.},$$

d'où

$$u_i = f_i(t) + f_i'(t') = v_i + v_i' + \text{const.};$$

j'appellerai k_i la constante du second membre et j'écrirai

$$u_i = v_i + v_i' + k_i,$$

d'où

$$e_i = v_i' + k_i.$$

Or la courbe Q a pour équation

$$u_i = e_i + \varpi_i,$$

ϖ_i étant une demi-période. Cette équation peut s'écrire

$$u_i = v'_i + k_i + \varpi_i,$$

$k_i + \varpi_i$ est une constante, v'_i est une fonction de x', x' étant un des points de la courbe C.

Donc la courbe Q est plane et son plan doit être tangent à la surface de Kummer.

Le point à l'infini dans la direction (5) qui est le réciproque de ce plan, doit se trouver sur cette surface.

La conique à l'infini, définie par l'équation (6), est donc sur la surface; c'est donc une des seize coniques singulières de la surface.

Pour achever l'étude des génératrices, reprenons la surface

$$(1) \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\theta}\frac{d\theta}{du_1} + \frac{\gamma_2}{\theta}\frac{d\theta}{du_2} = \Phi(u_i).$$

On obtiendra l'équation complète d'une génératrice en adjoignant à l'équation (1) l'équation

$$(7) \qquad \theta(u_i - e_i) = 0,$$

d'où l'on tire

$$u_i = v_i + e_i, \qquad \xi = \Phi(v_i + e_i).$$

Une autre génératrice aura pour équations

$$u_i = v_i + e'_i, \qquad \xi = \Phi(v_i + e'_i),$$

et, comme elles doivent être égales, on devra avoir

$$\Phi(v_i + e'_i) - \Phi(v_i + e_i) = k,$$

k étant une constante. Posons donc

$$\psi(u_i) = \Phi(e'_i + u_i) - \Phi(e_i + u_i) - k.$$

La fonction $\psi(u_i)$ est évidemment une fonction abélienne qui a pour dénominateur

$$\theta(u_i + e_i)\,\theta(u_i + e'_i).$$

Le numérateur doit évidemment être une fonction θ du deuxième ordre appartenant au même faisceau que le dénominateur.

D'autre part, le numérateur doit s'annuler pour $u_i = v_i$, c'est-à-dire pour $\theta'(u_i) = 0$.

Il se décompose donc en deux facteurs; un de ces facteurs doit être $\theta(u_i)$ et il est aisé d'en déduire l'autre facteur. On aura donc

$$(8) \qquad \psi(u_i) = \frac{M\,\theta(u_i)\,\theta(u_i + e_i + e'_i)}{\theta(u_i + e_i)\,\theta(u_i + e'_i)},$$

M étant un facteur constant.

L'étude de cette identité conduirait sans doute à des résultats intéressants, mais je ne l'entreprendrai pas; cela m'entraînerait trop loin.

Je me bornerai à résumer cette discussion; pour avoir les équations des génératrices, on posera

$$u_i = v_i + v'_i + k_i,$$

k_i étant la constante définie plus haut; si sur la courbe C on envisage deux points x et x', l'intégrale v_i sera fonction de x et l'intégrale v'_i de x'; on obtiendra alors toutes les génératrices en faisant, soit $x =$ const., soit $x' =$ const. On voit en même temps que la surface (1) est une surface de translation distinguée.

La conique définie par l'équation (6) est l'une des coniques singulières de la surface de Kummer et comme elle est rejetée à l'infini, si l'on considère R, S et T comme des coordonnées rectangulaires, elle est dans le plan

$$\theta^2 = 0.$$

Son équation se réduit donc à $u_i = v_i$, c'est-à-dire que, au point à l'infini dans la direction (5), on doit avoir

$$u_i = -v_i^0,$$

x_0 étant un point fixe de C et v_i^0 la valeur correspondante de l'intégrale v_i (je pourrais aussi bien écrire $u_i = +v_i^0$, car l'équation $\theta = 0$ est aussi bien équivalente à $u_i = +v_i$ qu'à $u_i = -v_i$).

D'autre part, l'équation de notre génératrice sera

$$u_i = v_i + e_i.$$

La courbe qui correspond à cette génératrice sur la surface de Kummer devra passer par le point à l'infini dans la direction (5), puisque cette courbe est l'intersection à la surface avec un plan tangent passant par ce point.

Il existera donc sur la courbe C un point x_2, tel que

$$v_i^2 + e_i = -v_i^0 \qquad [v_i^2 = v_i(x_2)].$$

Il existera aussi sur C un point x', tel que

$$v_i' = -v_i^2 \qquad [v_i' = v_i(x')].$$

La courbe C est une courbe plane du quatrième degré à point double; la droite qui joint x' à x_2 va passer par ce point double. Il vient alors

$$e_i = v_i' - v_i^0$$

et pour l'équation de notre génératrice

$$u_i = v_i + v_i' - v_i^0.$$

La quantité que nous avons appelée plus haut k_i est donc égale à $-v_i^0$.

Soit maintenant $p = 4$ et considérons une fonction Θ spéciale. Si l'on avait

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0,$$

Θ serait le produit d'une fonction de genre 3 et d'une fonction de genre 1, et l'on aurait

$$\Theta = \theta\theta_4,$$

θ dépendant de u_1, u_2, u_3 et θ_4 de u_4.

Supposons maintenant que a_{14}, a_{24}, a_{34} ne soient pas nuls, mais très petits, de façon qu'on se trouve dans un cas voisin du cas abélien. Posons

$$(9) \qquad u_4 = \alpha_4 + t\xi, \qquad a_{i4} = t\gamma_i$$

et développons Θ en négligeant t^2, il viendra

$$\Theta = t\theta'_4\left(\theta\xi - \gamma_1\frac{d\theta}{du_1} - \gamma_2\frac{d\theta}{du_2} - \gamma_3\frac{d\theta}{du_3}\right).$$

L'équation $\Theta = 0$ se réduit à

$$(10) \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\theta}\frac{d\theta}{du_1} + \frac{\gamma_2}{\theta}\frac{d\theta}{du_2} + \frac{\gamma_3}{\theta}\frac{d\theta}{du_3} = F(u_1, u_2, u_3),$$

ce doit être l'équation d'une variété de translation.

Mettons les équations de cette variété sous forme translative :

$$u_i = f_i(t) + f'_i(t') + f''_i(t'') \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\xi = f_4(t) + f'_4(t') + f''_4(t''),$$

t, t', t'' sont trois variables auxiliaires qui n'ont rien de commun, d'ailleurs, avec la variable t qui entre dans les équations (9). On obtiendrait une génératrice en donnant à t' et à t'' des valeurs constantes; si l'on donne à t'' seulement une valeur constante, on obtiendra un faisceau de génératrices dont l'équation peut être mise sous la forme suivante. Soit, pour cette valeur constante de t'',

$$\frac{df''_i}{dt''} = \beta_i,$$

les β_i seront des constantes.

L'équation du faisceau de génératrices pourra s'écrire

$$(11) \qquad \beta_1\frac{dF}{du_1} + \beta_2\frac{dF}{du_2} + \beta_3\frac{dF}{du_3} - \beta_4 = 0.$$

Or

$$\theta^2, \quad \frac{dF}{du_1}\theta^2, \quad \frac{dF}{du_2}\theta^2, \quad \frac{dF}{du_3}\theta^2$$

sont des fonctions θ qui ont mêmes multiplicateurs. Le produit du premier membre de (11) par θ^2 sera donc une fonction η ayant mêmes multiplicateurs que θ^2. L'équation (11) devient donc

$$\eta(u_i) = 0.$$

Un autre faisceau de génératrices devrait avoir pour équation

$$\eta'(u_i) = 0,$$

η' ayant mêmes multiplicateurs que η. D'autre part, il devrait avoir pour équation

$$\eta(u_i - k_i) = 0,$$

les k_i étant des constantes. Il en résulte que η doit se décomposer et qu'on doit avoir

$$\eta = \theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i).$$

Comme rien ne distingue e_i de e_i, je puis dire que l'équation d'un faisceau de génératrices s'écrit

$$(12) \qquad \theta(u_i - e_i) = 0.$$

On déduit de là

$$(13) \qquad u_i = v_i + v'_i + e_i$$

ou bien

$$(14) \qquad u_i = -v''_i - v'''_i + e_i,$$

v_i, v'_i, v''_i, v'''_i sont les valeurs de l'intégrale v_i qui correspondent à quatre points de la courbe C, que j'appelle x, x', x'', x'''.

On voit ainsi que la surface (12) est de deux manières différentes une surface de translation, et que ces deux manières sont définies respectivement par les équations (13) et (14).

D'autre part, on peut écrire les équations de la surface (12) sous la forme

$$u_i = f_i(t) + f'_i(t') + f''_i(t''), \tag{15}$$

où t'' et, par conséquent, $f''_i(t'')$ sont des constantes.

On peut alors faire trois hypothèses

Ou bien les équations (15) sont équivalentes aux équations (13), c'est-à-dire que l'on a

$$f_i(t) = v_i + \text{const.}, \qquad f'_i(t') = v'_i + \text{const.}$$

Ou bien les équations (15) sont équivalentes aux équations (14), c'est-à-dire que l'on a

$$f_i(t) = -v''_i + \text{const.}, \qquad f'_i(t') = -v'''_i + \text{const.}$$

Ou enfin les équations (15) définissent une troisième manière pour la surface (12) d'être de translation.

Cette troisième hypothèse doit être rejetée; on pourrait sans doute démontrer que la surface (12) ne peut être de translation que de deux manières. Mais on peut se dispenser de cette vérification.

Rappelons-nous en effet notre point de départ. Nous avons envisagé d'abord une fonction Θ spéciale de genre 4. L'équation

$$\Theta = 0$$

représente alors une variété de translation dont les génératrices ont pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.},$$

v_i étant une des intégrales abéliennes de première espèce afférentes à la courbe C de genre 4 qui engendre la fonction spéciale Θ.

Nous avons supposé ensuite que a_{14}, a_{24}, a_{34} étaient des infiniment petits et, négligeant des termes d'ordre supérieur, nous avons réduit l'équation $\Theta = 0$ à la forme (10).

Mais, quand a_{14}, a_{24}, a_{34} s'annulent, la courbe C qui était de genre 4 se décompose en deux autres, l'une de genre 3 correspondant à la fonction θ, l'autre de genre 1 correspondant à la fonction θ_4.

Rappelons-nous que θ dépend seulement de u_1, u_2, u_3 et θ_4 de u_4.

La variété $\Theta = 0$ reste de translation et l'équation de ses génératrices conserve la forme

$$u_i = v_i + \text{const.}$$

Si $i = 1$, 2 ou 3, v_i devra être l'une des intégrales abéliennes de première espèce qui se rapportent à l'une des composantes de la courbe C, à celle qui est de genre 3 et qu'engendre la fonction θ.

Ainsi la variété (10) peut être regardée comme de translation et de telle façon que ses génératrices aient pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.}$$

La première hypothèse est donc réalisée.

Observons en passant que la seconde l'est également. En effet, la variété $\Theta = 0$ est *de deux manières différentes* une variété de translation. De la première manière ses génératrices ont pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.}$$

De la seconde manière elles ont pour équations

$$u_i = - v_i + \text{const.}$$

A la limite, la variété (10) sera de translation de deux manières différentes. De la première manière ses génératrices ont pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

De la seconde elles ont pour équations

$$u_i = - v_i + \text{const.}$$

Nous nous en tiendrons à la première manière.

Alors les équations de la variété (10), mises sous forme translative, s'écriront

$$u_i = v_i + v'_i + v''_i + k_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\xi = f_4(x) + f'_4(x') + f''_4(x'').$$

Les k_i sont des constantes; x, x', x'' sont trois points de la courbe C de genre 3 qui engendre θ; v_i, v'_i, v''_i sont les valeurs correspondantes de l'intégrale de première espèce v_i.

Puisque l'on a d'autre part

$$u_i = v_i + v'_i + e_i,$$

on aura donc

$$e_i = v''_i + k_i.$$

Comme rien ne distingue le point x'' du point x, nous pouvons supprimer les accents et écrire

$$(16) \qquad e_i = v_i + k_i.$$

Nous avons dit plus haut que le premier membre de l'équation (11) peut se décomposer en deux facteurs et s'écrire

$$\theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i).$$

Mais ce produit peut se mettre sous une forme particulière.

Posons, pour plus de symétrie dans les notations,

$$\theta^2(u_i) = \zeta_1(u_i).$$

Je désignerai d'autre part par $\zeta_k(u_i)$, $(k = 2, 3, \ldots, 7)$ les six dérivées secondes de $\log\theta$ multipliées par $\theta^2(u_i)$.

Par exemple ζ_2, ζ_3, ζ_4 seront formées avec les dérivées secondes prises deux fois respectivement par rapport à u_1, à u_2 et à u_3; ζ_5, ζ_6, ζ_7 seront formées avec les dérivées secondes prises respectivement par rapport à u_2 et u_3, à u_1 et u_3, à u_1 et u_2.

Les fonctions $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_7$ ont mêmes multiplicateurs et appartiennent au même faisceau.

Soit ζ_8 une huitième fonction quelconque linéairement indépendante des premières et appartenant aussi au même faisceau.

On démontre que

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i) \\ &\quad = \zeta_1(u_i)\zeta'_1(e_i) + \zeta_2(u_i)\zeta'_2(e_i) + \ldots + \zeta_8(u_i)\zeta'_8(e_i). \end{aligned} \right.$$

Les fonctions $\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_8$ sont des combinaisons linéaires de ζ_1, $\zeta_2, \ldots, \zeta_8$; ce sont donc encore des fonctions appartenant au même faisceau que θ^2.

Quand on fait là-dedans

$$e_i = v_i + k_i,$$

l'expression (17) doit (à un facteur constant près qui, étant arbitraire, peut être supposé égal à 1) se réduire au premier membre de (11) multiplié par θ^2.

Or

$$\theta^2 \frac{dE}{du_1} = \gamma_1\zeta_2 + \gamma_2\zeta_7 + \gamma_3\zeta_6,$$

$$\theta^2 \frac{dE}{du_2} = \gamma_1\zeta_7 + \gamma_2\zeta_3 + \gamma_3\zeta_5,$$

$$\theta^2 \frac{dE}{du_3} = \gamma_1\zeta_6 + \gamma_2\zeta_5 + \gamma_3\zeta_4.$$

On a donc, pour $e_i = v_i + k_i$,

$$\zeta'_8 = 0, \qquad \zeta'_2 = \beta_1\gamma_1, \qquad \zeta'_3 = \beta_2\gamma_2, \qquad \zeta'_4 = \beta_3\gamma_3,$$
$$\zeta'_5 = \beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2, \qquad \zeta'_6 = \beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1, \qquad \zeta'_7 = \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1;$$

d'où

$$(18)\qquad \begin{cases} \gamma_2^2\zeta'_2 - \gamma_1\gamma_2\zeta'_7 + \gamma_1^2\zeta'_3 = 0, \\ \gamma_3^2\zeta'_3 - \gamma_2\gamma_3\zeta'_5 + \gamma_2^2\zeta'_4 = 0, \\ \gamma_1^2\zeta'_4 - \gamma_3\gamma_1\zeta'_6 + \gamma_3^2\zeta'_2 = 0. \end{cases}$$

D'après le n° **47**, quand on fait $e_i = v_i + k_i$, il y a

$$n^p + p - np - 1$$

fonctions du faisceau qui s'annulent identiquement. Ici $n = 2$, $p = 3$; il y a donc dans le faisceau quatre fonctions linéairement indépendantes qui s'annulent identiquement. Ces quatre fonctions doivent être ζ'_8 et les premiers membres des trois équations (18).

Nous définirons donc les trois constantes k_1, k_2, k_3 par la condition suivante :

$$\zeta'_8(v_i + k_i)$$

devra être nul quel que soit le point x de la courbe C auquel correspond l'intégrale v_i.

L'ensemble des valeurs de k_1, k_2, k_3 formera une certaine variété.

Cette variété ne peut avoir trois dimensions; sans cela ζ'_8 devrait être identiquement nul, ce qui ne peut avoir lieu. En effet, nous avons désigné par $\theta(u)$ la fonction

$$\Sigma e^{m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + \mathrm{P}},$$

où P est une certaine forme quadratique par rapport aux m_i dont les coefficients dépendent des périodes.

Considérons maintenant les séries

$$(19) \qquad \Sigma e^{m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + \frac{1}{2}\mathrm{P}},$$

où je ne donnerai à m_1 que des valeurs paires ou que des valeurs impaires; de même je ne donnerai à m_2 que des valeurs paires, ou seulement des valeurs impaires; de même pour m_3.

Cela fait deux hypothèses pour m_1, deux pour m_2, deux pour m_3; en tout $2^3 = 8$ hypothèses. On peut donc former huit séries (19). Ce sont des fonctions θ du deuxième ordre ayant mêmes multiplicateurs. Je les désignerai par

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_8.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i) \\ = \eta_1(u_i)\eta_1(e_i) + \eta_2(u_i)\eta_2(e_i) + \ldots + \eta_8(u_i)\eta_8(e_i).\end{aligned}$$

Les $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_8$ s'exprimeront linéairement à l'aide des ζ et l'on aura

$$(19) \qquad \eta_k = \mathrm{G}_{1.k}\zeta_1 + \mathrm{G}_{2.k}\zeta_2 + \ldots + \mathrm{G}_{8.k}\zeta_8$$

et l'on déduit de là

$$(20) \qquad \zeta'_8(e_i) = \mathrm{G}_{8.1}\eta_1(e_i) + \mathrm{G}_{8.2}\eta_2(e_i) + \ldots + \mathrm{G}_{8.8}\eta_8(e_i).$$

Il ne peut pas arriver que l'on ait à la fois

$$\mathrm{G}_{8.1} = \mathrm{G}_{8.2} = \ldots = \mathrm{G}_{8.8} = 0,$$

sans quoi les équations (19) montreraient que les η_k ne sont pas linéairement indépendants, ce qui n'a pas lieu.

Il ne peut pas arriver non plus que, les huit constantes $G_{8.k}$ n'étant pas nulles à la fois, ζ'_8 soit identiquement nul, sans quoi l'équation (20) exprimerait à son tour que les η_k ne sont pas linéairement indépendants.

Ainsi la variété formée par les k_i ne peut pas avoir trois dimensions; elle ne peut pas non plus en avoir deux.

Pour qu'elle en eût deux, il faudrait que les deux équations

$$\zeta'_8(v_i^0 + k_i) = 0, \qquad \zeta'_8(v_i^1 + k_i) = 0,$$

(où v_i^0 et v_i^1 sont deux valeurs particulières de v_i) fussent identiques, ou au moins que les premiers membres de ces deux équations se décomposassent en plusieurs facteurs et qu'un facteur fût commun à ces deux premiers membres. Il faudrait donc que, si

$$\varphi(v_i^0 - k_i)$$

est ce facteur, ce facteur ne changeât pas quand on y remplace v_i^0 par une autre valeur de v_i.

Cela est évidemment impossible.

Supposons donc maintenant que la variété des k_i ait une dimension seulement. Nous regarderons par conséquent k_1, k_2 et k_3 comme des fonctions d'une variable unique que j'appellerai z. Comme les v_i dépendent de x, les $v_i + k_i$ sont des fonctions de x et de z.

Il y a, d'après ce que nous avons vu, trois combinaisons linéaires de $\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_7$ qui sont identiquement nulles quand on y remplace les e_i par $v_i + k_i$; expliquons le sens de cette proposition; si je regarde un instant z comme une constante, les k_i seront aussi des constantes; mais v_i dépendant de x, quand on aura remplacé e_i par $v_i + k_i$, les ζ' deviendront aussi des fonctions de x; il y aura entre ces sept fonctions de x trois relations linéaires à coefficients constants. Mais je veux dire par là que ces coefficients ne dépendent pas de x; ils dépendront, au contraire, de z.

Ces trois relations linéaires doivent être les équations (18). Nous voyons donc que $\gamma_1^2, \gamma_1\gamma_2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \ldots$ sont des fonctions de z.

Si l'on élimine z entre ces équations, on obtiendra une relation entre $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ et $\frac{\gamma_1}{\gamma_3}$. *C'est cette relation qui exprime que la fonction* Θ *est spéciale.*

Il reste encore à examiner deux hypothèses; on pourrait supposer que la variété des k_i a o dimensions; c'est-à-dire que les k_i peuvent prendre un ou plusieurs systèmes déterminés de valeurs. Alors, en raisonnant comme nous venons de le faire, on verrait que les rapports $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, $\frac{\gamma_1}{\gamma_3}$ devraient prendre aussi des valeurs déterminées. Cela ferait donc deux conditions nécessaires pour que la fonction Θ soit spéciale et nous savons qu'il ne doit y en avoir qu'une.

On pourrait supposer enfin qu'il n'existe pas, en général, de valeurs des k_i telles que

$$\zeta_8'(v_i + k_i)$$

soit identiquement nulle. Il faudrait donc, pour que la fonction Θ soit spéciale, qu'une certaine relation ait lieu entre les périodes

$$a_{ik}(i, k = 1, 2, 3),$$

relation où les γ n'entrent pas. Mais comme il suffit d'une condition pour que la fonction Θ soit spéciale, lorsque la relation dont je viens de parler entre les a_{ik} serait satisfaite, la fonction Θ devrait être spéciale quels que soient les γ. Il faudrait donc que la relation entre les a_{ik} étant satisfaite, la variété des k_i ait deux dimensions et nous venons de voir que cela était impossible.

Les deux hypothèses doivent donc être rejetées l'une et l'autre.

Je m'arrête, quoique je n'aie fait qu'effleurer mon sujet; la considération des variétés de translation m'a donné un moyen d'exprimer la condition pour qu'une fonction Θ soit spéciale, mais je ne l'ai appliqué qu'à des cas très particuliers.

Il y a lieu d'espérer qu'en l'appliquant au cas général on obtiendra des résultats dignes d'intérêt. De même, j'ai dû passer très rapidement sur le cas voisin du cas singulier abélien qui a fait l'objet du présent paragraphe; mais je crois qu'il y a là un joli sujet de thèse.