COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 18 FÉVRIER 1895,

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet*. Note de M. **H. Poincaré**.

« On sait en quoi consiste la méthode de C. Neumann pour la solution du problème de Dirichlet. Soit S une certaine surface sur laquelle on suppose répandue une *double couche* de matière attirante; soit W le potentiel de cette double couche, V la limite vers laquelle tend W quand on se rapproche indéfiniment de S *par l'intérieur*, V' la limite de W quand on se rapproche de S par l'extérieur; et enfin $U = \frac{V + V'}{2}$ la valeur de W sur la surface S elle-même. Soient λ une constante arbitraire et Φ une fonction donnée définie en tous les points de la surface S.

» On peut se proposer de déterminer la double couche de telle façon que

$$(1) \qquad \mathrm{V} - \mathrm{V}' = \lambda(\mathrm{V} + \mathrm{V}') + 2\Phi.$$

» Nous chercherons à développer W suivant les puissances croissantes de λ en posant

$$(2) \qquad \mathrm{W} = \mathrm{W}_0 + \lambda \mathrm{W}_1 + \lambda^2 \mathrm{W}_2 + \ldots,$$

et nous poserons de même

$$\mathrm{V} = \Sigma\lambda^n \mathrm{V}_n, \qquad \mathrm{V}' = \Sigma\lambda^n \mathrm{V}'_n, \qquad \mathrm{U} = \Sigma\lambda^n \mathrm{U}'_n.$$

» On trouve alors

$$(3) \qquad \mathrm{V}_0 - \mathrm{V}'_0 = 2\Phi, \qquad \mathrm{V}_n - \mathrm{V}'_n = \mathrm{V}_{n-1} + \mathrm{V}'_{n-1} = 2\mathrm{U}_{n-1}.$$

» Cela peut s'écrire

$$(4) \qquad \mathrm{W}_0 = -\int \Phi' \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn}, \qquad \mathrm{W}_n = -\int \mathrm{U}'_{n-1} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn}.$$

» Les intégrales sont étendues à tous les éléments $d\omega'$ de S ; j'appelle M' le centre de gravité de $d\omega'$, M le point x, y, z ; j'appelle r la distance MM' ; $\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$ est la dérivée de $\frac{1}{r}$ estimée suivant la normale extérieure à la surface S au point M', de sorte que

$$d\omega' \frac{d\frac{1}{r}}{dn}$$

est l'angle solide sous lequel l'élément $d\omega'$ est vu du point M.

» J'appelle Φ' la valeur que prend Φ et U'_{n-1} celle que prennent W_{n-1} et U_{n-1} quand le point M vient en M'. Les formules (4) permettent donc de calculer de proche en proche tous les termes de la série (2).

» La condition (1) se réduit respectivement à

$$\mathrm{V} = \Phi, \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{V}' = -\Phi,$$

quand on y fait $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$.

» Si donc la série (2) converge pour $\lambda = \pm 1$, elle fournira la solution du problème de Dirichlet pour la région intérieure à S en y faisant $\lambda = -1$ et pour la région extérieure en y faisant $\lambda = 1$.

» Neumann a démontré que la série (2) converge pour $\lambda = \pm 1$ à deux conditions : 1° si la surface S est convexe ; 2° si l'on a

$$\int \Phi \gamma \, d\omega = 0, \tag{5}$$

γ étant la densité de l'électricité en équilibre sur la surface S lorsque l'on suppose cette surface conductrice et très éloignée de tous les autres conducteurs.

» Cela suffit pour résoudre le problème de Dirichlet toutes les fois que S est convexe, que la condition (5) soit d'ailleurs remplie ou non.

» En revanche, un examen superficiel pourrait faire croire que la première condition est essentielle et que la méthode de Neumann ne s'applique qu'aux surfaces convexes.

» Il n'en est rien pourtant; je suis parvenu à démontrer que la série (2) converge encore, pourvu que la condition (5) soit remplie, *quand la surface* S *n'est pas convexe*. J'ai supposé toutefois que S est simplement connexe et ne présente pas de singularité, je veux dire qu'elle a en tout point un plan tangent et des rayons de courbure déterminés. Il est d'ailleurs probable que ces deux conditions, ou au moins la seconde, ne sont pas nécessaires.

» Ne pouvant développer ici toute la démonstration, j'en vais indiquer la marche générale.

» Soient J_{ik} et J'_{ik} les valeurs de l'intégrale

$$\int \left(\frac{dW_i}{dx} \frac{dW_k}{dx} + \frac{dW_i}{dy} \frac{dW_k}{dy} + \frac{dW_i}{dz} \frac{dW_k}{dz} \right) dx\, dy\, dz,$$

étendue respectivement à tous les points x, y, z intérieurs à S et à tous les points extérieurs à S. On trouve aisément

$$J_{ik} = J_{i-1,k+1}, \qquad J'_{ik} = J'_{i-1,k+1},$$

ce qui nous permet de poser

$$J_{ik} = J_{i+k}, \qquad J'_{ik} = J'_{i+k}.$$

» On trouve ensuite facilement

$$J_m + J'_m = J_{m-1} - J'_{m-1}, \qquad J_{2m} > 0, \qquad J'_{2m} > 0.$$

$$\frac{J_2}{J_0} < \frac{J_4}{J_2} < \frac{J_6}{J_4} < \ldots < 1.$$

» On peut ensuite, si la surface est simplement connexe, assigner une limite supérieure M et une limite inférieure μ au rapport $\frac{J_{2m}}{J'_{2m}}$; ces deux limites, qui sont évidemment positives, ne dépendent que de la surface S. Si donc nous posons

$$\frac{M-\mu}{M+\mu} = L,$$

nous aurons

$$0 < L < 1.$$

On trouve ensuite

$$J_{2m} + J'_{2m} < AL^{2m},$$

A étant une constante; et cela prouve que la série

$$\sqrt{J_0} + \sqrt{J_2} + \sqrt{J_4} + \ldots$$

est convergente.

» Définissons maintenant une constante C_m par l'équation

$$\int U_m \, d\omega = C_m \int d\omega,$$

les intégrales étant étendues à tous les éléments $d\omega$ de la surface S, de sorte que $\int d\omega$ n'est autre chose que l'aire totale de cette surface. Posons alors

$$K_m = \int (U_m - C_m)^2 \, d\omega.$$

» On peut démontrer, si la surface S est simplement connexe, que

$$K_m < B(J_{2m} + J'_{2m}) < ABL^{2m},$$

B étant une constante.

» D'autre part, U_m est plus petit en valeur absolue qu'un facteur constant multiplié par N^m, $N+1$ étant le maximum du nombre des points de rencontre d'une droite avec la surface S; et il en est de même, par conséquent, de C_m et de $U_m - C_m$.

» En combinant ces deux séries d'inégalités, on peut démontrer que

$$|U_{m+1} - C_m| < (\alpha + \beta m) L^m,$$

α et β étant deux constantes positives.

» Il résulte de là que la série

$$U_0 + \lambda(U_1 - C_0) + \lambda^2(U_2 - C_1) + \ldots$$

est convergente pour $\lambda = \pm 1$. Nous pouvons donc trouver une double couche satisfaisant, soit à la condition

$$V = \Phi + \text{const.},$$

soit à la condition

$$V' = -\Phi + \text{const.}$$

» Le problème de Dirichlet est donc résolu.

» J'ai été conduit, à ce propos, à certaines propositions que je n'ai pu démontrer complètement, mais que j'ai rendues vraisemblables par un mode de raisonnement dont on s'est souvent contenté en Physique mathématique, bien qu'il soit dépourvu de rigueur analytique.

» Je crois néanmoins devoir les énoncer ici.

» Il existe une infinité de fonctions que je désignerai par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ et qui jouissent des propriétés suivantes :

» La fonction φ_i est le potentiel d'une simple couche répandue sur la surface S; si donc l'on considère la projection de l'attraction due à cette couche sur une normale à S, cette projection n'aura pas la même valeur en deux points infiniment voisins du pied de cette normale, mais situés le premier à l'extérieur de S, le second à l'intérieur de S; j'appellerai la première de ces valeurs $\frac{d\varphi'_i}{dn}$ et la seconde $\frac{d\varphi_i}{dn}$. On aura, et c'est là la propriété qui sert de définition à φ_i,

$$\frac{d\varphi'_i}{dn} = -h_i \frac{d\varphi_i}{dn},$$

h_i étant une constante positive. L'intégrale

$$\int \sum \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_k}{dx}\, dx\, dy\, dz = \int \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_k}{dx} + \frac{d\varphi_i}{dy}\frac{d\varphi_k}{dy} + \frac{d\varphi_i}{dz}\frac{d\varphi_k}{dz}\right) dx\, dy\, dz,$$

étendue soit à tous les points extérieurs à S, soit à tous les points intérieurs, sera nulle. Si je désigne par H_i et H'_i les deux valeurs de l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)^2 dx\, dy\, dz,$$

étendue à la région intérieure à S et à la région extérieure, on aura

$$H'_i = h_i H_i.$$

» Si Φ est développable en une série de la forme

$$\Phi = \sum \alpha_i \varphi_i,$$

on aura, pour une valeur quelconque de λ,

$$W = \sum \frac{2\alpha_i \varphi_i}{h_i + 1 - \lambda(h_i - 1)} \quad \text{à l'extérieur de S,}$$

$$W = \sum \frac{-2\alpha_i h_i \varphi_i}{h_i + 1 - \lambda(h_i - 1)} \quad \text{à l'intérieur de S ;}$$

d'où

$$J_p = \sum \frac{4\alpha_i^2 h_i^2}{(h_i+1)^2}\left(\frac{h_i - 1}{h_i + 1}\right)^p H_i, \qquad J'_p = \sum \frac{4\alpha_i^2 h_i}{(h_i+1)^2}\left(\frac{h_i - 1}{h_i + 1}\right)^p H_i.$$

» J'ajoute que, M et μ étant les constantes définies plus haut, on a

$$M > h_i > \mu. \text{ »}$$

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE. — *Sur la forme de l'intrados des voûtes en anse de panier.* Note de M. **H. Resal.**

« On attribue à Huygens (vers l'année 1700) le premier tracé rationnel d'un profil composé de trois arcs de cercle. On reproche à ce profil, surtout pour les faibles montées, de produire un effet disgracieux résultant d'un trop brusque changement de courbure aux points de raccordement.

» Perronet, pour le pont de Neuilly (1768-74), a cherché à éviter cet inconvénient par un tracé empirique à onze centres; mais d'après Dupuit, inspecteur général des ponts et chaussées, il eût été aussi avantageux d'avoir recours à l'ellipse, qui diffère très peu de ce profil.

» En désignant par n un nombre entier supérieur à l'unité, si l'on se propose de construire un profil à $2n+1$ centres, on peut se donner arbitrairement, de part et d'autre de la montée, les positions de $n-1$ de ces centres, à la seule condition, en vue du coup d'œil, que les rayons augmentent en remontant des naissances à la clef. En se plaçant à ce point de vue, l'inspecteur général des ponts et chaussées Michal (1831) a donné une solution très satisfaisante du problème, en faisant intervenir d'une manière ingénieuse les rayons de courbure de l'ellipse; toutefois, même pour $n = 2$, il y a trop peu de différence entre le profil de Michal et l'ellipse pour qu'il y ait lieu de le préférer à cette courbe dont le tracé est d'ailleurs plus simple.

» L'ellipse serait plus employée si le débouché n'était pas restreint aux naissances.

» En partant de ces diverses considérations, j'ai été conduit à déter-