de sa découverte fournit une nouvelle preuve des ressources de l'analyse spectrale, et elle donne une haute idée de la patience et de la précision des expérimentateurs qui ont obtenu de semblables résultats. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions abéliennes.* Note de M. H. POINCARÉ.

« Soit

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

ou simplement $F(u_i)$ une fonction abélienne, c'est-à-dire une fonction à p variables et à $2p$ périodes qui ne change pas quand l'un des arguments augmente de $2i\pi$ et qui admet, d'autre part, p autres périodes dites de *seconde espèce*, de telle sorte que l'on ait

$$F(u_i + a_{ik}) = F(u_i) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Les p^2 quantités a_{ik} satisfont d'ailleurs à la condition

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

» Parmi les fonctions abéliennes, je distinguerai celles que j'appellerai *spéciales* et qui doivent leur origine à une courbe algébrique C de genre p. On sait que pour $p = 2$ et pour $p = 3$ toutes les fonctions abéliennes sont spéciales, mais qu'il n'en est plus de même pour $p \geqq 4$.

» A l'égard des fonctions abéliennes spéciales, on peut considérer p intégrales abéliennes de première espèce

$$v_1(x), \quad v_2(x), \quad \ldots, \quad v_p(x)$$

qui sont des fonctions des coordonnées x et y d'un point de la courbe C, ou plus simplement encore des fonctions de l'abscisse x seulement.

» Considérons maintenant la fonction Θ.

» On peut étudier ses zéros à deux points de vue différents. On peut d'abord former p équations à p inconnues

$$(1) \qquad \Theta(u_i - e_{ik}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

où les e_{ik} sont p^2 constantes données. Les équations (1) admettent, comme je l'ai montré, $p!$ solutions.

» On peut encore, comme l'a fait Riemann, s'il s'agit de fonctions spéciales, former une seule équation à une inconnue

$$\Theta[v_i(x) - e_i] = 0, \tag{2}$$

où les e_i sont p constantes données. Le nombre des solutions est alors égal à p.

» Ces résultats peuvent être généralisés de plusieurs manières différentes :

» 1° J'appellerai fonction θ une fonction entière de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ qui, comme la fonction Θ, se reproduit multipliée par un facteur exponentiel quand on augmente les u_i d'une période de deuxième espèce et, de plus, ne change pas quand un des u_i augmente de $2i\pi$. Je dirai que deux fonctions θ appartiennent au même faisceau quand elles admettent les mêmes facteurs exponentiels et qu'une fonction θ est d'ordre n quand elle admet les mêmes facteurs exponentiels que

$$[\Theta(u_i - e_i)]^n.$$

» Un faisceau d'ordre n comprend n^p fonctions θ linéairement indépendantes.

» Cela posé, s'il s'agit de fonctions spéciales, on démontre aisément qu'*il y a dans un faisceau d'ordre n*

$$n^p + p - np - 1$$

fonctions θ linéairement indépendantes qui s'annulent identiquement quand on y remplace u_i par $v_i(x)$.

» 2° Supposons toujours qu'il s'agisse de fonctions spéciales et formons les q équations à q inconnues

$$\Theta[v_i(x_1) + v_i(x_2) + \ldots + v_i(x_q) - e_{ik}] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q), \tag{3}$$

où les e_{ik} sont pq constantes données.

» Ces équations admettent

$$\frac{p!}{\overline{p-q}!}$$

solutions, en ne regardant pas comme distinctes deux solutions qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel se présentent les q points

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_q.$$

» Ce résultat, qui contient comme cas particuliers ceux que je viens d'énoncer au sujet des équations (1) et (2), peut se démontrer par une méthode analogue à celle qui m'a permis d'établir le résultat particulier relatif à l'équation (1) (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XI).

» Cette méthode consiste à approfondir ce qui se passe dans un cas particulier que j'appellerai *cas singulier elliptique*, et qui est celui où les $a_{ik}(i \gtrless k)$ s'annulent et où la fonction Θ se décompose en un produit de p fonctions Θ elliptiques. Je me bornerai à dire que, dans ce cas, la courbe C de genre p se décompose en p courbes de genre 1.

» Le résultat de Riemann relatif à l'équation (2) et le mien qui se rapporte aux équations (1) entraînent des conséquences qui semblent, au premier abord, mal se concilier entre elles. Le paradoxe, bien entendu, n'est qu'apparent, et tout s'explique par la circonstance suivante :

» Soit, par exemple, $p = 3$; formons les deux équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \Theta(u_1 - e_1,\, u_2 - e_2,\, u_3 - e_3) = 0, \\ \Theta(u_1 - e'_1,\, u_2 - e'_2,\, u_3 - e'_3) = 0. \end{cases}$$

Si l'on regarde u_1, u_2, u_3 comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace, ces équations représentent une courbe que j'appellerai A.

» *Dans certains cas, cette courbe* A *se décompose*. Pour $p = 3$, la courbe C se réduit à une courbe plane du quatrième degré sans point double. Les propriétés géométriques de ces courbes planes permettent très aisément d'expliquer les circonstances de la décomposition de la courbe A, et le paradoxe s'évanouit.

» J'arrive à une autre question.

» M. Lie a appelé *surface de translation* une surface dont les équations peuvent être mises sous la forme

$$x_i = f_i(t) + \varphi_i(t') \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace et où t et t' sont deux variables auxiliaires.

» On peut de même appeler *variété de translation* une variété à $p - 1$ dimensions dont les équations peuvent être mises sous la forme

$$x_i = f_{1.i}(t_1) + f_{2.i}(t_2) + \ldots + f_{p-1.i}(t_{p-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où x_1, x_2, ..., x_p sont les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace à p dimensions et où les t sont des variables auxiliaires.

» Cela posé, supposons, dans le cas de $p = 3$, que u_1, u_2, u_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace; ou, plus généralement, pour

p quelconque, supposons que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ représentent les coordonnées d'un point dans l'espace à p dimensions.

» Alors Riemann a démontré que, dans le cas de $p = 3$, la surface

$$\Theta(u_1, u_2, u_3) = 0$$

est de translation. De même pour p quelconque, et, *s'il s'agit de fonctions spéciales*, la variété

$$\Theta(u_i) = 0$$

sera de translation.

» On peut se demander si cette propriété est encore vraie pour les fonctions abéliennes non spéciales.

» *La réponse doit être négative.*

» On pourrait déduire de là, sous la forme d'équations aux dérivées partielles auxquelles doit satisfaire Θ, la condition pour que les fonctions abéliennes de périodes données soient spéciales.

» Mais je n'ai pas traité la question dans toute sa généralité. J'ai envisagé seulement les cas voisins du cas singulier elliptique, c'est-à-dire que j'ai supposé que, les a_{ii} restant finis, les $a_{ik} (i \gtrless k)$ sont très petits. On peut alors former aisément les conditions pour que la variété $\Theta = 0$ soit de translation, en nombre égal à celui des conditions pour que les fonctions abéliennes soient spéciales. Dans le cas de $p = 4$, il n'y a qu'une seule condition qui s'écrit

$$\sqrt{a_{12} a_{13} a_{34} a_{24}} + \sqrt{a_{13} a_{14} a_{23} a_{24}} = \sqrt{a_{12} a_{14} a_{23} a_{34}}.$$

En passant à la limite de diverses manières, on peut être conduit à des résultats intéressants; c'est ainsi que l'on voit que la surface

$$xyz + x + y + z = 0$$

est de deux manières différentes une surface de translation.

» Outre le cas singulier elliptique, il y a un cas remarquable que l'on pourrait appeler le cas singulier abélien; c'est celui où la fonction Θ se décompose en un produit de plusieurs fonctions Θ abéliennes d'un nombre moindre de variables.

» En envisageant un cas voisin du cas singulier abélien, puis en passant à la limite d'une manière convenable, on est conduit à certains résultats intéressants au sujet des fonctions abéliennes.

» On voit, par exemple, que certaines surfaces, dont les équations s'expriment à l'aide de fonctions quadruplement périodiques de deuxième espèce, sont des surfaces de translation. »

NAVIGATION. — *Aubes propulsives à pénétration tangentielle.* Note de M. **Guyou.**

« J'ai l'honneur de présenter à l'Académie un modèle de propulseur, dont l'idée m'a été suggérée par les expériences de M. Marey sur la natation des poissons.

» Cet appareil n'est qu'une application particulière d'un principe, qui peut être réalisé de diverses manières. Il consiste dans une palette, dont l'axe est perpendiculaire à la direction de la quille du navire et à laquelle la machine imprime un mouvement tel que, pour une valeur déterminée du rapport de la vitesse du navire à la vitesse angulaire de l'arbre moteur, elle glisse tangentiellement dans le liquide à la manière de la vis dans l'écrou. Pour toute autre valeur de ce rapport, elle glisse rapidement sur une trajectoire sinueuse à laquelle elle se présente obliquement de manière à recueillir une pression accélératrice ou retardatrice.

» Le principe de la disposition de ces appareils est le suivant : une manivelle, calée sur l'arbre moteur, conduit, par l'intermédiaire d'un mécanisme quelconque, un point sur une courbe fermée, dont le plan est parallèle à la quille. Une seconde manivelle, faisant, avec la précédente, un petit angle, imprime, à un second point, un mouvement identique sur une courbe placée un peu en arrière de la précédente. Par suite de l'angle des deux manivelles conductrices, ce second point est en retard sur le premier d'un intervalle constant; et il est clair que lorsque le rapport de la vitesse du navire à celui de la machine sera tel que l'espace parcouru dans cet intervalle soit celui qui sépare les deux courbes, le second point décrira la même trajectoire que le premier dans le liquide. Par suite, une lame étroite et mince, entraînée par le premier point et guidée de manière que son plan passe toujours par le second, glissera tangentiellement à la trajectoire commune.

» Dans le présent modèle, l'axe de la palette est animé d'un mouvement oscillatoire suivant une droite perpendiculaire à sa direction et à celle de la quille. La combinaison de ce mouvement avec celui du navire lui fait décrire, dans l'eau, un cylindre, dont la directrice est une sinusoïde.

» L'inclinaison de son plan est réglée par une tige glissant dans une