

REVUE GÉNÉRALE
DES SCIENCES
PURES ET APPLIQUÉES

DIRECTEUR : LOUIS OLIVIER

SUR LA THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

Ce qui m'a donné l'idée d'écrire cet article, c'est l'étude d'une communication faite récemment par lord Kelvin à la Société Royale. Cette communication se rapporte à une question essentielle pour la théorie cinétique des gaz. Mais, comme cette théorie a été beaucoup moins cultivée par les physiciens français que par les anglais, il m'a semblé que le lecteur comprendrait mal la portée de l'objection de lord Kelvin, et les rapports qu'elle peut avoir avec les hypothèses sur la constitution des gaz, si je ne commençais par un exposé général des idées de Maxwell à ce sujet.

J'ai été ainsi conduit à développer un des points les plus importants de la théorie cinétique des gaz : mais un point particulier seulement. Peut-être reviendrai-je sur d'autres parties de la théorie, mais dans un autre article; celui-ci est déjà trop long.

Cette théorie mérite-t-elle les efforts que les Anglais y ont consacrés? On peut quelquefois se le demander; je doute que, dès à présent, elle puisse rendre compte de tous les faits connus. Mais il ne s'agit pas de savoir si elle est vraie; ce mot, en ce qui concerne une théorie de ce genre, n'a aucun sens. Il s'agit de savoir si sa fécondité est épuisée ou si elle peut encore aider à faire des découvertes. Or, on ne saurait oublier qu'elle a été utile à M. Crookes dans ses travaux sur la matière radiante, ainsi qu'aux inventeurs de la théorie de la pression osmotique. On peut donc encore se servir de l'hypothèse cinétique, pourvu qu'on n'en soit pas dupe. Aussi puis-je espérer qu'on voudra bien me

pardonner la longueur de cet article et le caractère un peu technique que j'ai été obligé de lui donner.

I

L'idée fondamentale de la théorie cinétique des gaz est ancienne. On sait en quoi elle consiste : on se représente un gaz comme formé de molécules très nombreuses et très petites, animées de vitesses très grandes, ces molécules n'exerçant les unes sur les autres que des actions insensibles, sauf dans le cas où leur distance est extrêmement petite.

Il en résulte qu'une molécule décrira une trajectoire rectiligne, et qu'elle ne s'en écartera que dans deux cas, d'abord si elle vient à rencontrer la paroi du vase où le gaz est renfermé; tout se passe alors comme si, repoussée par cette paroi, elle rebondissait en suivant les lois du choc des corps élastiques. Notre molécule s'écartera encore de sa trajectoire rectiligne quand elle approchera assez d'une autre molécule pour que l'attraction de celle-ci devienne sensible; on dira alors que les deux molécules sont en collision. La durée des collisions sera très courte si l'on admet, comme nous l'avons fait, que l'attraction moléculaire ne se fait sentir qu'à une distance excessivement petite; nous admettrons de même qu'une molécule ne subit d'action de la part d'une paroi que quand elle en est extrêmement rapprochée; une collision d'une molécule contre une paroi sera donc aussi de très courte durée.

La trajectoire d'une molécule quelconque se

composera donc de portions rectilignes raccordées par de petits arcs de courbe, si petits même, qu'en première approximation, on pourra les assimiler à des points et comparer la trajectoire à une ligne brisée.

Dans cette manière de voir, la pression d'un gaz serait l'effet des chocs incessants des molécules gazeuses contre les parois.

Toutes ces idées sont anciennes et bien connues, mais la théorie n'a pris sa forme définitive que quand Clausius a démontré le théorème du *viriel* :

Considérons un milieu constitué comme nous venons de l'imaginer, et supposons que la pression sur les parois soit uniforme. Alors, trois fois, le produit du volume par la pression est égal à deux fois la force vive de translation des molécules gazeuses, plus le *viriel interne*.

Ce *viriel interne* est la somme des répulsions mutuelles des molécules, multipliées par leurs distances. Si, comme nous l'avons supposé, cette répulsion n'est sensible que pour les distances très petites, ce viriel sera négligeable. C'est en en tenant compte qu'on expliquerait les divergences entre les gaz réels et les gaz parfaits; mais, pour le moment, nous ne nous occuperons pas de cette question et nous supposons le viriel nul.

Alors la force vive de translation des molécules est proportionnelle au produit du volume par la pression.

Mais les lois de Joule, de Mariotte et de Gay-Lussac nous apprennent, d'autre part, que l'énergie interne du gaz est proportionnelle à la température absolue, et, par conséquent, au produit du volume par la pression.

L'énergie interne est donc proportionnelle à la force vive de translation.

Si le coefficient de proportionnalité était égal à 1, il y aurait égalité entre cette énergie interne et cette force vive de translation. Toute la chaleur interne du gaz se trouverait sous la forme de mouvement de translation des molécules.

La théorie cinétique des gaz se présenterait alors avec un caractère de simplicité tout à fait séduisant.

Jusqu'à Clausius, on a pu l'espérer; mais le théorème du *viriel* nous fait connaître le rapport de la force vive de translation au produit du volume par la pression; les expériences faites sur les gaz, et la thermodynamique nous font connaître, d'autre part, le rapport de l'énergie interne à ce même produit, et il faut bien reconnaître alors que ces deux rapports ne sont pas égaux.

Dans les gaz simples, l'énergie totale est à peu près égale aux $5/3$ de la force vive de translation.

De là la nécessité de modifier profondément la théorie. Clausius suppose que chaque molécule est

formée de plusieurs atomes, de sorte que l'énergie cinétique totale se composera de la force vive de translation des diverses molécules en supposant la masse de chaque molécule concentrée en son centre de gravité, plus la force vive due au mouvement relatif des atomes qui composent une même molécule; comme ce mouvement relatif est une sorte de vibration, je pourrai l'appeler force vive vibratoire et je la désignerai par V, tandis que je réserverai la lettre T pour la force vive de translation.

Pour avoir l'énergie totale, il faut ajouter encore l'énergie potentielle P due aux attractions mutuelles des atomes d'une même molécule, puisque nous supposons que des atomes appartenant à des molécules différentes n'exercent les uns sur les autres que des actions insensibles, sauf pendant la durée très courte des collisions.

L'énergie totale est $T + V + P$.

Clausius est ainsi amené à supposer que les rapports $\frac{V}{T}$, $\frac{P}{T}$ sont constants; les lois de Mariotte et de Gay-Lussac s'en déduiraient alors très aisément.

Mais il ne suffit pas de le supposer, il faut l'expliquer; il faut montrer que cette relation est nécessaire; sans quoi, rien n'est fait et toute la théorie s'écroule; il y a là pour elle une question de vie ou de mort.

C'est là qu'a été la tâche de Maxwell; mais il y a un point délicat sur lequel il convient d'insister un peu.

II

Au premier abord, il semble impossible de donner aucune raison pour que la force vive de translation d'une molécule et sa force vive de vibration restent dans un rapport constant. Nous avons supposé que les collisions de molécules se produisent incessamment; pendant ces collisions, deux molécules devenues voisines exercent les unes sur les autres des actions considérables; leur force vive de translation et leur énergie vibratoire subissent de très grandes variations; et cela, sans qu'on puisse supposer que leur rapport ne varie pas.

Heureusement, ce qui nous intéresse, ce n'est pas la force vive de telle ou telle molécule; ce n'est que la valeur moyenne de cette force vive. Le mot peut être entendu de deux manières différentes: l'énergie cinétique d'une molécule variera d'abord avec le temps, mais on peut considérer la moyenne arithmétique des valeurs que prend cette énergie pendant un temps assez long; en second lieu, cette énergie n'est pas la même pour toutes les molécules, et on peut prendre la moyenne arithmétique des valeurs correspondant aux diverses molécules du gaz.

Eh bien, ce que j'envisagerai dans ce qui va suivre, c'est la moyenne prise à la fois par rapport au temps et par rapport aux diverses molécules du gaz ; c'est la moyenne des moyennes, pour ainsi dire. C'est elle seule, en effet, qui peut être supposée accessible aux observations.

Pourquoi donc y a-t-il un rapport constant entre les valeurs moyennes de T , de P et de V ? Pour faire comprendre la pensée de Maxwell, je dois d'abord définir ce qu'on doit entendre par « degré de liberté ».

Considérons un système matériel quelconque ; on pourra le regarder comme formé par un certain nombre de points matériels ; il suffit, pour connaître la position du système, de connaître les coordonnées de ces points, mais cela n'est point toujours nécessaire. Généralement, en effet, ces points ne seront pas indépendants les uns des autres ; ils seront « liés » les uns aux autres de diverses façons : par exemple, les deux extrémités d'une tringle rigide devront rester à une distance constante l'une de l'autre, de sorte qu'il suffira de connaître cinq de leurs six coordonnées pour en déduire la sixième.

Les coordonnées de nos points matériels devront donc satisfaire à certaines équations dites de liaison. On pourra donc les exprimer toutes en fonctions de quelques-unes d'entre elles ; s'il y a n points matériels, ayant en tout $3n$ coordonnées, et s'il y a m équations de liaison, il suffira de se donner $3n - m$ coordonnées pour calculer les autres et pour définir complètement la position du système ; ou bien encore, il suffira de se donner $3n - m$ fonctions convenablement choisies de nos $3n$ coordonnées, fonctions que j'appellerai *coordonnées du système* et que je désignerai par la lettre q .

Si $3n - m = 1$, une seule coordonnée suffit pour définir la position du système : chaque point est assujéti à se mouvoir sur une trajectoire fixe.

On dit alors que le système est à liaisons complètes ou qu'il ne comporte qu'un degré de liberté. Si $3n - m = 2$, chaque point est assujéti à se mouvoir sur une surface fixe : il y a alors deux degrés de liberté.

En général, il y aura autant de degrés de liberté que de coordonnées q , c'est-à-dire $3n - m$.

On peut alors imprimer à un système $3n - m$ déplacements infiniment petits indépendants les uns des autres ; on n'en pourra trouver davantage : tout déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons ne sera qu'une combinaison de ces $3n - m$ déplacements élémentaires. C'est ce qui justifie l'expression de *degré de liberté*.

Un point matériel libre a trois degrés de liberté ; un corps solide libre en a six ; un corps solide mobile autour d'un point fixe en a trois ; un corps

solide, mobile autour d'un axe, n'en a qu'un.

Je dirai que la *situation* du système est définie quand on connaîtra non seulement les coordonnées de ses points, mais encore leurs vitesses ; c'est-à-dire quand on connaîtra non seulement les coordonnées q , mais leurs dérivées par rapport au temps que j'appellerai q' .

Si l'on accepte cette terminologie, la position du système, qui ne dépend que des coordonnées, pourra être entièrement définie sans que la situation le soit.

Dans les problèmes de dynamique rationnelle analogues à celui qui nous occupe ici, les forces ne dépendent que de la position du système ; si donc on connaît la situation du système, on connaîtra, non seulement les coordonnées des divers points et leurs vitesses, mais encore leurs accélérations. On pourra en déduire la situation nouvelle du système au bout d'un temps infiniment petit.

On peut donc dire que, si l'on connaît la situation initiale du système, on connaîtra sa situation à un instant ultérieur quelconque.

La force vive totale du système dépend évidemment des q et des q' ; par rapport aux q' , c'est un polynôme homogène et du second degré. Si nous doublons, en effet, tous les q' , toutes les vitesses doubleront, et la force vive quadruplera.

Mais il peut se produire quelquefois une circonstance remarquable.

Supposons que les coordonnées q (et leurs dérivées q') se partagent en deux catégories ;

Supposons que la force vive totale soit la somme de deux termes ; le premier pourra dépendre de tous les q ; mais il ne dépendra que des q' de la première catégorie ; de même, le second terme pourra dépendre de tous les q ; mais il ne dépendra que des q' de la seconde catégorie.

Nous dirons alors que la force vive se décompose en deux parties indépendantes.

Considérons, par exemple, un corps solide libre ; pour définir sa position, il nous faut six paramètres q , à savoir :

1° Les trois coordonnées du centre de gravité ; ce seront les q de la première catégorie, et leurs dérivées, c'est-à-dire les composantes de la vitesse du centre de gravité, seront les q' de la première catégorie ;

2° Les trois angles qui définissent la direction du corps solide dans l'espace ; ce seront les q de la deuxième catégorie, et leurs dérivées seront les q' de la deuxième catégorie.

La force vive totale du corps solide se décomposera en deux parties, dont elle sera la somme :

1° La force vive de translation ; c'est-à-dire la force vive du centre de gravité, en y supposant concentrée la masse totale du corps ;

2° La force vive du corps dans son mouvement relatif par rapport à son centre de gravité.

Ces deux parties, sont indépendantes, puisque la première ne dépend que la vitesse du centre de gravité, c'est-à-dire des q' de la première catégorie, et la seconde des composantes de la rotation, c'est-à-dire des q' de la seconde catégorie.

S'il y a α quantités q' de la première catégorie et β de la deuxième, nous dirons que, des deux parties indépendantes de la force vive, la première comporte α degrés de liberté et la seconde β .

Dans l'exemple qui précède, chacune des deux parties comporte trois degrés de liberté.

Dans le cas de la théorie cinétique des gaz, la force vive totale se décompose de même en deux parties indépendantes.

En effet, les coordonnées q' se répartiront en deux catégories :

Celles de la première catégorie seront les coordonnées des centres de gravité de chaque molécule ;

Celles de la seconde seront celles qui définissent la position relative des divers atomes qui composent une même molécule.

La force vive se compose alors de deux parties :

1° La force vive de translation, c'est-à-dire celle qu'aurait le système si la masse de chaque molécule était concentrée en son centre de gravité : c'est ce que j'ai appelé T. Elle ne dépend que des q' de la première catégorie.

2° La force vive de vibration, c'est-à-dire la force vive du mouvement relatif des divers atomes par rapport au centre de gravité de la molécule. C'est ce que j'ai appelé V. Elle ne dépend que des q' de la seconde catégorie.

III

Ces préliminaires posés, voyons en quoi consiste l'idée fondamentale de Maxwell.

Dans un problème quelconque de Mécanique, il y a certaines fonctions des coordonnées q et de leurs dérivées qui doivent demeurer constantes pendant toute la durée du mouvement. C'est ce qu'on appelle des *intégrales*. Il y en a toujours au moins une qui est celle des forces vives et qui exprime la constance de l'énergie totale.

Il en résulte qu'un système, partant d'une situation initiale donnée, ne peut pas atteindre une situation *quelconque* : les valeurs des intégrales doivent, en effet, être les mêmes pour la situation initiale et pour toutes les situations ultérieures.

Maxwell admet que, quelle que soit la situation initiale du système, il passera toujours une infinité de fois, je ne dis pas par toutes les situations *compatibles avec l'existence des intégrales, mais aussi près qu'on voudra* d'une quelconque de ces situations.

C'est ce qu'on appelle le *postulat de Maxwell*. Nous le discuterons plus loin.

De ce postulat, Maxwell déduit un théorème important, que j'appellerai, dans ce qui va suivre, le *théorème de Maxwell*.

Je ne puis, sans être entraîné à trop de longueurs, ni démontrer ce théorème, ni même l'énoncer correctement. Je me bornerai donc à énoncer ceux des corollaires de ce théorème qui pourront m'être nécessaires.

Mais, je voudrais d'abord donner une idée approchée de ce qu'est ce théorème de Maxwell, en énonçant un autre dont celui de Maxwell n'est qu'une généralisation :

Soit un vase entièrement rempli par un liquide incompressible. Le mouvement de ce liquide est permanent, de sorte que, quand une molécule repasse très près de sa position initiale, les composantes de sa vitesse reprennent également des valeurs très voisines de leurs valeurs initiales.

Étudions la trajectoire décrite par une molécule depuis l'époque 0 jusqu'à l'époque Θ et supposons Θ extrêmement grand. En général, pendant ce temps extrêmement long, la molécule aura passé très près de chacun des points du vase ; c'est le postulat de Maxwell.

Considérons, à l'intérieur du vase, deux volumes v_1 et v_2 . La molécule, entre les époques 0 et Θ , traversera, en général, plusieurs fois le volume v_1 ; soit t_1 la somme des durées de tous les séjours qu'elle fait dans ce volume v_1 ; soit de même t_2 la durée totale du séjour de la molécule dans le volume v_2 . On démontre que si Θ est très grand, t_1 et t_2 sont entre eux comme v_1 et v_2 . C'est là, dans ce cas particulier, le théorème de Maxwell.

Le plus important des corollaires du théorème de Maxwell est le suivant :

S'il n'y a pas d'autre intégrale uniforme que celle des forces vives, et si la force vive du système est décomposable en deux parties indépendantes, *les valeurs moyennes de ces deux parties, pendant un temps très long, seront entre elles comme le nombre de leurs degrés de liberté.*

Par exemple, dans le cas de la théorie cinétique des gaz, les deux quantités appelées plus haut T et V, et qui sont les deux parties indépendantes de la force vive, seront entre elles comme le nombre de leurs degrés de liberté, c'est-à-dire que leur rapport sera constant.

L'énoncé de notre corollaire doit être modifié s'il y a d'autres intégrales uniformes que celle des forces vives, et, par exemple, pour un système matériel qui serait libre dans l'espace. Pour un pareil système, en effet, il y a, outre l'intégrale des forces vives, celles du mouvement du centre de gravité et celles des aires, ce qui fait en tout

neuf intégrales indépendantes du temps. S'il n'y en a pas d'autres, on peut énoncer une proposition assez simple, analogue au corollaire dont je viens de parler. Mais je ne veux pas m'y arrêter, cela m'entraînerait hors de mon sujet; l'ensemble des molécules gazeuses, dans la théorie cinétique, ne constitue pas un système libre dans l'espace, puisqu'il est enfermé dans un vase et qu'il subit les réactions des parois de ce vase.

IV

Pour appliquer le théorème de Maxwell à la théorie cinétique des gaz, il faut aussi tenir compte de l'énergie potentielle vibratoire que nous avons appelée P.

Si nous envisageons un pendule, par exemple, son énergie cinétique est proportionnelle au carré de sa vitesse, et son énergie potentielle à la hauteur verticale dont il s'est élevé au-dessus de sa position d'équilibre. La somme de ces deux énergies est constante, la première augmentant et la seconde diminuant quand le pendule descend. *Mais leur valeur moyenne sera la même.*

C'est là un fait général. Si l'on envisage des mouvements vibratoires quelconques, c'est-à-dire les petits mouvements d'un système quelconque autour de sa position d'équilibre, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle auront même valeur moyenne.

Donc, la valeur moyenne de P est égale à celle de V.

Si, au lieu de mouvements vibratoires, on supposait que la molécule est animée d'une sorte de mouvement de rotation, il n'y aurait plus d'énergie potentielle, puisque la forme de la molécule demeurerait invariable, et P serait nul.

Dans tous les cas les valeurs moyennes des trois parties de l'énergie T, V et P seraient dans un rapport constant.

C'est donc pour cette raison que le rapport de T à l'énergie totale doit rester constant, et c'est précisément là ce qu'il s'agissait d'expliquer.

Mais on rencontre encore une difficulté dont la gravité n'a pas échappé aux fondateurs de la théorie cinétique.

Envisageons une molécule quelconque; nous avons à considérer le mouvement de son centre de gravité et le mouvement relatif de ses atomes par rapport à ce centre de gravité. Le premier de ces mouvements comporte 3 degrés de liberté, puisque le centre de gravité est défini par 3 coordonnées. Supposons que le mouvement relatif comporte q degrés de liberté.

Alors, les deux parties indépendantes de la force vive, T et V, comporteraient respectivement 3 n

et q n degrés de liberté, n étant le nombre des molécules.

Les valeurs moyennes de T et V seraient donc entre elles comme 3 et q .

Le rapport de T à l'énergie totale $T + V + P$ serait donc celui de 3 à $3 + q$, si P était nul, et plus petit encore dans le cas contraire.

Or, d'après les données expérimentales, ce rapport devrait être égal, à peu près, à $3/5$ pour les gaz simples.

Le nombre q est donc, au plus, égal à 2. Ce résultat est bien invraisemblable. En effet, dans le cas le plus simple, celui du mouvement relatif d'un corps solide par rapport à son centre de gravité, le nombre des degrés de liberté devrait être déjà égal à 3.

Or, il est difficile de ne pas attribuer aux molécules gazeuses une constitution beaucoup plus compliquée. Ce qu'on pourrait imaginer de plus simple, ce serait une molécule formée de deux atomes gravitant l'un autour de l'autre; il faudrait là encore supposer $q = 3$.

D'autre part, chaque raie du spectre d'un gaz doit représenter un mouvement vibratoire propre à la molécule de ce gaz; il devrait donc y avoir au moins autant de degrés de liberté que de raies dans le spectre.

Cette difficulté n'a pas été résolue; mais, comme elle n'est peut-être pas insoluble, nous ne nous y arrêtons pas davantage.

Ce n'est pas là la seule application du théorème de Maxwell à la théorie des gaz.

Les molécules diverses auront des vitesses dont la grandeur et la direction seront différentes; ces vitesses changeront brusquement au moment des collisions; mais on peut supposer que la distribution des vitesses oscille autour d'une certaine distribution moyenne et se proposer d'étudier cette distribution moyenne.

C'est ce que le théorème de Maxwell permet de faire. Il nous montre que les vitesses seront uniformément distribuées dans toutes les directions.

Il nous fait connaître aussi la loi suivant laquelle les grandeurs des vitesses sont distribuées entre les molécules. C'est cette même loi que Maxwell avait antérieurement cherché à déterminer par d'autres procédés plus ou moins corrects.

V

Ce qui précède montre suffisamment l'importance du théorème de Maxwell; c'est la véritable pierre angulaire de la théorie des gaz qui s'écroulerait sans lui.

D'un autre côté, il ne repose lui-même que sur une base bien fragile; le postulat de Maxwell que

nous avons énoncé plus haut, ne peut être accepté que sous bénéfice d'inventaire.

On comprend donc l'importance des discussions auxquelles il a donné lieu et la nécessité de s'y arrêter un peu. D'ailleurs, le nom du principal adversaire des vues de Maxwell suffirait pour attirer sur cette discussion l'attention des savants. Cet adversaire est, en effet, lord Kelvin.

Ses objections ont porté d'abord sur le postulat. Est-il certain qu'un système, partant d'une situation initiale quelconque, ira passer par toutes les situations compatibles avec les intégrales unifornes que comporte le problème?

Tous les problèmes de Mécanique admettent certaines solutions remarquables que j'ai appelées périodiques et asymptotiques et dont j'ai parlé ici-même dans un précédent article¹.

Pour ces solutions, le postulat de Maxwell est certainement faux.

Ces solutions, il est vrai, sont très particulières, elles ne peuvent se rencontrer que si la situation initiale est tout à fait exceptionnelle.

Il faudrait donc au moins ajouter à l'énoncé du postulat cette restriction, déjà bien propre à provoquer nos doutes : *sauf pour certaines situations initiales exceptionnelles*.

Ce n'est pas tout : si le postulat était vrai, le système solaire serait instable; s'il est stable, en effet, il ne peut passer que par des situations peu différentes de sa situation initiale. C'est là la définition même de la stabilité.

Or, si la stabilité du système solaire n'est pas démontrée, l'instabilité l'est moins encore et est même peu probable.

Il est possible et même vraisemblable que le postulat de Maxwell est vrai pour certains systèmes et faux pour d'autres, sans qu'on ait aucun moyen certain de discerner les uns des autres.

Il est permis de supposer *provisoirement* qu'il s'applique aux gaz tels que la théorie cinétique les conçoit; mais cette théorie ne sera solidement assise que quand on aura justifié cette supposition mieux qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

Mais, récemment lord Kelvin a formulé une objection plus précise, que je vais reproduire *in extenso* en l'empruntant à la traduction de M. Brillouin²:

« Supposons que le système soit formé de trois corps A, B, C, tous mobiles suivant une même droite KHL : « B oscille sous l'action d'un ressort assez dur pour que l'amplitude reste petite, même s'il arrive que toute l'énergie du système s'y accumule.

¹ (Sur le problème des trois corps, *Revue générale des Sciences*, 15 janvier 1891, tome II, page 1.)

² (*Conférences scientifiques et Allocutions de sir W. Thomson; Constitution de la matière*; Paris Gauthier-Villars, 1893, page 354.)

« A, C ont des masses égales.

« C n'est soumis à aucune force, sauf lorsqu'il choque la paroi fixe L et lorsqu'il choque B ou en est choqué.

« A n'est soumis à aucune force, sauf au moment où il choque B et lorsqu'il se rapproche d'une paroi fixe K; celle-ci exerce une action répulsive quelconque, constante ou non dans toute l'épaisseur HK, mais qui devient infiniment grande, si A arrive infiniment près de la paroi.

« Supposons tous ces corps animés d'un mouvement de va-et-vient. Les chocs entre B et les deux corps égaux A, C vont produire et maintenir l'égalité entre la valeur moyenne de l'énergie cinétique de A, mesurée soit immédiatement avant le choc, soit aussitôt après le choc et l'énergie cinétique moyenne de C. Alors, si l'on tient compte du temps passé par A dans la région HK, la valeur moyenne de la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de A est égale à l'énergie cinétique moyenne de C. Mais l'énergie potentielle de A est positive en tous les points de l'espace HK; car, par suite de notre hypothèse des actions répulsives, la vitesse de A est diminuée tant que le mouvement est dirigé de H vers K et augmentée pendant le mouvement inverse. L'énergie cinétique moyenne de A est donc moindre que l'énergie cinétique moyenne de C. »

Cela est contraire au théorème de Maxwell. C'est cette objection que je voudrais, à cause de son importance, discuter en détail; mais il est nécessaire, d'abord, de définir les notations que nous emploierons. Nous prendrons la droite KHL pour axe des x ; nous désignerons par x_1, x_2, x_3 , les abscisses des points A, B, C qui sont variables, et par k, h, l celles des points K, H, L qui sont constantes. On aura toujours :

$$\begin{aligned} k > x_1 > x_2 > x_3 > l \\ k > h > l. \end{aligned}$$

Le point B n'ayant que des oscillations très faibles, l'abscisse x_2 demeurera sensiblement constante et voisine de x_2^0 ; de sorte que

$$x_2^0 + \varepsilon > x_2 > x_2^0 - \varepsilon,$$

ε étant très petit.

Le point B n'atteignant jamais le point H, on aura d'ailleurs :

$$h > x_2.$$

Lorsque $x_1 < h$, le point A ne sera soumis à aucune force. Lorsque $x_1 > h$, il sera soumis à une force tendant à diminuer la valeur de x_1 .

La position étant définie par les trois coordonnées x_1, x_2 et x_3 , le système comporte trois degrés de liberté.

VI

Pour examiner l'objection de lord Kelvin, je vais faire des hypothèses plus particulières destinées à fixer les idées :

Je supposerai que la masse du corps B est égale à celle de A et à celle de C, que je prendrai égale à 2.

Je supposerai que le point B est soumis à une force égale à

$$P(x_2^0 - x_2),$$

P étant un nombre très grand. (Il en résulte que ses oscillations autour de sa position moyenne sont isochrones, d'amplitude très petite et de période très courte.)

Je supposerai que le point A est soumis à une force qui est nulle si $x_1 < h$ et égale à

$$2(h - x_1),$$

si x_1 est plus grand que h .

Nous pourrions alors supprimer la paroi K contre laquelle le corps A rebondissait, ou l'éloigner assez pour que ce corps ne puisse l'atteindre. Cela posé, je vais user d'un mode de représentation géométrique qui est assez commode. Je construirai un certain point M représentatif de la situation du système.

Ce point M sera défini par ses coordonnées rectangulaires dans l'espace.

Sa première coordonnée x sera égale à la vitesse $\frac{dx_1}{dt}$ du corps A.

Sa seconde coordonnée y sera égale à la vitesse $\frac{dx_2}{dt}$ du corps C.

Sa troisième coordonnée z sera égale à l'abscisse x_1 du corps A.

La position du point représentatif M ne suffit pas pour déterminer la situation du système; mais elle nous donne sur cette situation les indications les plus essentielles.

Cela posé, voyons quelle va être la trajectoire du point M.

Tant qu'il n'y aura pas de chocs et que x_1 sera plus petit que h , les corps A et C ne sont soumis à aucune force, leurs vitesses sont constantes et le point M décrit une ligne droite parallèle à l'axe des z .

Si, au contraire, x_1 est plus grand que h , la vitesse du point C demeure constante, mais celle du point A varie conformément à la loi pendulaire. Le point M décrit alors une demi-circonférence.

La trajectoire du point M se composera de deux segments de droites parallèles à l'axe des z et symétriques l'un de l'autre par rapport au plan des zy , raccordées par une demi-circonférence. Les points de contact entre ces droites et cette circonférence, où se fait ce raccordement, sont situés dans le plan $z = h$.

Comme pour $x_1 > h$, le point A se meut suivant la loi pendulaire et ses oscillations sont isochrones. Il en résulte que la partie circulaire de la trajectoire de M, quel que soit son rayon, sera toujours parcourue par ce point M dans le même temps.

Au contraire, la partie rectiligne de cette trajectoire, bien que sa longueur soit sensiblement constante, puisque z varie, suivant les cas, de $x_2 - \epsilon$ à h

ou de $x_2 + \epsilon$ à h , cette partie rectiligne, dis-je, sera parcourue dans un temps très variable, d'autant plus grand que la vitesse du point A sera plus petite.

Cette trajectoire sera brusquement interrompue au moment des chocs de B contre A ou C, ou de C contre la paroi L.

Au moment de ces chocs, le point M quittera sa trajectoire primitive pour en suivre une autre de même forme.

Nous considérerons le mouvement du point M depuis l'instant O jusqu'à l'instant Θ , Θ étant très grand. Dans cet intervalle, le point M parcourra un très grand nombre d'arcs élémentaires qui seront, comme nous venons de le voir, tantôt rectilignes, tantôt circulaires.

L'énergie totale E du système devra rester constante; mais, si l'on ne considère que l'énergie des deux points A et C, celle-ci sera égale à $x^2 + y^2$ pour $z < h$ et à $x^2 + y^2 + (z - h)^2$ pour $z > h$. Le lieu des points M où cette énergie des points A et C a une valeur donnée, se composera donc d'un cylindre de révolution limité au plan $z = h$ et prolongé au delà de ce plan par une demi-sphère avec laquelle il se raccorde.

Il est aisé alors de définir un solide S dont le point M ne peut pas sortir. D'une part, en effet, l'énergie des deux points A et C doit rester inférieure à l'énergie totale du système, qui est constante et égale à E. D'autre part, x_1 , c'est-à-dire z , doit être plus grand que x_2 et par conséquent que $x_2 - \epsilon$.

Le solide S sera donc limité: par le plan $z = x_2 - \epsilon$; par le cylindre $x^2 + y^2 = E$; ou plutôt, par la portion de ce cylindre comprise entre les plans $z = x_2 - \epsilon$ et $z = h$; et enfin par la demi-sphère $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = E$ ($z > h$). On voit que le solide S est une figure de révolution.

Considérons à l'intérieur de S un volume v , petit d'une manière absolue, mais assez grand pourtant pour que le point M le traverse un très grand nombre de fois depuis l'instant O jusqu'à l'instant Θ . Soit maintenant t la somme des durées de tous les séjours que fera le point M dans le volume v entre les instants O et Θ . Je donnerai au rapport $\frac{t}{v}$ le nom de densité de la trajectoire à l'intérieur de v .

D'après le théorème de Maxwell, cette densité doit être constante. Il y a exception pour la tranche très mince comprise entre les plans $z = x_2 - \epsilon$ et $z = x_2 + \epsilon$.

Il faut bien s'entendre, je ne veux pas dire que, si je considère deux volumes v très petits et égaux entre eux, le point M les traversera le même nombre de fois; si, en effet, en traversant l'un de

ces volumes, le point M va moins vite, il pourra le traverser moins souvent et y séjourner aussi longtemps au total.

Qu'on me permette d'appeler *moment d'inertie d'un corps par rapport à un plan* la somme des masses des molécules de ce corps multipliées par le carré de leur distance à ce plan.

Prenons, pour simplifier encore les énoncés, pour unité de volume, le volume du solide S.

Alors la valeur moyenne de la force vive du point A sera, par définition, le moment d'inertie de notre solide S par rapport au plan des yz , la densité étant définie comme nous venons de le faire.

De même, la valeur moyenne de la force vive du point C sera le moment d'inertie de S par rapport au plan des xz .

Or, le solide S étant de révolution, ces deux moments d'inertie sont égaux.

Donc, *les deux forces vives ont même valeur moyenne.*

Elles conserveront même valeur moyenne, si, comme dit lord Kelvin, on compare l'énergie cinétique moyenne de C et l'énergie cinétique moyenne de A, *mesurée soit immédiatement avant le choc, soit aussitôt après le choc*; ou, ce qui revient au même, si on ne considère que les instants où le point A est suffisamment voisin du point B, ou si on décapite, pour ainsi dire, le solide S en le coupant par un plan parallèle au plan $z = x^2 + \epsilon$ et suffisamment voisin de ce plan.

L'égalité des valeurs moyennes subsiste parce que le solide S reste de révolution.

Il y a donc égalité à la fois entre les énergies cinétiques moyennes *immédiatement avant et après le choc*, et entre les énergies cinétiques moyennes *pendant toute la durée du mouvement.*

Ces deux assertions que lord Kelvin trouvait contradictoires, ne le sont donc pas en réalité. Comment cela se fait-il? C'est qu'il s'établit une sorte de compensation. Les trajectoires pour lesquelles la vitesse initiale de A est petite, pour lesquelles, par conséquent, celle de C a le plus de chances d'être grande, sont précisément celles qui séjournent le plus longtemps dans la région HL, où la vitesse de A n'est pas encore diminuée par l'effet de la force répulsive.

Pour mieux faire comprendre le jeu de cette compensation, je vais considérer une solution particulière, — qui ne pourra, il est vrai, se réaliser que si les constantes initiales du mouvement sont tout à fait exceptionnelles, — mais qui pourra toujours nous servir d'exemple :

Je suppose que le mouvement des corps A et C soit périodique et que chaque période se subdivise en six phases.

Pendant les trois premières phases, la force vive C demeurera constante, celle de A sera égale-

ment constante pendant les phases 1 et 3, tandis que, pendant la phase 2, A pénétrant dans la région HK, cette force vive sera diminuée par l'effet de la force répulsive.

Pendant les trois dernières phases, des phénomènes analogues se reproduiront; la force vive de C aura encore une valeur constante, différente, d'ailleurs, de la précédente. Dans la phase 4, A ira de B à H; dans la phase 5, A pénétrera dans la région HK, et enfin, dans la phase 6, A reviendra de H en B. Dans la phase 5, par suite de la force répulsive, la force vive de A sera plus petite que la valeur constante qu'elle conservera dans les phases 4 et 6.

A la fin des trois premières phases, comme à la fin des trois dernières, les vitesses de A et de C seront brusquement modifiées par des chocs.

Si l'on considère la trajectoire du point M, on voit que ce point décrit d'abord une droite (phase 1), puis une demi-circonférence (phase 2), puis une autre droite (phase 3), puis une autre droite (phase 4), puis une autre demi-circonférence (phase 5), puis enfin encore une droite (phase 6).

Faisons des hypothèses plus particulières encore, résumées dans le tableau suivant où la première colonne donne le numéro de la phase, la seconde la valeur moyenne de la force vive de A, la troisième celle de la force vive de C, la quatrième la durée de la phase :

1	1	$\frac{7}{2}$	1
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	1
3	1	$\frac{7}{2}$	1
4	9	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
6	9	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$

On voit que la force vive moyenne de A est égale à celle de C, si l'on se borne à envisager les phases 1, 3, 4 et 6, où le point A n'est pas soumis à la force répulsive, car :

$$1 \times 1 + 9 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{2} \times 1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}$$

Elle l'est encore, si on considère les phases 2 et 5, où cette force agit, car :

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{9}{2} \times 1 = \frac{7}{2} \times 1 + \frac{3}{2} \times 1$$

Je pense que cet exemple suffira pour faire comprendre que la contradiction signalée par lord Kelvin n'est qu'apparente.

VII

Bien que, pour les raisons qui précèdent, l'exemple cité par lord Kelvin ne me semble pas, comme à lui, décisif, c'est plutôt vers son opinion que j'inclinerais en ce qui concerne le fond de la question.

Je crois que le théorème de Maxwell est bien une conséquence nécessaire de son postulat, du moment qu'on admet l'existence d'un état moyen ; mais le postulat lui-même doit comporter de nombreuses exceptions.

Reprenons le système imaginé par lord Kelvin, mais supposons la loi de la force répulsive différente de celle que nous avons admise dans le paragraphe précédent.

Avec cette loi, le solide S (à l'intérieur duquel se trouvent toutes les positions que l'intégrale des forces vives permet au point M d'atteindre) se composait d'un cylindre surmonté d'une demi-sphère.

Avec une loi différente, le cylindre subsiste, mais la demi-sphère est remplacée par une autre figure de révolution que j'appellerai F: *le solide S est donc toujours de révolution.*

Si la force est toujours répulsive, comme le suppose lord Kelvin, cette figure F est tout entière à l'intérieur du cylindre prolongé, et il n'y a rien à changer à ce qui précède. Le postulat de Maxwell et son théorème sont vrais.

Mais il n'en est plus de même si la force qui agit sur A dans la région HK est tantôt répulsive, tantôt attractive.

Dans ce cas, en effet, la figure F peut être en partie extérieure au prolongement du cylindre. Si alors nous menons deux plans tangents au cylindre parallèles au plan des yz , le point M devra rester compris entre ces deux plans. Il ne pourra donc approcher de tous les points du solide S: *c'est-à-dire que le postulat de Maxwell est faux.*

Il restera à l'intérieur d'un solide S' qui est la partie de S comprise entre les deux plans tangents dont je viens de parler.

Mais le solide S' n'est plus de révolution, *le théorème de Maxwell est donc faux dans ce cas.*

H. Poincaré,

de l'Académie des Sciences,
Professeur de Physique mathématique
à la Faculté des Sciences de Paris.

LES IDÉES ACTUELLES SUR LA FORMATION DE L'URÉE

DANS L'ORGANISME ANIMAL

L'urée ou amide carbonique, COAz^2H^4 , a été découverte dans l'urine en 1773 par Rouelle le cadet ; et, en 1799, Fourcroy et Vauquelin l'ont extraite de ce liquide à l'état de pureté. Depuis cette époque, ce corps a été l'objet de nombreuses recherches chimiques et physiologiques.

D'abord, on ne put obtenir l'urée qu'en l'isolant de l'urine de l'homme ou des Mammifères ; mais, en 1828, le chimiste allemand Wöhler la prépara par synthèse, en unissant l'acide cyanique à l'ammoniaque. C'était là une découverte fort importante, car la synthèse de l'urée était le premier exemple de la formation artificielle d'une substance organique.

Actuellement, l'urée est bien connue au point de vue de sa constitution et de ses propriétés chimiques ; mais son histoire physiologique est encore fort incomplète.

Dans les lignes qui suivent, nous essaierons de montrer les résultats généraux que l'on a obtenus jusqu'à présent dans les recherches biologiques entreprises sur cette substance.

I. — EXISTENCE DE L'URÉE DANS LE SANG ET LES HUMEURS

Les biologistes n'ont pu aborder les divers problèmes qui se rattachent à la présence de l'urée dans les urines que lorsqu'ils furent en possession de procédés d'extraction et de dosage suffisamment exacts. Ils ne tardèrent d'ailleurs pas à constater que l'urée est un élément toujours présent dans les urines de l'homme et des Mammifères, aussi bien pendant l'état de santé que pendant l'état de maladie, mais qu'elle fait défaut ou n'existe qu'en quantité extrêmement faible dans celle des Oiseaux et des Reptiles. L'urine de ces derniers animaux contient, par contre, beaucoup d'acide urique.

La présence constante de l'urée dans le liquide urinaire des Mammifères, aussi bien pendant l'état d'abstinence que pendant les périodes d'alimentation, prouve que, chez ces animaux, la production de cette amide est intimement liée à la nutrition et par conséquent à la vie. Aussi longtemps que la