le paraboloïde de révolution et des développées des surfaces minima. Mais du moins il y parvient par une méthode régulière et l'application des théories connues relatives à l'intégration des équations aux dérivées partielles. La Commission, à l'unanimité, décerne à ce Mémoire le grand prix des Sciences mathématiques.

Le Mémoire n° 3 cherche surtout à mettre en évidence les propriétés des lignes conjuguées qui se conservent dans la déformation. Quelques-unes des propriétés générales indiquées par l'auteur ne sont pas absolument nouvelles; d'autres, au contraire, notamment celles qui reposent sur l'emploi de la géométrie à quatre dimensions, nous paraissent mériter d'être poursuivies et développées. Parmi les résultats obtenus, nous signalerons plus particulièrement la détermination de tous les couples de surfaces applicables satisfaisant à certaines conditions géométriques données à l'avance, de ceux par exemple pour lesquels les normales aux points correspondants des deux surfaces forment un angle constant.

La Commission accorde une mention honorable à l'auteur du Mémoire n° 3.

M. le Président ouvre en séance le pli cacheté annexé au Mémoire n° 1 qui porte la devise *Sæpe stilum vertas*.

L'auteur du Mémoire couronné est M. le Dr **Julius Weingarten**.

L'auteur du Mémoire n° 3 qui a obtenu une mention très honorable et porte la devise *Analyse, continuité, génération*, est M. **C. Guichard**, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

PRIX BORDIN.

(Commissaires : MM. Darboux, Lévy;
MM. Poincaré, Picard, Appell, rapporteurs.)

L'Académie avait mis au concours la question suivante :

Étude des problèmes de Mécanique analytique admettant des intégrales algébriques par rapport aux vitesses et particulièrement des intégrales quadratiques.

Quatre Mémoires ont été présentés au concours.

Le Mémoire n° 4 portant pour devise quatre vers allemands, a dû être

écarté, bien que l'auteur y ait fait preuve d'un esprit ingénieux; car il traitait un sujet qui ne se rapportait qu'indirectement à la question proposée.

Les Mémoires n°s 1, 2, 3 ont été retenus par la Commission.

Dans la première partie du Mémoire inscrit sous le n° 3, sont développés des théorèmes d'un caractère très général, offrant un grand intérêt analytique; ils sont relatifs aux intégrales premières d'un système d'équations de Lagrange

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les intégrales premières dont on veut faire la recherche sont supposées être des fonctions données des paramètres, de leurs dérivées x' et de k lettres $L_1, \ldots, L_k$ qui sont des fonctions inconnues des x. Il s'agit d'étudier la nature des équations permettant de déterminer ces fonctions L, quand elles existent. Bornons-nous, pour donner une idée des résultats obtenus, aux cas les plus simples quoique déjà suffisamment généraux. En premier lieu, on ramènera toujours la recherche des intégrales entières et de degré donné par rapport aux vitesses à l'intégration d'une équation linéaire ordinaire. La recherche des intégrales rationnelles et de degrés donnés au numérateur et au dénominateur présente beaucoup plus de difficultés; elle dépend d'une équation différentielle ordinaire dont les intégrales ont leurs singularités fixes en dehors des pôles. Il est bien remarquable de voir intervenir ici tout naturellement une classe d'équations différentielles, qui a déjà fait l'objet de divers travaux, mais qui ne s'était présentée encore dans aucune application. On sait d'ailleurs que les difficultés d'intégration de ces équations sont bien différentes suivant que les constantes peuvent être ramenées ou non à figurer algébriquement dans l'intégrale générale. L'auteur montre que l'on pourra reconnaître, par des calculs algébriques, si l'on se trouve dans le premier cas, et alors le problème proposé se ramène à une équation linéaire.

Il est utile de comparer les intégrales du système proposé avec celles du système sans forces, c'est-à-dire où les Q sont nuls. Nous trouvons d'abord cette première remarque que, si l'on sait déterminer toutes les intégrales entières de degré ν et de degré inférieur du système sans forces, on pourra déterminer les intégrales d'ordre ν du système (A), quels que soient les Q, cela sans intégration si le degré est impair, et par quadratures s'il

est pair. Un théorème analogue est établi pour le cas des intégrales rationnelles, avec cette différence toutefois que la détermination des intégrales rationnelles du système avec forces exige, en général, la connaissance de toutes les intégrales rationnelles du système sans forces.

De ces propositions résultent des conséquences importantes. D'après ce que nous avons dit plus haut, le seul cas facilement accessible est celui où les constantes entrent algébriquement dans l'intégrale générale d'une certaine équation différentielle. On sera assuré que cette circonstance se présente dans la recherche des intégrales rationnelles du système proposé, si elle se rencontre pour le système sans forces. Citons notamment les cas où la force vive dépend algébriquement des x et où les géodésiques correspondantes sont algébriques. On obtient ainsi des exemples étendus où la recherche des intégrales rationnelles et, par suite, des intégrales algébriques peut être systématiquement effectuée. Appliquant ces généralités à la recherche des intégrales du problème des n corps, algébriques par rapport aux vitesses, l'auteur est conduit à la conclusion qu'elles ne peuvent être distinctes des intégrales connues. Il généralise ainsi un théorème de Bruns, qui était arrivé à un résultat analogue, mais en supposant les intégrales algébriques non seulement par rapport aux vitesses mais aussi aux coordonnées, théorème auquel M. Poincaré avait déjà donné une grande extension dans une direction différente.

Nous insisterons moins sur la deuxième Partie du Mémoire, qui se rattache à des problèmes dont des cas particuliers ont fait dans ces dernières années l'objet de nombreuses études. Prenant un système quelconque d'équations différentielles du second ordre où la variable t ne figure pas explicitement, l'auteur se propose de reconnaître si ces équations définissent les mêmes trajectoires qu'un système convenablement choisi d'équations de Lagrange. Il suppose même d'abord que dans celles-ci la fonction T puisse être une fonction quelconque des x' et examine ensuite le cas de la Mécanique où T est quadratique. Dans cette étude, qui se recommande par l'élégance des méthodes employées, deux cas sont à distinguer suivant que les trajectoires dépendent de $2n-1$ ou de $2n-2$ constantes arbitraires. Les cas les plus intéressants sont ceux où les trajectoires correspondent à plusieurs systèmes d'équations de Lagrange; il y a d'ailleurs toujours dans ce cas des intégrales quadratiques, et c'est ains que cette seconde Partie se rattache à la question mise au concours.

Le troisième Chapitre est consacré particulièrement aux systèmes de Lagrange *correspondants* et aux groupes de transformations des trajectoires. L'énumération de tous les systèmes à deux paramètres qui sont correspon-

dants s'y trouve faite en détail, et le Mémoire se termine par l'étude des systèmes correspondants d'une forme spéciale pour un nombre quelconque de paramètres.

Ce qui précède montre suffisamment l'intérêt du travail considérable que nous venons d'analyser sommairement. La Commission a été particulièrement frappée de l'originalité de la première Partie où l'auteur étudie de la manière la plus heureuse les équations de la Mécanique en se plaçant au point de vue de la théorie des fonctions; elle est unanime à accorder le prix Bordin au Mémoire inscrit sous le n° 3, et portant pour devise : *Ne point détourner les yeux des choses tant qu'elles ne nous sont pas apparues comme neuves.*

Le Mémoire n° 2, portant pour devise une maxime de La Bruyère, se divise en deux Parties bien distinctes.

Dans la première l'auteur étudie les rapports des équations de la dynamique avec un certain système linéaire assez compliqué, et il arrive ainsi à quelques résultats qui ne sont pas sans intérêt, quoique l'introduction de ce système linéaire puisse paraître un peu artificielle.

La seconde Partie a surtout attiré l'attention de la Commission.

Il y a quelques années, le prix Bordin était décerné à Mme Kowalevski qui avait découvert un nouveau cas d'intégrabilité dans le problème du mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe.

Peu de temps après, l'éminente mathématicienne annonçait à plusieurs savants qu'elle avait trouvé une infinité d'autres cas intégrables; mais elle mourut sans avoir publié son Mémoire et l'on ne retrouva rien à ce sujet dans ses papiers; on n'avait que de vagues indications sur la méthode employée et cette importante découverte menaçait d'être perdue pour la Science.

L'auteur du Mémoire n° 2 s'est proposé de retrouver ces résultats et il a pu énoncer sous une forme simple et élégante les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème admette une quatrième intégrale algébrique.

Il resterait à former effectivement cette intégrale et à étudier ses propriétés; mais le résultat obtenu n'en conserve pas moins une grande importance.

La Commission accorde une première mention honorable à l'auteur de ce Mémoire qui porte pour devise : « Il y a plus d'outils que d'ouvriers et de ces derniers plus de mauvais que d'excellents. »

L'auteur du Mémoire n° 1 s'est borné au mouvement d'un point matériel dans le plan et dans l'espace, en supposant que les forces dépendent des seules coordonnées, sans dériver d'un potentiel. Ses recherches se divisent en deux parties, suivant que les intégrales considérées sont ou ne sont pas indépendantes du temps.

Pour le mouvement plan, on sait que M. Bertrand a déterminé les lois de forces qui assurent l'existence d'une intégrale quadratique indépendante du temps. L'auteur, poursuivant ces recherches, détermine les lois de forces qui assurent l'existence de deux ou trois intégrales quadratiques; il résout complètement le problème en montrant que, par une transformation homographique, on peut le ramener à la recherche des fonctions de forces pour lesquelles il existe une ou deux intégrales quadratiques, outre celle des forces vives; ces fonctions de forces sont celles qui ont été données par Liouville. Pour le mouvement dans l'espace, l'auteur généralise les résultats de M. Bertrand et une partie des siens; puis il résout le problème de trouver toutes les fonctions de forces propres à assurer l'existence de deux intégrales quadratiques en involution : cette question comprend tous les problèmes de mouvement d'un point matériel que la méthode de Liouville et la méthode récente de M. Stäckel permettent d'intégrer.

Considérant ensuite, pour un mouvement plan, le cas des intégrales linéaires ou quadratiques *contenant le temps*, l'auteur partage ces intégrales en deux genres, suivant qu'elles contiennent le temps sous forme algébrique ou transcendante. Il détermine toutes les lois de forces pour lesquelles il existe une ou plusieurs intégrales de l'un ou de l'autre genre; pour le second genre, la solution du problème est ramenée à l'intégration d'une de ces équations différentielles ordinaires du premier ordre et du premier degré, dont M. Darboux a donné la théorie, et qui s'intègrent à l'aide d'un certain nombre de solutions particulières.

La Commission décerne une deuxième mention honorable à ce Mémoire n° 1, portant pour devise :

Au soleil couchant,
Toi qui vas cherchant
Fortune,
Prends garde de choir;
La terre, le soir,
Est brune.

M. le Président ouvre en séance le pli cacheté annexé au Mémoire n° 3.

L'auteur du Mémoire couronné est M. **Paul Painlevé**.

L'auteur du Mémoire n° 2, qui a obtenu la première mention honorable, est M. **Liouville**.

L'auteur du Mémoire n° 1, qui a obtenu la seconde mention honorable, est M. **Elliot**.

PRIX FRANCOEUR.

(Commissaires : MM. Darboux, Hermite, Poincaré, Picard; Bertrand, rapporteur.)

A l'unanimité la Commission décerne le prix Francœur à M. **J. Collet**.

PRIX PONCELET.

(Commissaires : MM. Hermite, Darboux, Poincaré, Sarrau; Bertrand, rapporteur.)

A l'unanimité la Commission décerne le prix Poncelet pour l'année 1894 à M. **H. Laurent**, pour l'ensemble de ses travaux mathématiques.

MÉCANIQUE.

PRIX EXTRAORDINAIRE DE SIX MILLE FRANCS.

(Commissaires : MM. de Bussy, Bouquet de la Grye; de Jonquières, Sarrau, Guyon, rapporteurs.)

La Commission du Prix extraordinaire de *six mille francs* accorde à M. **Leblond**, pour ses travaux sur l'électricité, un prix de *deux mille francs*;