

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur l'équilibre des mers.*

Note de M. H. POINCARÉ.

« La théorie des marées n'est pas encore faite; la précision avec laquelle on les prédit ne doit pas faire illusion, car les procédés employés sont semi-empiriques.

» Laplace n'a pu arriver à intégrer ses équations qu'en supposant qu'il n'y a pas de continents, et que la profondeur de la mer ne dépend que de la latitude. Cette hypothèse est beaucoup trop éloignée de la réalité pour qu'on puisse rien conclure du résultat qu'il a obtenu.

» L'étude des oscillations à longue période et en particulier de la marée bimensuelle est relativement facile; on peut y négliger, en effet, l'inertie du liquide et la force de Coriolis, ce qui réduit la question à un simple problème de Statique. L'importance de ce problème a été mise en évidence dans le *Traité de Philosophie naturelle* de Thomson et Tait. Ces deux illustres savants, aidés par M. G. Darwin, ont cherché, en effet, en comparant la théorie avec les observations, à reconnaître quelle déformation élastique subissait la masse solide du globe sous l'influence de l'attraction lunaire.

» Leur conclusion est que le globe terrestre présente une rigidité égale à celle de l'acier, sinon une rigidité plus grande encore; toutefois les résultats sont trop discordants pour que cette conclusion soit absolument certaine.

» Ces discordances sont dues, sans doute, pour la plus grande part, à l'incertitude des observations; mais l'imperfection de la théorie y est peut-être aussi pour quelque chose.

» Dans les §§ 806 à 810 de l'Ouvrage que je viens de citer, on cherche à tenir compte de la présence des continents, mais en négligeant l'attraction mutuelle des eaux soulevées; dans le § 815, on tient compte de cette attraction, mais en supposant qu'il n'y a pas de continent; il arrive alors que l'amplitude de la marée est, par l'effet de cette attraction, multipliée par un coefficient dont l'expression est très simple; mais la valeur de ce coefficient pourrait être considérablement modifiée par la présence des continents. Il y aurait donc lieu de pousser plus loin l'approximation; on rendrait ainsi plus facile et plus sûre la discussion nouvelle des observa-

tions, qui pourrait être entreprise dès que celles-ci seront plus nombreuses et plus exactes.

» Voici comment le problème se pose analytiquement.

» Soient

r le rayon du globe supposé sphérique;

h la surélévation des mers;

σ la densité du globe terrestre;

ρ celle des mers.

» Soit V le potentiel dû à l'attraction de l'eau soulevée, de telle sorte que, si $d\omega$ est un élément de la surface de la sphère terrestre et ρ la distance de cet élément au point (x, y, z) , on ait

$$V = \int \frac{h d\omega}{\rho}.$$

» Si alors je désigne par r la distance du point (x, y, z) au centre de la Terre et si j'envisage en particulier la valeur de V pour $r = r$, on aura

$$2 \frac{dV}{dr} + V = 4\pi h.$$

» Je désigne par φ la fonction perturbatrice (qui, d'après l'approximation généralement admise, est à la surface de la sphère une fonction sphérique du second ordre) et par C une constante que je me réserve de déterminer plus tard.

» On aura alors à la surface des continents

$$h = 0, \quad \text{d'où} \quad 2 \frac{dV}{dr} + V = 0,$$

et à la surface des mers

$$V = \frac{4\pi\sigma}{3} h = \varphi + C,$$

d'où

$$2 \frac{dV}{dr} + V = \xi(V - \varphi - C) = \xi V + \psi$$

en posant

$$\xi = \frac{3}{\sigma}, \quad \psi = -\xi(\varphi + C).$$

» Ces conditions, jointes à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ et à la condition de la constance du volume total des eaux, déterminent V et h .

» Cherchons alors à développer V et h suivant les puissances croissantes

de ξ en posant

$$(1) \quad V = V_0 + V_1 \xi + V_2 \xi^2 + \dots, \quad h = h_0 + h_1 \xi + h_2 \xi^2 + \dots$$

» Toutes les quantités h_i doivent s'annuler à la surface des continents et on aura, d'autre part, à la surface des mers,

$$2 \frac{dV_0}{dr} + V_0 = \psi, \quad 2 \frac{dV_1}{dr} + V_1 = V_0, \quad 2 \frac{dV_2}{dr} + V_2 = V_1, \quad \dots$$

On en déduit

$$V_0 = \int \frac{\psi d\omega}{4\pi\rho}, \quad V_1 = \int \frac{V_0 d\omega}{4\pi\rho}, \quad \dots,$$

les intégrales étant étendues à tous les éléments $d\omega$ de la surface des mers seulement, ainsi que toutes celles que nous aurons à considérer dans la suite.

» On peut se demander si les séries ainsi obtenues convergent. La réponse doit être affirmative, comme le prouve la méthode de Schwarz convenablement modifiée.

» Si nous posons, en effet,

$$\int V_n V_m d\omega = W_{m,n},$$

nous voyons aisément que l'on a

$$W_{m,n} = W_{m+n,0} = W_{m+n}; \quad W_n > 0; \quad \frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \dots$$

» De plus $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ est toujours plus petit que 1, et si ψ est égal à la somme de $(p+1)^2$ fonctions données multipliées chacune par un coefficient arbitraire, on peut disposer de ces coefficients arbitraires de telle sorte que

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} < 2p+1.$$

Si alors μ est la limite de $\frac{W_n}{W_{n+1}}$ pour n infini, on pourra trouver des nombres k et g tels que

$$V_n < \mu^n (kn + g),$$

ce qui prouve que les séries (1) convergent uniformément, pourvu que $\xi < \mu$.

» La fonction V est une fonction méromorphe de ξ ; soit k_i l'un des

pôles; le résidu correspondant sera un coefficient constant A_i , multiplié par une fonction u_i satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\Delta u_i = 0 \text{ (à l'intérieur du globe); } \quad \int u_i^2 d\omega = 1;$$

$$2 \frac{du_i}{dr} + u_i = 0 \text{ (à la surface des continents);}$$

$$2 \frac{du_i}{dr} + u_i = k_i u_i \text{ (à la surface des mers).}$$

» Les fonctions u_i jouent, par rapport à un globe dont la surface est formée de continents et de mers, le même rôle que les fonctions sphériques par rapport à un globe entièrement recouvert par les eaux. Une fonction quelconque peut, à la surface des mers, être développée en série procédant suivant les fonctions u_i , soit

$$\psi = \sum A_i u_i, \quad A_i = \int \psi u_i d\omega,$$

d'où

$$(2) \quad V = \sum \frac{A_i u_i}{k_i - \xi}.$$

» Il reste à déterminer la constante arbitraire C , qui entre implicitement dans ψ ; on le fera en écrivant que le volume des mers demeure invariable.

» S'il n'y avait pas de continents, les fonctions u_i se réduiraient aux fonctions sphériques; on aurait

$$k_1 = 1; \quad k_2 = k_3 = k_4 = 3, \quad k_5 = 5;$$

$$u_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}; \quad u_2 = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}, \quad u_3 = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}, \quad u_4 = \frac{z}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}};$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0; \quad \psi = A_5 u_5$$

et

$$V = \frac{A_5 u_5}{5 - \xi}.$$

Pour passer du résultat où ξ est négligé au résultat exact, il suffit alors de le multiplier par le facteur

$$(3) \quad \frac{1}{1 - \frac{\xi}{5}};$$

si maintenant on tient compte des continents, les nombres k_i augmentent

et le facteur précédent devient

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi}{k_3}} < \frac{1}{1 - \frac{\xi}{5}}$$

» Mais, et c'est là que je voulais en venir, les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 ne sont plus nuls et la formule (2) contient des termes où entrent les facteurs

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi}{k_i}} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

lesquels sont notablement plus grands que le facteur (3).

» Il est très probable que, avec la distribution réelle des continents, les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 , sans être nuls, sont négligeables. MM. Thomson et Tait auraient alors eu raison de dire au § 816 que l'attraction mutuelle des eaux n'altère pas sensiblement les résultats. Mais la vérification reste à faire; dans l'état actuel de la théorie, elle entraînerait sans doute des calculs fort pénibles et hors de proportion avec le but à atteindre. Peut-être cependant les considérations qui précèdent aideront-elles d'autres chercheurs à trouver une méthode assez rapide pour qu'on puisse calculer une limite supérieure de A_1, A_2, A_3 et A_4 . »

ÉCONOMIE RURALE. — *Du sol et du climat de l'île de Madagascar au point de vue de l'agriculture*; par M. GRANDIER.

« On croit très généralement que les pays tropicaux sont d'une excessive fertilité naturelle, et l'imagination aime à se les représenter comme couverts d'une végétation luxuriante. Rien n'est moins exact, car il y a entre les tropiques de vastes étendues à peu près arides, et il ne peut pas en être autrement à cause des conditions géologiques et météorologiques toutes spéciales dans lesquelles se trouve la plus grande partie de ces régions. Si, en effet, la chaleur continuelle et la lumière vive et claire que le soleil fournit à ces contrées sont très propices à la vie végétale, il y a deux autres éléments qui ont leur grande valeur et qui ne lui sont pas toujours aussi favorables : d'une part, le sol dont la nature tant mécanique que minéralogique exerce une influence prépondérante sur le développement des plantes, et, d'autre part, les pluies qui, soit directement par leur chute