cela seulement, que consiste ce qu'on a appelé la *fixité des espèces*. Cette *fixité* ainsi définie n'est nullement incompatible avec la *variabilité* que démontre l'histoire des âges géologiques; il n'y a là qu'une simple opposition de mots.

» Si les naturalistes ont été pendant longtemps partagés en deux camps au sujet de la question de l'espèce, c'est que les uns oublient les trois propositions qui donnent au transformisme une base absolument scientifique et proclament l'*invariabilité des formes spécifiques;* tandis que les autres, dépassant les conséquences qui se dégagent du passé et du présent des œuvres de la vie, prétendent expliquer comment se sont brisées les lignées primitives, comment se sont constituées les espèces actuelles. Là commence la confusion; là se mêlent les hypothèses et les faits dans un chaos déjà presque inextricable. M. de Quatrefages combat toutes ces doctrines; il aura rendu à la Science un dernier et réel service, en démasquant tout ce qu'elles présentent d'illusoire. Peu frappé des trois propositions fondamentales qui résument tous les enseignements de la Paléontologie, l'éminent naturaliste, dans l'intimité de son âme, ne croit certainement pas au transformisme, mais il se déclare prêt à l'accepter le jour où les données sur lesquelles on l'appuie lui paraîtront incontestables. Ce qu'il proscrit, dans ses derniers Livres, avec une admirable rigueur de raisonnement, c'est la substitution de la métaphysique à la Science, de l'hypothèse à l'observation et à l'expérience. Au nom de la Science, il repousse l'évolution prédestinée, soutenue sous des formes diverses par Mivart, Naudin, Owen, Thury, Gübler, Kœlliker; au nom de l'observation et de l'expérience, il repousse les hypothèses plus que hardies, auxquelles s'est abandonné Hæckel dans des livres célèbres; il reproche à Lamarck de n'avoir nulle part distingué l'espèce de la race, et d'avoir méconnu, par conséquent, la question fondamentale du transformisme; il constate l'insuffisance signalée déjà par Romanes, Carl Vogt et autres de la grande doctrine darwinienne de la sélection naturelle, et s'il conclut, avec quelque mélancolie, en disant de l'origine des espèces : « *Nous ne savons pas* », il se garde de fermer la porte aux découvertes futures. »

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'équation des vibrations d'une membrane.* Note de M. **H. Poincaré**.

« On sait quelle est l'importance de l'équation

$$\Delta u + ku = 0$$

(où k est une constante) dans un grand nombre de questions de Physique mathématique. Le pas le plus important qui ait été fait dans l'étude de cette équation est dû à M. Schwarz (*Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Weierstrass*). Ses résultats ont été complétés par notre Confrère, M. Picard, dans une Note insérée aux *Comptes rendus* du 16 octobre 1893. J'ai eu moi-même l'occasion de m'en occuper dans un Mémoire publié dans le t. XII de l'*American Journal of Mathematics*. Il me semble qu'une lumière nouvelle peut sortir du rapprochement des résultats obtenus ainsi dans des voies différentes : c'est ce que je vais chercher à expliquer brièvement.

» Soit, dans l'espace, un domaine quelconque D dont la frontière sera constituée par une certaine surface Σ. Soit $d\tau$ un élément de volume de ce domaine. Soient f une fonction quelconque définie à l'intérieur de ce domaine et ξ une constante arbitraire. Cherchons à former une fonction v satisfaisant à l'équation

$$\Delta v + \xi v + f = 0 \tag{1}$$

à l'intérieur de D et s'annulant à la frontière.

» Cherchons, à l'exemple de M. Schwarz, à développer v suivant les puissances de ξ et posons

$$v = v_0 + v_1\xi + v_2\xi^2 + \ldots. \tag{2}$$

Nous aurons, pour déterminer les v_i (qui doivent s'annuler à la frontière), la suite d'équations

$$\Delta v_0 + f = 0, \qquad \Delta v_{i+1} + v_i = 0. \tag{3}$$

Formons les intégrales de M. Schwarz

$$W_{m.n} = \int v_m v_n\, dt, \qquad V_{m.n} = \int\left(\frac{dv_m}{dx}\frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_m}{dy}\frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_m}{dz}\frac{dv_n}{dz}\right) d\tau,$$

étendues à tous les éléments $d\tau$ du domaine D.

» Bien que les fonctions v_n ne soient pas toujours positives, les propriétés de ces intégrales subsistent, et l'on a

$$W_{m.n} = V_{m+1.n} = W_{0.m+n} = W_{m+n},$$

en écrivant, pour abréger, W_{m+n} au lieu de $W_{0.m+n}$.

» De plus, ces intégrales sont toutes positives, et l'on a

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots. \tag{4}$$

Enfin on peut trouver un nombre Q ne dépendant que du domaine D et tel que l'on ait

$$|v_n| < Q\sqrt{W_{2n-2}}.$$

Il résulte de là que, si

$$\lim \frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{1}{g},$$

la série (2) convergera *uniformément* pour

$$|\xi| < g$$

et satisfera à la question.

» Pour aller plus loin, j'invoquerai un théorème que j'ai démontré dans l'*American Journal of Mathematics* (t. XII, p. 253 à 259).

» Soit

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_p\varphi_p,$$

$$A = \int \varphi^2\, d\tau, \qquad B = \int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] d\tau.$$

On peut toujours (quelles que soient les fonctions φ_i) choisir les coefficients α de telle façon que le rapport

$$\frac{B}{A}$$

soit plus grand qu'un nombre positif l_p qui ne dépend que du domaine D et du nombre entier p et qui croît définitivement avec p.

» Faisons alors

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p;$$

d'où

$$v_n = \alpha_1 v_{n.1} + \alpha_2 v_{n.2} + \ldots + \alpha_p v_{n.p}.$$

Nous pourrons alors choisir les α de telle façon que

$$\frac{V_{n.n}}{W_{n.n}} = \frac{W_{2n-1}}{W_{2n}} > l_p.$$

» Considérons les coefficients α comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $p-1$ dimensions; nous pouvons choisir ce point de telle sorte que

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \ldots < \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{1}{l_p}.$$

» Si ce point satisfait à cette condition, il appartiendra à un certain domaine S_n; le domaine S_{n+1} sera intérieur à S_n; donc *tous les domaines* S_n

auront au moins un point commun; on pourra donc choisir les α de telle façon que

$$\lim \frac{W_{n+1}}{W_n} < \frac{1}{l_p},$$

et, par conséquent, pour que la série (2) converge uniformément pour

$$|\xi| < l_p.$$

» *Nous allons supposer maintenant que*

$$f_2 = \Delta f_1, \qquad f_3 = \Delta f_2, \qquad \ldots, \qquad f_p = \Delta f_{p-1},$$

et que f_1 ait été choisi de telle sorte que $f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}$ s'annulent à la frontière.

» Soit ensuite u_i une fonction s'annulant à la frontière et telle que

$$\Delta u_i + \xi u_i + f_i = 0.$$

On aura alors

$$u_i = \Delta u_{i-1},$$

ce qui donne, pour déterminer les u_i, les équations linéaires

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = v, \\ \qquad\qquad u_2 + \xi u_1 = -f_1, \\ \qquad\qquad u_3 + \xi u_2 = -f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad u_p + \xi u_{p-1} = -f_{p-1}, \end{array} \right.$$

» On en tire

$$(6) \qquad u_i = \frac{P_i}{\Pi},$$

P_i étant une fonction de ξ qui est holomorphe comme v pour $|\xi| < l_p$ et Π un polynome en ξ à coefficients constants. La fonction u_i est donc méromorphe pour $|\xi| < l_p$.

» La fonction f_1 est soumise à une condition restrictive écrite plus haut en *italiques;* mais la fonction f_p est quelconque.

» Il en résulte que la fonction u_p sera encore méromorphe pour $|\xi| < l_p$, quoique f_p soit choisi arbitrairement; et comme le nombre l_p croît indéfiniment avec p, elle sera méromorphe dans toute l'étendue du plan.

» Nous voyons d'abord que (pour $|\xi| < l_p$) P_i et ΔP_i sont développables suivant les puissances de ξ en séries uniformément convergentes et que

l'on a

$$\Delta P_i + \xi P_i + \Pi f_i = 0.$$

» D'ailleurs P_i s'annule à la frontière. Soit k un pôle de u_i, c'est-à-dire un zéro du polynome Π. Si nous faisons $\xi = k$, il restera

$$\Delta P_i + k P_i = 0.$$

» L'existence de fonctions satisfaisant à l'équation

$$\Delta u + ku = 0$$

se trouve donc démontrée.

» Ces résultats s'appliquent évidemment au cas d'un domaine à deux dimensions, c'est-à-dire au problème des vibrations d'une membrane. On peut, en ce qui concerne ce problème, les énoncer ainsi; M. Schwarz a démontré l'existence du son fondamental d'une membrane; M. Picard celle de la première harmonique; je démontre celle des harmoniques supérieures.

» Ces résultats s'étendraient encore au cas où la condition à la limite n'est pas la même et où, au lieu de s'écrire

$$u = 0,$$

elle s'écrirait

$$\frac{du}{dn} + hu = 0,$$

c'est-à-dire au problème du refroidissement d'un corps solide. »

MÉCANIQUE. — *Sur un moyen d'obtenir un mouvement circulaire uniforme au moyen de deux mouvements vibratoires;* par M. **Marcel Deprez.**

« J'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, dans la séance du 19 février dernier, une Note de M. Lecornu sur le mouvement de deux points reliés par un ressort. Ce problème présente beaucoup de cas particuliers. Ainsi on peut supposer que l'un des points, le point A par exemple, est soumis à une force fonction du temps ou de l'espace, ou de ces deux variables en même temps, et l'on demande la loi du mouvement du point B. Mais il me paraissait surtout intéressant lorsque le point A est animé d'un mouvement vibratoire, et je demandai à M. Lecornu, qui s'était déjà occupé avec succès de questions analogues, s'il croyait que dans ce cas il