

déterminera, pour la même époque, le paramètre c caractéristique de la longueur apparente de la tête de l'onde. Enfin, le *ralentissement* $a - \omega$, dû au frottement et à la conductibilité de la paroi, sera, en éliminant c de la première formule (5),

$$(16) \quad a - \omega = \frac{3\mu\sqrt{\pi}}{32} \frac{\gamma}{\sigma} \left(\sqrt{2ac_0} + 0,1061 \frac{\mu\sqrt{\pi}}{4} \frac{\gamma}{\sigma} at \right).$$

La vitesse ω de propagation décroît sans cesse, comme l'avait observé Regnault.

» Après un parcours assez grand, le second membre de (14) et (15) se réduira sensiblement à son dernier terme. On voit que, alors, la tête de l'onde aura ses longueurs successives en raison directe du carré des temps t , et ses hauteurs h en raison inverse de leur puissance à exposant $\frac{1}{0,1061}$, c'est-à-dire de la neuvième environ. Mais ces hauteurs se trouveront, sans doute, trop réduites pour qu'on puisse encore les observer et constater ainsi le ralentissement $a - \omega$ de la propagation, alors moins petit qu'au début puisqu'il sera proportionnel aux temps t (1). »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques.* Note de M. H. POINCARÉ.

« On sait que Nöther et Halphen ont démontré que l'on peut toujours, par une transformation birationnelle, transformer une courbe algébrique plane quelconque en une courbe algébrique plane dont tous les points multiples sont à tangentes séparées.

(1) Je profite de l'occasion pour compléter la Note insérée à la fin de mon Mémoire de juillet 1891 du *Journal de Physique*, et consacrée au calcul approximatif de l'extinction d'une onde liquide *solitaire* par son assimilation à une intumescence qui aurait l'équation (3). On peut attribuer à celle-ci non seulement la même hauteur, *mais encore la même énergie* qu'à l'onde solitaire proposée, en prenant

$$c = \frac{8}{3\pi} \left(2H \sqrt{\frac{H}{3h_1}} \right);$$

alors les valeurs de ε_1 , ε' qui en résultent et celle du coefficient du second membre de la dernière équation de la Note citée se trouvent multipliées par $\sqrt{\frac{3\pi}{8}}$ ou augmentées des $\frac{8,5}{1000}$ environ de leurs valeurs respectives.

» On peut aller plus loin et montrer :

» 1° Qu'on peut toujours transformer une courbe quelconque en une courbe gauche dénuée de toute singularité ;

» 2° Qu'on peut toujours la transformer en une courbe plane n'ayant d'autre singularité que des points doubles ordinaires.

» Bien que ces deux théorèmes puissent sembler presque évidents, il y aura peut-être quelque intérêt à en donner une démonstration qui soit à l'abri de toute objection. Soit

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une courbe plane mise sous forme homogène.

» Je puis toujours supposer :

» 1° Que le triangle de référence ait été choisi de telle façon que la courbe ne passe par aucun de ses trois sommets

$$(x = 0, y = 0; x = 0, z = 0; y = 0, z = 0,$$

et que ses trois côtés

$$(x = 0, y = 0, z = 0)$$

ne passent par aucun point multiple ;

» 2° Et, en vertu du théorème de Nöther, que tous les points multiples ont leurs tangentes séparées.

» Par chacun des points multiples faisons passer une droite arbitraire, et soit φ_1 le produit des premiers membres des équations de ces droites.

» Par chacun des points multiples faisons passer encore une autre droite arbitraire et soit φ_2 le produit des premiers membres des équations de ces droites.

» Les polynômes φ_1 et φ_2 seront de même degré.

» Je puis toujours supposer :

» 1° Que les droites $\varphi_2 = 0$ ne passent en dehors des points multiples par aucun des points d'intersection de la courbe $f = 0$, et des droites $\varphi_1 = 0$.

» 2° Que les droites $\varphi_1 = 0$ ne passent par aucun des points d'intersection de $f = 0$ et de $z = 0$.

» 3° Que les droites $\varphi_2 = 0$ passent par un des points d'intersection de $f = 0$ et de $y = 0$, et ne passent pas par les autres.

» Posons

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 = x\varphi_1, & X_2 = y\varphi_1, & X_3 = z\varphi_1, \\ X_4 = x\varphi_2, & X_5 = y\varphi_2, & X_6 = z\varphi_2. \end{cases}$$

» Si nous considérons X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 et X_6 comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à cinq dimensions, ces équations (2) définiront une courbe C dans cet espace. Cette courbe C sera dépourvue de toute singularité. A tout point simple de (1) correspondra un point simple de C . A tout point multiple d'ordre n de (1) correspondront n points simples distincts de C .

» Cela posé, considérons X_1, X_2 et X_6 comme les coordonnées d'un point dans un plan; les équations (2) définiront une courbe plane C' . Je remarque que X_1, X_2 et X_6 ne peuvent s'annuler à la fois qu'aux points multiples de (1).

» A tout point de (1) correspond, en général, un point de C' et un seul. Mais on pourrait supposer :

» Ou bien qu'à tout point de C' correspond, en général, un seul point de (1), auquel cas la courbe C' n'a qu'un nombre fini de points singuliers ;

» Ou bien qu'à tout point de C' correspondent, en général, plusieurs points de (1), de telle sorte qu'à un certain point de vue tous les points de C' pourraient être regardés comme des points multiples.

» Mais cette seconde circonstance ne se présentera pas. En effet, nous savons que les droites $\varphi_2 = 0$ passent par l'un des points d'intersection M de (1) et de $y = 0$. A ce point M de (1) correspond un point de C' à savoir

$$X_2 = X_6 = 0;$$

à ce point de C' ne correspond aucun autre point Q de (1); car ce point Q , s'il existait, devrait satisfaire à l'un des systèmes d'équations

$$f = z = y = 0,$$

$$f = \varphi_2 = y = 0,$$

ce qui est contraire à nos hypothèses.

» La courbe C' n'a donc qu'un nombre fini de points singuliers.

» Cela posé, soit

$$Y = \sum \lambda_i X_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

les λ étant des coefficients constants que je me réserve de déterminer.

» Si je regarde X_1, X_2, X_6 et Y comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace ordinaire, les équations (2) définissent une courbe gauche C'' . Comme X_1, X_2 et X_6 ne s'annulent pas à la fois [sauf aux points multiples de (1) où Y s'annule également], les seuls points singuliers que puisse avoir C'' seront ceux de C' .

» Considérons donc une branche de courbe passant par un point M de (1), ainsi que les branches de courbe correspondantes de C, C' et C'' . Ces diverses branches peuvent être représentées par des développements de la forme suivante : x, y, z , ainsi que les X_i peuvent être développés suivant les puissances entières d'un paramètre t , qui s'annule au point M .

» Si M est un point ordinaire de (1), les X_i ne s'annulent pas à la fois pour $t = 0$; si M est un point multiple de (1), les X_i sont divisibles par t , mais les $\frac{X_i}{t}$ ne s'annulent pas à la fois.

» On peut envisager aussi, à la fois, deux branches de courbe de (1) passant par deux points M et M' [qui d'ailleurs peuvent se confondre en un point multiple de (1)]. Développons nos coordonnées suivant les puissances d'un paramètre que j'appellerai t pour la branche qui passe en M et t' pour la branche qui passe en M' . J'appellerai X'_i et Y' ce que deviennent X_i et Y sur la seconde branche.

» Pour que l'on eût sur C'' un point singulier, il faudrait qu'au point M

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \log X_1 = \frac{d}{dt} \log X_2 = \frac{d}{dt} \log X_6 = \frac{d}{dt} \log Y,$$

ou qu'aux points M et M'

$$(4) \quad \frac{X_1}{X'_1} = \frac{X_2}{X'_2} = \frac{X_6}{X'_6} = \frac{Y}{Y'}.$$

» Dans ces égalités (3) et (4), X_i et Y doivent être remplacés par $\frac{X_i}{t}$ et $\frac{Y}{t}$ si M est un point multiple de (1); X'_i et Y' doivent être remplacés par $\frac{X'_i}{t'}$ et $\frac{Y'}{t'}$ si M' est un point multiple de (1).

» Or, comme Y dépend linéairement des λ , pour que l'une des relations (3) ou (4) soit satisfaite, il faut que les λ satisfassent à certaines relations linéaires.

» Ces relations linéaires ne peuvent être des identités, puisque la courbe C n'admet pas de point singulier.

» De plus, elles sont en nombre fini, puisque la courbe C' n'admet qu'un nombre fini de points singuliers.

» On peut donc toujours choisir les λ de façon à ce qu'aucune de ces relations ne soit satisfaite et par conséquent de façon à ce que C'' n'ait aucun point singulier.

» Nous avons ainsi transformé notre courbe (1) en une courbe gauche dénuée de toute singularité; pour la transformer en une courbe plane n'ayant que des points doubles, il suffit généralement d'une simple perspective.

» Si le centre de perspective se trouve sur une corde double de la courbe gauche, la perspective présentera un point double; s'il se trouve sur une tangente, la perspective aura un point de rebroussement; s'il se trouve sur une corde triple, la perspective aura un point triple; si, enfin, il se trouve sur une corde double singulière, c'est-à-dire telle que les tangentes aux deux extrémités soient dans un même plan, la perspective aura un point double à tangentes non séparées.

» Les cordes doubles d'une courbe gauche forment une congruence C qui est indécomposable; les tangentes forment une surface S .

» Les cordes triples forment une congruence ou une surface S' .

» Les cordes doubles singulières forment une surface S'' ; elles ne pourraient, en effet, former une congruence, qui ne pourrait être qu'identique à C que si toutes les cordes doubles étaient singulières, ce qui ne peut avoir lieu que pour les courbes planes.

» Pour que les cordes triples formassent une congruence, qui devrait être identique à C , il faudrait que toutes les cordes doubles fussent des cordes triples.

» Si cela n'a pas lieu, il suffira de prendre le centre de perspective en dehors des trois surfaces S , S' et S'' , pour que la perspective ne présente que des points doubles ordinaires.

» Il est peu vraisemblable qu'il existe des courbes gauches dont toutes les cordes doubles soient triples; s'il y en avait une, il serait aisé d'y étendre notre théorème, en la transformant en une autre qui ne jouirait pas de la même propriété. Soit, en effet, K une pareille courbe; coupons-la par un plan P quelconque; par deux des points d'intersection, faisons passer dans ce plan une circonférence ne passant par aucun autre des points d'intersection; transformons alors par rayons vecteurs réciproques en prenant pour centre de transformation un point de cette circonférence. Notre circonférence se transformera en une droite qui sera, pour la courbe

transformée K' , une corde double qui ne sera pas triple. Le théorème s'applique donc à K' dont toutes les cordes doubles ne sont pas triples et, par conséquent, à K .

» Il serait facile de modifier le raisonnement de façon qu'on puisse l'appliquer directement sans passer par l'intermédiaire du théorème de Nöther. »

M. A. MILNE-EDWARDS fait hommage à l'Académie d'un Mémoire qu'il vient de publier, en collaboration avec *M. E.-L. Bouvier*, dans « *Memoirs of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College* », sous le titre « Description des Crustacés de la famille des Paguriens recueillis pendant l'expédition du *Blake* dans la mer des Antilles et le golfe du Mexique ».

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

M. E. JAGGI adresse une troisième Note faisant suite à son Mémoire sur la Théorie des fonctions.

(Renvoi à la Commission.)

M. L. BRASSE adresse, pour le concours du prix Lacaze (Physiologie), un travail qui résume l'ensemble de ses recherches.

(Renvoi à la Commission du prix Lacaze.)

M. F. VARENNE adresse un projet de système d'aviation.

(Renvoi à la Commission des aérostats.)

M. J.-E. FALMAGE adresse, de Londres, de remarquables échantillons de cristaux de sélénite (gypse), venant d'Utah.

(Renvoi aux Sections de Physique et de Minéralogie.)