connaître que $\frac{dh}{dn}$ est de la forme

$$M\rho^{\beta_i+1},$$

M restant fini quand ρ tend vers zéro. Il en résulte que la portion de l'intégrale relative à cette circonférence tend vers zéro, quand ρ diminue indéfiniment, et l'on peut faire une remarque analogue relativement aux grandes circonférences.

» On aurait donc

$$\int\int e^{v}(1-e^{h})\,dx\,dy=0,$$

l'intégrale étant étendue à la surface de Riemann tout entière, ce qui est en contradiction manifeste avec l'hypothèse

$$h \geqq 0,$$

à moins que h ne soit identiquement nul.

» Il résulte de ce que nous venons de voir que la courbe

$$u-v=0$$

partagera la surface en une ou plusieurs régions; à l'intérieur d'une de ces régions R, $u-v$ aura un signe invariable, le signe *plus* par exemple. Or l'équation

$$\Delta h = ke^{v}(e^{h}-1)$$

donne pour h l'expression suivante

$$h(x,y)=\int\int ke^{v(\xi,\eta)}(1-e^{h(\xi,\eta)})\,G(\xi,\eta,x,y)\,d\xi\,d\eta,$$

G désignant une fonction de Green, et l'intégrale double étant étendue à la région R. Or le premier membre est, par hypothèse, positif dans cette région, tandis que le second est visiblement négatif; cette contradiction achève la démonstration du théorème. »

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur une objection à la théorie cinétique des gaz*. Note de M. **H. Poincaré**.

« Maxwell, dans un de ses Mémoires sur la Théorie dynamique des gaz, donne la formule de la détente adiabatique des gaz et son résultat est conforme aux données expérimentales. Malheureusement son calcul n'est pas correct, et en corrigeant l'erreur qu'il a commise on n'est plus du tout d'accord avec l'expérience.

» Rappelons d'abord ses notations et ses résultats.

» Considérons un élément de volume $d\tau$ contenant N molécules, soient $u+\xi$, $v+\eta$, $w+\zeta$ les composantes de la vitesse d'une de ces molécules; u, v, w sont des quantités qui sont les mêmes pour les N molécules contenues dans l'élément $d\tau$ et qui sont choisies de telle sorte que

$$\Sigma\xi = \Sigma\eta = \Sigma\zeta = 0.$$

» Le vecteur u, v, w représente alors la vitesse moyenne des diverses molécules contenues dans l'élément $d\tau$; c'est la vitesse *apparente* des gaz, c'est-à-dire ce qu'en Hydrodynamique on appelle *vitesse des gaz*.

» La demi-force vive de translation des diverses molécules gazeuses contenues dans $d\tau$ est donc

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi = \Sigma\dfrac{M}{2}[(u+\xi)^2+(v+\eta)^2+(w+\zeta)^2] = \Sigma\varphi, \\ \varphi. = \dfrac{M}{2}[(u+\xi)^2+(v+\eta)^2+(w+\zeta)^2. \end{cases}$$

» Mais Clausius a montré que cette expression ne représente pas la chaleur contenue dans l'élément. Pour avoir cette chaleur il faut tenir compte aussi de l'énergie due à la vibration des divers atomes dont chaque molécule se compose. Pour rendre compte des faits, il faut admettre que cette énergie de vibration, et par conséquent l'énergie totale (c'est-à-dire la chaleur interne), est proportionnelle à l'énergie de translation, du moins si le gaz est en repos apparent, c'est-à-dire si u, v, w sont nuls. On a alors

$$U = \beta\Phi.$$

U représente l'énergie totale, Φ l'énergie de translation et β est un coefficient numérique dont l'expérience nous donne la valeur.

» Maxwell admet que, si le gaz est en mouvement apparent, on a

$$(2)\quad \begin{cases} U = \dfrac{M}{2}\Sigma[(u+\xi)^2+(v+\eta)^2+(w+\zeta)^2+(\beta-1)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)] = \Sigma\theta, \\ \theta = \dfrac{M}{2}[(u+\xi)^2+(v+\eta)^2+(w+\zeta)^2+(\beta-1)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)]. \end{cases}$$

» J'ai fait sortir M du signe Σ parce que je suppose que toutes les molécules ont même masse. Maxwell désigne par Q une fonction quelconque des vitesses des molécules, et par $\overline{Q}$ la valeur moyenne de cette fonction à l'intérieur de l'élément, c'est-à-dire

$$\overline{Q} = \frac{\Sigma Q}{N},$$

et il arrive à l'équation suivante, à laquelle il donne le n° 75 (*Œuvres complètes;* Cambridge University Press, 1890, t. II, p. 56),

$$(75) \qquad N\frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} + \frac{d\xi \overline{Q}N}{dx} + \frac{d\eta \overline{Q}N}{dy} + \frac{d\zeta \overline{Q}N}{dz} = N\frac{\delta \overline{Q}}{\delta t}.$$

La dérivée $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial t}$ se rapporte aux variations que subit la valeur de $\overline{Q}$ relative à un élément de volume *supposé entraîné par le mouvement apparent des gaz*. $\delta\overline{Q}$ est l'accroissement de $\overline{Q}$ dû aux chocs entre les molécules.

» Dans cette équation Maxwell fait (p. 62) $Q = \theta$, θ étant défini par l'équation (2), et après diverses transformations, et en négligeant certains termes très petits, il trouve, pour la loi de la détente adiabatique (p. 65),

$$(108) \qquad \frac{dp}{p} = \frac{2+3\beta}{3\beta}\frac{d\rho}{\rho},$$

p et ρ étant la pression et la densité; cette formule est conforme à l'expérience.

» Si, au lieu de faire $Q = \theta$, Maxwell avait fait $Q = \varphi$, il aurait trouvé

$$(3) \qquad \frac{dp}{p} = \frac{5}{3}\frac{d\rho}{\rho}.$$

» En effet, on a

$$\delta\overline{\varphi} = \delta\overline{\theta} = 0,$$

car les chocs ne peuvent altérer la force vive de translation des N molécules ni dans le mouvement absolu, ni dans le mouvement relatif du système par rapport à son centre de gravité.

» La formule (3) n'est pas conforme à l'expérience, quoiqu'elle se déduise de l'équation (75) aussi légitimement et, nous allons le voir, plus légitimement que la formule (108).

» En effet, je dis que la formule (75) n'est légitime que si Q est fonction de $u + \xi$, $v + \eta$, $w + \zeta$ et non pas si Q est une fonction quelconque de u, v, w, ξ, η et ζ.

» Considérons deux éléments de volume contigus $d\tau$ et $d\tau'$ séparés par un élément de surface $d\omega$ que l'on peut regarder comme plan. Voyons comment raisonne Maxwell, page 52. Il cherche à évaluer « the quantity » of Q transferred a cross the plane », et pour cela il considère les molécules qui traversent l'élément $d\omega$ et fait la somme des valeurs de Q correspondantes. Cela suppose que la valeur de Q correspondant à une molécule reste la même quand cette molécule passe de l'élément $d\tau'$ dans l'élément $d\tau$. Il en est effectivement ainsi quand dQ est fonction de $u+\xi$, $v+\eta$, $w+\zeta$, puisque le mouvement de la molécule est rectiligne et uniforme. Mais il n'en est plus de même quand Q est fonction de ξ, η et ζ. En effet, le vecteur u, v, w est la vitesse du centre de gravité du système des molécules contenues dans l'élément $d\tau$. Il en résulte que u n'a pas la même valeur dans $d\tau$ et dans $d\tau'$; donc. quand la molécule passera de $d\tau'$ dans $d\tau$, $u+\xi$ ne variera pas, mais u et, par conséquent, ξ varieront.

» Ainsi Q doit être fonction de $u+\xi$, $v+\eta$ et $w+\zeta$; on peut donc faire $Q=\varphi$, mais non $Q=\theta$. La formule (3) est correcte, la formule (108) ne l'est pas.

» En résumé, dans son état actuel, la théorie cinétique donne une formule inexacte pour la détente adiabatique; le coup de pouce donné par Maxwell pour retrouver la formule exacte n'est pas légitime.

» Je profite de l'occasion pour signaler une autre erreur qui se trouve dans le même Mémoire de Maxwell, mais dont les conséquences sont moins graves.

» La formule (43) de la page 49 (*loc. cit.*) n'est pas correctement déduite de la formule (39) de la page précédente. Au lieu de

$$\frac{\delta_1 \overline{\xi_1 V_1^2}}{\delta t} = \left(\frac{K_1}{2M_1^3}\right)^{\frac{1}{2}} M_1 N_1 A_2^3 (\overline{\xi_1}\,\overline{V_1^2} - \overline{\xi_1 V_1^2}),$$

on devrait trouver

$$\frac{\delta_1 \overline{\xi_1 V_1^2}}{\delta t} = \left(\frac{K_1}{2M_1^3}\right)^{\frac{1}{2}} M_1 N_1 A_2 \left[4\overline{\xi_1}\,\overline{V_1^2} - 2\overline{\xi_1}\,\overline{\xi_1^2} - 2\overline{\eta_1}\,\overline{\xi_1\eta_1} - 2\overline{\zeta_1}\,\overline{\xi_1\zeta_1} - 2\overline{\xi_1 V_1^2}\right],$$

et, par conséquent, si l'on suppose que les valeurs moyennes de ξ_1, η_1, ζ_1 sont nulles, au lieu de

$$\frac{\delta_1 \overline{\xi_1 V_1^2}}{\delta t} = -3\left(\frac{K_1}{2M_1^3}\right)^{\frac{1}{2}} M_1 N_1 A_2 \overline{\xi_1 V_1^2},$$

on devrait trouver

$$\frac{\delta_1 \xi_1 \overline{V_1^2}}{\delta t} = -2\left(\frac{K_1}{2M_1^3}\right)^{\frac{1}{2}} M_1 N_1 A_2 \overline{\xi_1 V_1^2}.$$

La valeur du coefficient de conductibilité s'en trouve modifiée.

» Maxwell trouve

$$k = \frac{5}{3\gamma}\nu,$$

où k est le coefficient de conductibilité, et ν le coefficient de viscosité, γ le rapport des chaleurs spécifiques.

» Il devrait trouver

$$k = \frac{5}{2\gamma}\nu.$$

» L'expérience a donné, pour la conductibilité de l'air, 56.10^{-6}; le calcul erroné avait donné 54.10^{-6}; le calcul rectifié donnerait 81.10^{-6}. »

GÉODÉSIE. — *Étoiles filantes; fluctuation de la latitude;* par M. d'Abbadie.

« Les difficultés exceptionnelles dans la pratique de la Géodésie sont assez rares pour qu'il soit intéressant de publier l'extrait suivant d'une Lettre que M. G. Davidson nous écrivait de San-Francisco le 16 mars dernier. Ce savant s'est fait connaître en mesurant trois fois et dans des saisons différentes la base de Californie dont la longueur dépasse 17^{km}.

» Le Canada et les États-Unis envoient des escouades dans cette partie d'Alaska qui longe l'archipel Alexander. On doit commencer les travaux sur la ligne de partage entre Columbia et Alaska, mais sans dépasser 48^{km} vers l'intérieur, en partant du rivage nommé *continental* par le vieux Vancouver. Nos opérations seront dirigées par le professeur Mendenhall qui est aussi le commissaire américain. On enverra du monde pour remonter les rivières Unuk, Stickeen et Taku. Chaque escouade comprendra des astronomes, des géodésiens et des topographes. Des astronomes s'établiront à Sitka d'où notre vapeur, *le Hassler,* portera des chronomètres aux diverses stations afin de mesurer les différences de longitude. Chaque escouade du Canada recevra un de nos officiers et chacune de nos escouades comprendra un officier canadien. Sitka est notre station fondamentale pour la longitude de district. J'ai déterminé cette longitude en 1867 et 1869; chaque année on emploie des chronomètres pour la relier avec notre station télégraphique extrême située au détroit de Puget.

» J'attends des instructions pour commencer la mesure de la partie diagonale sur la frontière orientale de la Californie. Cette portion est située entre les parallèles