COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 28 NOVEMBRE 1892.

PRÉSIDENCE DE M. D'ABBADIE.

MEMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADEMIE.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Note accompagnant la présentation d'un Ouvrage relatif aux méthodes nouvelles de la Mécanique céleste;* par M. **Poincaré**.

« J'ai l'honneur de faire hommage à l'Académie du premier fascicule du second Volume de mon Ouvrage intitulé : « Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste ».

» Ce fascicule est consacré à l'exposition et à l'extension des méthodes de MM. Newcomb et Lindstedt. M. Newcomb est parvenu à faire disparaître, dans les développements des coordonnées des astres, les termes dits *seculaires,* où le temps sort des signes trigonométriques. Les séries auxquelles il parvient sont, il est vrai, divergentes au sens que les géomètres donnent à ce mot, mais, à la façon de celle de Stirling, elles peuvent conduire, pratiquement, à des résultats suffisamment approchés.

» Voici quelle est la forme que prennent les développements de M. Newcomb, après les modifications que j'y ai introduites. Les coordonnées des trois corps sont développées suivant les puissances des masses et de quatre constantes d'intégration, que j'appelle α_1, α_2, α_3, α_4, et qui jouent le rôle des excentricités et des inclinaisons.

» Chacun des termes du développement est une fonction périodique de six arguments, que j'appelle $\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4$ (ou plutôt des différences de ces six arguments). Les dérivées $\frac{d\omega_i}{dt}$ et $\frac{d\omega'_i}{dt}$ sont des constantes qui sont elles-mêmes développables suivant les puissances des masses et des constantes α_i; j'ajoute que $\frac{d\omega'_i}{dt}$ s'annule avec les masses; les dérivées $\frac{d\omega_i}{dt}$ ne sont autre chose que les moyens mouvements.

» En outre, les coordonnées des trois corps vont dépendre des constantes α_i et des arguments ω'_i, d'une manière toute particulière; elles seront, en effet, développables suivant les puissances des $\alpha_i \cos\omega'_i$ et des $\alpha_i \sin\omega'_i$. Si, dans nos expressions, on annule tous les α_i, on retombe sur des séries convergentes qui représentent une solution particulière remarquable, qui est celle que j'ai appelée *solution périodique de la première sorte*.

» Ces résultats auraient pu échapper à l'analyste qui serait simplement parti des équations du mouvement et aurait essayé d'y satisfaire, en y substituant des expressions de cette forme. Pour que cela soit possible, il faut, en effet, qu'une infinité de conditions de forme assez compliquée soient remplies à la fois. Elles le sont, en effet, mais celui qui aborderait le problème par cette voie pourrait bien ne pas le voir du premier coup d'œil.

» Au contraire, l'emploi de la méthode de Jacobi, exposée dans les *Vorlesungen über Dynamik*, rend presque évidente la possibilité du développement. J'ai donc dû diviser le problème en deux parties : démontrer d'abord, par les procédés de Jacobi, la possibilité du développement et revenir ensuite aux équations du mouvement sous leur forme ordinaire, pour déterminer les coefficients.

» Ce mode d'exposition n'est pas sans inconvénient; on risque, en effet, de rebuter le lecteur par d'innombrables changements de variables, qui sont nécessaires pour démontrer la possibilité du développement, mais que l'on n'aurait pas à effectuer dans le calcul des coefficients.

» Ce détour peut être évité par l'emploi d'une méthode un peu différente, qui a aussi l'avantage d'abréger les calculs. Je commencerai le second fascicule par l'exposition de cette méthode, et je ne veux ici qu'en indiquer le principe.

» Les équations de la Dynamique peuvent s'écrire

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

» Proposons-nous alors d'exprimer les x_i et les y_i en fonctions périodiques de n paramètres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; posons d'ailleurs

$$n_k = \frac{d\omega_k}{dt};$$

et supposons que les n_k soient des constantes. Nos équations (1) deviennent alors

$$(2) \qquad \sum n_k \frac{dx_i}{d\omega_k} = \frac{dF}{dy_i}$$

et

$$(3) \qquad \sum n_k \frac{dy_i}{d\omega_k} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

» Mais, au lieu d'envisager ces deux équations (2) et (3), il est plus avantageux d'opérer autrement. Soit

$$(4) \qquad F = \text{const.}$$

l'équation des forces vives; soient ensuite $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ n constantes quelconques (comme, dans la plupart des cas, les variations des x_i sont petites, nous choisirons x_i^0 peu différent de la valeur moyenne, autour de laquelle oscille x_i). Soit S une fonction auxiliaire des ω_k définie par l'équation

$$(5) \qquad dS = \sum (x_i - x_i^0)\, dy_i,$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{dS}{d\omega_k} = \sum (x_i - x_i^0) \frac{dy_i}{d\omega_k}.$$

» Alors, au lieu de nous servir, pour déterminer les x_i et les y_i, des équations (2) et (3), nous nous servirons des équations (3), (4) et (6). Les équations (2) en sont, en effet, une conséquence immédiate.

» Le même principe est applicable, *mutatis mutandis*, au problème des trois corps. »