The first part of this paper (to the middle of p. 208) is a reprint, with slight verbal changes, of the author's paper: Sur les fonctions à espaces lacunaires, Acta Soc. Sci. Fennicae, vol. XII, 1883, (dated [illegible] 1881 Helsingfors [illegible]).

Sur les fonctions à espaces lacunaires.

Par H. Poincaré.

M. Weierstrass dans un mémoire intitulé 'Zur Funktionenlehre' et inséré dans les Berliner Monatsberichte a appelé l'attention des géomètres sur certaines fonctions présentant des singularités spéciales. Au lieu de présenter un nombre fini ou infini de points singuliers essentiels *isolés* elles offrent des lignes singulières essentielles ou même des *espaces lacunaires* à l'intérieur desquels elles cessent d'exister. Dans une lettre à M. Mittag-Leffler, insérée dans les Acta Societatis Scientiarum Fennicæ M. Hermite a retrouvé les mêmes résultats par une voie toute différente. D'après les conseils de M. Hermite j'ai entrepris de rechercher de nouveaux exemples de la particularité signalée par les deux savants géomètres.

Il y a une infinité de manières de définir une fonction, et si on ne s'imposait a priori aucune condition, rien ne serait plus facile que de concevoir une transcendante présentant un espace lacunaire quelconque; on pourrait imaginer par exemple une fonction définie de la manière suivante; elle devrait être égale à 1 à l'extérieur d'un certain cercle, et cesser d'exister à l'intérieur de ce cercle. Ce cercle serait alors un *espace lacunaire.* Si donc on donnait au mot, *fonctions à espaces lacunaires* le sens étendu qu'il semble comporter d'abord, on pourrait en imaginer arbitrairement une infinité. Il est donc nécessaire de préciser ce qu'on doit entendre par cette expression, *fonctions à espaces lacunaires.* C'est ce qui est facile, grâce à une conception nouvelle des fonctions analytiques qui a son origine dans les travaux de Cauchy et que M. Weierstrass a si clairement exposée dans son mémoire 'Zur Functionenlehre' (Monatsberichte, Août 1880, page 12).

Considérons une série développée suivant les puissances croissantes de $x-x_0$. Elle sera convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_0 ayant pour centre x_0 et pour rayon R. Si on ne s'occupait que du développement lui-même, on pourrait considérer la fonction définie par la série comme cessant d'exister à l'extérieur du cercle de convergence, et toute la région du plan extérieure à ce cercle comme formant un espace lacunaire. Ainsi comprise, la fonction à espaces lacunaires ne serait pas une notion analytique nouvelle. Mais il est un moyen bien connu d'étendre au-delà du cercle de convergence le domaine où la fonction envisagée existe. Si l'on considère un point x_1 intérieur au cercle de convergence, on pourra par la formule de Taylor développer la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_1$ et convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_1. A l'intérieur de C_1, on prendra un point x_2 et on developpera la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_2$ et convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_2. La fonction se trouvera alors définie non seulement à l'intérieur du premier cercle de convergence, mais l'intérieur de C_1, de C_2, etc.

Pour la plupart des fonctions qui ont été jusqu'ici l'objet des travaux des géomètres, les cercles tels que C_1, C_2, etc., recouvrent tout le plan, soit une fois, soit plusieurs fois, soit une infinité de fois, en laissant seulement de côté certains points isolés, appelés points singuliers. La fonction existe partout, sauf en des points isolés. *Il n'y a pas d'espace lacunaire.*

Mais il n'en est pas toujours ainsi; il peut arriver que les cercles C_1, C_2, etc., laissent de côté non des points isolés, mais toute une ligne, ou même toute une région du plan. M. Weierstrass a le premier mis cette vérité en lumière, et après lui M. Hermite a défini à l'aide d'intégrales multiples définies des transcendantes qui n'ont d'existence que dans un domaine limité.

On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples de ce fait analytique. Ainsi l'on sait que les fonctions définies par les séries:

$$1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2^2}x^{3^2} + \dots + \frac{1}{2^n}x^{3^n} + \dots$$

et

$$x\phi(1) + x^2\phi(2) + \dots + x^n\phi(n) + \dots$$

(où $\phi(n)$ représente la somme des puissances p^{es} des diviseurs de n) n'existent qu'à l'intérieur du cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Il en est de même de certaines fonctions que j'ai appelées fuchsiennes.

Les exemples que je veux étudier spécialement dans la présente note presenteront les particularités suivantes. Le plan sera divisé en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure à un certain contour C. A l'extérieur du contour la fonction envisagée sera holomorphe et uniforme (et par conséquent finie, continue, monodrome et monogène). A l'intérieur du contour elle cessera d'exister. La région intérieure à C sera un espace lacunaire.

Je supposerai dans ce qui va suivre que la ligne qui limite C ait en chaque point une tangente et un rayon de courbure afin qu'on puisse construire un cercle tangent à cette ligne, ayant son centre en un point quelconque de la partie du plan qui est en dehors de C et de telle façon que ce cercle soit tout entier extérieur à C.

Si x_0 est un point quelconque extérieur à C la fonction sera développable suivant les puissances de $x - x_0$; le cercle de convergence sera tangent extérieurement à C. Réciproquement si (x_0 étant un point quelconque extérieur à C) une fonction est développable suivant les puissances de $x - x_0$, de telle sorte que le cercle de convergence soit tangent extérieurement à C, il est clair que cette fonction offrira un espace lacunaire qui sera la région intérieure au contour C.

Voici maintenant comment je définirai une transcendante jouissant de ces propriétés. Envisageons la série suivante:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - b_n} = \phi(x). \tag{1}$$

Je suppose:

1° que la série:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \tag{2}$$

soit absolument convergente.

2° que tous les points b_n soient intérieurs à C ou sur le contour C lui-même.

3° que si l'on prend sur le contour C un arc quelconque et aussi petit que l'on voudra, il y ait toujours une infinité de points b_n sur cet arc.

Je pose:

$$R_p = \sum_{n=p}^{n=\infty} |A_n|, \qquad S = \sum_{n=0}^{n=\infty} |A_n|.$$

La série (2) étant absolument convergente, on pourra prendre p assez grand pour que R_p soit aussi petit que l'on veut.

Je dis d'abord que si x_0 est extérieur à C, la fonction $\phi(x)$ définie par la série (1) peut se développer en série suivant les puissances de $x - x_0$, et que cette série est convergente à l'intérieur du cercle qui a pour centre x_0 et qui est tangent extérieurement à C. Si en effet R est le rayon de ce cercle, on aura pour tous les points b_n,

$$|b_n - x_0| \geqq R. \qquad \text{Posons } |x - x_0| = \Theta . R.$$

Supposons que x soit intérieur au cercle qui a pour centre x_0 et pour rayon R, on aura: $\Theta < 1$.

On aura évidemment:

$$-\phi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \Big[\sum_{q=0}^{q=\infty} \Big(A_n \frac{(x-x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \Big) \Big].$$

Il est clair:

1° que la série à termes positifs et à double entrée

$$\sum_{n=0,\, q=0}^{n=\infty,\, q=\infty} \frac{A_n \Theta^{q+1}}{(x-x_0)} \qquad (3)$$

est absolument convergente.

2° que

$$\operatorname{mod} \Big[A_n \frac{(x-x_0)^q}{(b_n-x_0)^{q+1}} \Big] < \frac{\operatorname{mod} A_n \Theta^{q+1}}{\operatorname{mod}(x-x_0)}.$$

Il en résulte que la série à double entrée:

$$\sum_{n=0,\, q=0}^{n=\infty,\, q=\infty} A_n \frac{(x-x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \qquad (4)$$

est absolument convergente et que sa somme est indépendante de l'ordre des termes.

La somme de la série (4) sera donc $-\phi(x)$ quel que soit l'ordre des termes. On aura donc:

$$-\phi(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} B_q (x-x_0)^q \qquad (5)$$

en posant:

$$B_q = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (b_n - x_0)^{-(q+1)}.$$

J'ai donc démontré à la fois:

1° que si x est extérieur à C la série ~~(2)~~ (1) est convergente et la fonction $\phi(x)$ qu'elle définit est holomorphe et uniforme.

2° que si x est intérieur au cercle qui a pour centre x_0 et pour rayon R et qui est tangent extérieurement à C, la série (5) est convergente.

Je dis maintenant que la série (5) est divergente si x est sur ce cercle ou extérieur à ce cercle et pour le démontrer, je suppose d'abord que x_0 soit sur la normale élevée à C en un des points b_n, au point b_k par exemple.

Je me propose de faire voir que le terme

$$B_q R^q$$

ne tend pas vers 0 quand q tend vers l'infini; je vais montrer en effet que l'on peut prendre q assez grand pour que:

$$\operatorname{mod} R^q \left[B_q - A_k (b_k - x_0)^{-(q+1)}\right] < \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε.

Soit p un nombre entier assez grand pour que:

$$R_p < \frac{\varepsilon}{2} R.$$

Supposons en même temps

$$p > k.$$

Décrivons du point x_0 comme centre un cercle de rayon R' plus grand que R, mais assez petit pour que tous les points:

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots .\ b_{k-2},\ b_{k-1},\ b_{k+1},\ b_{k+2},\ \ldots .\ b_p$$

soient extérieurs à ce cercle. On aura:

$$\frac{R}{R'} < 1.$$

Soit maintenant q un nombre entier assez grand pour que:

$$\frac{S}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^q < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura:

$$B_q - A_k (b_k - x_0)^{-(q+1)} = \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}}.$$

On aura:

$$\operatorname{mod} R^q \left(B_q - A_k (b_k - x_0)^{-(q+1)}\right) < \operatorname{mod} \left[\sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}}\right]$$

$$+ \operatorname{mod} \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} < \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{\operatorname{mod} A_n}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^q$$

$$+ \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{\operatorname{mod} A_n}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^q + \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{\operatorname{mod} A_n}{R} < \frac{S}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^q + \frac{R_p}{R} < \varepsilon.$$

On a donc:

$$\lim R^q \left(B_q - A_k (b_k - x_0)^{-q+1}\right) = 0 .$$

Or:

$$\operatorname{mod} \left(R^q A_k (b_k - x_0)^{-q+1}\right) = \frac{\operatorname{mod} A_k}{R} .$$

Il est donc impossible que $R^q A_k (b_k - x_0)^{-q+1}$ et par conséquent que $R^q B_q$ tende vers 0.

Supposons maintenant que x_0 ne soit pas sur la normale élevée à C en l'un des points b_n; je dis que la série (6) est encore divergente quand:

$$\operatorname{mod} (x - x_0) > R .$$

En effet supposons que cela ne soit pas vrai et que le cercle de convergence ait un rayon R' plus grand que R. Ce cercle de convergence découperait sur le contour C un certain arc sur lequel, par hypothèse, il devrait y avoir une infinité de points b_n. Soit b_k l'un de ces points. Elevons en ce point une normale à C et prenons sur cette normale un point x_1 assez voisin de b_k pour que le cercle K qui passe par b_k et qui a x_1 pour centre soit tout entier intérieur au cercle qui a pour rayon R' et pour centre x_0; cela est évidemment toujours possible. La fonction $\phi(x)$ pourrait alors se développer en série suivant les puissances de $x - x_1$ et cette série devrait être convergente, non seulement à l'intérieur du cercle K, mais sur la circonférence de ce cercle, ce qui est contraire à ce que je viens de démontrer.

Il est donc démontré que le cercle de convergence de la série (6) est toujours tangent extérieurement à C.

Donc la fonction $\phi(x)$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de C et présente un espace lacunaire à l'intérieur de ce contour.

Je vais maintenant citer quelques exemples de séries satisfaisant aux conditions imposées à la série (1).

Soit d'abord:

$$\phi(x) = \sum \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_p^{m_p}}{x - \dfrac{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \dots + m_p\alpha_p}{m_1 + m_2 + \dots + m_p}} . \tag{6}$$

Je suppose:

1° que $u_1, u_2, \dots u_p$ sont des quantités données de module plus petit que 1.

2° que $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ sont des constantes quelconques.

3° que $m_1, m_2, \dots m_p$ prennent sous le signe Σ tous les systèmes de valeurs entières positives.

J'envisage le polygône P défini par les conditions suivantes:

1° Il est convexe.

2° Tous ses sommets font partie du système des points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_p$.

3° Tous les points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_p$ qui ne sont pas des sommets du polygône P sont sur le périmètre de ce polygône ou à son intérieur.

Il est clair que:

1° La série

$$\sum \operatorname{mod}\left(u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots . u_p^{m_p}\right)$$

est convergente.

2° Tous les points

$$\frac{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots . + m_p\alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots . + m_p}$$

sont sur le périmètre de P ou bien à l'intérieur de ce polygône.

3° Sur tout segment, si petit qu'il soit, de l'un des côtés de P, il y a une infinité de points:

$$\frac{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots . + m_p\alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots . + m_p}.$$

Soit en effet $\alpha_1 \alpha_2$ le côté du polygône consideré, il est clair qu'on pourra choisir les entiers positifs m_1 et m_2 (et cela d'une infinité de manières) de telle sorte que le point

$$\frac{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2}{m_1 + m_2}$$

soit situé sur un segment donné du côté $\alpha_1\alpha_2$.

Il en résulte que la fonction $\phi(x)$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de P et présente un espace lacunaire à l'intérieur de ce polygône.

Dans le cas où $p = 3$, l'espace lacunaire se réduit au triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Dans le cas où $p = 2$, l'espace lacunaire se réduit à une ligne singulière essentielle qui est le segment de droite $\alpha_1\alpha_2$.

Comme second exemple je citerai la fonction dont voici l'origine.

Soit l'equation aux différences partielles:

$$u_1F_1\frac{dz}{du_1} + u_2F_2\frac{dz}{du_2} + \ldots . + u_nF_n\frac{dz}{du_n} = z. \tag{7}$$

$F_1, F_2, \ldots . F_n$ sont des fonctions des n variables $u_1, u_2 \ldots . u_n$ et du paramètre x, holomorphes pour toutes les valeurs de x et lorsque les modules de $u_1, u_2 \ldots . u_n$ sont suffisamment petits. Ellés se réduisent respectivement à

$$1, \frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}, \ldots \ldots \frac{x-\alpha_n}{x-\alpha_1}$$

quand on y annule tous les u.

Dans une thèse que j'ai soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 1er Août 1879, j'ai démontré que si le point x est extérieur au polygône convexe P circonscrit aux n points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n$, il existe une série S ordonnée suivant les puissances des u, convergente et satisfaisant à l'équation (7) pourvu que les modules de ces variables soient assez petits. Les coëfficients de cette série sont des fonctions rationnelles de x; si on donne aux u des valeurs de module suffisamment petit et qu'on les considère comme des constantes, la somme de la série est une fonction de x, et l'on peut voir qu'elle est analogue à la fonction $\phi(x)$ définie par la série (1) et qu'elle présente comme elle un espace lacunaire. Le polygône P est compris tout entier dans cet espace lacunaire.

On remarquera que dans la démonstration qui précède, il y a un procédé qui joue un rôle essentiel. On décrit du point x_0 comme centre un cercle avec un rayon R' plus grand que

$$R = | x_0 - b_k |$$

et cependant assez petit pour que tous les points

$$b_0, b_1, b_2, \ldots . , b_{k-2}, b_{k-1}, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots . b_p,$$

c'est à dire les points b_n tels que $n \leqq p$, $n \gtrless k$ soient tous extérieurs à ce cercle, et que

$$\sum_{n=p}^{n=\infty} |A_n| < \frac{\varepsilon}{2} R,$$

la sommation étant ainsi étendue à tous les indices $n > p$.

Les points b_n sont ainsi répartés en deux catégories:

1° ceux pour lesquels $n \leqq p$; *ils sont en nombre fini* et ils sont tous extérieurs au cercle de rayon R' à l'exception d'un seul, le point b_k.

2° ceux pour lesquels $n > p$ qui sont en nombre infini, mais si p est assez grand la somme des modules des coëfficients correspondants A_n sera aussi petite qu'on voudra.

C'est sur la possibilité de cette répartition que repose toute la démonstration et c'est pour cette raison qu'elle n'est pas susceptible de diverses géneralisations que l'on croirait d'abord possibles.

Soit par exemple dans le plan une courbe fermée C et z un point mobile assujetti à rester sur cette courbe; soit x un point extérieur à la courbe et $f(z)$ une fonction quelconque de z. L'intégrale

$$\int \frac{f(z)dz}{z-x}$$

étendue à la courbe fermée C définit une fonction $\phi(x)$ de x. On pourrait croire que les raisonnements qui précèdent lui sont applicables, à condition que l'intégrale

$$\int |f(z)dz|$$

soit finie, et que la fonction $\phi(x)$ admet l'intérieur de C comme espace lacunaire. Il n'en est rien à cause de l'impossibilité de la répartition dont nous venons de parler. Il est vrai que cette fonction $\phi(x)$ reste holomorphe à l'extérieur de C, mais non pas que si x_0 est extérieur à C, le cercle de convergence relatif au développement de $\phi(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-x_0$ soit tout entier à l'extérieur de C. Il suffit pour s'en convaincre de se rappeler que si $f(x)$ est une fonction *quelconque* holomorphe à l'extérieur de C et tendant vers 0 quand le point x s'éloigne indéfiniment, l'intégrale

$$\int \frac{f(z)dz}{z-x}$$

prise le long de C est précisément égale à $2i\pi f(x)$.

De même si le point z n'est plus assujetti à rester sur la courbe C elle même mais peut prendre une position quelconque à l'intérieur de cette courbe, si $f(z)$ est une fonction continue quelconque de z et $d\omega$ un élément de l'aire limitée par cette courbe, et que z désigne précisément l'affixe du centre de gravité de $d\omega$, l'intégrale

$$\int \frac{f(z)d\omega}{z-x}$$

étendue à l'aire limitée par C représentera une fonction $\phi(x)$ qui sera holomorphe à l'extérieur de C mais qui n'admettra pas en général la région intérieure à C comme espace lacunaire.

On obtient des resultats analogues dans la théorie du potentiel newtonien.

Soient M_1, M_2, ... M_n, ... un nombre infini de points dont les masses m_1, m_2, ... m_n soient toutes positives. Supposons que la série

$$\sum m_n$$

soit convergente; que tous ces points attirent un point mobile P de coördonnées x, y, et z conformément à la loi de Newton; que tous ces points soient à l'intérieur d'une certaine région R limitée par une surface S; et enfin que sur chaque élément si petit qu'il soit de cette surface S il y ait une infinité de ces points.

Soit alors $V(x, y, z)$ le potentiel de ces points attirants. On verrait alors par un raisonnement tout pareil à celui qui précède, que la fonction V est holomorphe à l'extérieur de R et qu'elle admet cette région R comme espace lacunaire.

Supposons au contraire que nous ayons affaire non pas à des points attirants discrets quoique en nombre infini et infiniment rapprochés les unes des autres, mais à une surface attirante, ou à un volume attirant, il n'en sera plus de même.

Si on considère par exemple un volume attirant limité par une surface S sans point singulier et que la dense soit une fonction holomorphe de x, y et z, la fonction V pourra être prolongée par continuation analytique à l'intérieur du volume attirant.

Supposons en particulier une sphère attirante homogène ayant son centre à l'origine, ayant pour rayon R et pour masse M. Alors on soit que la fonction

$$V = \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

loin d'admettre comme espace lacunaire l'intérieur de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

peut être prolongée par continuation analytique jusqu'au centre même de cette sphère.

Il arrive quelquefois qu'on a à envisager des développements en séries de la forme suivante:

$$\phi(x) = \Sigma R_n(x),$$

$R_n(x)$ étant rationnelle en x.

Supposons que ce développement soit convergent à l'intérieur d'une certaine courbe C, convergent également à l'extérieur de cette courbe, mais qu'il diverge pour tous les points de la courbe elle-même. Les développements de cette forme ont été étudiés par M. Weierstrass dans le mémoire que j'ai cité plus haut, ainsi que les diverses circonstances que je vais signaler.

Soit $\phi_1(x)$ la somme de la série à l'intérieur de la courbe C, $\phi_2(x)$ la somme de cette même série à l'extérieur de la courbe C. Il peut se faire d'abord que les fonctions $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ puissent être prolongées, par le procédé de la continuation analytique exposé au début du présent travail, la première à l'extérieur de C, la seconde à l'intérieur de C.

C'est ainsi que par exemple la série de M. Tannery:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{x^n-1}{x^n+1}-\frac{x^{n-1}-1}{x^{n-1}+1}\right]$$

a pour somme $+1$ à l'extérieur du cercle:

$$|x|=1$$

et -1 à l'intérieur de ce cercle. Il est clair alors que les fonctions $+1$ et -1 peuvent être prolongées dans tout le plan.

Mais il peut arriver aussi que les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 admettent comme espace lacunaire, la première l'extérieur de C, la seconde l'intérieur de C. M. Weierstrass cite des exemples de ce fait dans son mémoire et d'ailleurs plusieurs des développements en séries de la fonction modulaire présentent la même particularité.

Une question se pose alors. Nous avons:

$$\phi_1(x)=\Sigma R_n(x)$$

à l'intérieur de C et

$$\phi_2(x)=\Sigma R_n(x)$$

à l'extérieur de C. Avons-nous le droit de dire que la fonction ϕ_1 cesse d'exister à l'extérieur de C et la fonction ϕ_2 à l'intérieur, ou bien ne devrons-nous pas plutôt considérer les deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 comme le *prolongement naturel* l'une de l'autre?

On en serait d'abord tenté; mais on renoncera à cette manière de voir si l'on réfléchit qu'à ce point de vue, une fonction à espace lacunaire aurait dans cet espace une infinité de prolongements naturels possibles. C'est ce dont on peut se rendre compte par deux raisonnements différents que je vais appliquer à des courbes C particulières mais qu'on pourrait étendre, mutatis mutandis, à des courbes C quelconques.

Supposons d'abord que la courbe C soit un cercle.

Soit encore:

$$\phi_1(x) = \Sigma R_n(x), \quad \phi_2(x) = \Sigma R_n(x)$$

la première égalité ayant lieu à l'intérieur du cercle, la seconde à l'extérieur. Supposons que les deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 ne puissent être prolongées analytiquement au delà du cercle.

J'ai démontré l'existence de certaines fonctions que j'ai appelées fuchsiennes et tétafuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle C et pour lesquelles par conséquent la région extérieure à ce cercle est un espace lacunaire. Les fonctions tétafuchsiennes sont susceptibles d'un développement dont les termes sont des fonctions rationnelles de x; je me suis longuement étendu sur ces développements dans mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes (Acta Mathematica, tome 1).

Soit:

$$\sum H_n(x) = \Sigma H\left(\frac{\alpha_n x + \beta_n}{\gamma_n x + \delta_n}\right)(\gamma_n x + \delta_n)^{-2m}$$

un de ces développements. Il représentera en général à l'intérieur de C une fonction tétafuchsienne qui cessera d'exister à l'extérieur de ce cercle, et à l'extérieur de C il représentera une *autre* fonction tétafuchsienne qui cessera à son tous d'exister à l'intérieur de ce cercle.

Dans ce développement $H(x)$ est une fonction rationnelle quelconque, m est une entier et $\left(x, \frac{\alpha_n x + \beta_n}{\gamma_n x + \delta_n}\right)$ une substitution quelconque du groupe fuchsien.

Si tous les infinis de $H(x)$ sont à l'extérieur de C, la fonction tétafuchsienne représentée par notre développement à l'intérieur de C n'aura pas d'infinis et, aussi que je l'ai montré dans le mémoire cité, on peut d'une infinité de manières choisir H de telle sorte que cette fonction soit identiquement nulle. On aura alors:

$$\Sigma H_n(x) = 0 \quad \text{à l'intérieur de } C,$$
$$\Sigma H_n(x) = \Theta(x) \text{ à l'extérieur de } C,$$

Θ étant une fonction tétafuchsienne.

Quel serait alors le prolongement naturel de $\phi_1(x)$ à l'extérieur de C. Comme

$$\phi_1 = \Sigma R_n,$$

ce prolongement serait la somme de ce développement à l'extérieur de C, c'est à dire ϕ_2.

Mais on a aussi à l'intérieur de C

$$\phi_1 = \Sigma(R_n + H_n) \text{ puisque } \Sigma H_n = 0.$$

Le prolongement naturel de ϕ_1 à l'extérieur de C devrait encore être la somme de ce développement $\Sigma(R_n + H_n)$, c'est à dire $\phi_2 + \Theta$.

Ainsi une fonction à espace lacunaire serait susceptible de plusieurs "prolongements naturels"; c'est assez dire qu'il n'y en a aucun qui mérite ce nom.

Mais on peut s'en rendre compte encore d'une autre manière.

Considérons le plan des x comme divisé en deux parties par l'axe des quantités réelles. Soit $f(x)$ une fonction n'existant que dans la partie supérieure et étant partout holomorphe dans cette partie; soit $f_1(x)$ une fonction n'existant que dans la partie inférieure du plan et étant partout holomorphe dans cette partie. La moitié inférieure du plan est pour $f(x)$, la moitié supérieure pour $f_1(x)$, un espace lacunaire.

Je dis alors que je pourrai trouver deux fonctions $\phi(x)$ et $\psi(x)$ jouissant des propriétés suivantes:

1° Elles existeront dans tout le plan, sauf le long de certaines "coupures."

2° On aura $\phi + \psi = f$ dans moitié supérieure du plan.

3° On aura $\phi + \psi = f_1$ dans la moitié inférieure.

4° La fonction ϕ admettra pour coupure le segment de l'axe des quantités réelles compris entre les points $x = -1$ et $x = +1$.

5° La fonction ψ admettra pour coupure les deux autres segments de l'axe des quantités réelles, c'est à dire les segments $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$.

S'il en est ainsi il est clair que si la fonction f avait un "prolongement naturel" dans la moitié inférieure du plan, ce prolongement ne pourrait être que f_1; car les fonctions ϕ et ψ existent dans tout le plan et le prolongement naturel de f devrait être comme la fonction f elle-même égal à la somme $\phi + \psi$. Mais f_1 est une fonction *quelconque* assujettie seulement à n'exister que dans la moitié inférieure du plan. Une fonction quelconque pourrait donc être regardée comme le prolongement naturel de f.

Pour démontrer le théorème que je viens d'énoncer, j'ai besoin d'abord d'établir le lemme suivant.

Soit $F(x)$ une fonction que je n'assujettis pas à être analytique, mais qui doit rester finie et continue pour toutes les valeurs *réelles et positives* de x, tout en croissant indéfiniment avec x.

Je dis alors que quelle que soit cette fonction $F(x)$, on pourra toujours trouver une fonction analytique entière $G(x)$ qui croisse assez rapidement pour que le rapport:

$$\frac{F(x)}{xG(x)}$$

tende vers 0 quand x croît indéfiniment par valeurs réelles positives.

En effet, on peut toujours trouver un nombre positif A_n assez grand pour que la plus grande valeur que prenne le module de $F(x)$ quand x varie de n à $n+1$ soit plus petite que A_n.

On aura alors (pour $n < x < n+1$):

$$\left| F(x) \right| < A_n < A_n \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n}. \tag{8}$$

Je puis supposer que λ_n est un entier positif plus grand que n et assez grand d'ailleurs pour que:

$$A_n < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\lambda_n}. \tag{9}$$

Considérons alors la série:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n}.$$

Je dis d'abord que cette série converge pour toutes les valeurs de x et représente par conséquent une fonction entière. Il vient en effet:

$$\sqrt[n]{A_n\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n}} = A_n^{\frac{1}{n}}\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{\lambda_n}{n}} < \left(\frac{x}{n-1}\right)^{\frac{\lambda_n}{n}}.$$

Quand n croît indéfiniment $\frac{x}{n-1}$ tend vers 0 et comme $\frac{\lambda_n}{n}$ est plus grand que 1 il en sera de même de $\left(\frac{x}{n-1}\right)^{\frac{\lambda_n}{n}}$.

La série est donc convergente.

Je dis ensuite que pour les valeurs réelles et positives de x, on a

$$|F(x)| < G(x).$$

En effet tous les termes de la série $G(x)$ sont positifs, et l'inégalité (8) prouve qu'il y a toujours un de ces termes qui est plus grand que $|F(x)|$.

Il est clair alors que

$$\lim \frac{F(x)}{xG(x)} = 0 \text{ (pour } x = +\infty). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut tirer de ce lemme divers corollaires. Comme $G(x)$ est une fonction entière dont les termes sont tous positifs et contienment des puissances de x dont l'exposant dépasse toute limite, on aura quand x croîtra indéfiniment par valeurs réelles positives:

$$\lim \frac{x^m}{G(x)} = 0, \quad \lim \frac{G^m(x)}{e^{G(x)}} = 0$$

et par conséquent

$$\lim F(x)e^{-G(x)} = 0.$$

Je dis maintenant que si $F(x)$ est finie pour les valeurs réelles de x tant positives que négatives et suffisamment grandes en valeur absolue, on pourra trouver une fonction entière $G(x)$ telle que

$$\lim F(x)e^{-G(x)} = 0$$

quand x croît indéfiniment par valeurs *réelles* soit positives, soit négatives.

Soit en effet $F_1(x^2)$ la plus grande des deux quantités $|F(x)|$ et $|F(-x)|$ ce sera évidemment par définition même une fonction paire de x, c'est à dire ne changeant pas quand on change x en $-x$.

On pourra alors d'après le lemme qui précède trouver une fonction $G_1(x^2)$ telle que

$$\lim F_1(x^2)e^{-G_1(x^2)} = 0$$

pour $x^2 = +\infty$ (x^2 réel positif).

Si alors $G_1(x^2) = G(x)$ on aura

$$\lim F(x)e^{-G(x)} = 0$$

pour $x = \pm\infty$ (x réel, positif ou négatif).

Comme les valeurs que prend $F(x)$ quand $|x|$ est suffisamment grand, influent évidemment seules sur cette limite, il suffit pour que le lemme soit vrai que $F(x)$ soit fini pour les valeurs réeles de x suffisamment grandes, il suffit par exemple que $F(x)$ ne devienne infini que pour un nombre fini de valeurs réelles de x.

Considérons maintenant la circonférence

$$|x| = 1$$

décrite sur le segment $(-1, +1)$ comme diamètre et supposons que sur cette circonférence que j'appellerai C pour abréger la fonction $F(x)$ n'ait qu'un nombre fini d'infinis parmi lesquels le point $x = +1$.

Je dis qu'on pourra trouver une fonction entière $G(x)$ telle que

$$\lim F(x) e^{-G\left(i \frac{x+1}{x-1}\right)} = 0$$

quand x tendra vers 1 en suivant la circonférence.

Posons en effet

$$y = i \frac{x+1}{x-1}.$$

Si x est sur la circonférence C, y sera réel; si x tend vers 1 en suivant l'une des moitiés de la circonférence, y tend vers $+\infty$; si x tend vers 1 en suivant l'autre moitié, y tend vers $-\infty$. Si nous posons $F(x) = F_1(y)$, la fonction F_1 n'admettra qu'un nombre fini d'infinis *réels*. Alors on pourra trouver une fonction $G(y)$ telle que

$$\lim F_1(y) e^{-G(y)} = 0 \qquad (\text{pour } \lim y = \pm \infty)$$

on en déduira par conséquent:

$$\lim F(x) e^{-G\left(i \frac{x+1}{x-1}\right)} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De même, alors même que $F(x)$ deviendrait infinie pour $x = -1$, on pourra trouver une fonction entière $G'(x)$ telle que:

$$\lim F(x) e^{-G'\left(i \frac{x-1}{x+1}\right)}$$

quand x tend vers -1 en suivant la circonférence.

Ces corollaires établis venons à la question qui nous occupe.

Nous désignerons par $F(x)$ une fonction qui sera égale à $f(x)$ dans la moitié supérieure du plan et à $f_1(x)$ dans la moitié inférieure. Sur la circonférence que j'ai appelée C, la fonction $F(x)$ ainsi définie ne pourra avoir que deux infinis, $x = +1$ et $x = -1$.

On pourra alors construire les deux fonctions entières:

$$G\left(i \frac{x+1}{x-1}\right) \text{ et } G'\left(i \frac{x-1}{x+1}\right)$$

que je viens de définir.

Soit alors:

$$\theta(x) = e^{-G\left(i \frac{x+1}{x-1}\right) - G'\left(i \frac{x-1}{x+1}\right)} = e^{-G-G'}.$$

On voit que $\theta(x)$ est une fonction de x holomorphe dans tout le plan et n'admettant d'autres points singulièrs que deux points singulièrs essentiels $x = 1$ et $x = -1$.

Je dis maintenant que

$$\lim F(x)\theta(x) = 0$$

quand x tend vers -1 ou vers $+1$ *en suivant la circonférence* C.

En effet

$$F\theta = Fe^{-G}e^{-G'}.$$

Si x tend vers $+1$, Fe^{-G} tend vers 0 et $e^{-G'}$ vers une limite finie; si x tend vers -1, $Fe^{-G'}$ tend vers 0 et e^{-G} vers une limite finie.

Soit donc

$$x = e^{i\omega},$$

ω étant réel; x est alors sur la circonférence C; le produit $F(x)\theta(x)$ peut ainsi être regardée un instant comme une fonction de ω. Cette fonction est analytique sur tout arc de la circonférence C qui ne contient ni le point $x = +1$, ni le point $x = -1$, et quand x se rapproche indéfiniment de l'un de ces deux points elle tend vers 0. Elle est donc développable par la formule de Fourier et je puis écrire:

$$F\theta = \Sigma c_m \cos m\omega + \Sigma d_m \sin m\omega,$$

ou bien encore

$$F\theta = \Sigma a_m e^{-mi\omega} + \Sigma b_m e^{mi\omega} \qquad (a_0 = 0)$$

les coëfficients a_m et b_m étant des constantes qu'il est aisé de calculer. On a en effet:

$$2\pi a_m = \int_0^{2\pi} F\theta e^{mi\omega} d\omega$$

$$2\pi b_m = \int_0^{2\pi} F\theta e^{-mi\omega} d\omega\,.$$

Considérons les deux développements

$$\phi(x)\theta(x) = \Sigma a_m x^{-m}$$

$$\psi(x)\theta(x) = \Sigma b_m x^m.$$

Le premier de ces deux développements est convergent à l'extérieur de la circonférence C et sur la circonférence elle-même, mais diverge à l'intérieur de cette circonférence; le second développement au contraire converge à l'intérieur de C et sur la circonférence elle-même, mais diverge à l'extérieur de C.

Sur la circonférence elle-même, on a

$$\phi(x)\theta(x) + \psi(x)\theta(x) = \Sigma a_m x^{-m} + \Sigma b_m x^m = F(x)\theta(x)$$

et par conséquent:

$$\phi(x) + \psi(x) = F(x).$$

Pour reconnaître si cette égalité a encore lieu pour les valeurs de x qui n'appartiennent pas à cette circonférence, il faut chercher à prolonger analytiquement $\phi(x)$ à l'intérieur de C et $\psi(x)$ à l'extérieur de C.

Nous avons:

$$2\pi i a_m = i\int_0^{2\pi} F\theta e^{mi\omega} d\omega = \int F\theta x^{m-1} dx,$$

$$2\pi i b_m = i\int_0^{2\pi} F\theta e^{-mi\omega} d\omega = \int F\theta x^{-m-1} dx,$$

les intégrales étant étendues à la circonférence C tout entière. Si je désigne alors pour éviter toute confusion par la lettre z un point de la circonférence C et par la lettre x un point n'appartenant pas à cette circonférence, il viendra:

$$2i\pi a_m = \int F(z)\theta(z) z^{m-1} dz; \quad 2i\pi b_m = \int F(z)\theta(z) z^{-m-1} dz,$$

et par conséquent si x est extérieur à C

$$2i\pi\phi(x)\theta(x) = 2i\pi\Sigma a_m x^{-m} = \int F(z)\theta(z)^{(\underline{\Sigma z^{m-1} x^{-m}})dz},$$

ou enfin:

$$2i\pi\phi(x)\theta(x) = \int \frac{F(z)\theta(z)dz}{x - z};$$

et si x est au contraire intérieur à C,

$$2i\pi\psi(x)\theta(x) = 2i\pi\Sigma b_m x^m = \int F(z)\theta(z)\Sigma z^{-m-1} x^m dz,$$

ou

$$2i\pi\psi(x)\theta(x) = \int \frac{F(z)\theta(z)dz}{z - x}. \tag{10}$$

Toutes ces intégrales doivent être prises le long de C.

Ces intégrales ne définissent encore les fonctions ϕ et ψ, la première qu'à l'extérieur de C seulement et la seconde qu'à l'intérieur de C seulement.

Mais on peut modifier le contour d'intégration.

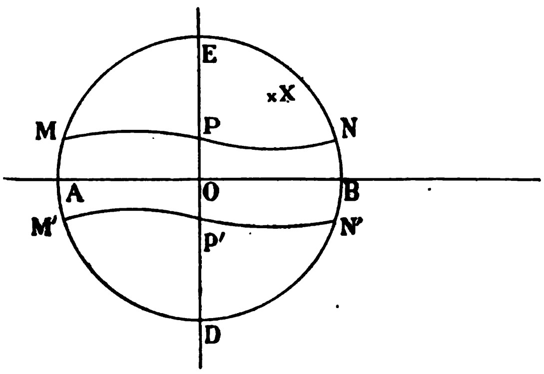

FIG. 1.

Je représente sur la figure 1 l'axe des quantités réelles AOB, l'axe des quantités imaginaires DOE, et la circonférence $BNEMAM'DN'B$ qui n'est autre chose que la circonférence C. Le point A est le point $x = -1$ et le point B est le point $x = +1$.

Joignons deux points M et N de la moitié supérieure de C par un arc de courbe quelconque MPN restant tout entier dans la moitié supérieure du cercle limité par C. Joignons de même deux points M' et N' de la moitié inférieure par un arc de courbe C.

On peut remplacer le contour d'intégration C par le contour $BNPMAM'P'N'B$ que j'appellerai C'.

Je dis que si x est extérieur à C, on aura encore

$$2i\pi\phi(x)\theta(x) = \int \frac{F(z)\theta(z)dz}{x-z},$$

l'intégrale étant prise le long de C', ou en d'autres termes que l'intégrale :

$$\int \frac{F(z)\theta(z)dz}{x-z} \tag{11}$$

prise le long de C' est égale à cette même intégrale prise le long de C.

Il suffit de montrer que cette même intégrale prise le long du contour $NEMPN$ ou le long du contour $N'P'M'DN'$ est nulle.

En effet $F(z)\theta(z)$ est holomorphe sauf sur l'axe des quantités réelles, $\frac{1}{x-z}$ est holomorphe sauf pour $z = x$. Si donc x est extérieur à C, la fonction sous le signe $\int$ sera holomorphe tant à l'intérieur du contour $NEMPN$ qu'à l'intérieur du contour $N'P'M'DN'$; ce qui démontre la proposition énoncée.

Mais l'intégrale (10) prise le long de C', définit une fonction de x qui reste holomorphe pour tous les points extérieurs à C', et comme on peut rapprocher les deux arcs MPN et $M'P'N'$ autant que l'on veut de la droite AOB, on peut définir ainsi la fonction $\phi(x)$ pour toutes les valeurs de x sauf pour le segment AOB, c'est à dire pour le segment $(-1, +1)$ qui sert de diamètre à la circonférence C.

La fonction $\phi(x)$ ainsi définie est holomorphe sauf pour les points qui appartiennent à ce segment $(-1, +1)$.

Je me propose maintenant de démontrer qu'on aura pour un point x intérieur à C

$$\phi(x) + \psi(x) = F(x).$$

Supposons en effet que le point x vienne en X, c'est à dire à l'intérieur du contour $NEMPN$. L'expression $-2i\pi\psi(x)\theta(x)$ sera égale à l'intégrale (11) prise le long de C; l'expression $2i\pi\phi(x)$ sera égale à l'intégrale (10) prise le long de C'.

Par conséquent l'expression:

$$-2i\pi\theta(\phi + \psi)$$

sera égale á l'intégrale (10) prise le long de $NEMPN$ qui est égale à $2i\pi F(x)\theta(x)$ en vertu du théorème de Cauchy, plus l'intégrale (10) prise le long de $N'P'M'DN'$ qui est nulle en vertu du même théorème; il vient donc

$$\phi + \psi = F. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On définirait de la même manière la fonction $\psi(x)$ à l'extérieur de C. Il suffit pour cela de prendre l'intégrale (10) le long d'un contour C'' formé en remplaçant les arcs NEM et $M'DN'$ de la circonférence C par deux arcs de courbe quelconques NQM et $M'Q'N'$ situés en dehors de C et ne coupant pas l'axe des quantités réelles. On pourra alors choisir ces deux arcs de courbe de telle façon que le point x quel qu'il soit se trouve à l'intérieur de C''.

L'intégrale (10) prise le long de C'' est alors égale à $-2i\pi\psi(x)\theta(x)$ ce qui définit la fonction $\psi(x)$.

On verrait aussi que $\psi(x)$ est holomorphe dans tout le plan et qu'elle n'admet d'autres singularités que deux coupures qui sont les deux segments $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$.

On démontrerait d'ailleurs par un raisonnement identique à celui qui précède que l'on a à l'extérieur de C:

$$\phi + \psi = F.$$

Cette égalité a donc lieu dans tout le plan; c'est à dire qu'on aura

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

dans la moitié supérieure du plan et

$$\phi(x) + \psi(x) = f_1(x)$$

dans la moitié inférieure. C. Q. F. D.

Les fonctions ϕ et ψ ne sont d'ailleurs pas les seules qui jouissent de cette propriété. Si en effet $\lambda(x)$ est une fonction de x n'ayant d'autre point singulier que deux points singuliers essentiels $+1$ et -1, la fonction $\phi(x)+\lambda(x)$ n'aura d'autre singularité qu'une coupure $(-1, +1)$ et la fonction $\psi(x)-\lambda(x)$ n'aura d'autre singularité que deux coupures $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$.

On aura d'ailleurs dans tout le plan :

$$[\phi(x)+\lambda(x)]+[\psi(x)-\lambda(x)]=F(x).$$