SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS

DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ;

par M. H. Poincaré, à Paris.

Adunanza del 26 aprile 1891.

Introduction.

Pour reconnaître si une équation différentielle du 1er ordre et du 1er degré est intégrable algébriquement, il suffit évidemment de trouver une limite supérieure du degré de l'intégrale; il ne reste plus ensuite qu'à effectuer des calculs purement algébriques.

C'est là un problème qui, semble-t-il, aurait dû tenter les géomètres, et cependant il s'en sont fort peu occupés. Depuis l'œuvre magistrale de M. Darboux, publiée dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques,* la question a été négligée pendant vingt ans et il a fallu, pour attirer de nouveau sur elle l'attention qu'elle méritait, que l'Académie des Sciences la proposât comme sujet du concours pour le Grand Prix des Sciences Mathématiques. Deux mémoires furent récompensés, M. Painlevé obtint le prix et M. Autonne une mention honorable: l'un de ces deux mémoires a été publié dans les *Annales de l'École Normale Supérieure* et l'autre dans le *Journal de l'École Polytechnique.*

Les inégalités et les égalités ajoutées par ces deux savants à celles que M. Darboux nous avait fait connaître faisaient faire à la question un progrès très important, mais elles ne pouvaient suffire à l'épuiser complètement. Supposons, en effet, que l'intégrale générale s'écrive :

$$F = \text{const.},$$

F étant une fraction rationnelle; on obtiendra une autre forme de l'intégrale générale en égalant à une constante un polynôme entier quelconque par rapport à F. Il en résulte qu'on ne peut trouver une limite supérieure du degré de l'intégrale générale algébrique, à moins qu'on ne trouve un moyen quelconque d'exprimer, dans les inégalités, que cette intégrale est irréductible.

C'est ce moyen que je me suis proposé de trouver.

M. Painlevé a parfaitement aperçu cette difficulté; mais il n'a pu en triompher; aussi n'a-t-il pu résoudre le problème dans toute sa généralité, mais seulement démontrer, dans un certain nombre de cas, que l'intégrale ne peut être algébrique.

Je n'apporte pas non plus une solution générale, et je me suis encore borné à un cas particulier; mais j'ai lieu d'espérer que ce problème tentera les chercheurs et qu'ils parviendront d'ici peu à généraliser le procédé qui m'a réussi.

M. Painlevé a posé le problème suivant : reconnaître si une équation différentielle donnée admet une intégrale algébrique de genre donné; et il a obtenu divers résultats qui peuvent, dans certains cas, en faciliter la solution. Je donne plus loin une formule qui contient la solution complète du problème de M. Painlevé toutes les fois que la dimension de l'équation différentielle est supérieure à 4.

J'ai démontré quelques propriétés des équations intégrables algébriquement. De pareils résultats n'ont pas pour le moment grande valeur; mais ils pourraient en acquérir le jour où l'on pourra reconnaître si ces propriétés s'étendent aux équations non intégrables, ou si elles ne sont pas toujours vraies pour ces équations; dans le premier cas, en effet, on aurait un théorème général applicable à toutes les équations différentielles, et dans le second cas on posséderait un critérium permettant de démontrer que les équations de certaines catégories ne sont pas intégrables.

En ce qui concerne la limitation du degré, qui était mon but principal, je me suis borné au cas ou l'exposant de tous les cols est égal à — 1.

Résultats de M. Darboux.

Adoptons les notations de M. Darboux et écrivons l'équation différentielle sous la forme homogène, c'est-à-dire sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant des polynômes entiers, homogènes et de degré m en x, y et z. Le nombre m est ce qu'on appelle la *dimension* de l'équation différentielle.

Si cette équation est intégrable algébriquement, l'intégrale générale s'écrira :

$$(2) \qquad f + C\varphi = 0,$$

f et φ étant deux polynômes homogènes d'ordre p en x, y et z, et C une constante arbitraire. On déduit de l'équation (2) l'équation différentielle suivante :

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L_1 & M_1 & N_1 \end{vmatrix} = 0$$

où

$$L_1 = \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dz}, \quad M_1 = \frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dx},$$

$$N_1 = \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy}.$$

Si donc on appelle Δ le premier membre de (1) et Δ_1 celui de (3), on aura identiquement :

$$\Delta_1 = F.\Delta,$$

F étant un polynôme homogène en x, y, z. Soit h le degré de ce polynôme, on aura :

$$2p - 2 = m + h.$$

Comment formerons-nous ce facteur F? M. Darboux nous l'apprend également.

Il peut arriver que pour certaines valeurs de C, que nous appellerons valeurs remarquables, la courbe

$$f + C\varphi = 0$$

soit décomposable. Il pourra arriver que pour certains valeurs remarquables de C que nous appellerons critiques, on ait :

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_k^{\alpha_k},$$

les u_i étant des polynômes entiers homogènes, et les exposants α_i n'étant pas tous égaux à 1.

On aura alors

$$F = \Pi u_i^{\alpha_i - 1},$$

le produit désigné par la lettre Π étant étendu à toutes les valeurs critiques de C et à tous les facteurs u_i (ceux dont l'exposant est plus grand que 1 interviendront seuls, car, pour les autres, $\alpha_i - 1$ s'annule et le facteur correspondant se réduit à l'unité).

On a donc, si n_i est le degré de u_i :

$$h = \sum (\alpha_i - 1) n_i,$$

d'où :

$$(\alpha) \qquad m + 2 = 2p - \sum (\alpha_i - 1) n_i,$$

la sommation représentée par la lettre Σ étant étendue à toutes les valeurs critiques de C et à tous les facteurs u_i.

On aura d'autre part :

$$(\beta) \qquad p = \mathrm{S}\, \alpha_i n_i,$$

la sommation représentée par la lettre **S** étant étendue à une seule valeur remarquable ou critique de C et à tous les facteurs u_i correspondant à cette valeur.

DES POINTS SINGULIERS.

Les points singuliers de l'équation (1) sont donnés par les équations :

$$\frac{L}{x}=\frac{M}{y}=\frac{N}{z}. \tag{4}$$

M. Darboux a montré que ces points singuliers sont au nombre de

$$m^2+m+1.$$

Nous supposerons dans tout ce qui va suivre que ces m^2+m+1 points singuliers sont tous distincts.

Formons l'équation suivante, en S,

$$\begin{aligned}\left(z\frac{dL}{dx}-x\frac{dN}{dx}-N-S\right)\left(z\frac{dM}{dy}-y\frac{dN}{dy}-N-S\right)-\\-\left(z\frac{dL}{dy}-x\frac{dN}{dy}\right)\left(z\frac{dM}{dx}-y\frac{dN}{dx}\right)=0,\end{aligned} \tag{5}$$

où l'on donne à x, y, z les valeurs qui correspondent à un point singulier.

On démontre que si S_1 et S_2 sont les racines de cette équation en S, l'intégrale générale peut dans le voisinage du point singulier être mise sous la forme

$$X_1^{S_1}X_2^{-S_2}=\text{const.}, \tag{6}$$

X_1 et X_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{x}{z}-\frac{x_0}{z_0}$ et de $\frac{y}{z}-\frac{y_0}{z_0}$, en appelant x_0, y_0, z_0 le point singulier considéré.

Il pourrait y avoir exception dans divers cas :

1. Si l'équation (5) se réduit à une identité. Cela n'arrivera pas

si, comme nous l'avons supposé, les $m^2 + m + 1$ points singuliers sont distincts.

2. Si l'équation (5) a une racine nulle. Cela n'arrivera pas non plus si les $m^2 + m' + 1$ points singuliers sont distincts.

3. Si l'on a $S_1 = S_2$. Il arrivera alors, en général, que l'intégrale générale pourra se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{X_2}{X_1} + A \log X_1 = \text{const.},$$

X_1 et X_2 étant des séries ordonnées selon les puissances croissantes de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$ et de $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ et A une constante numérique. Le point singulier est alors un point logarithmique. Dans certains cas la constante A est nulle; le point singulier est alors ce que M. Autonne appelle un point dicritique.

4. Si le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ est réel négatif. Le point singulier s'appelle alors un col. Il arrive, en général, que l'intégrale générale ne peut pas se mettre sous la forme (6); le col est alors irrégulier ; mais il peut arriver également, dans certains cas particuliers, que l'intégrale générale puisse se mettre sous la forme (6); le col est alors *régulier*.

Pour que l'équation (1) soit intégrable algébriquement, il faut (mais il ne suffit pas) : 1° que pour tous les points singuliers le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ soit réel et commensurable; 2° que, si pour certains points se rapport est égal à 1, ces points soient dicritiques et non logarithmiques; 3° et enfin que tous les cols soient réguliers.

Le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ s'appellera l'exposant du point singulier.

Les points singuliers pour lesquels ce rapport est réel et positif s'appelleront des nœuds (les points dicritiques sont donc des nœuds). Ceux pour lesquels ce rapport est réel et négatif s'appelleront des cols.

Si l'exposant d'un nœud est commensurable et égal à $\frac{\mu}{\nu}$, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux, μ et ν seront les entiers caractéristiques du nœud.

De même, si l'exposant d'un col est commensurable et égal à

$-\frac{\mu}{\nu}$, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux, μ et ν seront les entiers caractéristiques de ce col.

Si l'équation (1) est intégrable algébriquement tous les points singuliers sont des nœuds ou des cols.

DES NŒUDS DICRITIQUES.

Nous venons de définir plus haut les points singuliers dicritiques qui sont toujours des nœuds. En un nœud dicritique la courbe

$$f + C\varphi = 0$$

présente en général un point multiple d'ordre λ dont les tangentes sont distinctes. Mais il peut arriver que pour les valeurs remarquables de C deux ou plusieurs de ces tangentes se confondent.

Soit C_1 une valeur remarquable de C, de telle sorte que :

$$f + C_1\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_k^{\alpha_k}.$$

Supposons que pour la courbe $u_i = 0$ le nœud dicritique considéré soit un point multiple d'ordre λ_i; la courbe $u_i = 0$ étant indécomposable, les λ_i tangentes seront distinctes. D'autre part, les courbes $u_i = 0$ et $u_j = 0$ étant distinctes, les λ_i tangentes à $u_i = 0$ seront distinctes des λ_j tangentes à $u_j = 0$.

On aura d'ailleurs

$$\lambda = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \dots + \alpha_k\lambda_k,$$

ou, en conservant à la lettre $\mathbf{S}$ la même signification que plus haut:

$$(\gamma) \qquad \lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i.$$

Le nœud dicritique considéré est pour Δ_1 un point d'ordre :

$$2\lambda - 1$$

et pour F un point d'ordre

$$\sum(\alpha_i - 1)\lambda_i.$$

Il doit être pour $\Delta = \frac{\Delta_1}{F}$ un point d'ordre 1, ce qui nous donne la relation :

$$2 = 2\lambda - \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i. \tag{5}$$

Examinons en particulier le cas ou les nœuds sont dicritiques.

Deux courbes

$$f + C_0\varphi = 0, \qquad f + C_1\varphi = 0$$

correspondant à deux valeurs C_0 et C_1 de C ne peuvent avoir d'autre point commun que les nœuds; de plus, si l'on considère un nœud dicritique, les λ tangentes à la première courbe différeront des λ tangentes à la seconde courbe, de sorte que ce nœud comptera pour λ^2 points d'intersection. Il vient donc :

$$p^2 = \mathrm{S}\lambda^2, \tag{6}$$

le signe S signifiant que la sommation doit être étendue à tous les nœuds que nous supposons tous dicritiques.

Un point multiple d'ordre λ dont les tangentes sont distinctes a pour effet d'abaisser le genre de

$$\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}.$$

On a donc pour le genre de la courbe $f + C\varphi = 0$:

$$q = \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \mathrm{S}\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}. \tag{7}$$

D'autre part, envisageons l'intersection de la courbe indécomposable

$$f + C\varphi = 0$$

avec la courbe $u_i = 0$ qui est un facteur de $f + C_1\varphi$, C_1 étant une valeur remarquable de C. La première est d'ordre p, la seconde d'ordre n_i, et le nombre des intersections doit être $p n_i$.

D'autre part, le nombre des intersections situées en un nœud dicritique est $\lambda\lambda_i$, ce qui donne:

$$p n_i = S\lambda\lambda_i. \tag{8}$$

Comparons maintenant les relations (α), (β), (γ), (δ), (6), (7), (8).

Multiplions la relation (8) par $(\alpha_i - 1)$ et faisons la somme de toutes les relations analogues pour toutes les valeurs remarquables de C et pour tous les facteurs u_i dont l'exposant est plus grand que 1; il viendra :

$$p \sum (\alpha_i - 1) n_i = S\lambda \sum (\alpha_i - 1)\lambda_i$$

ou bien :

$$p(2p - m - 2) = S\lambda(2\lambda - 2);$$

d'où une première remarque : si m n'est pas pair, p doit être pair. L'équation nous donne d'ailleurs :

$$2p^2 - (m + 2)p = 2S\lambda^2 - 2S\lambda,$$

d'où

$$(m + 2)p = 2S\lambda.$$

Mais nous avons écrit :

$$q = \frac{p^2}{2} - \frac{3p}{2} + 1 - \frac{S\lambda^2}{2} + \frac{S\lambda}{2} = \left(\frac{m+2}{4} - \frac{3}{2}\right)p + 1,$$

ou enfin :

$$q = \frac{m - 4}{4} p + 1. \tag{9}$$

Cela prouve :

1° que p ou m doivent être divisibles par 4, ou qu'ils doivent être tous deux pairs;

2° que si $m = 4$, le genre est égal à 1;

3° que si $m < 4$, le genre est égal à o; d'où :

$$p = \frac{4}{4-m},$$

d'où $p = 2$ pour $m = 2$, $p = 4$ pour $m = 3$;

4° que si $m > 4$, le genre est plus grand que 1.

Des nœuds monocritiques.

Abandonnons maintenant le cas particulier où tous les nœuds sont dicritiques. Un nœud monocritique (c'est-à-dire dont l'exposant n'est pas égal à 1) est pour chacune des branches de courbe qui y passent un point multiple d'ordre μ, μ étant le plus petit des deux entiers caractéristiques μ et ν.

Il y a exception pour deux branches de courbe remarquables, à savoir pour les branches de courbe :

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0;$$

pour ces deux branches le nœud est un point simple.

Considérons la courbe indécomposable :

$$f + C\varphi = 0$$

et supposons qu'elle admette λ branches de courbe passant par le nœud considéré. Cherchons quel est l'abaissement correspondant du genre et le nombre des points d'intersection de deux courbes $f + C\varphi = 0$, $f + C_1\varphi = 0$ qui se trouvent au nœud considéré.

Pour cela, il nous faut d'abord connaître le nombre des points d'intersection de deux branches de courbe.

Les équations de ces deux branches de courbe pourront s'écrire :

$$X_1^\mu = \gamma X_2^\nu, \qquad X_1^\mu = \gamma' X_2^\nu,$$

γ et γ' étant deux constantes ; or, en combinant ces deux équations linéairement entre elles, on trouve :

$$X_1^\mu = 0, \qquad X_2^\nu = 0,$$

ce qui montre que le nombre cherché est égal à $\mu\nu$.

Considérons alors les deux courbes $f + C\varphi = 0$, $f + C_1\varphi = 0$; chacune des λ branches de la première coupe chacune des λ branches de la seconde en $\mu\nu$ points confondus. Le nœud compte donc en tout pour $\lambda^2\mu\nu$ intersections.

Il en résulte que la formule (6) doit être remplacée par la suivante:

$$(6^{\text{bis}}) \qquad p^2 = \mathrm{S}\,\lambda^2\mu\nu.$$

Passons à l'abaissement du genre.

En appliquant une règle connue, on trouve que cet abaissement est égal à

$$\frac{\lambda^2\mu\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}(\mu + \nu),$$

de sorte que la formule (7) devient:

$$(7^{\text{bis}}) \quad q = \frac{(p-1)(p-2)}{2} - \mathrm{S}\,\frac{\lambda^2\mu\nu}{2} - \mathrm{S}\,\frac{\lambda}{2}(1 - \mu - \nu).$$

Considérons maintenant les valeurs remarquables de C; soit C_1 une de ces valeurs, et soit:

$$f + C_1\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_k^{\alpha_k}.$$

Nous dirons qu'un facteur u_i est singulier par rapport au nœud monocritique considéré, s'il s'annule identiquement pour $X_1 = 0$ ou pour $X_2 = 0$.

Si le facteur u_i est singulier et s'annule identiquement pour $X_1 = 0$, son exposant α_i doit être divisible par μ. S'il s'annule identiquement pour $X_2 = 0$, l'exposant α_i devra être divisible par ν.

Mais il peut arriver que le facteur u_i soit doublement singulier et qu'il s'annule identiquement tant pour $X_1 = 0$ que pour $X_2 = 0$. Dans ce cas l'exposant α_i est divisible par $\mu\nu$.

Enfin, il peut se faire qu'un même facteur u_i soit singulier par rapport à plusieurs nœuds monocritiques.

Pour chaque nœud monocritique, il existe toujours deux facteurs singuliers (ou un seul facteur doublement singulier) correspondant soit à une même valeur remarquable de C, soit à deux valeurs remarquables différentes de C; et il n'en existe que deux.

On peut faire une distinction de plus; supposons $\mu < \nu$; nous dirons que le facteur u_i est critique s'il s'annule pour $X_1 = 0$ et hypercritique s'il s'annule pour $X_2 = 0$.

Cherchons d'abord quel est, en un nœud monocritique, le nombre des points d'intersection d'une courbe indécomposable

$$f + C\varphi = 0$$

et d'une courbe $u_i = 0$.

Soit λ_i le nombre des branches de la courbe $u_i = 0$ qui passent par le nœud considéré. Pour chacune de ces branches le nœud sera un point multiple d'ordre μ (je suppose toujours $\mu < \nu$) sauf pour une d'entre elles (pour laquelle le nœud sera un point simple) si le facteur u_i est singulier et pour deux d'entre elles s'il est doublement singulier.

Pour deux branches de courbes quelconques, le nombre des points d'intersection confondus avec le nœud est égal à $\mu\nu$; il y a exception si l'une des branches de courbe est $X_1 = 0$, ou $X_2 = 0$. Si c'est $X_1 = 0$, le nombre des intersections est égal à ν, et pour $X_2 = 0$ il est égal à μ.

Donc, pour nos deux courbes le nombre total des intersections confondues avec le nœud sera :

$\lambda\lambda_i\mu\nu$	si le facteur u_i n'est pas singulier;
$\lambda\lambda_i\mu\nu - \lambda(\mu - 1)\nu$	s'il est critique,
$\lambda\lambda_i\mu\nu - \lambda(\nu - 1)\mu$	s'il est hypercritique,
$\lambda\lambda_i\mu\nu + \lambda[(\mu - 1)\nu + (\nu - 1)\mu]$	s'il est doublement singulier,

Que devient la formule (γ)?

Le nœud est pour la courbe $u_i = 0$ un point multiple d'ordre :

$\lambda_i\mu$	si le facteur u_i n'est pas singulier,
$(\lambda_i - 1)\mu + 1$	s'il est singulier,
$(\lambda_i - 2)\mu + 2$	s'il est doublement singulier.

D'autre part, soit C_1 une valeur remarquable de C. Le nœud sera pour la courbe $f + C_1\varphi = 0$, un point multiple d'ordre $\lambda\mu$ si aucun des facteurs de $f + C_1\varphi$ n'est hypercritique (ou doublement singulier), mais si l'un des facteurs est hypercritique et que son exposant soit égal à α_1, ce sera un point multiple d'ordre $\lambda\mu + \frac{\alpha_1}{\nu}(\nu - \mu)$. D'où les équations suivantes qui sont les différentes formes de l'équation (γ):

$\lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i$ s'il n'y a aucun facteur singulier,

$\lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)$ s'il y a un facteur critique d'exposant α_1,

$\lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$ s'il y a un facteur hypercritique d'exposant α_1,

$\lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$ s'il y a un facteur critique d'exposant α_1 et un facteur hypercritique d'exposant α_2,

$\lambda = \mathbf{S}\,\alpha_i\lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \alpha_1\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$ s'il y a un facteur doublement singulier d'exposant α_1.

Le nœud sera pour F un point multiple d'ordre:

$$\sum(\alpha_i - 1)\lambda_i\mu - (\alpha_1 - 1)(\mu - 1) - (\alpha_2 - 1)(\mu - 1),$$

en appelant α_1 et α_2 les exposants des deux facteurs critique et hypercritique qui existent toujours.

Le nœud sera aussi pour Δ_1 un point multiple, mais de quel ordre?

Le déterminant fonctionnel de f et de φ par rapport à z et à y par exemple (que nous avons appelé L_1) est égal au produit du déterminant de f et de φ par rapport à X_1 et à X_2, multiplié par le déterminant de X_1 et X_2 par rapport à z et à y.

Il importe de remarquer que les deux séries X_1 et X_2 ne sont pas entièrement déterminées. En effet, nous les avons définies en écrivant que dans le voisinage du nœud l'intégrale de notre équation s'écrit:

$$X_1^{\mu} = \text{const. } X_2^{\nu}.$$

Si Y est une série quelconque ordonnée suivant les puissanc de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$ et de $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ et ne s'annulant pas au nœud, on pe remplacer X_1 et X_2 par

$$X_1 Y^\nu \quad \text{et} \quad X_2 Y^\mu.$$

Parmi toutes ces déterminations de X_1 et de X_2 on peut en cho sir une, telle que, f et φ soient des polynômes homogènes d'ordre λ e X_1^μ et X_2^ν.

Alors le déterminant fonctionnel de f et φ par rapport à X_1 et X est un polynôme homogène d'ordre $2\lambda - 2$ en X_1^μ et X_2^ν, que j'ap pellerai P, multiplié par $X_1^{\mu-1} X_2^{\nu-1}$.

Le déterminant de X_1 et X_2 par rapport à y et à z ne s'annul pas en général et en tous cas les trois déterminants

$$\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(y, z)}, \qquad \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(z, x)}, \qquad \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x, y)}$$

ne s'annulant pas à la fois, on peut toujours supposer que le premi n'est pas nul au nœud. On a alors:

$$L_1 = \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(y, z)} P X_1^{\mu-1} X_2^{\nu-1}.$$

Pour P le nœud est un point multiple d'ordre $(2\lambda - 2)\mu$ si c polynôme ne s'annule pas pour $X_2 = 0$, mais cela n'arrive que $\alpha_2 = \nu$; dans le cas contraire c'est pour P un point multiple d'ordre

$$(2\lambda - 2)\mu + \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu),$$

pour L_1 d'ordre :

$$(2\lambda - 2)\mu + (\mu - 1) + (\nu - 1) + \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu)$$

et pour Δ_1 d'ordre :

$$(2\lambda - 2)\mu + \mu + \nu - 1 + \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu).$$

Mais nous savons que ce doit être un point simple pour Δ, il vient donc :

$$(2\lambda - 2)\mu + \mu + \nu - 1 + \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu)$$

$$= \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i\mu - (\alpha_1 - 1)(\mu - 1) - (\alpha_2 - 1)(\mu - 1) + 1;$$

ou, en divisant par μ :

$$(\delta) \qquad (2\lambda - 2) + \alpha_1\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + \alpha_2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i.$$

Que devient maintenant la formule (8) ?

Quel est le nombre total des points d'intersection de la courbe indécomposable $f + C\varphi = 0$ avec $u_i = 0$.

J'appelle ε_i un nombre relatif à u_i et à un des nœuds. Ce nombre sera nul si u_i n'est pas singulier par rapport à ce nœud ; il sera égal à $(\mu - 1)\nu$ s'il est critique, à $(\nu - 1)\mu$ s'il est hypercritique, à $(\mu - 1)\nu + (\nu - 1)\mu$ s'il est doublement singulier. Il vient:

$$pn_i = \mathrm{S}(\lambda\lambda_i\mu\nu - \lambda\varepsilon_i).$$

Multiplions cette relation par $\alpha_i - 1$ et faisons la somme de toutes les relations analogues pour toutes les valeurs remarquables de C et pour tous les facteurs u_i dont l'exposant est plus grand que 1 ; il vient :

$$p\sum(\alpha_i - 1)n_i = \mathrm{S}[\lambda\mu\nu\sum(\alpha_i - 1)\lambda_i] - \mathrm{S}\lambda\sum(\alpha_i - 1)\varepsilon_i.$$

Mais d'après la signification de ε_i et en appelant encore α_1 et α_2 les exposants des facteurs critiques et hypercritiques, on a :

$$\sum(\alpha_i - 1)\varepsilon_i = (\alpha_1 - 1)(\mu - 1)\nu + (\alpha_2 - 1)(\nu - 1)\mu.$$

D'autre part :

$$\mu\nu\sum(\alpha_i - 1)\lambda_i = (2\lambda - 2)\mu\nu + \alpha_1\nu(\mu - 1) + \alpha_2\mu(\nu - 1).$$

Il vient alors :

$$p(2p - m - 2) = S\lambda\mu\nu(2\lambda - 2) + S\lambda(\mu - 1)\nu + S\lambda(\nu - 1)\mu,$$

ou :

$$(m + 2)p = S\lambda(\mu + \nu).$$

Or :

$$q = \frac{p^2 - 3p + 2}{2} - S\frac{\lambda^2\mu\nu}{2} - S\frac{\lambda}{2}(1 - \mu - \nu) = 1 - \frac{3p}{2} + $$
$$+ S\frac{\lambda}{2}(\mu + \nu - 1),$$

d'où :

$$(11) \qquad q = 1 + S\frac{\lambda}{2}\left(\mu + \nu - 1 - \frac{3(\mu + \nu)}{m + 2}\right).$$

Si, par exemple, $m = 4$, il vient :

$$q = 1 + S\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\mu + \nu}{2} - 1\right).$$

On voit ainsi que pour $m = 4$, ou *a fortiori* pour $m > 4$, le genre est toujours plus grand que 1.

Quelle est la condition pour qu'on puisse reconnaître si l'équation différentielle comporte une solution générale algébrique de genre donné ? C'est que tous les coefficients du second membre de (11) soient de même signe; c'est-à-dire que :

$$(\mu + \nu)\left(1 - \frac{3}{m + 2}\right) > 1;$$

ce qui a toujours lieu pour $m > 4$.

Des cols.

Nous distinguerons trois genres de cols :

1° Ceux du premier genre seront les points doubles d'une courbe indécomposable

$$f + C\varphi = 0,$$

ou d'une courbe

$$u_i = 0,$$

u_i étant un des facteurs indécomposables de

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_k^{\alpha_k}$$

pour une valeur remarquable de C.

Tous ceux de ces points doubles qui ne sont pas des nœuds sont des cols.

Pour un col du 1er genre les deux entiers caractéristiques sont égaux à 1.

2° Ceux du 2e et du 3e genre sont les points d'intersection de deux courbes

$$u_i = 0\,, \qquad u_j = 0\,,$$

u_i et u_j étant deux facteurs indécomposables de

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_k^{\alpha_k}$$

pour une même valeur remarquable de C.

Tous ceux de ces points d'intersection qui ne sont pas des nœuds sont des cols. Les deux entiers caractéristiques μ et ν, qui sont premiers entre eux, seront entre eux dans le même rapport que les deux exposants α_i et α_j.

Si $\alpha_i = \alpha_j$ et que, par conséquent, $\mu = \nu = 1$, le col sera du 2e genre.

Si $\alpha_i \gtrless \alpha_j$ et que, par conséquent, $\mu < \nu$, $\nu > 1$, le col sera du 3e genre.

L'équation différentielle étant donnée, on connait les entiers caractéristiques. On peut donc distinguer les cols du 1er et du 2d genre de ceux du 3e genre, mais non ceux du 1er de ceux du 2d.

PROPRIÉTÉS DIVERSES.

Quelques-unes des formules précédentes peuvent être simplifiées si l'on adopte les notations suivantes :

Soit ζ_i un nombre égal à 1 si u_i n'est pas singulier par rapport au nœud considéré, à μ si u_i est critique, à ν s'il est hypercritique, à $\mu\nu$ s'il est doublement singulier.

A chaque facteur u_i et à chaque nœud monocritique correspon ainsi un nombre ζ_i

Soit alors h_i le plus petit commun multiple de tous les nombre ζ_i correspondant à un même facteur u_i et à tous les nœuds monocri tiques. Ce nombre h_i est donc égal à 1 si u_i n'est singulier par rap port à aucun nœud.

Il est clair que α_i est divisible par h_i; nous poserons donc :

$$v_i = u_i^{h_i}, \qquad \alpha_i = h_i \alpha_i',$$

d'où :

$$u_i^{\alpha_i} = v_i^{\alpha_i'}$$

Nous appellerons $n_i' = n_i h_i$ le degré de v_i.

La courbe $v_i = 0$ se compose de h_i courbes confondues avec $u_i = 0$ J'appellerai λ_i' le nombre des branches de la courbe $v_i = 0$ qui pas sent en un nœud monocritique. Chaque branche de $u_i = 0$ compter pour h_i branches de $v_i = 0$, sauf s'il y a lieu celle qui s'annule pou $X_1 = 0$ et qui comptera seulement pour $\frac{h_i}{\mu}$ branches et celle qui s'an nule pour $X_2 = 0$ et qui comptera seulement pour $\frac{h_i}{\nu}$ branches. O aura donc :

$\lambda_i' = h_i \lambda_i$ si le facteur u_i n'est pas singulier,

$\lambda_i' = h_i \lambda_i - h_i\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$ s'il est critique,

$\lambda_i' = h_i \lambda_i - h_i\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$ s'il est hypercritique,

$\lambda_i' = h_i \lambda_i - h_i\left(2 - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}\right)$ s'il est doublement singulier.

Le nombre des points d'intersection de

$$v_i = 0 \quad \text{et} \quad f + C\varphi = 0$$

est alors dans tous les cas

$$\lambda \lambda_i' \mu \nu.$$

Celui de deux courbes

$$v_i = 0 \qquad\qquad v_k = 0$$

correspondant à deux facteurs

$$v_i = u_i^{b_i}, \qquad\qquad v_k = u_k^{b_k}$$

sera

$$\lambda'_i \lambda'_k \mu \nu.$$

L'équation (γ) s'écrira dans tous les cas :

$$\lambda = \mathbf{S}\, \alpha'_i \lambda'_i.$$

Examinons maintenant la question suivante :

Soit, pour une valeur remarquable de C :

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_k^{\alpha_k} = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2} \ldots v_k^{\alpha'_k}.$$

Est-il possible que les deux courbes

$$v_1 = 0, \qquad\qquad v_2 = 0$$

n'aient d'autres points d'intersection que des nœuds ?

Appelons h le nombre des points d'intersection de ces deux courbes situés en dehors des nœuds, nous aurons évidemment :

$$n'_1 n'_2 = \mathrm{S}\, \lambda'_1 \lambda'_2 \mu \nu + h.$$

Supposons d'abord que nous n'ayons que deux facteurs et que l'on ait :

$$f + C\varphi = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2},$$

nous aurons les relations :

$$p^2 = \mathrm{S}\, \lambda^2 \mu\nu, \quad pn'_1 = \mathrm{S}\lambda\lambda'_1 \mu\nu, \quad \alpha'_1 n'_1 + \alpha'_2 n'_2 = p, \quad \alpha'_1 \lambda' + \alpha'_2 \lambda'$$

d'où l'on peut déduire :

$$\alpha'_1 n_1'^2 + \alpha'_2 n'_1 n'_2 = \alpha'_1 S\lambda_1'^2 \mu\nu + \alpha'_2 S\lambda'_1 \lambda'_2 \mu\nu,$$

$$\alpha'_1 n'_1 n'_2 + \alpha'_2 n_2'^2 = \alpha'_1 S\lambda'_1 \lambda'_2 \mu\nu + \alpha'_2 S\lambda_2'^2 \mu\nu.$$

Si l'on avait $b = 0$ et par conséquent $n'_1 n'_2 = S\lambda'_1 \lambda'_2 \mu\nu$, il viendrait :

$$n_1'^2 = S\lambda_1'^2 \mu\nu, \qquad n_2'^2 = S\lambda_2'^2 \mu\nu,$$

et pour des valeurs quelconques de x et de y :

$$(1) \qquad (n'_1 x - n'_2 y)^2 = S\mu\nu(\lambda'_1 x - \lambda'_2 y)^2.$$

Si l'on fait $y = n_1$, $x = n'_2$, le premier membre s'annule, ce qui exige que :

$$\lambda'_1 x = \lambda'_2 y.$$

Le rapport $\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2}$ est donc constant et égal à $\frac{n'_1}{n'_2}$.

Rien dans le raisonnement qui précède ne suppose que les facteurs u_1 et u_2 sont irréductibles. Si donc on a :

$$f + C\varphi = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2} \dots v_i^{\alpha'_i} v_{i+1}^{\alpha'_{i+1}} \dots v_k^{\alpha'_k}$$

et si les courbes

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \dots v_i = 0$$

n'ont en dehors des nœuds aucun point commun avec les courbes :

$$v_{i+1} = 0, \quad v_{i+2} = 0, \dots v_k = 0,$$

on pourra regarder $f + C\varphi$ comme le produit des deux facteurs :

$$v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2} \dots v_i^{\alpha'_i} \quad \text{et} \quad v_{i+1}^{\alpha'_{i+1}} v_{i+2}^{\alpha'_{i+2}} \dots v_k^{\alpha'_k}$$

et on aura pour tous les nœuds monocritiques :

$$\frac{\alpha'_1 \lambda'_1 + \alpha'_2 \lambda'_2 + \dots + \alpha'_i \lambda'_i}{\alpha'_{i+1} \lambda'_{i+1} + \alpha'_{i+2} \lambda'_{i+2} + \dots + \alpha'_k \lambda'_k} = \frac{\alpha'_1 n'_1 + \alpha'_2 n'_2 + \dots + \alpha'_i n'_i}{\alpha'_{i+1} n'_{i+1} + \alpha'_{i+2} n'_{i+2} + \dots + \alpha'_k n'_k}.$$

Revenons au cas où le nombre des facteurs est égal à 2 et où, par conséquent,

$$f + C\varphi = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2},$$

mais ne supposons plus $h = 0$; la formule (1) deviendra :

$$(n'_1 x - n'_2 y)^2 = \mathrm{S}\mu\nu(\lambda'_1 x - \lambda'_2 y)^2 - h\frac{(\alpha'_2 x + \alpha'_1 y)^2}{\alpha'_1 \alpha'_2}.$$

Si nous faisons en particulier :

$$y = n'_1, \qquad x = n'_2,$$

il vient :

(2) $$hp^2 = \alpha'_1 \alpha'_2 \, \mathrm{S}\mu\nu(\lambda'_1 n'_2 - \lambda'_2 n'_1)^2.$$

Supposons de nouveau que nous ayons deux facteurs et que nous écrivions :

$$f + C\varphi = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2},$$

et supposons de plus $h = 0$.

Je dis que la courbe $f + C\varphi = 0$ ne sera indécomposable pour aucune valeur de C.

Soit, en effet, δ le plus grand commun diviseur de n'_1 et de n'_2 et posons :

$$n'_1 = \beta_1 \delta, \qquad n'_2 = \beta_2 \delta,$$

$$w_1 = v_1^{\beta_2}, \qquad w_2 = v_2^{\beta_1};$$

les deux polynômes w_1 et w_2 seront de même degré, à savoir de degré $\beta_1 \beta_2 \delta$.

Soit k une constante arbitraire. Etudions la courbe :

$$w_1 - k w_2 = 0.$$

Elle sera de degré

$$\beta_1 \beta_2 \delta.$$

Voyons comment elle se comportera dans le voisinage d'un nœud monocritique.

On pourra écrire, si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de ce nœud :

$$w_1 = W_1 \Pi_1 (X_1^\mu, X_2^\nu), \qquad w_2 = W_2 \Pi_2 (X_1^\mu, X_2^\nu),$$

W_1 et W_2 étant deux séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$, $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ et ne s'annulant pas au nœud considéré. Π_1 et Π_2 sont deux polynômes homogènes en X_1^μ et X_2^ν; Π_1 est de degré $\beta_2 \lambda'_1$ et Π_2 de degré $\beta_1 \lambda'_2$.

Mais on a (puisque $b = 0$) :

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = \frac{n'_1}{n'_2},$$

ce qui permet d'écrire :

$$\lambda'_1 = \beta_1 \varepsilon, \qquad \lambda'_2 = \beta_2 \varepsilon,$$

ε étant un entier.

Donc les deux polynômes Π_1 et Π_2 sont de même degré $\beta_1 \beta_2 \varepsilon$.

Quel est alors, au nœud considéré, le nombre des points d'intersection de la courbe

$$w_1 - k w_2 = W_1 \Pi_1 - k W_2 \Pi_2 = 0$$

avec une branche de courbe :

$$X_1^\mu = \text{const.}\, X_2^\nu \,?$$

Il sera au moins égal à $\beta_1 \beta_2 \varepsilon \mu \nu$, et le nombre des points d'intersection des deux courbes

$$w_1 - k w_2 = 0, \qquad f + C\varphi = 0$$

est au moins egal à

$$\lambda \beta_1 \beta_2 \varepsilon \mu \nu.$$

Si les deux polynômes $w_1 - k w_2$, $f + C\varphi$ n'avaient aucun facteur commun, le nombre total des points d'intersection des deux courbes devrait être :

$$p\beta_1\beta_2\delta.$$

Nous venons de voir que le nombre des points d'intersection situés aux nœuds est au moins égal à

$$S\lambda\beta_1\beta_2\varepsilon\mu\nu.$$

Mais nous avons :

$$p = \alpha'_1 n'_1 + \alpha'_2 n'_2, \qquad \lambda = \alpha'_1\lambda'_1 + \alpha'_2\lambda'_2,$$

ce qui montre que :

$$\frac{p}{\delta} = \frac{\lambda}{\varepsilon};$$

et comme on a :

$$p^2 = S\lambda^2\mu\nu,$$

il viendra :

$$p\delta = S\lambda\varepsilon\mu\nu.$$

Le nombre des points d'intersection situés aux nœuds sera donc au moins égal à $p\beta_1\beta_2\delta$.

Considérons un point quelconque de $f + C\varphi = 0$ situé en dehors des nœuds ; on peut toujours choisir la constante k de façon à faire passer par ce point la courbe $w_1 - kw_2 = 0$. Le nombre total des points d'intersection devient alors supérieur à $p\beta_1\beta_2\delta$, de sorte que $f + C\varphi$ et $w_1 - kw_2$ doivent avoir un facteur commun. Si $f + C\varphi$ est supposé irréductible, $w_1 - kw_2$ sera divisible par $f + C\varphi$.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire que je démontre un lemme :

Soient X et Y deux polynômes homogènes de même degré en x, y, z, et α une constante quelconque. Si la courbe :

$$X - \alpha Y = 0$$

est décomposable quelle que soit la constante α, les deux polynômes X et Y sont des polynômes homogènes et de même degré par rapport à deux autres *polynômes* ξ *et* η *qui sont eux-mêmes homogènes et de même degré en* x, y *et* z. *De plus, la courbe*

$$\xi - \alpha\eta = 0$$

n'est pas décomposable quelle que soit la constante α.

En effet, soit N le degré de X et de Y. Soient ensuite, pour une certaine valeur de α, n_1, n_2, ... n_p les degrés des facteurs irréductibles de $X - \alpha Y$. La continuité suffit pour montrer que le nombre des facteurs et les degrés n_1, n_2, ... n_p seront les mêmes pour toutes les valeurs de α sauf pour certaines valeurs que j'appellerai singulières et pour lesquelles quelques uns des facteurs pourraient eux-mêmes se décomposer.

Soit donc, pour une valeur non singulière de α:

$$X - \alpha Y = Z_1 Z_2 \dots Z_p,$$

le facteur Z_i étant irréductible et de degré n_i.

Soit maintenant α' une constante infiniment peu différente de α, il viendra :

$$X - \alpha' Y = Z'_1 Z'_2 \dots Z'_p.$$

Le facteur Z'_i différera très peu de Z_i; on voit donc que, si l'on fait varier α d'une façon continue, les polynômes Z_1, Z_2, ... Z_p varieront d'une façon continue.

Je dis maintenant que si l'on fait décrire à la variable α des contours fermés convenables, les divers polynômes Z_1, Z_2, ... Z_p s'échangeront les uns avec les autres ; je dis par exemple qu'on pourra échanger Z_1 avec Z_2.

Soit, en effet, x_1, y_1, z_1 un point de la courbe $Z_1 = 0$ qui ne soit pas un nœud ; soit de même x_2, y_2, z_2 un point de la courbe $Z_2 = 0$. Faisons ensuite varier x, y, z depuis x_1, y_1, z_1 jusqu'à x_2, y_2, z_2; alors $\alpha = \frac{X}{Y}$ qui est une fonction de x, y, z décrira un contour fermé, et quand ce contour sera décrit, il est clair que Z_1 se sera échangé avec Z_2.

Les polynômes Z_1, Z_2, . . Z_p sont donc de même degré, de sorte que N est un multiple de n_1.

Il reste à établir que l'ensemble des courbes $Z_1 = 0$, qui dépendent du paramètre arbitraire α, forment un faisceau linéaire; or cela est évident puisqu'elles n'ont pas d'enveloppe, même au sens purement analytique de ce mot.

Appliquons ce qui précède au cas qui nous occupe.

Ou bien $w_1 - kw_2$ sera irréductible sauf pour certains valeurs de k et ce polynôme devra être alors identique à $f + C\varphi$; ou bien $w_1 - kw_2$ ne sera pas irréductible et son degré devra être un multiple de celui de son facteur irréductible $f + C\varphi$; on aura donc:

$$\beta_1 \beta_2 \delta = \zeta p = \zeta \delta(\alpha'_1 \beta_1 + \alpha'_2 \beta_2),$$

ζ étant un entier; de sorte que:

$$\beta_1 \beta_2 = \zeta \alpha'_1 \beta_1 + \zeta \alpha'_2 \beta_2.$$

Cette égalité n'est possible que si $\zeta \alpha'_2 \beta_2$ est divisible par β_1, ou, puisque β_1 et β_2 sont premiers entre eux, si $\zeta \alpha'_2$ est divisible par β_1. Mais si $\zeta \alpha'_2$ est divisible par β_1, il vient, puisque ζ, α'_1 et β_1 sont essentiellement positifs:

$$\beta_1 \beta_2 < \zeta \alpha'_1 \beta_1 + \zeta \alpha'_2 \beta_2.$$

L'égalité est donc impossible et nous devons conclure que $f + C\varphi$ ne peut être irréductible.

Si donc $f + C\varphi$ est irréductible, sauf pour certaines valeurs particulières de C, *ce que nous pouvons toujours supposer*, les deux courbes

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0$$

auront d'autres points communs que les nœuds.

Rien dans ce raisonnement ne suppose que u_1 et u_2 soient irréductibles; si donc on a pour une valeur remarquable de C:

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_i^{\alpha_i} u_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots u_k^{\alpha_k}$$

il y aura certainement, en dehors des nœuds, des points d'intersection qui appartiendront à la fois à l'une des courbes:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \ldots u_i = 0$$

et à l'une des courbes:

$$u_{i+1} = 0, \quad u_{i+2} = 0, \ldots u_k = 0.$$

Classification des valeurs remarquables de C.

Nous distinguerons les valeurs remarquables de C en plusieurs espèces.

La 1ère espèce comprendra celles pour lesquelles les exposants α_i de tous les facteurs irréductibles u_i seront égaux à 1.

La 2e espèce comprendra celles pour lesquelles les exposants α_i seront premiers entre eux, sans être tous égaux à 1.

La 3e espèce comprendra celles pour lesquelles les exposants α_i auront un plus grand commun diviseur différent de 1, sans être tous egaux entre eux.

La 4e espèce comprendra celles pour lesquelles il y a plusieurs facteurs u_i distincts dont les exposants α_i sont tous égaux entre eux sans être tous égaux à 1, de telle sorte que $f + C\varphi$ soit une puissance parfaite d'un produit de plusieurs facteurs distincts.

La 5e espèce enfin comprendra celles pour lesquelles $f + C\varphi$ est une puissance parfaite d'un polynôme irréductible.

Si C est une valeur remarquable de l'une des 4 premières espèces, la courbe $f + C\varphi = 0$ se décomposera en deux courbes distinctes, qui, d'après le § précédent devront se couper au moins en un point en dehors des nœuds et par conséquent en un col.

Le nombre des valeurs remarquables des 4 premières espèces est donc au plus égal au nombre des cols.

Supposons que tous les cols sont du 1er ou du 2d genre et soit C une valeur remarquable. Soit

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_i^{\alpha_i} u_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots u_k^{\alpha_k};$$

l'une des courbes u_1, u_2, ... u_i devra couper en un col l'une des courbes u_{i+1}, u_{i+2}, ... u_k, et comme le col est du 1er ou du 2d genre, ces deux courbes devront correspondre à un même exposant α.

Je dis que l'on doit avoir :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k.$$

En effet, l'ordre des facteurs u_1, u_2, ... est arbitraire; si donc tous les exposants n'étaient pas égaux, on pourrait supposer :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_i, \quad \alpha_{i+1} \gtrless \alpha_1, \quad \alpha_{i+2} \gtrless \alpha_1, \ldots \alpha_k \gtrless \alpha_1.$$

Un des polynômes ne pourrait donc pas avoir même exposant qu'un des polynômes u_{i+1}, u_{i+2}, ... u_k.

Donc, si tous les cols sont du 1er ou du 2d genre, toutes les valeurs remarquables seront de la 1ère, de la 4ème, ou de la 5ème espèce.

Les valeurs remarquables des 4 dernières espèces sont celles que nous avons appelées plus haut critiques.

Application d'un théorème d'Halphen.

Je dis maintenant qu'il ne peut pas exister plus de deux valeurs remarquables des trois dernières espèces.

En effet, s'il y en avait trois on pourrait supposer par une substitution linéaire que ces trois valeurs remarquables sont 0, 1 et ∞, de sorte que :

$$f, \varphi \text{ et } -(f+\varphi)$$

seraient des puissances parfaites. Soient :

$$X^{\alpha_1}, Y^{\alpha_2}, Z^{\alpha_3}$$

ces trois puissances parfaites; on devrait avoir identiquement :

$$X^{\alpha_1} + Y^{\alpha_2} + Z^{\alpha_3} = 0,$$

X, Y et Z étant des polynômes homogènes de degré

$$\frac{p}{\alpha_1}, \quad \frac{p}{\alpha_2}, \quad \frac{p}{\alpha_3}$$

en x, y et z.

Or Halphen, au début de son mémoire couronné sur les équations linéaires, a étudié les identités de cette forme. Il a montré d'abord que les nombres α_1, α_2 et α_3 devaient avoir certaines valeurs particulières $(\alpha_1, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$; il a fait voir ensuite qu'on devait avoir:

$$X = P_1(\eta_1, \eta_2),$$

$$Y = P_2(\eta_1, \eta_2),$$

$$Z = P_3(\eta_1, \eta_2),$$

P_1 P_2 et P_3 étant des polynômes homogènes en η_1 et η_2 qu'Halphen a complètement formés et qu'il est inutile de transcrire ici, pendant que η_1 et η_2 sont deux polynômes homogènes de même degré en x, y et z.

Alors la courbe

$$f + C\varphi = X^{\alpha_1} + CY^{\alpha_2} = 0$$

est décomposable quel que soit C en un certain nombre de courbes appartenant au réseau :

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \text{const.}$$

Or c'est là précisément le cas exclu plus haut.

Si donc, comme nous l'avons supposé, $f + C\varphi$ n'est pas réductible quel que soit C, le nombre des valeurs remarquables des trois dernières espèces ne peut dépasser 2, et par conséquent le nombre total des valeurs remarquables est limité.

J'ajoute que, s'il y a deux valeurs des trois dernières espèces, de telle sorte, par exemple, que

$$f = X^{\alpha_1}, \qquad \varphi = Y^{\alpha_2},$$

les deux nombres α_1 et α_2 devront être premiers entre eux, car s'ils avaient un facteur commun le polynôme

$$X^{\alpha_1} + CY^{\alpha_2}$$

serait réductible quel que soit C.

Nombre des nœuds.

Supposons que tous les nœuds soient dicritiques, on aura :

$$p^2 = \mathrm{S}\lambda^2,$$
$$(m + 2)p = 2\mathrm{S}\lambda;$$

d'où, si l'on appelle n le nombre des nœuds et x une variable quelconque :

$$x^2 p^2 - (m + 2)px + n = \mathrm{S}(x\lambda - 1)^2.$$

Le second membre étant essentiellement positif, les racines du trinôme du second degré en x qui figure dans le premier membre doivent être imaginaires ou égales, ce qui exige que :

$$n \geqq \frac{(m + 2)^2}{4}.$$

De plus, si

$$n = \frac{(m + 2)^2}{4},$$

les racines sont égales et le second membre doit pouvoir s'annuler, ce qui ne peut avoir lieu que si tous les λ sont égaux entre eux.

Supposons maintenant que tous les nœuds soient dicritiques et tous les cols du premier ou du second genre; toutes les valeurs critiques de C sont des deux dernières espèces et il ne peut y en avoir plus de deux. Soient α_1 et α_2 les exposants correspondants à ces deux valeurs critiques. On aura pour la première valeur critique :

$$p = \mathbf{S}\alpha_i n_i = \alpha_1 \mathbf{S} n_i, \qquad \mathbf{S}(\alpha_i - 1) n_i = \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)p,$$

et de même pour la seconde valeur critique :

$$\mathbf{S}(\alpha_i - 1)n_i = \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)p.$$

Alors la formule

$$m + 2 = 2p - \sum(\alpha_i - 1)n_i$$

devient :

$$m + 2 = 2p - \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)p - \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)p,$$

ou

$$m + 2 = p\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right).$$

On aura de même pour un nœud quelconque et pour la première valeur critique :

$$\lambda = \mathbf{S}\alpha_i\lambda_i = \alpha_1\mathbf{S}\lambda_i, \qquad \mathbf{S}(\alpha_i - 1)\lambda_i = \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)\lambda,$$

et pour la seconde :

$$\mathbf{S}(\alpha_i - 1)\lambda_i = \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)\lambda;$$

de sorte que la formule :

$$2 = 2\lambda - \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i$$

devient :

$$2 = \lambda\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right),$$

d'où

$$p^2\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)^2 = (m + 2)^2$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)^2 \mathrm{S}\lambda^2 = 4n,$$

ou, puisque $p^2 = \mathrm{S}\lambda^2$:

$$n = \frac{(m + 2)^2}{4}.$$

LIMITATION DU DEGRÉ.

Dans le cas où tous les cols sont du 1[er] ou du 2[d] genre, il est possible de trouver une limite supérieure du degré p et par conséquent de reconnaître si l'équation est intégrable algébriquement.

Nous venons de trouver, en effet, sans avoir besoin de supposer que tous les nœuds soient dicritiques :

$$(m+2)=p\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right),$$

d'où :

$$\alpha_1\alpha_2(m+2)=p(\alpha_1+\alpha_2).$$

Or, α_1 et α_2 sont premiers entre eux et par conséquent chacun d'eux est premier avec $\alpha_1+\alpha_2$. Donc $\alpha_1+\alpha_2$ divise $m+2$.

Nous devons en conclure que $\alpha_1+\alpha_2$ et par conséquent α_1, α_2 et p sont limités. C. Q. F. D.

Je m'arrêterai là, bien que les principes qui précèdent puissent probablement, avec de légères modifications, donner des résultats dans des cas moins particuliers.

Paris, 12 avril 1891.

H. POINCARÉ.