

*Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes
de M. Tchebicheff;*

PAR M. H. POINCARÉ.

L'étude des travaux si intéressants que M. Sylvester a récemment consacrés à la théorie des nombres premiers (*The Messenger of Mathematics*, New Series, n° 241, May 1891) m'a déterminé à entreprendre une généralisation des théorèmes de M. Tchebicheff (voir *Journal de Liouville*, 1^{re} série, t. XVII) et à essayer de les étendre aux nombres premiers complexes. Les résultats auxquels je suis parvenu n'ont pas, comme d'ailleurs on devait s'y attendre, le caractère de précision qui distinguent ceux de l'éminent géomètre russe.

Les inégalités de M. Tchebicheff ne se prêtent pas toutes également bien à la généralisation que j'avais en vue. J'ai donc cherché à en trouver d'autres qui la rendissent plus facile. Celles que j'ai obtenues ainsi n'ajoutent que bien peu de chose à ce que le savant russe nous avait appris et sont souvent même contenues dans les siennes. Elles n'offrent donc d'autre intérêt que celui qui peut résulter de la méthode employée pour y parvenir; j'ai cru néanmoins devoir publier ici les propositions auxquelles j'ai été conduit de la sorte. Le n° 1 se rattache mal à mon sujet et ne m'a mené à aucun résultat important. Je le conserve néanmoins dans l'espoir que de plus habiles que moi en pourront tirer parti.

1. Rappelons d'abord les notations de M. Tchebicheff et les équations fondamentales.

Nous désignerons par $\theta(x)$ la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne surpassent pas x et par $T(x)$ la somme des logarithmes de tous les nombres entiers qui ne surpassent pas x . On a alors

$$T(x) = \sum \theta' \sqrt{\frac{x}{n}}.$$

La sommation est étendue à tous les nombres entiers positifs m et à tous les nombres entiers positifs n . Il est à remarquer que la somme du second membre est limitée, car $\theta(x)$ est nul si

$$x < 2.$$

On peut écrire également

$$(1) \quad T(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \dots + \psi\left(\frac{x}{n}\right) + \dots,$$

$$(2) \quad \psi(x) = \theta(x) + \theta\sqrt{x} + \theta^3\sqrt{x} + \dots,$$

et l'on en déduit

$$(3) \quad \psi(x) = \sum \varepsilon_n T\left(\frac{x}{n}\right), \quad \theta(x) = \sum \varepsilon_n \psi\sqrt[n]{x},$$

où

$$\varepsilon_n = 0,$$

si n est divisible par un carré;

$$\varepsilon_n = 1,$$

si $n = 1$ ou si n , n'étant divisible par aucun carré, contient un nombre pair de facteurs premiers;

$$\varepsilon_n = -1,$$

si n , n'étant divisible par aucun carré, contient un nombre impair de facteurs premiers.

Il résulte d'abord, de la définition même de $T(x)$, que

$$T(x) = \log \Gamma [E(x) + 1],$$

en désignant par $E(x)$, selon la coutume, le plus grand entier contenu dans x .

Soit maintenant C la constante d'Euler et posons

$$\omega(x) = x - \log(1 + x);$$

une formule bien connue nous donnera

$$\log \Gamma(x + 1) = \sum \omega\left(\frac{x}{n}\right) - Cx,$$

la sommation s'étendant à tous les entiers positifs n .

Posons, d'autre part,

$$T'(x) = \log \Gamma(x + 1) + C[x - E(x)],$$

d'où

$$T'(x) = \sum \omega\left(\frac{x}{n}\right) - CE(x).$$

Soit $\alpha(x)$ une fonction telle que

$$\alpha(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \geq 1; \quad \alpha(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < 1;$$

on aura évidemment

$$E(x) = \alpha\left(\frac{x}{1}\right) + \alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \alpha\left(\frac{x}{3}\right) + \dots + \alpha\left(\frac{x}{n}\right) + \dots,$$

car le premier membre n'est autre chose que le nombre des entiers qui ne surpassent pas x , et chacun des termes du second membre est égal à 1, si n ne surpasse pas x , et à 0 dans le cas contraire.

Si donc nous posons

$$\psi'(x) = \omega(x) - C\alpha(x),$$

il viendra

$$(4) \quad T'(x) = \psi'\left(\frac{x}{1}\right) + \psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \psi'\left(\frac{x}{3}\right) + \dots$$

Comparons maintenant $T(x)$ à $T'(x)$.

Nous aurons, pour $x > 1$,

$$\log \Gamma(x) < T(x) < \log \Gamma(x+1).$$

On a donc

$$T(x) > \log \Gamma(x+1) - \log x.$$

D'autre part, $x - E(x)$ est toujours compris entre 0 et 1, de sorte que

$$\log \Gamma(x+1) + C > T'(x) > \log \Gamma(x+1):$$

d'où enfin

$$(5) \quad T'(x) > T(x) > T'(x) - C - \log x \quad (1).$$

Des inégalités (5), nous pouvons déduire un premier résultat, c'est que, si

$$\frac{\psi(x)}{x}$$

tend vers une limite finie et déterminée, quand x croît indéfiniment, cette limite ne peut être que l'unité.

Pour le démontrer, j'observe d'abord que le rapport $\frac{\omega(x)}{x^2}$ décroît de $\frac{1}{2}$ à 0, quand x croît de 0 à $+\infty$; on a donc

$$(6) \quad \omega(x) < \frac{x^2}{2}.$$

Envisageons maintenant la quantité

$$B = \sum \left(\frac{x^2}{n^2} \right),$$

(1) On peut même démontrer que

$$T'(x) - T(x) < [1 + \log(x+1)][x - E(x)]:$$

mais cette inégalité m'est inutile pour mon objet.

n prenant sous le signe \sum les valeurs $E(x) + 1$, $E(x) + 2$, $E(x) + 3$, ..., *ad inf.* Comme on a évidemment

$$\int_n^{n+1} \frac{x^2 dz}{z^2} > \frac{x^2}{(n+1)^2},$$

il vient

$$B < \int_{E(x)}^x \frac{x^2 dz}{z^2}$$

ou

$$B < \frac{x^2}{E(x)} < \frac{x^2}{x-1}.$$

Or on a, en vertu de l'inégalité (6),

$$\frac{B}{2} > \sum \omega\left(\frac{x}{n}\right) \quad [n = E(x) + 1, E(x) + 2, \dots, \textit{ad inf.}].$$

Nous avons donc

$$\sum \omega\left(\frac{x}{n}\right) < \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

Définissons maintenant une fonction $\beta(x)$ par les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \beta(x) = \alpha(x) = 1 & \quad \text{pour} \quad x \geq 1, \\ \beta(x) = \omega(x) & \quad \text{»} \quad x < 1, \end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{aligned} & \beta\left(\frac{x}{1}\right) + \beta\left(\frac{x}{2}\right) + \dots + \beta\left(\frac{x}{n}\right) + \dots \\ & = \alpha\left(\frac{x}{1}\right) + \alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \dots + \alpha\left[\frac{x}{E(x)}\right] \\ & \quad + \omega\left[\frac{x}{E(x)+1}\right] + \omega\left[\frac{x}{E(x)+2}\right] + \dots \end{aligned}$$

La première ligne du second membre est égale à $E(x)$ et, par conséquent, plus petite que x ; la seconde ligne est plus petite que

$$\frac{x^2}{2(x-1)}.$$

Il vient donc

$$\beta\left(\frac{x}{1}\right) + \beta\left(\frac{x}{2}\right) + \dots + \beta\left(\frac{x}{n}\right) + \dots < \frac{3x^2 - 2x}{2x - 2}.$$

Le second membre de cette inégalité, divisé par x , tend vers $\frac{3}{2}$ quand x croît indéfiniment; nous pouvons donc prendre x assez grand pour que ce second membre soit plus petit que $2x$ et que

$$(7) \quad \sum \beta\left(\frac{x}{n}\right) < 2x.$$

Cela posé, revenons aux inégalités (5). Comme le rapport de G , de $\log x$, ou de x à $T(x)$ ou à $T'(x)$, tend vers 0 quand x croît indéfiniment, ces inégalités montrent que l'on pourra prendre x_0 assez grand pour que l'on ait, pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0 ,

$$(8) \quad (1 + \varepsilon) T'(x) - 2bx > T(x) > (1 - \varepsilon) T'(x) + 2bx,$$

et cela quels que soient les nombres positifs ε et b .

Je dis maintenant que l'on ne saurait avoir pour toutes les valeurs positives de x

$$(9) \quad (1 + \varepsilon) \psi'(x) < \psi(x) + b\beta(x),$$

car, s'il en était ainsi, il viendrait

$$(1 + \varepsilon) \sum \psi\left(\frac{x}{n}\right) < \sum \psi\left(\frac{x}{n}\right) + b \sum \beta\left(\frac{x}{n}\right)$$

ou *a fortiori*

$$(1 + \varepsilon) T'(x) < T(x) + 2bx.$$

L'inégalité (8) n'aurait donc jamais lieu, même pour les grandes valeurs de x .

Je dis ensuite qu'on ne saurait trouver un nombre x_0 assez grand pour que l'on eût, pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0 ,

$$(10) \quad (1 + \varepsilon) \psi'(x) < \psi(x).$$

Si cela était, en effet, on pourrait trouver un nombre b assez grand pour satisfaire aux conditions suivantes. Pour

$$1 \leq x \leq x_0,$$

on devra avoir

$$b > (1 + \varepsilon) \psi'(x) - \psi(x),$$

d'où

$$(1 + \varepsilon) \psi' < \psi + b\beta(x), \quad \text{car} \quad \beta(x) = 1,$$

et, de plus,

$$b > 1 + \varepsilon,$$

d'où, pour $x < 1$,

$$(1 + \varepsilon) \psi' < \psi + b\beta(x), \quad \text{car} \quad \psi' = \beta = \omega, \quad \psi = 0.$$

L'inégalité (9) aurait donc lieu pour toutes les valeurs positives de x , ce qui est absurde.

Nous devons donc conclure que l'on a une infinité de fois (je veux dire pour une infinité de valeurs entières de x)

$$(1 + \varepsilon) \psi'(x) > \psi(x).$$

On démontrerait absolument de la même manière :

1° Qu'on ne saurait avoir, pour toutes les valeurs positives de x ,

$$(1 - \varepsilon) \psi'(x) > \psi(x) - b\beta(x);$$

2° Qu'on aura une infinité de fois

$$(1 - \varepsilon) \psi'(x) < \psi(x).$$

Ainsi, quelque petit que soit ε , le rapport $\frac{\psi}{\psi'}$ est une infinité de fois plus petit que $1 + \varepsilon$ et une infinité de fois plus grand que $1 - \varepsilon$.

Or le rapport $\frac{\psi}{x}$ tend vers l'unité quand x tend vers $+\infty$.

Donc, quelque petit que soit ε , le rapport $\frac{\psi}{x}$ est une infinité de

fois plus petit que $1 + \varepsilon$ et une infinité de fois plus grand que $1 - \varepsilon$.

Si ce rapport tend vers une limite, cette limite ne peut donc être que l'unité.

C. Q. F. D.

On peut déduire également des inégalités (5) une autre conséquence.

Envisageons l'expression suivante, introduite par M. Tchebicheff,

$$U(x) = T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right)$$

et posons de même

$$U'(x) = T'(x) + T'\left(\frac{x}{30}\right) - T'\left(\frac{x}{2}\right) - T'\left(\frac{x}{3}\right) - T'\left(\frac{x}{5}\right).$$

Nous pourrions conclure des inégalités (5) que

$$\begin{aligned} U'(x) - 2C - \log x - \log \frac{x}{30} \\ < U(x) < U'(x) + 3C + \log \frac{x}{2} + \log \frac{x}{3} + \log \frac{x}{5}. \end{aligned}$$

Ces inégalités ont lieu pour $x > 30$.

Mais M. Tchebicheff a montré ensuite que

$$U(x) = \sum \pm \psi\left(\frac{x}{v}\right),$$

en désignant par v ceux des nombres entiers qui sont premiers avec 30 ou qui sont divisibles par 6, par 10 ou par 15; chaque terme est affecté du signe + dans le cas où le nombre v correspondant est premier avec 30 et du signe - si ce nombre est divisible par 6, 10 ou 15; il en résulte d'ailleurs que, si l'on range les termes de façon que le nombre v aille constamment en croissant, les termes seront alternativement positifs et négatifs.

Nous aurons de même

$$U'(x) = \sum \pm \psi'\left(\frac{x}{v}\right).$$

M. Tchebicheff a remarqué que la série

$$\sum \pm \psi\left(\frac{x}{v}\right)$$

a ses termes alternativement positifs et négatifs et que leur valeur absolue va constamment et indéfiniment en décroissant, et il en a déduit les inégalités

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < U(x) < \psi(x).$$

Au contraire, la série

$$\sum \pm \psi'\left(\frac{x}{v}\right)$$

n'a pas des termes dont la valeur absolue va constamment en décroissant. Mais il est aisé de tourner cette difficulté. Nous avons, en effet,

$$\sum \pm \psi'\left(\frac{x}{v}\right) = \sum \pm \omega\left(\frac{x}{v}\right) - C \sum \pm \alpha\left(\frac{x}{v}\right).$$

Les deux séries

$$\sum \pm \omega\left(\frac{x}{v}\right)$$

et

$$\sum \pm \alpha\left(\frac{x}{v}\right) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \pm 1 \mp 0 \pm 0 \mp \dots$$

ont leurs termes alternativement positifs et négatifs et indéfiniment décroissants; on a donc

$$\omega(x) > \sum \pm \omega\left(\frac{x}{v}\right) > \omega(x) - \omega\left(\frac{x}{6}\right),$$

$$\sum \pm \alpha\left(\frac{x}{v}\right) = 1 \text{ ou } 0,$$

d'où

$$\omega(x) - \omega\left(\frac{x}{6}\right) - C < U'(x) < \omega(x)$$

ou, si $x > 6$,

$$\psi'(x) - \psi'\left(\frac{x}{6}\right) - C < U'(x) < \psi'(x) + C.$$

Si nous comparons aux inégalités de M. Tchebicheff et à celles qui limitent la différence $U'(x) - U(x)$, il vient

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < \omega(x) + 4C + 3 \log x - \log 30,$$

$$\psi(x) > \omega(x) - \omega\left(\frac{x}{6}\right) - 2C - 2 \log x + \log 30.$$

Ces inégalités sont moins précises que celles de M. Tchebicheff. Elles n'ont donc d'autre intérêt que celui qui peut s'attacher à la méthode qui a permis de les obtenir.

Je signalerai, en passant, une formule d'où l'on pourrait tirer diverses inégalités analogues à celles de M. Tchebicheff; c'est la suivante :

$$T\left(\frac{x}{n}\right) - T\left(\frac{x}{n+1}\right) - T\left[\frac{x}{n(n+1)}\right] = \sum \pm \psi\left(\frac{x}{v}\right).$$

Dans la série du second membre figurent tous les nombres v qui sont divisibles par n ou par $n+1$, et les termes de cette série sont alternativement positifs et négatifs.

2. Posons

$$V(x, n) = E\left(\frac{x}{1}\right) + E\left(\frac{x}{2}\right) + \dots + E\left(\frac{x}{n}\right).$$

J'observe que

$$\frac{E(x)}{p} - 1 < E\left(\frac{x}{p}\right) < \frac{E(x)}{p}.$$

Si nous posons alors

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

il viendra donc

$$E(x) S_n > V(x, n) > E(x) S_n - n + 1.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \log \frac{n}{n-1},$$

d'où

$$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n;$$

d'où, enfin,

$$E(x)(1 + \log n) > V(x, n) > E(x) \log(n+1) - n + 1.$$

Si n est plus grand que $E(x)$, on a évidemment

$$V(x, n) = V[x, E(x)];$$

car

$$E\left(\frac{x}{p}\right) = 0 \quad \text{si } p > E(x).$$

Si donc nous désignons par $V(x)$ la série indéfinie

$$V(x) = E\left(\frac{x}{1}\right) + E\left(\frac{x}{2}\right) + \dots + E\left(\frac{x}{n}\right) + \dots,$$

on aura

$$V(x) = V[x, E(x)],$$

d'où

$$E(x)[1 + \log E(x)] > V(x) > E(x) \log[E(x) + 1] - E(x) + 1.$$

Ces inégalités montrent déjà que la valeur asymptotique de $V(x)$ est $x \log x$, c'est-à-dire que, quand x croît indéfiniment, on a

$$\lim \frac{V(x)}{x \log x} = 1.$$

Mais il est possible de trouver des inégalités plus serrées.

Combien, en effet, dans la série $V(x)$, y a-t-il de termes plus grands que p ou au moins égaux à p ? Il y en a évidemment $E\left(\frac{x}{p}\right)$.

Combien y en a-t-il qui soient précisément égaux à p ? Il y en a évidemment $E\left(\frac{x}{p}\right) - E\left(\frac{x}{p+1}\right)$.

Si nous posons

$$q = E\left(\frac{x}{p+1}\right),$$

les q premiers termes de $V(x)$ seront plus grands que p , nous aurons ensuite

$$\begin{aligned} E\left(\frac{x}{p}\right) & - E\left(\frac{x}{p+1}\right) \text{ termes égaux à } p, \\ E\left(\frac{x}{p-1}\right) & - E\left(\frac{x}{p}\right) \text{ termes égaux à } p-1, \\ & \dots\dots\dots \\ E\left(\frac{x}{2}\right) & - E\left(\frac{x}{3}\right) \text{ termes égaux à } 2, \\ E(x) & - E\left(\frac{x}{p}\right) \text{ termes égaux à } 1. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} V(x) = V(x, q) + p \left[E\left(\frac{x}{p}\right) - E\left(\frac{x}{p+1}\right) \right] \\ + (p-1) \left[E\left(\frac{x}{p-1}\right) - E\left(\frac{x}{p}\right) \right] + \dots \\ + 2 \left[E\left(\frac{x}{2}\right) - E\left(\frac{x}{3}\right) \right] + \left[E(x) - E\left(\frac{x}{p}\right) \right] \end{aligned}$$

ou bien

$$V(x) = V(x, q) + E(x) + E\left(\frac{x}{2}\right) + \dots + E\left(\frac{x}{p}\right) - p E\left(\frac{x}{p+1}\right),$$

ou enfin

$$V(x) = V(x, q) + V(x, p) - pq.$$

Ainsi $V(x)$ est compris entre les limites suivantes

$$E(x)(S_p + S_q) - pq$$

et

$$E(x)(S_p + S_q) - pq - p - q + 2.$$

La différence entre ces deux limites est $p + q - 2$. Si donc p est la racine carrée de x calculée à une unité près par défaut, de sorte que

$$p = E(\sqrt{x}),$$

q sera au plus égal à $p + 2$, de sorte que la différence entre nos deux

limites sera de même ordre de grandeur que la racine carrée de x , tandis que, dans les inégalités que j'avais d'abord établies, la différence entre les deux limites était de même ordre de grandeur que x ; car elle était égale à $E(x) - 1$.

De l'équation

$$\lim \frac{V(x)}{x \log x} = 1,$$

on peut déduire une nouvelle démonstration de ce fait que l'on a une infinité de fois

$$\psi(x) > ax,$$

si a est plus petit que 1, et une infinité de fois

$$\psi(x) < ax,$$

si a est plus grand que 1. Cette nouvelle démonstration se prête mieux que la première à une généralisation.

Supposons, en effet, que l'une de ces deux propositions ne soit pas vraie, la première, par exemple, c'est-à-dire que l'on n'ait pas une infinité de fois

$$\psi(x) > ax \quad (a < 1).$$

Alors on pourra trouver un nombre x_0 assez grand pour que, pour $x > x_0$, on ait

$$\psi(x) < ax.$$

On pourra alors trouver un nombre b assez grand pour que, pour toutes les valeurs de x , plus grandes que 1, on ait

$$\psi(x) < ax + b - a;$$

en effet, la différence $\psi(x) - ax$, quand on fait varier x depuis 1 jusqu'à x_0 , reste limitée.

Il viendrait alors

$$\psi(x) < aE(x) + b\alpha(x)$$

pour $x > 1$, puisque $\alpha(x) = 1$, $E(x) > x - 1$; et pour $x < 1$, on

aurait

$$\psi(x) = aE(x) + b\alpha(x),$$

puisque

$$\psi(x) = E(x) = \alpha(x) = o.$$

Donc

$$\sum \psi\left(\frac{x}{n}\right) < a \sum E\left(\frac{x}{n}\right) + b \sum \alpha\left(\frac{x}{n}\right)$$

ou

$$T(x) < aV(x) + bE(x)$$

ou

$$\frac{T(x)}{x \log x} < a \frac{V(x)}{x \log x} + b \frac{E(x)}{x \log x}.$$

Mais cette inégalité est impossible, puisque le premier membre tend vers 1 quand x croît indéfiniment et que les deux termes du second membre tendent respectivement vers $a < 1$ et vers o .

La proposition que nous avons en vue est donc démontrée *per absurdum*.

Cette proposition étant établie pour $\psi(x)$, il est aisé d'en trouver d'analogues pour $\theta(x)$ et pour la fonction $\varphi(x)$ qui exprime combien il y a de nombres premiers qui ne surpassent pas x .

On a, en effet,

$$\psi(x) - 2\psi\sqrt{x} = \theta(x) - \theta\sqrt{x} + \theta^2\sqrt{x} - \theta^3\sqrt{x} + \dots,$$

d'où

$$\psi(x) - 2\psi\sqrt{x} < \theta(x) < \psi(x).$$

Je dis alors qu'on aura une infinité de fois

$$\theta(x) < ax,$$

si $a > 1$; car on aura une infinité de fois

$$\theta(x) < \psi(x) < ax.$$

Je dis maintenant qu'on aura une infinité de fois

$$\theta(x) > ax,$$

si $a < 1$. En effet, il résulte des inégalités de M. Tchebicheff que l'on peut prendre x assez grand pour que

$$\psi(x) < \frac{4}{3}x;$$

on a donc, si x est assez grand,

$$\theta(x) > \psi(x) - 2\psi\sqrt{x} > \psi(x) - \frac{12}{3}\sqrt{x}$$

et, par conséquent, une infinité de fois

$$\theta(x) > ax - \frac{12}{3}\sqrt{x},$$

si $a < 1$, et une infinité de fois

$$\theta(x) > a'x,$$

si $a' < a$.

C. Q. F. D.

Donc, si $\frac{\theta(x)}{x}$ tend vers une limite, cette limite ne peut être que l'unité.

3. Passons à la fonction $\varphi(x)$ qui exprime combien il y a de nombres premiers plus petits ou égaux à x .

On a, par définition,

$$\theta(x) = \sum \log p \quad (p \leq x)$$

et

$$\varphi(x) = \sum (1);$$

tous les termes du second membre sont égaux à 1, et à chaque nombre premier p plus petit que x correspond un de ces termes. On aura donc

$$\varphi(x) \log x = \sum \log x$$

et, puisque

$$\log x \geq \log p,$$

on aura

$$\varphi(x) \log x > \theta(x).$$

Comme on a une infinité de fois

$$\theta(x) > ax, \quad \text{si} \quad a < 1,$$

on aura une infinité de fois

$$\varphi(x) > \frac{ax}{\log x}.$$

Pour trouver une autre limite de $\varphi(x)$, je vais faire usage d'un artifice qui est dû à M. Sylvester.

Comme il est clair que le $n^{\text{ième}}$ nombre premier est plus grand que le $n^{\text{ième}}$ nombre entier, il viendra

$$T[\varphi(x)] < \theta(x).$$

Or on a, si b est plus petit que 1 et à partir d'un certain rang,

$$T(x) > bx \log x.$$

On aura donc, si x est assez grand,

$$\theta(x) > b\varphi(x) \log \varphi(x).$$

Or

$$\log \varphi(x) > \log \theta(x) - \log \log x;$$

donc

$$\theta(x) > b\varphi(x) [\log \theta(x) - \log \log x]$$

et

$$\varphi(x) < \frac{1}{b} \frac{\theta(x)}{\log \theta(x) - \log \log x}.$$

Or on a une infinité de fois

$$\theta(x) < ax, \quad \text{si} \quad a > 1.$$

Or la fonction

$$\frac{y}{\log y - \log \log x},$$

considérée comme fonction de y , est croissante pourvu que

$$y > 1 + \log x.$$

Or, si x est assez grand, on aura certainement

$$\theta(x) > 1 + \log x$$

et, par conséquent, on aura une infinité de fois

$$\frac{\theta(x)}{\log \theta(x) - \log \log x} < \frac{ax}{\log(ax) - \log \log x}.$$

Il est clair que le rapport de

$$\frac{ax}{\log(ax) - \log \log x} \text{ à } \frac{ax}{\log x}$$

tend vers l'unité quand x croît indéfiniment. Si donc x est assez grand et $a' > a$, on aura

$$\frac{ax}{\log(ax) - \log \log x} < \frac{a'x}{\log x}.$$

On aura donc une infinité de fois

$$\varphi(x) < \frac{a'}{b} \frac{x}{\log x}.$$

Or, si c est un nombre quelconque plus grand que 1, on pourra toujours trouver trois nombres a, a', b , tels que

$$c = \frac{a'}{b}, \quad a' > a > 1 > b.$$

On aura donc une infinité de fois

$$\varphi(x) < \frac{cx}{\log x}.$$

Si donc le rapport de $\varphi(x)$ à $\frac{x}{\log x}$ tend vers une limite, cette limite

ne peut être que l'unité. Ce résultat est contenu comme cas très particulier dans les premières propositions de M. Tchebicheff, et je n'ai cru devoir en donner une nouvelle démonstration que parce qu'elle se prête mieux à la généralisation que j'ai en vue.

Ce raisonnement est dû à M. Sylvester; mes inégalités sont moins précises que celles de l'éminent géomètre anglais, mais elles sont analogues et me suffisent pour mon objet.

Posons, à l'exemple de M. Tchebicheff,

$$A = 0,9212.$$

Les mêmes raisonnements, combinés aux inégalités de M. Tchebicheff, conduiront facilement aux résultats suivants :

On aura, à partir d'une certaine valeur de x ,

$$\varphi(x) < \frac{ax}{\log x}, \quad \text{si} \quad a > \frac{6}{5}A$$

et

$$\varphi(x) > \frac{bx}{\log x}, \quad \text{si} \quad b < A.$$

4. Avant d'étendre les résultats de M. Tchebicheff aux nombres idéaux, je vais rappeler succinctement la définition et les propriétés de ces nombres, en renvoyant, pour plus de détails, à l'Ouvrage de M. Dedekind sur les nombres entiers algébriques (Paris, Gauthier-Villars, 1877).

On appelle nombre algébrique toute racine de l'équation

$$(1) \quad a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

dont les coefficients a_i sont des entiers ordinaires. Ce nombre algébrique est dit *entier* si le coefficient a_m est égal à 1.

Considérons maintenant tous les nombres de la forme suivante

$$(2) \quad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1},$$

où les coefficients α_i sont des nombres rationnels ordinaires, et où x satisfait à l'équation (1). Ce sont évidemment des nombres algébriques,

et nous dirons qu'ils appartiennent tous au corps défini par l'équation (1).

Parmi les nombres algébriques qui font partie d'un corps, nous distinguerons ceux qui sont entiers, et nous dirons qu'ils appartiennent à un *système* de nombres complexes, système défini par l'équation (1).

Il résulte de ces définitions que la somme et le produit de deux nombres complexes d'un système sont deux nombres complexes du même système.

Pour éclaircir ces définitions, supposons que l'équation (1) s'écrive

$$x^2 + 3 = 0;$$

les nombres du corps correspondant seront de la forme

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{-3},$$

α_0 et α_1 étant rationnels. Si α_0 et α_1 sont entiers, le nombre y sera certainement un nombre entier algébrique et appartiendra, par conséquent, au système de nombres complexes considéré. Mais cette condition n'est pas nécessaire. Si, en effet, $2\alpha_0$ et $2\alpha_1$ sont deux entiers impairs, nous aurons

$$4\alpha_0^2 \equiv 4\alpha_1^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

et, par conséquent,

$$4\alpha_0^2 + 12\alpha_1^2 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Le nombre y sera donc entier algébrique et fera partie du système, puisqu'il satisfera à l'équation

$$y^2 - 2\alpha_0 y + (\alpha_0^2 + 3\alpha_1^2) = 0$$

dont les coefficients sont entiers.

Cela posé, considérons p nombres complexes d'un même système

$$y_1, y_2, \dots, y_p.$$

Soient ensuite

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

p nombres complexes arbitraires appartenant encore au même système.

Le nombre

$$z = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \dots + \alpha_p \gamma_p$$

fera évidemment encore partie de ce système. L'ensemble de tous les nombres complexes z que l'on obtient, en donnant aux coefficients complexes arbitraires α_i toutes les valeurs possibles, s'appellera un *idéal* et les p nombres $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ formeront la *trame* de l'idéal.

Deux nombres complexes u_1 et u_2 sont *congruents* par rapport à un idéal, quand leur différence $u_1 - u_2$ fait partie de cet idéal; on peut dire aussi qu'ils appartiennent à la même *classe* par rapport à cet idéal. Le nombre des classes entre lesquelles les nombres complexes se répartissent ainsi par rapport à un idéal donné s'appelle la *norme* de cet idéal.

Un idéal A est *divisible* par un autre idéal A' quand tous les nombres complexes qui appartiennent à A font aussi partie de A' .

Définissons maintenant le produit de deux idéaux A et B .

Supposons que la trame de A se compose de nombres complexes

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$$

et celle de B des nombres complexes

$$z_1, z_2, \dots, z_q;$$

celle du produit AB se composera des pq nombres complexes

$$z_i \gamma_k \quad (i = 1, 2, \dots, q; k = 1, 2, \dots, p).$$

Il est clair que le produit AB est divisible par A et par B ; mais M. Dedekind a démontré la réciproque, à savoir que, si un idéal B est divisible par A , il sera le produit de A par un autre idéal C .

La norme du produit de deux idéaux est égale au produit des normes de ces idéaux.

L'idéal unité est celui dont la trame se réduit au nombre 1 et qui se compose, par conséquent, de tous les nombres complexes du système. Sa norme est égale à 1. Un idéal quelconque est divisible par l'idéal unité.

Un idéal est *premier* s'il n'est divisible que par lui-même ou par l'idéal unité. M. Dedekind a alors démontré son théorème fondamental : *Un idéal quelconque peut toujours être décomposé d'une manière et d'une seule en facteurs idéaux premiers.*

Il peut arriver que deux trames

$$\begin{array}{c} y_1, y_2, \dots, y_p, \\ y'_1, y'_2, \dots, y'_q \end{array}$$

soient équivalentes et donnent naissance au même idéal. On peut donc se proposer le problème suivant : Étant donné un idéal défini par sa trame, réduire cette trame à sa plus simple expression, c'est-à-dire la remplacer par une autre trame équivalente, de façon à abaisser autant que possible le nombre des entiers complexes dont elle se compose. Ce nombre peut généralement être réduit à deux et quelquefois à un. Dans ce dernier cas, l'idéal se compose de tous les multiples de l'entier complexe unique qui forme la trame, et l'on dit que c'est un idéal *principal*.

Considérons maintenant trois idéaux A, B et C qui ne soient pas principaux et supposons que les produits AC et BC soient des idéaux principaux. Nous dirons alors que les deux idéaux principaux A et B appartiennent à la même classe. Le nombre des classes entre lesquelles se répartissent ainsi les idéaux (et qu'il ne faut pas confondre avec les classes entre lesquelles se répartissent les nombres complexes par rapport à un idéal donné) est fini.

Nous considérerons en particulier le système d'idéaux que l'on obtient en partant de l'équation

$$x^2 + 1 = 0.$$

Le système des nombres complexes correspondants se composera donc

de tous les nombres complexes de Gauss

$$a + bi,$$

où a et b sont entiers.

Il n'y a alors qu'une seule classe d'idéaux, et tous les idéaux sont principaux. Un idéal quelconque se composera donc de tous les multiples d'un nombre complexe $a + bi$, qui formera sa trame, et il aura pour norme $a^2 + b^2$ et pourra être représenté lui-même par le symbole $a + bi$. Mais il importe de remarquer que deux nombres complexes $a + bi$ et $c + di$ peuvent donner naissance au même idéal.

Si, en effet,

$$c = -a, \quad d = -b,$$

ou si

$$c = -b, \quad d = a,$$

ou si

$$c = b, \quad d = -a,$$

$c + di$ est multiple de $a + bi$ et $a + bi$ multiple de $c + di$, de sorte que les deux idéaux représentés par les symboles $a + bi$ et $c + di$ sont identiques; c'est d'ailleurs le seul cas où cela ait lieu.

Les idéaux premiers sont de deux sortes : les uns ont pour norme un nombre premier ordinaire de la forme $4n + 1$, les autres ont pour norme le carré d'un nombre premier ordinaire de la forme $4n + 3$.

Remarquons que, si p est un nombre premier ordinaire de la forme $4n + 1$, il y aura deux idéaux premiers de norme p ; si, au contraire, p est premier de la forme $4n + 3$, il n'y aura qu'un seul idéal premier de norme p^2 .

En effet, un nombre premier p de la forme $4n + 1$ peut, d'une manière et d'une seule, se décomposer en une somme de deux carrés

$$p = x^2 + y^2,$$

et les deux idéaux $x + iy$ et $x - iy$ sont les deux idéaux premiers de norme p .

Si, au contraire, p est de la forme $4n + 3$, il n'y aura qu'un idéal premier de norme p^2 , qui a pour trame le nombre p lui-même, et est représenté par le symbole p .

Il y a encore un idéal premier qui a pour norme 2 et qui ne rentre dans aucune de ces deux catégories : c'est celui auquel on peut donner pour symbole $1 + i$ ou $1 - i$.

Ainsi, le nombre des idéaux premiers dont la norme ne dépasse pas x est égal à deux fois le nombre des nombres premiers ordinaires de la forme $4n + 1$ qui ne dépassent pas x , plus le nombre des nombres premiers ordinaires de la forme $4n + 3$ qui ne dépassent pas \sqrt{x} , plus 1.

Soit $m + ni$ le symbole d'un idéal quelconque ; nous savons que cet idéal ne change pas quand on change m et n en $-m$ et $-n$, ou bien en $-n$ et m , ou bien encore en $-n$ et $-m$. On obtiendra donc tous les idéaux possibles, et l'on n'obtiendra chacun d'eux qu'une fois, en donnant à m et à n toutes les valeurs entières qui satisfont aux conditions

$$m \geq 1, \quad n \geq 0.$$

Revenons au cas général.

Soient A et B deux idéaux quelconques, principaux ou non. Le symbole

$$\sqrt{\frac{A}{B}}$$

n'a, en général, aucun sens. Nous conviendrons, néanmoins, de définir la norme de ce symbole en disant qu'elle est égale à la racine $p^{\text{ième}}$ de celle de A, divisée par la racine $p^{\text{ième}}$ de celle de B.

Si l'idéal A est principal, il se compose de tous les multiples d'un nombre entier complexe y ; nous dirons que la norme de ce nombre complexe y est égale à celle de l'idéal principal auquel il a donné naissance. Si ce nombre complexe

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{m-1} x^{m-1},$$

est réel, ce qui arrive si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1}$, sa norme se réduit à y^m , m étant le degré de l'équation (1). Si donc y est un nombre réel *non entier*, nous pourrons encore dire que sa norme est égale à y^m ; et

nous conviendrons enfin de dire, si y est un nombre réel non entier et A un idéal, que la norme de $\sqrt[p]{\frac{y}{A}}$ est égale à la racine $p^{\text{ième}}$ de celle de y , divisée par la racine $p^{\text{ième}}$ de celle de A .

5. Occupons-nous maintenant d'étendre à ces idéaux premiers les théorèmes de M. Tchebicheff, en employant des notations analogues.

Soit x un idéal quelconque.

Soit $T(x)$ la somme des logarithmes des normes de tous les idéaux dont la norme ne surpasse pas celle de x .

Soit $\theta(x)$ la somme des logarithmes des normes de tous les idéaux premiers dont la norme ne surpasse pas celle de x .

Il résulte d'abord de là que si x_0 et x_1 sont deux idéaux de même norme, on aura

$$T(x_0) = T(x_1), \quad \theta(x_0) = \theta(x_1).$$

Il peut arriver qu'on ne sache pas ce qu'on doit entendre par $\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$; mais nous pourrions toujours désigner par $\theta \sqrt[m]{\frac{x}{n}}$ la somme des logarithmes des normes de tous les idéaux premiers dont la norme ne surpasse pas la racine $m^{\text{ième}}$ de celle de x divisée par la racine $m^{\text{ième}}$ de celle de n .

Je dis alors que l'on aura

$$(1) \quad T(x) = \sum \theta \sqrt[m]{\frac{x}{n}},$$

la sommation étant étendue, d'une part, à tous les entiers réels positifs m , et, d'autre part, à tous les idéaux n du système.

Soit, en effet, $E(x)$ le nombre des idéaux dont la norme ne surpasse pas celle de x , et, par conséquent, $E \sqrt[m]{\frac{x}{n}}$ le nombre des idéaux dont la norme ne surpasse pas la racine $m^{\text{ième}}$ de celle de x divisée par la racine $m^{\text{ième}}$ de celle de n .

Soit $\alpha \sqrt[m]{\frac{x}{n}}$ une fonction définie comme il suit :

$$\alpha \sqrt[m]{\frac{x}{n}} = 0, \quad \text{si norme } \sqrt[m]{\frac{x}{n}} < 1,$$

$$\alpha \sqrt[m]{\frac{x}{n}} = 1, \quad \text{si norme } \sqrt[m]{\frac{x}{n}} \geq 1,$$

la norme de $\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$ étant définie comme au paragraphe précédent.

Il résulte de cette définition que

$$\alpha \sqrt[m]{\frac{x}{n}} = \alpha \left(\frac{x}{n} \right).$$

Toutes ces définitions s'étendent immédiatement au cas où x , au lieu d'être un idéal, est un nombre réel ordinaire positif entier ou non entier ; nous avons, en effet, défini au paragraphe précédent ce qu'on doit entendre par la norme de $\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$.

Cela posé, on a évidemment

$$(2) \quad E(x) = \sum \alpha \left(\frac{x}{n} \right).$$

En effet, ceux des termes du second membre qui seront égaux à 1 et non pas à 0 seront ceux qui seront tels que

$$\text{norme } n \leq \text{norme } x,$$

et leur nombre sera précisément $E(x)$.

Cela posé, je dis que

$$(3) \quad \begin{cases} T(x) = \sum \left[E\left(\frac{x}{p}\right) \log n p + E\left(\frac{x}{p^2}\right) \log n p + \dots \right] \\ \quad \quad \quad = \sum E\left(\frac{x}{p^m}\right) \log n p. \end{cases}$$

Nous écrivons, pour abrégé, $\log n p$ pour

\log norme de p .

La sommation du second membre doit être étendue à tous les idéaux premiers p et à tous les nombres entiers réels et positifs m .

En effet, $T(x)$ est, par définition, la somme des logarithmes des normes de tous les idéaux dont la norme ne dépasse pas celle de x . Si nous supposons tous ces idéaux décomposés en leurs facteurs premiers, $T(x)$ sera la somme des logarithmes des normes de tous ces facteurs premiers.

Combien de fois entrera, dans cette somme, le logarithme de la norme de p ? Il y entrera :

1° Autant de fois qu'il y aura d'idéaux divisibles par p . Il y en aura évidemment $E\left(\frac{x}{p}\right)$; car, si y est un idéal divisible par p et dont la norme ne dépasse pas celle de x , on pourra trouver un idéal z tel que $zp = y$, et dont la norme ne dépasse pas celle de $\frac{x}{p}$;

2° Autant de fois qu'il y aura d'idéaux divisibles par p^2 , c'est-à-dire $E\left(\frac{x}{p^2}\right)$ fois; car un idéal divisible par p^2 contient le facteur p deux fois et non pas seulement une fois;

3° Autant de fois qu'il y aura d'idéaux divisibles par p^3 , c'est-à-dire $E\left(\frac{x}{p^3}\right)$ fois; car un pareil idéal contient le facteur p non pas deux fois, mais trois fois.

Et ainsi de suite.

La formule (3) est donc démontrée.

On aura, d'autre part,

$$(4) \quad \theta(x) = \sum z\left(\frac{x}{p}\right) \log n p,$$

la sommation étant étendue à tous les idéaux premiers p .

En effet, $\theta(x)$ est la somme des logarithmes des normes des idéaux premiers dont la norme ne dépasse pas x . Le terme $\log n p$ devra donc

entrer dans l'expression de $\theta(x)$, avec le coefficient 1 ou avec le coefficient 0, suivant que la norme de p ne surpassera pas ou surpassera celle de x , c'est-à-dire suivant que $\alpha\left(\frac{x}{p}\right)$ sera égal à 1 ou à 0.

On en déduit

$$\theta \sqrt[m]{\frac{x}{n}} = \sum \alpha\left(\frac{1}{p} \sqrt[m]{\frac{x}{n}}\right) \log n p = \sum \alpha\left(\frac{x}{n p^m}\right) \log n p,$$

la sommation étant étendue à tous les idéaux premiers p ,

$$\sum \theta \sqrt[m]{\frac{x}{n}} = \sum \alpha\left(\frac{x}{n p^m}\right) \log n p,$$

la sommation étant étendue : 1^o à tous les idéaux premiers p ; 2^o à tous les idéaux possibles n ; 3^o à tous les entiers réels et positifs m .

D'autre part, la combinaison des formules (2) et (3) donne

$$T(x) = \sum E\left(\frac{x}{p^m}\right) \log n p = \sum \alpha\left(\frac{x}{n p^m}\right) \log n p.$$

La formule (1) est donc démontrée. Je l'écrirai sous la forme suivante, en introduisant une fonction auxiliaire $\psi(x)$:

$$T(x) = \sum \psi\left(\frac{x}{n}\right), \quad \psi(x) = \sum \theta \sqrt[m]{x}.$$

6. Bornons-nous maintenant aux idéaux qui se rapportent à l'équation $x^2 + 1 = 0$, et qui, comme nous l'avons vu, peuvent être représentés par le symbole $m + ni$.

Nous aurons besoin de savoir calculer la valeur asymptotique pour x très grand de certaines sommes de la forme suivante

$$\sum \zeta(m, n),$$

la sommation étant étendue à tous les idéaux $m + ni$ dont la norme ne

dépasse pas celle d'un nombre réel donné x , c'est-à-dire à tous les systèmes de valeurs de m et de n telles que

$$(1) \quad m \geq 1, \quad n \geq 0, \quad m^2 + n^2 \leq x^2.$$

Supposons d'abord que la fonction $\varphi(\xi, \eta)$ soit constamment positive et croissante, c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi(\xi + h, \eta + k) > \varphi(\xi, \eta),$$

si h et k sont positifs.

On aura alors

$$\varphi(m, n) < \iint \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta < \varphi(m+1, n+1),$$

l'intégrale double étant étendue à la surface du carré qui a pour sommets les quatre points

$$\begin{aligned} (\xi = m, \eta = n; \xi = m+1, \eta = n; \\ \xi = m, \eta = n+1; \xi = m+1, \eta = n+1), \end{aligned}$$

et que j'appellerai, pour abrégé, le carré (m, n) .

Nous aurons donc

$$\sum \varphi(m, n) < \iint \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

l'intégrale double étant étendue à tous les carrés (m, n) satisfaisant aux conditions

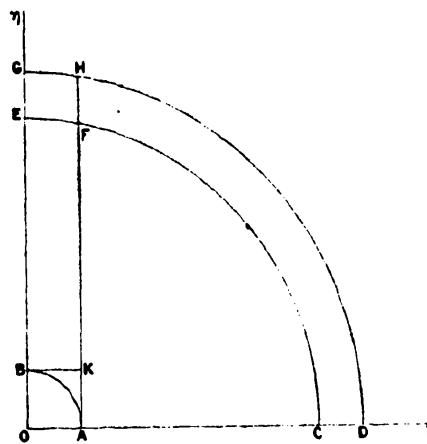
$$(1) \quad m^2 + n^2 = x^2, \quad m \leq 1, \quad n \leq 0.$$

Or tous ces carrés sont tout entiers contenus dans l'aire limitée par

les droites $\xi = 1$, $\eta = 0$ et par le cercle

$$\xi^2 + \eta^2 = (x + \sqrt{2})^2.$$

Fig. 1.



$$\begin{aligned} OA = OB &= 1, \\ OC = OE &= x - \sqrt{2}, \\ OD = OG &= x + \sqrt{2}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire dans l'aire $ACDIIFKA$ de la *fig. 1*.

Ils sont donc tout entiers contenus dans l'aire $ACDHGEBA$ limitée par les deux axes et par les circonférences

$$\xi^2 + \eta^2 = (x + \sqrt{2})^2, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

aire que j'appellerai, pour abrégé, l'aire \mathcal{A} . Notre somme

$$\sum \varphi(m, n)$$

est donc plus petite que l'intégrale double étendue à l'aire \mathcal{A} .

Cherchons maintenant une limite inférieure de notre somme

$$\sum \varphi(m, n),$$

cette somme doit être étendue à tous les idéaux tels que

$$m \geq 1, \quad n \geq 0 \quad (m^2 + n^2) \leq x^2;$$

mais, comme φ est essentiellement positif par hypothèse, cette somme sera plus grande que la même somme étendue aux mêmes combinaisons de valeurs de m et de n , à l'exception des suivantes

$$m = 1, \quad n = 1; \quad m = m, \quad n = 0.$$

De plus, chacun des termes que nous aurons conservés sera plus grand que l'intégrale double étendue au carré $(m - 1, n - 1)$.

Il vient donc

$$\sum \varphi(m, n) > \iint \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

l'intégrale double étant étendue à tous les carrés $(m - 1, n - 1)$ tels que

$$m \geq 1, \quad n \geq 1 \quad (m^2 + n^2) \leq x^2,$$

à l'exception du carré $(0, 0)$.

Soit \mathfrak{A} l'aire recouverte par l'ensemble de ces carrés.

Appelons \mathfrak{A}' l'aire ACFEBKA, limitée par les deux axes, par les côtés BK et AC du carré $(0, 0)$ et par le cercle

$$\xi^2 + \eta^2 = (x - \sqrt{2})^2;$$

cette aire \mathfrak{A}' sera tout entière contenue dans l'aire \mathfrak{A} .

Notre somme

$$\sum \varphi(m, n)$$

sera donc plus grande que l'intégrale double étendue à l'aire \mathfrak{A}' .

Si donc nous désignons par A l'intégrale double étendue à l'aire \mathfrak{A} , par A' cette même intégrale étendue à l'aire \mathfrak{A}' , on aura

$$A > \sum \varphi(m, n) > A'.$$

La différence $A - A'$ est l'intégrale double étendue d'une part au triangle curviligne ABK, d'autre part à l'aire CDHGEFC. Admettons que le rapport

$$\frac{A - A'}{A}$$

tende vers 0 quand x croît indéfiniment; il sera aisé de vérifier que cette condition est remplie dans les diverses applications que je ferai plus loin.

On aura alors

$$\lim \frac{\sum \varphi(m, n)}{A} = 1,$$

ce que nous exprimerons en disant que l'intégrale A est la valeur asymptotique de la somme

$$\sum \varphi(m, n).$$

Supposons maintenant que la fonction $\varphi(\xi, \eta)$ soit constamment positive et décroissante, c'est-à-dire que

$$\varphi(\xi + h, \eta + k) < \varphi(\xi, \eta),$$

si h et k sont positifs.

On aura alors

$$\varphi(m, n) > \iint \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta > \varphi(m+1, n+1),$$

l'intégrale double étant étendue au carré (m, n) .

On aura donc

$$\sum \varphi(m, n) > \iint \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

l'intégrale étant étendue à tous les carrés (m, n) tels que

$$m \geq 1, \quad n \geq 0 \quad (m^2 + n^2) \leq x^2,$$

ou à toute aire contenue tout entière dans l'aire recouverte par l'ensemble de ces carrés.

Tel est le cas de l'aire ACFKA que j'appellerai ε et qui est limitée par les droites $\xi = 1$, $\eta = 0$ et par le cercle

$$\xi^2 + \eta^2 = (x - \sqrt{2})^2.$$

Si donc je désigne par C l'intégrale double étendue à l'aire ε , il viendra

$$\sum \varphi(m, n) > C.$$

Soit maintenant

$$\sum \varphi(m, n) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

La somme

$$\sum \varphi(m, n)$$

toujours étendue à toutes les combinaisons de valeurs de m et de n satisfaisant aux conditions (1), Σ_2 est la même somme étendue aux systèmes de valeurs de m et de n qui satisfont aux conditions

$$(2) \quad m = n = 1$$

ou

$$(2 \text{ bis}) \quad n = 0.$$

Σ_1 est encore la même somme étendue à tous les systèmes des valeurs qui satisfont aux conditions (1), sans satisfaire aux conditions (2) ou (2 bis). On a alors

$$\Sigma_1 < \iint \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

l'intégrale double étant étendue à tous les carrés $(m-1, n-1)$ tels que

$$m \geq 1, \quad n \geq 1 \quad (m^2 + n^2) < x^2,$$

à l'exception du carré $(0, 0)$.

Tous ces carrés sont tout entiers à l'intérieur de l'aire \mathcal{A} .

On a donc

$$\Sigma_1 < A,$$

et par conséquent

$$C < \sum \varphi(m, n) < A + \Sigma_2.$$

Or, dans l'unique application que nous ferons [en supposant $\varphi(m, n) = \frac{1}{m^2 + n^2}$], il est facile de voir que Σ_2 et $C - A$ restent finies quand x croît indéfiniment, tandis que les deux intégrales C et A croissent au delà de toute limite.

On aura donc encore

$$\lim \frac{\Sigma \varphi(m, n)}{A} = 1;$$

c'est-à-dire que A sera encore la valeur asymptotique de $\Sigma \varphi(m, n)$.

Soit d'abord

$$\varphi(m, n) = \log(m^2 + n^2);$$

d'où

$$\Sigma \varphi(m, n) = T(x).$$

La fonction $\log(m^2 + n^2)$ est positive et croissante dans l'aire \mathcal{A} .

La valeur asymptotique de $T(x)$ sera donc l'intégrale

$$A = \iint \log(\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta,$$

étendue à l'aire \mathcal{A} , c'est-à-dire

$$A = \pi \left[\frac{(x + \sqrt{2})^2}{2} \log(x + \sqrt{2}) - \frac{(x + \sqrt{2})^2}{4} \right],$$

ou bien encore

$$\frac{\pi}{2} x^2 \log x,$$

puisque

$$\lim \frac{1}{A} \frac{\pi}{2} x^2 \log x = 1 \quad (\text{pour } x = \infty).$$

Soit maintenant

$$\varphi(m, n) = 1;$$

d'où

$$\Sigma \varphi(m, n) = E(x).$$

La valeur asymptotique de $E(x)$ sera l'intégrale

$$A = \iint d\xi d\eta,$$

étendue à l'aire \mathcal{A} , c'est-à-dire

$$A = \frac{\pi}{4} [(x + \sqrt{2})^2 - 1];$$

ou bien encore

$$\frac{\pi x^2}{4},$$

puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{\pi x^2}{4} = 1 \quad (\text{pour } x = \infty).$$

Soit enfin

$$\varphi(m, n) = \frac{1}{m^2 + n^2}.$$

La fonction φ est cette fois décroissante; la valeur asymptotique de

$$\sum \frac{1}{m^2 + n^2},$$

sera l'intégrale

$$A = \iint \frac{d\xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

étendue à l'aire \mathcal{A} ; c'est-à-dire

$$A = \frac{\pi}{2} \log(x + \sqrt{2}),$$

ou plus simplement

$$\frac{\pi}{2} \log x,$$

puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\log(x + \sqrt{2})} = 1 \quad (\text{pour } x = \infty).$$

Soit maintenant

$$\varphi(m, n) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

il viendra

$$\text{valeur asymptotique } \sum \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \iint \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

L'intégrale étendue à l'aire \mathfrak{A} est égale à

$$\frac{\pi}{2} (x + \sqrt{2} - 1).$$

La valeur asymptotique de $\sum \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ est donc égale à

$$\frac{\pi x}{2},$$

puisque

$$\lim \frac{x}{x + \sqrt{2} - 1} = 1.$$

J'aurai besoin pour ce qui va suivre, non seulement de la valeur asymptotique de $E(x)$, mais d'une limite supérieure et d'une limite inférieure de cette quantité.

Or, d'après ce qui précède, $E(x)$ est plus petit que l'intégrale

$$\iint d\xi d\eta,$$

étendue à l'aire \mathfrak{A} et plus grande que la même intégrale étendue à l'aire \mathfrak{A}' . On a donc

$$\frac{\pi}{4} (x - \sqrt{2})^2 - 1 < E(x) < \frac{\pi}{4} (x + \sqrt{2})^2 - \frac{\pi}{4}.$$

Nous avons supposé que x est un nombre réel positif; si nous voulons avoir deux limites de l'expression

$$E\left(\frac{x}{m + in}\right),$$

il faut, d'après la définition de cette expression, remplacer dans les iné-

galités qui précèdent x par le nombre réel positif qui a pour norme la norme de x divisée par celle de $m + in$, c'est-à-dire par le nombre réel positif

$$\frac{x}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Il vient donc

$$\frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{\sqrt{m^2 + n^2}} - \sqrt{2} \right)^2 - 1 < E \left(\frac{x}{m + in} \right) < \frac{\pi}{4} \left(\frac{x}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \sqrt{2} \right)^2 - \frac{\pi}{4}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{4} \frac{x^2}{m^2 + n^2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \frac{x}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{\pi}{2} - 1 \\ & < E \left(\frac{x}{m + in} \right) < \frac{\pi}{4} \frac{x^2}{m^2 + n^2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \frac{x}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} & E \left(\frac{x}{m + in} \right) - \frac{E(x)}{m^2 + n^2} \\ & < \frac{\pi\sqrt{2}x}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{1}{m^2 + n^2} \right) + \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{1}{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & E \left(\frac{m + in}{x} \right) - \frac{E(x)}{m^2 + n^2} \\ & > \frac{-\pi\sqrt{2}x}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{1}{m^2 + n^2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{\pi}{4} \frac{1}{m^2 + n^2} \end{aligned}$$

ou, *a fortiori*,

$$(1) \quad \left| E \left(\frac{x}{m + in} \right) - \frac{E(x)}{m^2 + n^2} \right| < \frac{\pi x \sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{\pi}{4}.$$

7. Nous allons nous proposer d'évaluer la somme

$$\sum E \left(\frac{x}{m + in} \right),$$

somme étendue à tous les idéaux $m + in$ possibles. Il suffira évidem-

ment de l'étendre à tous les idéaux dont la norme ne dépasse pas celle de x . Car, si la norme de $m + in$ était plus grande que celle de x , on aurait

$$E\left(\frac{x}{m + in}\right) = 0.$$

Étendons, par conséquent, la sommation aux seuls idéaux tels que

$$\text{norme}(m + in) \leq \text{norme } x.$$

Je dis qu'on aura asymptotiquement pour x très grand

$$(2) \quad \sum E\left(\frac{x}{m + in}\right) = \sum \frac{E(x)}{m^2 + n^2};$$

je veux dire que le rapport des deux membres tend vers l'unité quand x croît indéfiniment.

En effet, la différence entre les deux membres de (2) est, en vertu de l'inégalité (1), plus petite en valeur absolue que

$$(3) \quad \pi x \sqrt{2} \sum \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \sum \frac{\pi}{4}.$$

Il est facile de trouver la valeur asymptotique de cette expression (3), car, d'une part, nous connaissons celle de $\sum \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ qui est

$$\frac{\pi x}{2},$$

et d'autre part

$$\sum \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} E(x)$$

a pour valeur asymptotique

$$\frac{\pi^2 x^2}{16}.$$

La valeur asymptotique de (3) est donc

$$\frac{\pi^2 x^2}{16} (8\sqrt{2} + 1).$$

Considérons maintenant le second membre de (2); sa valeur asymptotique sera

$$E(x) \sum \frac{1}{m^2 + n^2} = \left(\frac{\pi}{4} x^2\right) \left(\frac{\pi}{2} \log x\right) = \frac{\pi^2}{8} x^2 \log x.$$

La comparaison de cette valeur asymptotique avec celle de (3) montre que le rapport de (3) au second membre de (2) a pour limite 0 et par conséquent que le rapport des deux membres de (2) a pour limite 1.

C. Q. F. D.

Donc l'expression

$$\sum E\left(\frac{x}{m + in}\right)$$

a pour valeur asymptotique

$$\frac{\pi^2}{8} x^2 \log x.$$

8. On peut tirer de là des conséquences analogues à celles du n° 2.

Je me propose de démontrer que, si $a > 1$, on aura une infinité de fois

$$(1) \quad \psi(x) < \frac{4a}{\pi} E(x).$$

Si cela n'était pas vrai, en effet, on pourrait trouver un nombre x_0 assez grand pour que, pour toutes les valeurs de x plus grandes que x_0 , on eût

$$\psi(x) > \frac{4a}{\pi} E(x);$$

on pourrait alors trouver un nombre b assez grand pour que,

$$(\text{pour } x_0 > x > 1),$$

on eût

$$\psi(x) > \frac{4a}{\pi} E(x) - b \alpha(x).$$

Enfin pour $x < 1$, on aurait évidemment

$$\psi(x) = \frac{4a}{\pi} E(x) - b\alpha(x),$$

lorsqu'on aurait

$$\psi(x) = E(x) = \alpha(x) = 0.$$

L'inégalité

$$\psi(x) > \frac{4a}{\pi} E(x) - b\alpha(x)$$

serait donc absolument générale.

On en déduirait

$$\sum \psi\left(\frac{x}{m+in}\right) > \frac{4a}{\pi} \sum E\left(\frac{x}{m+in}\right) - b \sum \alpha\left(\frac{x}{m+in}\right)$$

ou bien

$$(2) \quad T(x) > \frac{4a}{\pi} \sum E\left(\frac{x}{m+in}\right) - bE(x).$$

Mais le premier membre de cette inégalité a pour valeur asymptotique

$$\frac{\pi}{2} x^2 \log x,$$

le second membre a pour valeur asymptotique

$$\frac{a\pi}{2} x^2 \log x.$$

Si donc $a > 1$, cette seconde valeur asymptotique est plus grande que la première. Donc, pour x assez grand, l'inégalité (2) cesserait d'avoir lieu.

L'hypothèse faite est donc absurde, et nous devons conclure que l'inégalité (1) a lieu une infinité de fois.

On démontrerait de même qu'on a une infinité de fois

$$\psi(x) > \frac{4a}{\pi} E(x)$$

si $a < 1$.

Si l'on se rappelle quelle est la valeur asymptotique de $E(x)$, on pourra énoncer le même résultat d'une autre manière.

On aura une infinité de fois

$$\psi(x) > ax^2$$

si $a < 1$, et une infinité de fois

$$\psi(x) < ax^2$$

si $a > 1$.

Dans le cas des nombres premiers réels, M. Tchebicheff avait trouvé qu'à partir d'une certaine valeur de x on a

$$\psi(x) < 1,11 \cdot x.$$

On pourrait trouver une inégalité analogue par des procédés semblables à ceux qu'a employés le savant russe, mais il est plus simple de la déduire de la sienne.

Pour éviter toute confusion, je désignerai par $\theta_0(x)$ et $\psi_0(x)$ les fonctions de M. Tchebicheff relatives aux nombres réels; et je continuerai à représenter par $\theta(x)$ et $\psi(x)$ les fonctions relatives aux idéaux.

Alors $\theta_0(x^2)$ est la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x^2 ; et $\theta(x)$ est la somme des logarithmes des normes de tous les idéaux premiers dont la norme ne dépasse pas celle de x , c'est-à-dire deux fois la somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n + 1$ qui ne surpassent pas x^2 ; plus la somme des logarithmes des carrés des nombres premiers de la forme $4n + 3$ qui ne surpassent pas x (c'est-à-dire plus deux fois la somme des logarithmes de ces nombres premiers) plus le logarithme de 2.

Combien de fois le terme $\log p$ figurera-t-il donc dans $\theta_0(x^2)$ et dans $\theta(x)$?

Si $p = 2$, une fois dans θ_0 , une fois dans θ .

Si $p = 4n + 1$, $p \leq x^2$, une fois dans θ_0 , deux fois dans θ .

Si $p = 4n + 3$, $p \leq x$, une fois dans θ_0 , deux fois dans θ .

Si $p = 4n + 3$, $p > x$, $p \leq x^2$, une fois dans θ_0 , zéro fois dans θ .

Si $p > x^2$, zéro fois dans θ_0 , zéro fois dans θ .

On peut déduire de là l'inégalité suivante

$$\theta(x) < 2\theta_0(x^2).$$

Si nous désignons par $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$ la somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n + 1$ et de la forme $4n + 3$ qui ne surpassent pas x , on a donc

$$(3) \quad \begin{cases} \theta(x) = 2\theta_1(x^2) + \theta_2(x) + \log 2. \\ \theta_0(x^2) = \theta_1(x^2) + \theta_2(x^2) + \log 2. \end{cases}$$

Comme on a

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \theta(x) + \theta\sqrt{x} + \theta\sqrt[3]{x} - \dots, \\ \psi_0(x^2) &= \theta_0(x^2) + \theta_0\sqrt{x^2} + \theta_0\sqrt[3]{x^2} + \dots, \end{aligned}$$

il viendra également

$$\psi(x) < 2\psi_0(x^2),$$

et l'on aura, à partir d'une certaine valeur de x ,

$$\psi(x) < 2,22x^2.$$

D'autre part, nous retrouvons les inégalités

$$\psi(x) > \theta(x) > \psi(x) - 2\psi\sqrt{x},$$

d'où

$$\psi(x) > \theta(x) > \psi(x) - 4,44x.$$

On aura une infinité de fois, si $a > 1$,

$$\psi(x) < ax^2$$

et, par conséquent,

$$\theta(x) < ax^2.$$

On aura une infinité de fois, si $a < a' < 1$,

$$\psi(x) > a'x^2,$$

et, par conséquent, si x est assez grand,

$$\theta(x) > a'x^2 + 4,44x > ax^2.$$

Si donc le rapport $\frac{\theta(x)}{x^2}$ tend vers une limite, cette limite ne peut être que l'unité.

Si l'on observe que la différence

$$\theta(x) - 2\theta_1(x^2)$$

est égale à $\theta_2(x) + \log 2$, c'est-à-dire positive et plus petite que $\theta_0(x)$, ou, *a fortiori*, que $1,11x$ (si x est assez grand), on conclura qu'elle est négligeable devant x^2 .

Donc on a une infinité de fois

$$\theta_1(x^2) < \frac{ax^2}{3} \quad \text{si } a > 1,$$

et une infinité de fois

$$\theta_1(x^2) > \frac{ax^2}{2} \quad \text{si } a < 1.$$

Donc la somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n + 1$ qui ne surpassent pas x est une infinité de fois plus petite que $\frac{ax}{2}$ si $a > 1$, et une infinité de fois plus grande que $\frac{ax}{2}$ si $a < 1$.

C'est ce qu'on peut exprimer d'une façon vague, mais concise, en disant que cette somme oscille autour de $\frac{x}{2}$.

9. Soit maintenant $\varphi_1(x)$ la somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n + 1$ qui ne surpassent pas x .

Nous aurons, en appelant p ces nombres premiers,

$$\varphi_1(x) = \sum 1, \quad \theta_1(x) = \sum \log p.$$

et, puisque $\log p < \log x$,

$$\log x \sum 1 = \sum \log x > \sum \log p,$$

$$\varphi_1(x) \log x > \theta_1(x).$$

Or, on a une infinité de fois

$$\theta_1(x) > \frac{ax}{2} \quad \text{si } a < 1.$$

On aura donc une infinité de fois

$$\varphi_1(x) > \frac{ax}{2 \log x}$$

D'autre part, $\theta_1(x)$ est la somme des logarithmes de $\varphi_1(x)$ nombres entiers tous différents entre eux, et sera, par conséquent, plus grand que la somme des logarithmes des $\varphi_1(x)$ plus petits nombres entiers, c'est-à-dire que

$$T[\varphi_1(x)].$$

Je donne ici à $T(x)$ la même signification que M. Tchebicheff, c'est-à-dire la même signification que dans les nos 1 à 5, et non plus la signification que je lui ai donnée dans les nos 5 à 9.

Je rappelle maintenant que, dans le n° 3, j'ai déduit des inégalités

$$\varphi(x) \log x > \theta(x),$$

$$T[\varphi(x)] < \theta(x),$$

et de la suivante

$$\theta(x) < ax,$$

qui doit avoir lieu une infinité de fois si $a > 1$; j'ai déduit, dis-je, que l'on doit avoir une infinité de fois

$$\varphi(x) < \frac{ax}{\log x}$$

si $a > 1$.

De même ici j'ai les deux inégalités

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) \log x &> \theta_1(x), \\ T[\varphi_1(x)] &< \theta_1(x),\end{aligned}$$

et je sais que l'on a une infinité de fois

$$\theta_1(x) < \frac{ax}{2}$$

si $a > 1$. Je puis donc répéter le même raisonnement sans y rien changer et en déduire le même résultat.

(On aura une infinité de fois

$$\varphi_1(x) < \frac{ax}{2 \log x}$$

si $a > 1$.

Ainsi le nombre des nombres premiers de la forme $4n + 1$ qui ne surpassent pas x est une infinité de fois plus petit que $\frac{ax}{2 \log x}$ si $a > 1$ et une infinité de fois plus grand que $\frac{ax}{2 \log x}$ si $a < 1$.

C'est ce qu'on peut exprimer en disant que ce nombre oscille autour de $\frac{x}{2 \log x}$ pendant que le nombre total des nombres premiers non supérieurs à x oscille autour de $\frac{x}{\log x}$, ou, d'une manière plus incorrecte encore, en disant qu'il y a autant de nombres premiers de la forme $4n + 1$ qu'il y en a de la forme $4n + 3$.

Il est clair qu'on pourrait, en raisonnant tout à fait de la même manière, trouver des résultats analogues en partant d'idéaux construits à l'aide d'une équation fondamentale autre que $x^2 + 1 = 0$. Deux nombres s'introduiraient alors dans les calculs, à savoir le nombre des classes d'idéaux et un nombre dépendant des unités complexes; mais je crois qu'ils disparaîtraient à la fin du calcul.