SUR LE CALCUL

DE LA

PÉRIODE DES EXCITATEURS HERTZIENS

PAR

M. H. POINCARÉ

La période des excitateurs a d'abord été calculée à l'aide de la formule de Thomson :

$$\lambda = 2\pi\sqrt{LC}$$

λ désignant la longueur d'onde, L la self-induction en unités électromagnétiques, C la capacité en unités électrostatiques.

On a eu des doutes sur la valeur qu'il convient d'attribuer à L et à C. La self-induction L dépend en effet non seulement du coefficient k de Helmholtz qui est inconnu, mais de la distribution du courant dans le fil; il est certain que ce courant est presque entièrement à la surface de ce fil, mais on peut se demander s'il se transporte tout entier d'une extrémité à l'autre.

D'autre part la capacité dépend évidemment de la distribution de l'électricité sur les conducteurs au commencement de chaque oscillation et il n'y a pas de raison pour que cette distribution soit celle qui correspondrait à l'état statique.

Mais il y a une autre difficulté bien plus grave; dans la formule de Thomson on néglige complètement les courants de déplacement dont le rôle devient prépondérant dans des oscillations aussi rapides. D'où cette première différence : avec cette formule, l'amplitude des oscillations semblerait constante, tandis qu'elle décroît très rapidement.

Ces incertitudes montrent assez quel intérêt il y aurait à posséder une méthode qui permettrait de calculer rigoureusement la période d'un excitateur donné. L'importance du sujet m'engage à publier les résultats que j'ai obtenus dans cet ordre d'idées, quelque incomplets qu'ils soient.

Le problème à résoudre peut s'énoncer comme il suit :

Trouver un nombre μ et six fonctions X, Y, Z, L, M, N, des trois coordonnées x, y et z qui satisfassent aux conditions suivantes :

1° Ces six fonctions sont analytiques en tous points de l'espace occupé par le diélectrique.

2° Si cet espace s'étend à l'infini, ces six fonctions doivent s'annuler à l'infini.

3° En tous les points du diélectrique, elles doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} X &= \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, & K\mu^2 L &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \\ Y &= \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, & K\mu^2 M &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \\ Z &= \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}, & K\mu^2 N &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0$$

4° A la surface des conducteurs et en particulier de l'excitateur, le vecteur, dont les composantes sont X, Y, Z, est normal à cette surface.

Le nombre μ et nos six fonctions peuvent d'ailleurs être soit réels soit imaginaires. Cela posé, si l'on fait :

$$4\pi f = \text{partie réelle de } e^{i\mu t}X, \ \alpha = \text{partie réelle de } i\mu e^{i\mu t}L$$

$$4\pi g = \text{partie réelle de } e^{i\mu t}Y, \ \beta = \text{partie réelle de } i\mu e^{i\mu t}M$$

$$4\pi h = \text{partie réelle de } e^{i\mu t}Z, \ \gamma = \text{partie réelle de } i\mu e^{i\mu t}N$$

le déplacement électrique (f, g, h) et la force magnétique (α, β, γ) satisferont aux équations de Maxwell. On aura ainsi défini une perturbation électromagnétique périodique compatible avec ces équations.

La période sera égale à 2π divisé par la partie réelle de μ.

Si le nombre μ est réel, l'amplitude des oscillations est constante.

Si le nombre μ est imaginaire, cette amplitude décroît suivant une loi exponentielle; il y a un *décrémcnt logarithmique* dépendant de la partie imaginaire de μ.

Cela posé, deux cas sont à distinguer :

1° Ou bien l'excitateur est placé dans une chambre entièrement close, à parois conductrices, de sorte que l'espace occupé par le diélectrique est fini;

2° ou bien l'excitateur est placé dans un espace indéfini occupé par le diélectrique.

Le premier cas est beaucoup plus simple. Malheureusement c'est le second qui a été réalisé dans les expériences; les salles où l'on opérait étaient assez grandes, par rapport aux dimensions de l'excitateur, pour pouvoir être assimilées à un espace indéfini. Je reviendrai sur ce point dans un instant.

Les différences entre les deux cas sont très grandes.

Dans le premier cas, l'énergie ne peut se dissiper au dehors par rayonnement; l'amplitude des oscillations est donc constante et μ est réel.

Dans le second cas, au contraire, il y a rayonnement et, par conséquent, il y a un décrément logarithmique et μ est imaginaire.

Dans le premier cas μ étant réel, on peut toujours supposer que les six fonctions sont également réelles, car si six fonctions imaginaires satisfaisaient aux équations (1), il en serait de même de leurs parties réelles.

Si les six fonctions sont réelles, cela signifie que la *phase* est la même en tous les points du diélectrique.

Au contraire, dans le second cas, la phase est différente aux divers points du diélectrique et les six fonctions sont imaginaires.

D'ailleurs une comparaison simple permet de se rendre compte de ce fait. Si un diapason vibre dans une atmosphère indéfinie le son se propagera dans toutes les directions avec une vitesse déterminée et la phase ne sera pas la même aux divers points de cette atmosphère, mais dépendra de la distance au diapason.

Si, au contraire, ce diapason vibre dans un espace clos, par exemple, dans l'espace compris entre deux plans parallèles, le son se réfléchira sur ces deux plans et les ondes réfléchies interféreront de manière à produire des nœuds et des ventres, ou ce qu'on appelle un système d'*ondes stationnaires*. La phase sera la même en tous les points.

Cet état définitif où les ondes sont stationnaires ne peut s'établir, bien entendu, qu'au bout d'un certain temps, car il faut que le son émané du diapason (ou, dans le cas qui nous occupe, la perturbation émanée de l'excitateur) ait eu le temps de se propager jusqu'à la paroi réfléchissante.

Il faut ensuite, pour que les ondes stationnaires soient appréciables, que la perturbation ne soit pas, avant d'atteindre la paroi réfléchissante, assez affaiblie par le rayonnement pour devenir insensible.

C'est pour cette raison que si la salle où on opère est très grande, tout se passe comme si l'on était placé dans un espace indéfini. C'est donc le second cas qui est réalisé dans les expériences et qui est, par conséquent, de beaucoup le plus intéressant. C'est malheureusement au premier cas que j'ai dû me borner.

Considérons donc une chambre close limitée intérieurement par la surface de l'excitateur, extérieurement par des parois conductrices qui, au point de vue analytique, joueront le même rôle que cette surface, et remplie par un diélectrique. Je désignerai par $d\tau$ un élément quelconque du volume du diélectrique, par $d\omega$ un élément de la surface des conducteurs, par l, m, n les cosinus directeurs de la normale à cet élément.

Soient L, M, N trois fonctions quelconques assujetties seulement aux conditions suivantes, que j'appellerai les conditions (2) :

1° Elles sont analytiques et uniformes dans tout le diélectrique.

2° On a dans le diélectrique

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0$$

3° Le vecteur (L, M, N) en tous points de la surface des conducteurs est tangent à cette surface.

4° L'intégrale

$$T = \int (L^2 + M^2 + N^2) d\tau$$

étendue au diélectrique entier est égale à 1.

Cela posé envisageons l'intégrale

$$U = \int \left[\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy} \right)^2 \right] d\tau$$

Cette intégrale ne peut s'annuler. En effet, si elle s'annulait, on aurait :

$$\frac{dN}{dy} = \frac{dM}{dz}, \frac{dL}{dz} = \frac{dN}{dx}, \frac{dM}{dx} = \frac{dL}{dy}$$

et par conséquent :

$$L dx + M dy + N dz = d\varphi$$

$d\varphi$ étant la différentielle exacte d'une fonction φ qui doit être uniforme, puisque les fonctions L, M, N le sont (cette dernière partie de la démonstration suppose que la chambre est un « espace simplement connexe, » c'est-à-dire n'a pas, par exemple, la forme d'un tore). On a donc :

$$L = \frac{d\varphi}{dx}, \quad M = \frac{d\varphi}{dy}, \quad N = \frac{d\varphi}{dz}$$

Les conditions (2) signifient alors que $\Delta\varphi$ est nul en tous les points du diélectrique et $d\varphi/dn$ nul en tous les points de la surface qui le limite. Mais cela ne peut avoir lieu que si φ est une constante, c'est-à-dire si

$$L = M = N = 0$$

Il est aisé de voir que c'est impossible, puisque $T = 1$.

L'intégrale U ne pouvant s'annuler admet un *minimum*. Il existe donc trois fonctions L, M, N pour lesquelles ce *minimum* est atteint.

Ces fonctions doivent être telles que $\delta U = o$ toutes les fois que $\delta T = o$ et que

$$(3) \qquad \frac{d\delta L}{dx} + \frac{d\delta M}{dy} + \frac{d\delta N}{dz} = \Sigma \frac{d\delta L}{dx} = 0$$

et que le vecteur (δL, δM, δN) est tangent à la surface des conducteurs en tous les points de cette surface.

Cette dernière condition s'exprime par l'équation :

$$(4) \qquad l\delta L + m\delta M + n\delta N = \Sigma l\delta L = 0$$

Posons pour abréger :

$$X = \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, \quad Y = \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, \quad Z = \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}$$

Il viendra :

$$\delta U = 2\int (X\delta X + Y\delta Y + Z\delta Z) d\tau$$
$$\delta T = 2\int (L\delta L + M\delta M + N\delta N) d\tau$$

La valeur de δU peut être transformée par l'intégration par parties ; on trouve :

$$\int X\delta X d\tau = \int X(m\delta N - n\delta M) d\omega - \int \left(\delta N \frac{dX}{dy} - \delta M \frac{dX}{dy}\right) d\tau$$

de sorte que la condition $\delta U = o$ peut s'écrire :

$$\frac{\delta U}{2} = \int \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ \delta L & \delta M & \delta N \end{vmatrix} d\omega - \int \Sigma \left[\delta L \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) \right] d\tau = 0$$

Cette condition doit être remplie quelles que soient les variations δL, δM, δN, pourvu qu'elles satisfassent aux relations (3) et (4) et à la relation $\delta T = o$.

Le calcul des variations nous permet d'en conclure ce qui suit :

On peut trouver un nombre $K\mu^2$ et deux fonctions φ et ψ telles que la condition

$$(5)\quad \frac{\delta U}{2} - \frac{K\mu^2}{2} \delta T + \int \varphi \Sigma \left(\frac{d\delta L}{dx} \right) d\tau - \int \psi \Sigma (l\delta L) d\omega = 0$$

soit remplie quand les variations δL, δM, δN sont *absolument quelconques*. Nous transformerons encore l'une de ces intégrales par l'intégration par parties en écrivant :

$$\int \varphi \Sigma \left(\frac{d\delta L}{dx} \right) d\tau = \int \varphi \Sigma (l\delta L) d\omega - \int \varphi \Sigma \left(\delta L \frac{d\varphi}{dx} \right) d\tau$$

L'équation (5) peut alors s'écrire :

$$\int d\tau \Sigma\left[\delta L\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - K\mu^2 L - \frac{d\varphi}{dx}\right)\right] +$$

$$+ \int d\omega \left[\delta L(Yn - Zm + [\varphi + \psi]l)\right] = 0$$

On doit donc avoir en tous les points du diélectrique:

$$(6) \qquad \begin{aligned} K\mu^2 L &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} \\ K\mu^2 M &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} \\ K\mu^2 N &= \frac{dY}{dx} - \frac{dZ}{dy} - \frac{d\varphi}{dz} \end{aligned}$$

et en tous les points de la surface des conducteurs :

$$(7) \qquad \begin{aligned} Zm - Yn &= l(\varphi + \psi) \\ Xn - Zl &= m(\varphi + \psi) \\ Yl - Xm &= n(\varphi + \psi) \end{aligned}$$

Si l'on ajoute les trois équations (7) après les avoir respectivement multipliées par $l, m, n,$ il vient :

$$(l^2 + m^2 + n^2)(\varphi + \psi) = 0$$

Donc $\varphi + \psi$ est nul en tous les points de la surface des conducteurs et on a :

$$(8) \qquad \frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n}$$

ce qui est une des conditions que nous nous sommes imposées.

On peut en tirer la conséquence suivante :

Envisageons l'intégrale :

$$\int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = \int \Sigma \mathrm{X}dx$$

prise le long d'une courbe fermée quelconque tracée sur la surface des conducteurs. Cette intégrale est nulle puisque le vecteur X, Y, Z est normal au conducteur, ce qui est exprimé par l'équation (8).

Si nous transformons cette intégrale simple en intégrale double par la formule connue, il vient :

$$\int \Sigma l \left(\frac{d\mathrm{Z}}{dy} - \frac{d\mathrm{Y}}{dz} \right) d\omega = 0$$

et comme cela a lieu pour un contour fermé quelconque:

$$\Sigma l \left(\frac{d\mathrm{Z}}{dy} - \frac{d\mathrm{Y}}{dz} \right) = 0 \tag{9}$$

Ajoutons les équations (6) après les avoir respectivement différentiées par rapport à x, y et z, il vient :

$$\mathrm{K}\mu^2 \Sigma \frac{d\mathrm{L}}{dx} = -\Delta\varphi$$

Mais on a, par hypothèse :

$$\frac{d\mathrm{L}}{dx} + \frac{d\mathrm{M}}{dy} + \frac{d\mathrm{N}}{dz} = 0$$

Il reste donc

$$\Delta\varphi = 0.$$

En un point de la surface des conducteurs on a, en ajoutant les équations (6) multipliées respectivement par l, m, n et tenant compte de la relation (9) :

$$K\mu^2 \Sigma l L = -\frac{d\varphi}{dn}$$

mais on a, par hypothèse. en tous les points de la surface :

$$lL + mM + nN = 0$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

On en conclut que φ est une constante ; on a donc

$$K\mu^2 L = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dx}$$

et deux autres équations analogues. Nos six fonctions X, Y, Z, L, M. N satisfont donc bien aux conditions imposées.

Remarquons maintenant que nous avons :

$$U = \int (X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau = \int \Sigma X \left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz} \right) d\tau$$

ou en intégrant par parties, d'après les mêmes règles que plus haut :

$$U = \int \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ L & M & N \end{vmatrix} d\omega - \int \Sigma l \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) d\tau$$

La première intégrale est nulle, la seconde est égale à $-K\mu^2 T$.

On a donc :

$$\frac{U}{T} = K\mu^2$$

D'où la règle suivante : le nombre $K\mu^2$ dont dépend la période la plus grave est le *minimum* de l'expression U/T quand cette expression est formée à l'aide de trois fonctions L, M, N satisfaisant aux conditions (2).

Mais à côté de cette période la plus grave, il peut y avoir des harmoniques supérieures dont je dirai quelques mots, bien que l'expérience ne les ait pas encore décelées.

Soit μ_1, le nombre μ qui correspond à la période la plus grave, soient L_1, M_1, N_1, X_1, Y_1, Z_1, les fonctions L, M, N, X, Y, Z que je viens de définir et qui correspondent à cette période $2\pi/\mu_1$, de sorte que :

$$X_1 = \frac{dN_1}{dy} - \frac{dM_1}{dz}, \quad K\mu_1^2 L_1 = \frac{dZ_1}{dy} - \frac{dY_1}{dz}, \quad \text{etc.}$$

Soient maintenant L, M, N trois fonctions quelconques assujetties seulement d'une part à satisfaire aux conditions (2) et d'autre part à la condition

$$(10) \qquad \int (LL_1 + MM_1 + NN_1) d\tau = 0.$$

Je dis d'abord que si l'on pose pour abréger

$$X = \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}$$

cette condition (10) entraîne la suivante :

$$(11) \qquad \int (XX + YY_1 + ZZ_1) d\tau = 0$$

Appelons V le premier membre de l'équation (11) à démontrer, il vient :

$$V = \int \Sigma XX_1 d\tau = \int \Sigma \left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz} \right) X_1 d\tau$$

ou en intégrant par parties :

$$V = \int \Sigma (Nm - Mn) X_1 d\omega - \int \Sigma \left(N \frac{dX_1}{dy} - M \frac{dX_1}{dz} \right) d\tau$$

ce qui peut s'écrire :

$$V = \int \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ l & m & n \\ L & M & N \end{vmatrix} d\omega - \int \Sigma L \left(\frac{dY_1}{dz} - \frac{dZ_1}{dy} \right) d\tau$$

La première intégrale est nulle, parce que

$$\frac{X_1}{l} = \frac{Y_1}{m} = \frac{Z_1}{n}$$

et il reste :

$$V = K\mu_1^2 \int \Sigma LL_1 d\tau = 0$$

Cela posé, formons avec nos trois fonctions L, M, N l'intégrale U. Cette intégrale ne peut s'annuler; elle admettra donc un *minimum* qui sera plus grand que le *minimum* $K\mu_1^2$ dont U était susceptible quand on n'imposait à ces fonctions que les conditions (2) et qu'on n'avait pas encore ajouté la condition supplémentaire (10).

Supposons ce *minimum* atteint; on devra avoir $\delta U = 0$ toutes les fois que

$$\delta T = 0 \qquad \Sigma \frac{d\delta L}{dx} = 0 \qquad \delta \int \Sigma L L_1 d\tau = 0$$

et que, de plus, on aura à la surface des conducteurs :

$$\Sigma l \delta L = 0$$

Ce sont les conditions auxquelles nous avons été conduits plus haut et auxquelles j'ai dû ajouter une condition supplémentaire, à savoir que la variation du premier membre de (10) doit être nulle.

Le calcul des variations nous apprend alors que l'on peut trouver deux nombres $K\mu^2$ et h et deux fonctions φ et ψ telles que la condition

$$(12) \qquad \frac{\delta U}{2} - \frac{K\mu^2}{2}\delta T + h\int \Sigma L_1 \delta L d\tau + \int \varphi \Sigma \frac{d\delta L}{dx} d\tau + \\ + \int \psi \Sigma (l\delta L) d\omega = 0$$

soit remplie pour des variations L, M et N *quelconques*.

En tenant compte des valeurs trouvées plus haut pour les intégrales

$$\delta U \quad \text{et} \quad \int \varphi \Sigma \frac{d\delta L}{dx} d\tau$$

je puis écrire :

$$\int d\tau \Sigma \left[\delta L \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) - K\mu^2 L + hL_1 - \frac{d\varphi}{dx} \right]$$

$$+ \int d\omega \left[\delta L(Yn - Zm + [\varphi + \psi]l) \right] = 0$$

d'où les conditions

$$(13) \qquad K\mu^2 L = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} + hL_1 \qquad \text{etc.}$$

$$(14) \qquad Zm - Yn = l(\varphi + \psi) \qquad \text{etc.}$$

analogues aux conditions (6) et (7).

On verrait comme plus haut que $\varphi + \psi$ est nul en tous les points de la surface des conducteurs et que l'on a, à la surface de ces conducteurs :

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n}$$

$$\Sigma l \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) = 0$$

Si nous ajoutons l'équation (13) et les deux équations analogues après les avoir respectivement différentiées par rapport à x, y, z et si nous remarquons que

$$\Sigma \frac{dL}{dx} = \Sigma \frac{dL_1}{dx} = 0$$

nous trouverons :

$$\Delta \varphi = 0.$$

Ajoutons maintenant l'équation (13) et les deux équations analogues après les avoir multipliées par l, m, n et rappelons que :

$$\Sigma l\mathrm{L} = \Sigma l\mathrm{L}_1 = \Sigma l\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dy} - \frac{d\mathrm{Y}}{dz}\right) = 0$$

il viendra, à la surface des conducteurs :

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0$$

ce qui montre que φ est identiquement nul.

Il me reste à établir que $h = o$.

Pour cela j'ajoute les équations (13) après les avoir multipliées par L_1, M_1, N_1, j'intègre ensuite par rapport à $d\tau$ dans toute l'étendue du diélectrique.

En me rappelant que

$$\int(\Sigma\mathrm{L}_1{}^2)d\tau = 1 \qquad \int\Sigma\mathrm{L}\mathrm{L}_1 d\tau = 0$$

je trouve :

$$h = \int\Sigma\mathrm{L}_1\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dz} - \frac{d\mathrm{Z}}{dy}\right)d\tau$$

ou en intégrant par parties :

$$h = \int\Sigma\mathrm{L}_1(\mathrm{Y}n - \mathrm{Z}m)d\omega - \int\Sigma\left(\mathrm{Y}\frac{d\mathrm{L}_1}{dz} - \mathrm{Z}\frac{d\mathrm{L}_1}{dy}\right)d\tau$$

La première intégrale est nulle parce que :

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n}$$

et il reste :

$$k = \int \Sigma X \left(\frac{dM_1}{dz} - \frac{dN_1}{dy} \right) d\tau = - \int \Sigma X X_1 \, d\tau = 0$$

On reconnaîtrait ensuite comme plus haut que l'on a :

$$\frac{U}{T} = K\mu^2.$$

Appelons μ_2 la valeur de μ qui correspond à ce *minimum*, appelons L_2. M_2, N_2, X_2, Y_2, Z_2 les valeurs correspondantes de nos six fonctions. Nous aurons défini une nouvelle vibration de période $2\pi/\mu_2$, que l'on pourra appeler la première harmonique. Le nombre μ_2 est donné par la règle suivante : on forme l'intégrale U avec trois fonctions L, M, N satisfaisant aux conditions (2) et (10) et la plus petite valeur que puisse prendre cette intégrale est $K\mu_2{}^2$.

On définirait de la même manière la seconde harmonique.

On considérerait trois fonctions L, M, N satisfaisant aux conditions (2) et (10) et satisfaisant en outre à la condition

$$\int (LL_2 + MM_2 + NN_2) d\tau = 0.$$

et on chercherait à déterminer ces trois fonctions de telle sorte que l'intégrale U soit *minimum*. On arriverait ainsi à trois équations analogues à (13) et dont la première serait :

$$(13\,bis) \quad K\mu^2 L = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} + h_1 L_1 + h_2 L_2.$$

h_1 et h_2 étant deux nombres constants. On verrait, comme plus haut, que $\varphi = o$. On démontrerait ensuite que $h_1 = o$ en multipliant les équations (13 *bis*) par L_1, M_1, N_1 ajoutant et intégrant; et que $h_2 = o$ en multipliant ces équations par L_2, M_2, N_2 ajoutant et intégrant.

On mettrait donc ainsi en évidence l'existence d'une seconde harmonique et la période de cette harmonique serait $2\pi/\mu_3$, $K\mu^2_3$ étant le *minimum* de U.

Et ainsi de suite.

Tous ces raisonnements supposent que la chambre où est enfermé l'excitateur constitue un local simplement connexe, limité par une ou plusieurs surfaces simplement connexes. Ils s'appliqueraient par exemple à une chambre parallélipipédique contenant un excitateur sphérique et plusieurs sphères conductrices. Ils ne s'appliqueraient plus si la chambre avait la forme d'un tore ou si elle contenait un ou plusieurs conducteurs en forme de tore.

Dans ce cas il ne serait plus permis, en effet, de conclure $\varphi = o$ de ce que

$$\Delta \varphi = \frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Voyons comment les résultats se trouveraient modifiés dans ce cas.

En premier lieu, si nous supposons les fonctions L, M et N assujetties seulement aux conditions (2), nous n'avons plus le droit d'en conclure que l'intégrale U ne peut jamais s'annuler.

Supposons en effet, pour fixer les idées, qu'on opère dans une chambre en forme de tore et qu'on prenne l'axe de ce tore pour axe des z; posons ensuite :

$$\varphi_1 = k \text{ arc tg } \frac{y}{x}$$

et que l'on prenne ensuite :

$$L_1 = \frac{d\varphi_1}{dx}, \quad M_1 = \frac{d\varphi_1}{dy}, \ N_1 = 0$$

Si k est un coefficient numérique choisi de telle sorte que

$$\int (L_1^2 + M_1^2 + N_1^2) d\tau = k \int \frac{d\tau}{(x^2 + y^2)} = 1$$

les fonctions L_1, M_1, et N_1 satisferont aux conditions (2) et la valeur correspondante de U est nulle.

Je supposerai, pour simplifier. que dans cette chambre en forme de tore ne se trouve aucune surface conductrice qui ne soit simplement connexe. Alors, des conditions

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dn} = 0$$

il ne nous est plus permis de conclure que φ soit identiquement nulle, mais que φ se réduit à φ_1 à un facteur constant près.

Le premier *minimum* de U étant nul, le son fondamental serait de période infinie, et cette première solution doit être rejetée. Mais si l'on continue à appliquer le procédé que j'ai exposé plus haut, le second *minimum* que l'on rencontre (ainsi que les suivants) nous fournit une véritable solution du problème.

Imaginons en effet que les fonctions L, M, N, au lieu d'être assujetties seulement aux conditions (2), le soient en outre à la condition :

$$(10) \quad \int (LL_1 + MM_1 + NN_1) d\tau = \int \left(L \frac{d\varphi_1}{dx} + M \frac{d\varphi_1}{dy} \right) d\tau = 0$$

Alors U ne peut plus s'annuler; en effet, pour que U fût nul, il faudrait que :

$$L = \frac{d\varphi}{dx}, \quad M = \frac{d\varphi}{dy}, \quad N = \frac{d\varphi}{dz}$$

avec les conditions

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dn} = 0$$

ce qui entraîne, comme nous l'avons vu,

$$\varphi = h\varphi_1$$

h étant une constante. La relation (10) devient alors

$$h \int \Sigma \left(\frac{d\varphi_1}{dx} \right)^2 d\tau = 0$$

d'où

$$h = 0 \qquad L = M = N = 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $T = 1$.

Si U ne peut pas s'annuler, il a un *minimum* et si nous supposons que les fonctions L, M, N aient été choisies de façon que ce *minimum* soit atteint, on arrivera, par le calcul exposé précédemment en détail, aux équations (13) et (14); je récris la première équation (13).

$$K\mu^2 L = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} + hL_1$$

On verrait, comme plus haut, que

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dn} = 0$$

et on en conclurait que φ est égal à φ_1 à un facteur constant près et, par conséquent, $d\varphi/dx$, $d\varphi/dy$, $d\varphi/dz$ égaux à L_1, M_1, N_1, à ce même facteur constant près.

On peut donc faire rentrer le terme $-d\varphi/dx$ dans le terme hL_1 en attribuant à h une valeur considérable.

Le reste du calcul s'achèverait comme dans le cas que nous avions d'abord envisagé.

On verrait aisément ce qu'il convient de faire si les surfaces présentaient des connexions plus compliquées. Je ne veux pas m'attarder à des cas qui ne se rencontreront vraisemblablement jamais dans la pratique, ni abuser plus longtemps de l'hospitalité qui m'est offerte.

Paris, le 26 novembre 1890.