PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Contribution à la theorie des expériences de M.* Hertz. Note de M. **H. Poincaré**.

« 1. Dans les calculs qui accompagnent les admirables expériences de M. Hertz, il s'est glissé une erreur importante qui n'a pas, à ce que je crois, été encore signalée.

» Pour calculer la période de l'excitateur primaire, M. Hertz applique une formule de Sir W. Thomson relative aux décharges oscillantes d'une bouteille de Leyde. D'après cette formule, la période est égale à

$$2\pi\sqrt{LC},$$

C étant la capacité du condensateur et L la self-induction du fil qui réunit les deux armatures. La capacité C est, par définition, le rapport de la charge d'une des deux armatures à la différence de potentiel des deux armatures.

» Dans les expériences de M. Hertz, le condensateur est remplacé par deux sphères de 15^{cm} de rayon, séparées par une distance de $1^{\mathrm{m}},50$. Soient q la charge d'une des sphères, V son potentiel; soient $-q$ et $-$ V la charge et le potentiel de l'autre sphère; on aura, en mesure électrostatique,

$$q = \mathrm{V} \times 15^{\mathrm{cm}}.$$

» La charge d'une des armatures est q; la différence de potentiel est $2\,\mathrm{V}$; on aura donc, d'après la définition de C,

$$\mathrm{C} = \frac{q}{2\,\mathrm{V}} = 7^{\mathrm{cm}},5,$$

au lieu de 15^{cm}.

» La période calculée par M. Hertz se trouve ainsi égale à la véritable multipliée par $\sqrt{2}$.

» Pour l'excitateur auquel se rapporte le calcul du tome XXXI des *Annales de Wiedemann,* calcul que je viens de citer, la demi-longueur d'onde serait donc 375^{cm} au lieu de 531^{cm}. Pour celui qui a servi dans les expériences du tome XXXIV, elle serait 339^{cm} au lieu de 480^{cm}.

» Les expériences ayant donné dans l'air une demi-longueur d'onde de 480^{cm}, il en résulterait, si le calcul de la période était correct d'autre part, que la vitesse de propagation dans l'air serait égale à celle de la lumière multipliée par $\sqrt{2}$.

» C'est là une conclusion à laquelle on ne se résignerait déjà plus aisément. Heureusement, elle ne s'impose pas.

» En premier lieu, le calcul de la période n'est que grossièrement approximatif et M. Hertz est obligé d'y négliger diverses circonstances dont le rôle est peut-être important. Ainsi, il ne tient pas compte des courants de déplacement qui peuvent exister autour de l'excitateur et exercer une influence. M. J.-J. Thomson a cherché depuis à tenir compte de quelques-unes des circonstances négligées par M. Hertz, mais son calcul est encore assez grossièrement approché.

» Le calcul de la période, effectué rigoureusement en partant des hypothèses de Maxwell, nous donnerait-il la longueur d'onde observée? Il est difficile de le savoir sans l'avoir fait, mais cela me semble peu probable : l'influence des circonstances négligées me paraît trop petite pour qu'il en soit ainsi. Il est vraisemblable qu'on sera conduit à modifier la théorie de Maxwell, non pas dans ses traits essentiels, mais dans quelques-unes des hypothèses secondaires, par exemple en ce qui touche les conditions aux limites. Ainsi cette théorie, sous sa forme actuelle, exige que, dans le cas d'oscillations très rapides, les lignes de force électrique soient normales à la surface des conducteurs. Cette condition paraissait déjà à M. Hertz mal confirmée par ses expériences; ce que je viens de dire nous donne une nouvelle raison de l'abandonner.

» De nouvelles expériences pourront seules trancher ces questions. Je ne doute pas que l'admirable méthode expérimentale créée par M. Hertz ne nous en fournisse les moyens. Si le but que l'on croyait atteint est peut-être encore loin de nous, M. Hertz n'en a pas moins eu le rare bonheur, qui n'a été donné qu'à quelques hommes de génie, d'ouvrir aux investigations des chercheurs un champ entièrement nouveau.

» 2. Après ce que je viens de dire, il peut paraître superflu de tirer les conséquences mathématiques de la théorie de Maxwell sous sa forme actuelle. Mais d'abord, s'il semble que cette théorie doive être abandonnée, ce n'est là qu'une probabilité et non une certitude, et la comparaison des expériences avec un calcul *rigoureux* pourra seule nous donner cette certitude. D'autre part, si cette théorie doit être modifiée, c'est encore cette comparaison qui seule pourra nous faire savoir dans quel sens doivent se faire ces modifications.

» J'ai donc cherché, en partant des hypothèses actuellement admises, à calculer rigoureusement la période d'un excitateur de forme donnée. Je n'y ai pas complètement réussi; mais les résultats obtenus, si incomplets qu'ils soient, ne me paraissent pas tout à fait indignes d'intérêt.

» Deux cas sont à distinguer : celui où l'excitateur se trouve placé dans un espace indéfini; celui où il est placé dans une chambre close par des parois conductrices et remplie par un diélectrique. Dans le premier cas, l'énergie se dissipe constamment par radiation, et l'amplitude des oscillations va en diminuant. On exprime ce fait, en langage analytique, en disant que la période est imaginaire et que la partie réelle représente la période observée et la partie imaginaire le décrément logarithmique.

» C'est dans le premier cas qu'on est placé dans les expériences ordinaires, pourvu que les parois de la salle soient, au moins en partie, assez éloignées pour n'exercer aucune influence; c'est malheureusement le second cas seulement que j'ai pu traiter. Peut-être des procédés analogues sont-ils applicables au premier cas, qui est plus compliqué.

» Un excitateur peut donner naissance à des vibrations de périodes différentes et qu'on peut appeler *harmoniques*, bien que ces périodes ne soient pas multiples les unes des autres.

» Soient

$$T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad \ldots$$

ces périodes rangées par ordre d'acuité croissante.

» Dans le second cas, la phase est la même en tous les points du diélectrique, ce qui n'arriverait pas dans le premier cas. Si nous désignons par L, M, N les composantes de la force magnétique, et si nous supposons que la vibration de période T_i existe seule, nous pourrons écrire

$$(1) \qquad L = L_i \cos n_i t, \qquad M = M_i \cos n_i t, \qquad N = N_i \cos n_i t,$$

$$n_i = \frac{2\pi}{T_i},$$

L_i, M_i et N_i étant des fonctions dépendant de x, y, z seulement et indépendantes du temps t.

» Je désigne par A l'inverse de la vitesse de la lumière, par $d\tau$ un élément de volume du diélectrique qui remplit la chambre close où est placé l'excitateur; toutes les intégrales que nous allons rencontrer sont des intégrales triples étendues à tous les éléments $d\tau$ de l'espace occupé par ce diélectrique à l'extérieur de l'excitateur et à l'intérieur de la chambre.

» Cela posé, considérons trois fonctions X, Y et Z de x, y et z assujetties aux conditions suivantes :

» 1° Elles doivent être finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, en tous les points du diélectrique ;

» 2° Elles doivent satisfaire, dans tout le diélectrique, à l'équation dite *solénoïdale*

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0;$$

» 3° A la surface qui limite le diélectrique, c'est-à-dire tant à la surface de l'excitateur qu'à celle des parois de la chambre, elles doivent être telles que le vecteur X, Y, Z soit tangent à cette surface.

» Dans ces conditions, la valeur du rapport

$$\rho = \frac{\int \left[\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right)^2 \right] d\tau}{\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau}$$

ne peut décroître au delà de toute limite.

» On peut donc choisir les fonctions X, Y et Z de telle façon que ce rapport soit minimum.

» Ce minimum est égal à

$$\frac{4\pi^2 A^2}{T_1^2},$$

et il est atteint quand on a

$$\frac{X}{L_1} = \frac{Y}{M_1} = \frac{Z}{N_1},$$

L_1, M_1 et N_1 étant les trois fonctions définies par les équations (1).

» Assujettissons encore les fonctions X, Y, Z à la condition

$$(2) \qquad \int (XL_1 + YM_1 + ZN_1)\, d\tau = 0;$$

le rapport ρ admettra encore un minimum plus grand évidemment que le précédent. Ce minimum sera égal à

$$\frac{4\pi^2 A^2}{T_2^2},$$

et sera atteint quand on aura

$$\frac{X}{L_2} = \frac{Y}{M_2} = \frac{Z}{N_2}.$$

» Si l'on assujettit maintenant X, Y, Z, non seulement à la condition (2), mais encore à la condition

$$(3) \qquad \int (XL_2 + YM_2 + ZN_2)\, d\tau = 0,$$

le nouveau minimum de ρ sera égal à

$$\frac{4\pi^2 A^2}{T_3^2},$$

et sera atteint pour

$$\frac{X}{L_3} = \frac{Y}{M_3} = \frac{Z}{N_3},$$

et ainsi de suite.

» On a ainsi les valeurs des périodes T_1, T_2, ..., ou tout au moins des inégalités auxquelles satisfont ces valeurs, et les conséquences mathématiques des hypothèses de Maxwell se prêteraient sans doute à une vérification expérimentale.

» J'ajouterai que les résultats précédents devraient être modifiés si la chambre, au lieu d'avoir une forme convexe, avait par exemple la forme d'un tore. En réalité, la différence se réduirait à ceci qu'on trouverait $T_1 = \infty$. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Tables météorologiques internationales*; présentées par M. **Mascart**.

« J'ai l'honneur de présenter à l'Académie, au nom de M. H. Wild et au mien, un exemplaire des *Tables météorologiques internationales*, destinées à rendre uniformes, dans tous les pays, le calcul et la réduction des observations.

» Cette publication importante a été décidée en principe par le Congrès météorologique international réuni à Rome en 1879. L'exécution, dont le Comité international nous avait confié le soin dans sa réunion à Copenhague en 1882, en a été retardée par diverses circonstances; car il fallait établir une entente entre les représentants les plus autorisés de la Science sur l'étendue et la disposition des Tables, la direction des calculs, ainsi que sur le choix des formules de réduction. Le plan détaillé de cet Ouvrage a été approuvé, d'une manière définitive, par le Comité international dans sa réunion à Zurich en 1888, de sorte que deux années ont suffi pour mener cette entreprise à bonne fin.