BULLETIN

ASTRONOMIQUE.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR LA FIGURE DE LA TERRE;

PAR M. H. POINCARÉ.

1. Les récents travaux de MM. Stieltjes, Tisserand, Radau et Callandreau ont appelé de nouveau l'attention sur la question de la figure de la Terre, que l'on croyait épuisée. Ces travaux semblent montrer qu'il est difficile de trouver une loi des densités qui satisfasse à la fois à la valeur observée de l'aplatissement et à la valeur observée de la précession. J'ai pensé qu'il ne serait pas inutile de reprendre le problème en me plaçant à un point de vue nouveau.

J'adopterai les notations de M. Radau; j'appellerai donc

a le rapport du rayon du sphéroïde considéré au rayon du globe entier;

ε l'aplatissement de ce sphéroïde;

ρ la densité de la couche sphéroïdale envisagée;

D la densité moyenne du sphéroïde entier.

Je désignerai par les indices o et 1 les valeurs de ces diverses quantités au centre et à la surface, et les dérivées par rapport à a par des accents.

Je poserai, comme M. Radau,

$$\frac{a\varepsilon'}{\varepsilon} = \eta,$$

et je poserai de plus

$$a\eta' = \zeta.$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle de Clairaut peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$\left(\tfrac{1}{6}a^2\varepsilon'' - \varepsilon\right)D + (a\varepsilon' + \varepsilon)\rho = 0,$$
$$(a\eta' + 5\eta + \eta^2)D + 2a(1+\eta)D' = 0,$$

$$\text{dérivée logarithmique de } D\sqrt{1+\eta} = -\frac{5\eta + \eta^2}{2a(1+\eta)}.$$

D'autre part, la condition qui détermine l'aplatissement à la surface peut s'écrire

$$\eta_1 = 0,543.$$

Le problème est ainsi entièrement déterminé.

Après avoir établi ces formules, M. Radau montre que, si η va constamment en croissant du centre à la surface, il est impossible de satisfaire à la fois aux observations de précession et aux observations géodésiques.

J'ai été ainsi conduit à me poser les deux questions suivantes :

1° Serait-il possible de satisfaire aux observations en renonçant à l'hypothèse que η doit être constamment croissant?

2° Si cela est impossible, quelle sera la distribution des densités qui, pour une valeur donnée de la constante de précession, conduira à une valeur maximum de l'aplatissement, c'est-à-dire à une valeur aussi rapprochée que possible de la valeur observée.

2. Voici le système de représentation dont je ferai usage. Je représenterai un mode quelconque de distribution des densités par une courbe C dont les différents points auront pour coordonnées les valeurs de η et de ζ dans les différentes couches qui composent le sphéroïde terrestre.

Dès que cette courbe C sera connue, on possédera toutes les données du problème. On a en effet

$$\frac{da}{a} = \frac{d\eta}{\zeta};$$

comme nous connaissons ζ en fonction de η, nous pouvons écrire

$$\log a = \int_{0,543}^{\eta} \frac{d\eta}{\zeta},$$

ce qui nous donne a en fonction de η.

L'équation de Clairaut donne ensuite

$$\log\left(\mathrm{D}\sqrt{1+\eta}\right) = \text{const.} - \int \frac{5\eta + \eta^2}{2a(1+\eta)} \frac{da}{d\eta} d\eta,$$

ce qui nous donne D en fonction de η (et par conséquent de a) à un facteur constant près; ce facteur constant se détermine d'ailleurs sans peine, puisque D_1 est une donnée de la question.

Connaissant D en fonction de a, on en déduira ρ en fonction de a. La courbe C définit donc la loi des densités. Voyons maintenant à quelles conditions doit satisfaire cette courbe pour être acceptable.

Supposons qu'on parcoure cette courbe C depuis le point A qui correspond au centre de la Terre, c'est-à-dire à $a = 0$, jusqu'au point B qui correspond à la surface du globe, c'est-à-dire à $a = 1$.

Alors a devra aller constamment en croissant, et par conséquent $d\eta$ devra être constamment de même signe que ζ.

Si donc nous imaginons que les axes des η et des ζ soient placés comme le sont d'ordinaire les axes des x et des y dans le plan, la courbe devra être parcourue de gauche à droite si l'on est au-dessus de l'axe des η, et de droite à gauche dans le cas contraire.

En dehors de l'axe des η, la courbe C ne pourra pas avoir de tangente verticale (c'est-à-dire parallèle à l'axe des ζ); on pourrait cependant admettre exceptionnellement une tangente verticale d'inflexion.

Sur l'axe des η, la tangente à la courbe C est, au contraire, toujours verticale (à moins qu'on n'admette que cette courbe a un point anguleux ou un point de rebroussement), excepté toutefois au point A.

Au point A on doit avoir $a = 0$; le point B est défini par la condition

$$\eta = 0,543,$$

de sorte qu'on doit avoir

$$\int_{B}^{A} \frac{d\eta}{\zeta} = -\infty.$$

Cela montre d'abord qu'au point A ζ doit s'annuler, sans quoi l'intégrale serait finie. Supposons qu'au point A nous ayons $\eta = \eta_0$ et

$$\lim \frac{\zeta}{\eta - \eta_0} = h.$$

Il vient alors

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{h}{\eta - \eta_0} + \varphi(\eta),$$

$\varphi(\eta)$ restant finie pour $\eta = \eta_0$; d'où

$$a = (\eta - \eta_0)^h \psi(\eta),$$

$\psi(\eta)$ restant finie pour $\eta = \eta_0$. Pour que a s'annule pour $\eta = \eta_0$, il faut et il suffit que h soit positif.

Cela veut dire que la tangente au point A à la courbe C doit être comprise dans l'angle formé par l'axe des η positifs et par une parallèle à l'axe des ζ positifs, c'est-à-dire dans le premier quadrant.

Nous devons maintenant nous poser la question suivante : Quelles sont les discontinuités que peut présenter la courbe C? Observons que la densité ρ peut être discontinue, mais doit être toujours finie, et par conséquent que D est toujours continue. De même, ζ peut être discontinue, mais doit rester finie, de sorte que η doit être continue.

Si donc la courbe C présente une discontinuité, c'est-à-dire si elle se décompose en deux arcs de courbe AD et EB ne se raccordant pas, les deux points extrêmes D et E seront sur une même verticale; on pourra supposer les deux arcs de courbe raccordés par un segment de verticale DE.

3. Jusqu'ici nous ne nous sommes pas préoccupé de la condition

$$\frac{d\rho}{da} < 0;$$

nous allons maintenant en tenir compte. Posons

$$D = \frac{\lambda}{a^3} + \rho, \qquad \rho = \lambda\mu;$$

d'où

$$\frac{1}{\mu} = \frac{a^3 D}{\rho} - a^3$$

et, en tenant compte de la relation $d(a^3 D) = \rho\, da^3$,

$$d\left(\frac{1}{\mu}\right) = + a^3 D\, d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

On doit donc avoir

$$\frac{d\mu}{da} < 0,$$

c'est-à-dire que μ doit croître de la surface au centre.

Nous sommes donc conduits à construire les courbes $\mu = \text{const.}$, que j'appellerai *courbes de densité*.

L'équation de Clairaut nous donne

$$(\zeta + \eta^2 - \eta - 6)\frac{1}{a^3} + \mu(\zeta + \eta^2 + 5\eta) = 0,$$

$$\frac{\zeta + \eta^2 - \eta - 6}{(\zeta + \eta^2 + 5\eta)a^3} = -\mu.$$

Si nous regardons μ comme une constante et que nous prenions la dérivée logarithmique en observant que $\frac{da}{a} = \frac{d\eta}{\zeta}$, nous trouverons

$$\frac{d\zeta + (2\eta - 1)d\eta}{\zeta + \eta^2 - \eta - 6} - \frac{d\zeta + (2\eta + 5)\,d\eta}{\zeta + \eta^2 + 5\eta} - \frac{3\,d\eta}{\zeta} = 0$$

ou, en développant,

$$2\zeta(\eta + 1)d\zeta = d\eta(3\zeta^2 - 16\zeta + \eta^4 + 4\eta^3 - 11\eta^2 - 30\eta).$$

Telle est l'équation différentielle des courbes de densité.

Cette équation admet trois solutions particulières remarquables :

1° La droite $\eta = -1$;

2° La parabole $\zeta + \eta^2 - \eta - 6 = 0$, qui correspond à $\mu = 0$ et que j'appellerai la parabole P;

3° La parabole $\zeta + \eta^2 + 5\eta = 0$, qui correspond à $\mu = \infty$ et que j'appellerai la parabole P'.

Cette équation différentielle admet les points singuliers suivants :

1° Le point $\eta = -1$, $\zeta = 4$, que j'appellerai N et qui appartient à la fois aux paraboles P et P′ et à la droite $\eta = -1$;

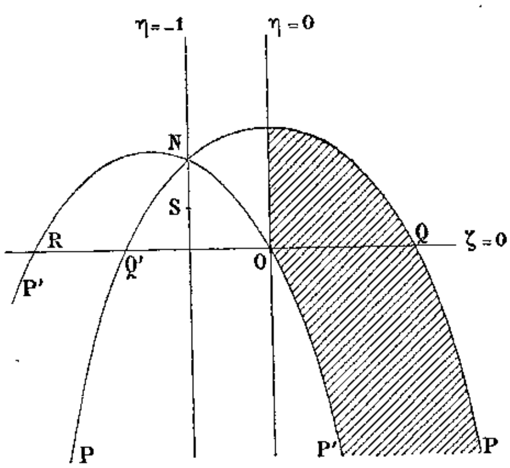
2° Le point $\eta = -1$, $\zeta = \frac{4}{3}$, que j'appellerai S et qui appartient seulement à la droite $\eta = -1$;

3° Les points $\eta = 0$, $\zeta = 0$; $\eta = -5$, $\zeta = 0$, que j'appellerai O et R et qui appartiennent à la parabole P′;

4° Les points $\eta = 3$, $\zeta = 0$; $\eta = -2$, $\zeta = 0$, que j'appellerai Q et Q′ et qui appartiennent à la parabole P.

Une discussion facile montre que par les points N, O et Q′

Fig. 1.



passent une infinité de courbes de densité, tandis que par les points S, R et Q passent deux de ces courbes seulement. En d'autres termes, pour employer les dénominations que j'ai introduites dans mes Mémoires sur les courbes définies par des équations différentielles, les points singuliers N, O et Q′ sont des nœuds, tandis que S, R et Q sont des cols (voir *fig.* 1).

Comme η reste toujours positif et que, d'autre part, μ est essentiellement positif, on n'aura jamais à sortir de la région du plan que je couvre de hachures sur la *fig.* 1 et qui est limitée par l'axe des ζ et par les paraboles P et P′.

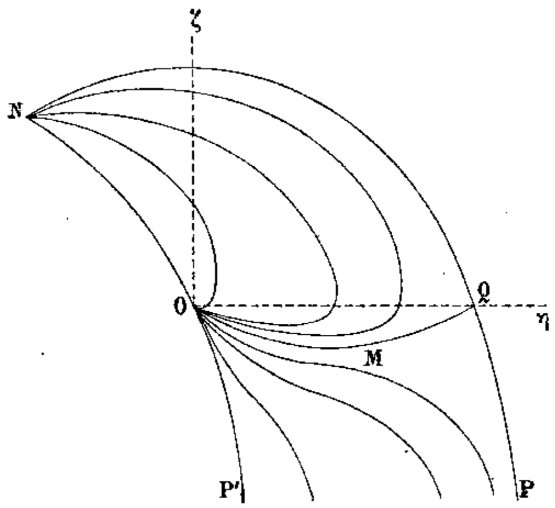
Nous devons donc tout d'abord nous proposer de construire les courbes de densité qui sont contenues dans cette région.

Il existe d'abord une courbe de densité exceptionnelle OMQ qui va du point O au point Q et qui, par conséquent, partage la région hachée en deux régions partielles. Il importe de remarquer que cette courbe OMQ ne va pas couper l'axe des η entre le point O et le point Q; en effet, il est aisé de démontrer que sa tangente au point Q a pour coefficient angulaire

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = 3,$$

ce qui montre que cette tangente est parallèle à une droite du premier quadrant. Si la courbe OMQ allait couper la droite OQ en

Fig. 2.



un point M situé entre O et Q, il y aurait (d'après un théorème que j'ai démontré dans mon Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles) entre Q et M un point où l'axe des η serait tangent à une courbe de densité, ce qui est impossible; car, en tous les points de cet axe, la tangente à la courbe de densité est verticale.

On démontrerait de même que, si l'on excepte le point O, aucune courbe de densité ne peut couper la droite OQ en plus d'un point.

Les courbes de densité présentent donc l'aspect que leur donne la *fig.* 2, où elles sont représentées en trait plein, pendant que les axes sont en pointillé.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

SUR LA FIGURE DE LA TERRE;

PAR M. H. POINCARÉ.

[*Suite et fin* (1).]

4. Quand on parcourt la courbe C du point A au point B, *a* doit croître de o à 1 et, par conséquent, μ doit décroître; on doit donc avoir

$$\frac{d\zeta+(2\eta-1)d\eta}{\zeta+\eta^2-\eta-6}-\frac{d\zeta+(2\eta+5)d\eta}{\zeta+\eta^2+5\eta}-\frac{3\,d\eta}{\zeta}=\frac{d\mu}{\mu}<0.$$

Si l'on fait, par exemple,

$$d\eta=0,\qquad d\zeta>0,$$

cette inégalité est satisfaite.

Il faut alors que la direction de la tangente à la courbe C, *en tenant compte du sens dans lequel cette courbe doit être parcourue,* soit du même côté de la tangente à la courbe de densité qu'une droite verticale parcourue *de bas en haut*.

Pour exprimer ce résultat d'une façon plus nette, faisons la convention suivante. Nous avons vu que la région comprise entre les deux paraboles P et P′ est partagée par la courbe OMQ en deux régions partielles et que chacune des courbes de densité est comprise tout entière dans l'une de ces régions partielles, dont elle ne peut sortir.

Celles de ces courbes de densité qui appartiennent à la région partielle OMQN coupent la droite OQ en un point et un seul.

Si une courbe de densité coupe la droite OQ en M′ et qu'une autre courbe coupe OQ en M″, convenons de dire que la première courbe est plus avancée que la seconde si M′ est à droite de M″. De cette façon, une courbe de densité appartenant à la région ONQM sera d'autant plus avancée qu'elle s'éloignera davantage de la parabole P′ et se rapprochera davantage de la parabole P et de la courbe OMQ.

(1) Voir le *Bulletin*, t. V, p. 5.

Cela posé, on voit que, si l'on parcourt la courbe C du point A au point B, cette courbe ira couper nécessairement des courbes de densité de plus en plus avancées si ζ est positif et, au contraire, des courbes de densité de moins en moins avancées si ζ est négatif.

Il résulte de là que la courbe C ira en s'éloignant de la courbe OMQ dès qu'elle sera au-dessous de la droite OQ; elle ne pourra donc franchir cette courbe OMQ, ni sortir de la région OMQN.

En particulier, η est toujours plus petit que 3.

5. Occupons-nous maintenant de la condition relative à la densité à la surface. On peut admettre qu'à la surface on a à peu près

$$\frac{\rho}{D} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\mu = 1, \qquad a = 1$$

et

$$2\zeta + 2\eta^2 + 4\eta - 6 = 0.$$

Si $\eta_1 = 0,543$, on trouve à peu près

$$\zeta = 1,7;$$

le point B devrait donc avoir pour coordonnées

$$\eta = 0,543, \qquad \zeta = 1,7.$$

Si nous considérons maintenant un point du sphéroïde terrestre très voisin de la surface, il pourra arriver, si la densité varie très rapidement dans le voisinage de la surface, que la densité de ce point ne soit pas égale à $\frac{D}{2}$; mais, comme la densité va toujours en croissant de la surface au centre, elle devra être toujours plus grande que $\frac{D}{2}$; on a ainsi

$$\frac{\rho}{D} > \frac{1}{2}, \qquad \mu > 1$$

et

$$2\zeta + 2\eta^2 + 4\eta - 6 < 0, \qquad \zeta < 1,7.$$

La courbe

$$2\zeta + 2\eta^2 + 4\eta - 6 = 0$$

est une parabole que j'appellerai la parabole P'', qui est comprise entre les deux paraboles P et P' et qui va passer par le point N.

Comme nous connaissons la valeur de l'aplatissement à la surface, nous savons que

$$\eta_1 = 0,543,$$

et nous en concluons que le point B est à l'intersection de la parabole P″ et de la droite $\eta = 0,543$. Mais, si nous ne connaissions pas l'aplatissement, nous saurions seulement que le point B est sur la parabole P″ et sur l'arc EF de cette parabole compris entre le point E, intersection de P″ et de l'axe des ζ, et le point F, intersection de P″ et de la courbe de densité OMQ.

Nous saurions ainsi que η_1 est plus petit que l'η du point F, ce qui nous donnerait une limite de l'aplatissement. C'est là un résultat bien connu, dû à M. Tisserand.

6. Cherchons maintenant l'équation des courbes de densité en termes finis.

Quand on suppose, comme au § 3,

$$D = \frac{\lambda}{a^3} + \lambda\mu$$

et que l'on fait $\mu = 1$, l'équation de Clairaut s'écrit

$$\left(\frac{1}{6}a^2\varepsilon'' - \varepsilon\right)\left(\frac{1}{a^3} + 1\right) + (a\varepsilon' + \varepsilon) = 0.$$

On trouve facilement une intégrale particulière de cette équation : c'est

$$\varepsilon = \frac{a^3}{1 + a^3};$$

d'où

$$\eta = 3 - \frac{3a^3}{1 + a^3}, \qquad \zeta = 9(\varepsilon^2 - \varepsilon)$$

ou

$$\zeta = \eta^2 - 3\eta.$$

C'est encore l'équation d'une parabole et cette parabole n'est autre chose que la courbe de densité OMQ; on vérifie aisément qu'elle passe par les points O et Q et que sa tangente au point Q a bien pour coefficient angulaire

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = 3.$$

Une autre intégrale particulière de l'équation de Clairaut est

$$\varepsilon = \frac{a^{-2}}{1 + a^3},$$

d'où, pour l'intégrale générale,

$$\varepsilon = \frac{a^3 + \lambda a^{-2}}{1 + a^3} \quad (\lambda \text{ constante d'intégration})$$

et, pour l'équation générale des courbes de densité,

$$\left(\frac{\zeta + \eta^2 - \eta - 6}{\zeta + \eta^2 + 5\eta}\right)^5 = \text{const.} \left(\frac{\zeta - \eta^2 - 7\eta - 10}{\zeta - \eta^2 + 3\eta}\right)^3.$$

7. Jusqu'ici nous avons admis que le point A, extrémité de la courbe C, pouvait se trouver en un point quelconque du segment de droite OQ. Cela n'est pas possible si l'on veut que la densité au centre de la Terre soit finie. Nous avons en effet

$$\log \frac{D\sqrt{1+\eta}}{D_1\sqrt{1+\eta_1}} = -\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{5\eta + \eta^2}{2(1+\eta)} \frac{d\eta}{\zeta} \quad \text{et} \quad \log a = \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\zeta}.$$

Au point A la première de ces intégrales doit être finie et la seconde infinie. Cela ne peut avoir lieu que si, en ce point, le rapport des quantités sous le signe $\int$ est nul, c'est-à-dire si

$$\frac{5\eta + \eta^2}{2(1+\eta)} = 0;$$

d'où

$$\eta = 0.$$

Ainsi, le point A se confond avec le point O et, si l'on supposait que ce point A fût tout autre point de la droite OQ, il faudrait admettre également que la densité au centre est infinie, ce qui ne peut pas être le cas de la nature.

Je dois maintenant expliquer pourquoi je n'ai pas cru devoir laisser complètement de côté les lois de densité, inadmissibles au point de vue physique, qui correspondent à des courbes C se terminant en un point de OQ différent du point O. C'est que, s'il est impossible que la densité suive exactement une de ces lois, elle peut du moins les suivre à très peu près, sauf dans le voisinage immédiat du centre de la Terre. C'est ainsi que G. Darwin a cru pouvoir examiner le cas où la densité est proportionnelle à une certaine puissance négative de a; il admettait évidemment que la densité, après avoir suivi cette loi jusqu'à une très faible distance du centre, suivait ensuite une loi toute différente jusqu'au centre; qu'il y avait ainsi au centre de la Terre une sorte de noyau où la densité variait suivant une loi inconnue, mais trop petit pour que la distribution de la matière à l'intérieur de ce noyau pût influer d'une façon sensible sur l'aplatissement ou sur la précession.

Dans notre mode de représentation, la loi de G. Darwin serait représentée par une courbe C réduite à un point unique, à savoir au point

$$\zeta = 0, \qquad \eta = 0,543.$$

Quand donc la courbe C aboutira à un point de OQ autre que O, il restera sous-entendu que cette courbe ne représente qu'approximativement la loi des densités, et que la courbe véritable, après avoir suivi la courbe C jusqu'à un point très voisin de A, s'en détache ensuite et va aboutir au point O, sans jamais s'éloigner sensiblement de la droite OQ.

Une dernière remarque au sujet du mode de représentation adopté.

Si la courbe C coupe la droite OQ en un autre point que le point A (l'intersection se faisant à angle droit comme nous l'avons vu), elle peut représenter une infinité de lois de densité différentes.

Imaginons, en effet, une courbe C partant du point A, confondu ou non avec O, coupant ensuite la droite OQ en un point D et aboutissant enfin au point B, et cherchons ensuite comment varie a quand on parcourt cette courbe. Au point A, a est nul; quand on parcourt l'arc AD, a va en croissant, et tend vers une certaine limite a_0 quand on se rapproche indéfiniment de D. Au point D, on a $\eta = \eta_0$, $\zeta = 0$; si l'on suppose que l'on stationne quelque temps en ce point, on aura pour l'accroissement de $\log a$ pendant la durée de ce stationnement

$$\int \frac{d\eta}{\zeta}.$$

$d\eta$ est nul, parce que η ne varie pas pendant le stationnement; ζ est nul : donc l'intégrale est indéterminée, de sorte que, quand on quitte de nouveau le point D, la valeur de a peut ne plus être égale à a_0 et être devenue a_1. Quand ensuite on parcourra l'arc DB, on croîtra de a_1 à 1.

Le rapport de a_1 à a_0 est indéterminé.

Il est aisé de voir que, pour les valeurs de a comprises entre a_0 et a_1, la densité varie en raison inverse d'une certaine puissance de la distance.

Il peut arriver, en particulier, que le point A se confonde avec le point D; dans ce cas, a_0 est nul.

8. M. Radau a démontré l'identité suivante

$$\sqrt{1+\eta_1} = \int_0^1 \frac{D}{D_1}\, da^5 \, \frac{1+\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2}{\sqrt{1+\eta}},$$

d'où il est permis de conclure, puisque $\frac{D}{D_1}$ est essentiellement positif,

$$\sqrt{1+\eta_1} = \frac{1+\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{10}\xi^2}{\sqrt{1+\xi}} \int_0^1 \frac{D}{D_1}\, da^5,$$

ξ étant l'une des valeurs que peut prendre η quand a varie de 0 à 1. Comme η reste toujours compris entre 0 et 3, ainsi que nous l'avons vu plus haut, il y a lieu de chercher comment varie la fraction

$$\frac{1+\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{10}\xi^2}{\sqrt{1+\xi}}$$

quand ξ varie de 0 à 3.

On trouve que la dérivée de cette expression ne s'annule que pour $\xi = 0$ et pour $\xi = \frac{1}{3}$.

Nous sommes donc conduits à substituer dans l'expression les valeurs

$$0, \quad \tfrac{1}{3} \quad \text{et} \quad 3,$$

ce qui nous donne

$$1, \quad 1,0008 \quad \text{et} \quad 0,8.$$

On voit de plus que l'expression devient égale à 1 pour

$$\xi = 5 - \sqrt{20} = 0,53.$$

Ainsi, ξ variant de 0 à $\frac{1}{3}$, l'expression croît de 1 à 1,0008; ξ variant de $\frac{1}{3}$ à o,53, l'expression décroît de 1,0008 à 1; ξ variant de o,53 à 3, elle décroît encore de 1 à o,8.

On a donc

$$\sqrt{1+\eta_1} < 1,0008 \int_0^1 \frac{D}{D_1}\, da^5.$$

Les observations de la précession exigeraient

$$\sqrt{1+\eta_1} = 1,018 \int_0^1 \frac{D}{D_1}\, da^5.$$

Il est donc impossible d'y satisfaire.

9. Ayant ainsi reconnu l'impossibilité de satisfaire exactement aux observations, nous devons maintenant, par le calcul des variations, chercher quelle est la loi des densités qui y satisfait le mieux. Je dois ajouter toutefois que cela n'a guère qu'un intérêt de curiosité, car un grand nombre de lois très différentes y satisfont presque également bien, et celle qui y satisfait le mieux n'est pas pour cela sensiblement plus probable que les autres.

Il faut chercher la variation de l'intégrale

$$\int_0^1 D\, da^5.$$

A cet effet, nous allons poser

$$D\sqrt{1+\eta} = e^u,$$

d'où

$$(1) \qquad u' + \frac{5\eta + \eta^2}{2a(1+\eta)} = 0$$

et, d'autre part,

$$(2) \quad \delta\int_0^1 D\, da^5 = \delta\int_0^1 \frac{e^u\, da^5}{\sqrt{1+\eta}} = \int_0^1 \left(\delta u \frac{e^u}{\sqrt{1+\eta}} - \frac{1}{2}\delta\eta \frac{e^u}{(1+\eta)^{\frac{3}{2}}}\right) da^5 = 0$$

On trouve en outre, en différentiant l'équation (1),

$$2a\,\delta u' + \delta\eta \frac{\eta^2 + 2\eta + 5}{(1+\eta)^2} = 0,$$

ce qui donne

$$(3) \qquad -\frac{1}{2}\int e^u\, da^5\, \delta\eta\, (1+\eta)^{-\frac{3}{2}} = \int e^u a \frac{\sqrt{1+\eta}}{\eta^2 + 2\eta + 2}\, \delta u'\, d^5 a.$$

L'intégration par parties montre ensuite que le second membre de l'égalité (3) se réduit à

$$\left(e^u a \frac{\sqrt{1+\eta}\,\delta u}{\eta^2+2\eta+5}\right)_0^1 - \int_0^1 e^u \delta u\, da^5 \left[a u' \frac{\sqrt{1+\eta}}{\eta^2+2\eta+5} + 5\frac{\sqrt{1+\eta}}{\eta^2+2\eta+5} + a\eta' \frac{3\eta^2+6\eta-1}{2\sqrt{1+\eta}(\eta^2+2\eta+5)^2}\right].$$

Le terme tout connu s'annule aux deux limites; en effet, il contient a en facteur, il s'annule donc pour $a=0$; de plus, pour $a=1$, δu est nul; car la valeur de u pour $a=1$, qui est $\log(D_1\sqrt{1+\eta_1})$, est une donnée de la question.

Si l'on observe ensuite que

$$a u' + 5 = \frac{10+5\eta-\eta^2}{2(1+\eta)}, \qquad a\eta' = \zeta,$$

on verra que le second membre de (3) se réduit simplement à

$$-\int_0^1 e^u \delta u\, da^5 \left[\frac{10+5\eta-\eta^2}{2\sqrt{1+\eta}(\eta^2+2\eta+5)} + \zeta \frac{3\eta^2+6\eta-1}{2\sqrt{1+\eta}(\eta^2+2\eta+5)^2}\right],$$

de sorte que l'équation (2) se réduit à

$$\int_0^1 \frac{e^u \delta u\, da^5}{2\sqrt{1+\eta}} \left[2 - \frac{10+5\eta-\eta^2}{\eta^2+2\eta+5} - \zeta \frac{3\eta^2+6\eta-1}{(\eta^2+2\eta+5)^2}\right] = 0$$

ou

$$\int_0^1 \frac{e^u \delta u\, da^5}{2\sqrt{1+\eta}(\eta^2+2\eta+5)} \left(3\eta^2 - \eta - \zeta \frac{3\eta^2+6\eta-1}{\eta^2+2\eta+5}\right) = 0.$$

Si l'on veut que cette équation soit satisfaite quel que soit δu, il faut que l'on ait

$$\zeta = \frac{(3\eta^2-\eta)(\eta^2+2\eta+5)}{3\eta^2+6\eta-1}.$$

C'est là l'équation d'une certaine courbe que j'appellerai la courbe K.

Les valeurs remarquables de η entre $\eta = 0$ et $\eta = 3$ sont les suivantes :

$$\eta = \frac{1}{3}, \qquad \eta = \frac{\sqrt{12} - 3}{3} = 0,155.$$

Pour $\eta = 0$ on a.................... $\zeta = 0$, $\frac{d\zeta}{d\eta} = 5$
Pour $0 < \eta < 0,155$ on a............ $\zeta > 0$
Pour $\eta = 0,155$ on a................ $\zeta = \infty$
Pour $0,155 < \eta < \frac{1}{3}$ on a............ $\zeta < 0$
Pour $\eta = \frac{1}{3}$ on a..................... $\zeta = 0$
Pour $\eta > \frac{1}{3}$ on a..................... $\zeta > 0$

Ainsi la courbe K qui possède une asymptote verticale

$$\eta = 0,155$$

coupe la droite OQ en deux points, à savoir au point o et au point $\eta = \frac{1}{3}$. Il est aisé de voir quelle est la portion de cette courbe qui convient à la question; c'est l'arc compris entre le point A, qui a pour coordonnées

$$\eta = \frac{1}{3}, \qquad \zeta = 0,$$

et le point B, qui a pour coordonnées

$$\eta = 0,543, \qquad \zeta = 0,8.$$

Calculons ensuite D et ρ; on trouve

$$\log D \sqrt{1 + \eta} = \text{const.} - \int \frac{(5\eta + \eta^2)(3\eta^2 + 6\eta - 1)\,d\eta}{2(1 + \eta)(3\eta^2 - \eta)(\eta^2 + 2\eta + 5)}.$$

Lorsqu'on parcourra la courbe K du point A au point B, la quantité sous le signe $\int$ restera essentiellement positive; donc $D\sqrt{1 + \eta}$ ira en décroissant et, comme $\sqrt{1 + \eta}$ est croissant, D sera décroissant.

L'équation de Clairaut nous donne ensuite

$$\frac{\rho}{D} = \frac{6 + \eta - \eta^2 - \zeta}{6(1 + \eta)} = \frac{-6\eta^4 - 8\eta^3 + 12\eta^2 + 40\eta - 6}{6(1 + \eta)(3\eta^2 + 6\eta - 1)}$$

ou

$$\frac{\rho}{D} = \frac{-2\eta^2 + \frac{4}{3}\eta + \frac{2}{3}}{6(1 + \eta)} + \frac{37\frac{1}{3}\eta - 5\frac{1}{3}}{6(1 + \eta)(3\eta^2 + 6\eta - 1)}.$$

Dans la première fraction, le numérateur décroît et est positif, le dénominateur croît : donc la fraction décroît; il nous reste à examiner la seconde fraction. La dérivée logarithmique de cette seconde fraction s'écrit

$$\frac{37\frac{1}{3}}{37\frac{1}{3}\eta - 5\frac{1}{3}} - \frac{6(\eta+1)}{3\eta^2+6\eta-1} - \frac{1}{1+\eta}$$

ou

$$\frac{-112\eta^2+32\eta-5\frac{1}{3}}{(37\frac{1}{3}\eta-5\frac{1}{3})(3\eta^2+6\eta-1)} - \frac{1}{1+\eta}.$$

Sous cette forme, il est aisé de voir que cette dérivée logarithmique est négative et, par conséquent, que $\frac{\rho}{D}$ décroît et que ρ *est décroissant,* ce qui est la condition pour qu'une loi des densités soit admissible.

La courbe K, *ou plutôt la portion de cette courbe comprise entre les points* A *et* B, *représente donc une loi des densités admissible, et cette loi est celle qui correspond au minimum de la quantité que l'on a coutume d'appeler* I *et qui est définie par l'égalité*

$$\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{D}{D_1}\,da^5 = 1 - \frac{1}{I}.$$

10. Il peut être intéressant de rechercher quelle est la loi qui répond au maximum de cette même quantité I; l'existence de ce maximum est certaine, puisque M. Tisserand a démontré (*Bull. astr.*, t. I, p. 419) l'inégalité

$$I < 2{,}0288.$$

Cependant le calcul des variations ne nous donne aucun maximum; il n'y a qu'une loi des densités pour laquelle la variation δI est nulle, c'est celle qui correspond au minimum dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent.

Nous devons donc conclure que I n'aurait pas de maximum si la loi des densités était complètement arbitraire, et que si I est limité, c'est parce que la densité est assujettie à être décroissante.

Pour qu il y ait maximum, il faut que, quelle que soit la variation $\delta\rho$ de la densité, la variation δI ne soit jamais positive. Or, si $\delta\rho$ était entièrement arbitraire, cela ne pourrait avoir lieu que si δI était toujours nulle, et nous venons de voir que cette hypothèse conduisait à une solution inadmissible.

S'il y a maximum, c'est donc que $\delta\rho$ n'est pas entièrement arbitraire; comment cela peut-il se faire? Si ρ était constamment décroissant et qu'on donnât à $\delta\rho$ des valeurs suffisamment petites mais d'ailleurs arbitraires, $\rho + \delta\rho$ serait encore décroissant, de sorte que ces valeurs de $\delta\rho$ seraient admissibles. Ainsi $\delta\rho$ est arbitraire à moins que ρ ne soit constant; si, au contraire, ρ est constant, $\delta\rho$ doit être décroissant et n'est plus arbitraire.

Le maximum de I correspond donc à une courbe de densité. Il ne reste plus qu'à comparer entre elles les différentes courbes de densité. Comme l'équation générale de ces courbes ne contient qu'un seul paramètre arbitraire, I n'est plus fonction que de ce paramètre. Alors I atteindra son maximum, soit lorsque sa dérivée par rapport à ce paramètre s'annulera, soit quand la courbe de densité se réduira à une des courbes extrêmes qui correspondent aux cas de $\mu = 0$ ou $\mu = \infty$.

On vérifierait que la première hypothèse doit être rejetée; parmi les trois courbes extrêmes ($\mu = 0$, $\mu = \infty$) qui sont les trois paraboles

$$\zeta = -\eta^2 - 5\eta, \qquad \zeta = -\eta^2 + \eta + 6, \qquad \zeta = \eta^2 - 3\eta,$$

la dernière est seule admissible.

Elle correspond au cas suivant :

La densité du globe est constante et égale à $\lambda\mu$; de plus, un point matériel de masse finie égale à $\frac{4}{3}\pi\lambda$ se trouve au centre de la Terre; on a alors

$$\rho = \lambda\mu, \qquad D = \lambda\left(\frac{1}{a^3} + \mu\right),$$

et l'on trouve

$$\eta = 3 - \frac{3a^3}{\frac{1}{\mu} + a^3};$$

on a à la surface

$$\eta_1 = \frac{3}{\mu + 1}, \qquad D_1 = \lambda(\mu + 1).$$

D'ailleurs, d'après la définition de I, il vient

$$I = \frac{\frac{1}{3} D_1}{\frac{1}{5}\rho} = \frac{5}{3}\,\frac{\mu + 1}{\mu} = \frac{5}{3 - \eta_1}.$$

Mais on sait que

$$\eta_1 = \frac{5\varphi}{2\varepsilon_1} - 2,$$

ce qui donne

$$I = \frac{1}{1 - \frac{\varphi}{2\varepsilon_1}} = 2,0288.$$

Le maximum de I est donc précisément la limite supérieure trouvée par M. Tisserand. Cette limite peut être atteinte ou plutôt on peut en approcher autant que l'on veut.

11. L'analyse qui précède est celle par laquelle j'avais été conduit aux conclusions énoncées dans une Note récemment insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Depuis, M. Callandreau a montré (*Bull. astr.*, t. V, p. 473) que le résultat le plus important, c'est-à-dire l'inégalité $\eta < 3$, peut être déduit presque immédiatement des équations de Clairaut. J'ai cru néanmoins devoir reproduire mon analyse primitive, parce qu'elle me conduit à d'autres inégalités importantes et qu'elle me fait connaître entre autres le système complet des inégalités auxquelles satisfont les quantités η et ζ. Les mêmes principes pourraient d'ailleurs, comme je me réserve de le faire voir plus tard, conduire au système complet des inégalités auxquelles satisfont les quantités η, ζ, ε, a, ρ et D.

SUR LES DIFFÉRENCES QUE PRÉSENTENT L'HÉMISPHÈRE NORD ET L'HÉMISPHÈRE SUD DU SOLEIL ;

Par M. G. SPOERER.

L'étude des taches solaires a montré que les époques des maxima et des minima ne sont pas exactement les mêmes pour les deux hémisphères. On a pu, dans plusieurs cas, constater avec certitude une différence notable de ces époques. Quant à la fréquence des taches, il arrive assez souvent que la prépondérance appartient alternativement à l'hémisphère Nord et à l'hémisphère Sud. On pourrait donc croire que, pour un intervalle de temps suffisamment long, il s'établirait une sorte de compensation; mais les observations ne confirment pas cette hypothèse.