PRIX DÉCERNÉS.

ANNÉE 1888.

GÉOMÉTRIE.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(Commissaires : MM. Hermite, Jordan, Darboux, Halphen; Poincaré, rapporteur.)

« *Perfectionner la théorie des équations algébriques de deux variables indé-* » *pendantes.* »

La théorie des fonctions abéliennes a été le point de départ de recherches profondes auxquelles nous devons la connaissance complète des courbes algébriques, et où l'on voit les parties les plus diverses des Mathématiques, l'Algèbre, le Calcul intégral, la Géométrie analytique et la Géométrie de situation se prêter un mutuel appui.

Les notions en apparence les plus éloignées se trouvent ramenées les unes aux autres; c'est ainsi, par exemple, qu'on démontre que le nombre des intégrales de seconde espèce est égal à deux fois le genre de la courbe algébrique génératrice ou au nombre des cycles de la surface de Riemann correspondante. Aussi cherche-t-on depuis longtemps à étendre les mêmes résultats aux surfaces algébriques. Malheureusement, le problème est aussi difficile qu'il est intéressant et, malgré bien des efforts, il est resté vierge jusqu'à ce jour, si l'on met à part les travaux récents et déjà classiques de M. Nöther sur le genre des surfaces.

En le mettant au concours cette année, l'Académie ne pouvait espérer que les concurrents en traiteraient à fond et jusqu'au bout toutes les parties. On n'y arrivera que par une longue suite d'efforts auxquels bien des travailleurs devront participer.

Deux voies s'ouvraient au chercheur : ou bien prendre une question spéciale et l'approfondir; ou bien essayer de s'élever assez haut pour tout voir d'un coup d'œil.

Choisir la première, c'eût été, quel que soit le paradoxe, rester superficiel. Ici, en effet, le secret profond qu'il importe de pénétrer, c'est bien moins la solution de tel problème particulier que la connaissance des liens intimes qui le font dépendre des problèmes voisins.

L'auteur de l'unique Mémoire présenté au concours a préféré la seconde voie; c'était se résigner à poser plus de questions qu'il n'en résoudrait; mais on n'est inventeur fécond qu'à ce prix.

Les cycles d'une courbe algébrique, ou plutôt de sa surface de Riemann, sont susceptibles d'une double généralisation; les surfaces algébriques peuvent posséder en effet des cycles linéaires et des cycles à deux dimensions.

De même, les intégrales abéliennes peuvent se généraliser de deux manières : par les intégrales de différentielles totales et par les intégrales doubles.

L'auteur arrive d'abord à un résultat bien inattendu et bien digne d'intérêt.

Si une surface algébrique est la plus générale de son degré, elle ne possède aucun cycle linéaire, ni par conséquent aucune intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce. Ce n'est que la présence de certaines singularités qui pourra faire apparaître ces cycles et ces intégrales.

Quand ces intégrales existent, on peut démontrer à leur sujet certaines propriétés qui rappellent par leur forme les propositions analogues de la théorie des courbes; par exemple, le nombre des intégrales de seconde espèce est égal à celui de leurs périodes.

Si une surface n'a pas en général de cycle linéaire, elle aura au contraire, en général, des cycles à deux dimensions; mais il ne paraît pas y avoir de relation simple entre le nombre de ces cycles et le genre de la surface.

Dans cette étude, l'auteur fait usage d'une équation différentielle linéaire et ramène la détermination des cycles, qui est une question de

Géométrie de situation, et celle des intégrales abéliennes, qui est une question de Calcul intégral, à l'étude complète du groupe de cette équation.

Pour compléter la théorie, il fallait encore s'occuper des transformations birationnelles des surfaces. Après avoir donné une règle générale pour reconnaître si deux surfaces peuvent se transformer l'une dans l'autre, l'auteur s'attache surtout aux transformations des surfaces en elles-mêmes. Il énumère les divers cas qui peuvent se présenter et ramène les groupes de transformations birationnelles à un petit nombre de types. Il remarque, en passant, une différence très considérable entre les surfaces et les courbes algébriques : une transformation d'une surface en une autre peut être biuniforme sans être birationnelle.

Le Mémoire se termine par diverses applications des principes précédents à l'intégration des équations différentielles; si l'intégrale générale d'une équation du second ordre est uniforme, il arrivera souvent que l'équation différentielle ne sera pas altérée par certaines transformations birationnelles et que l'intégration deviendra possible. Deux difficultés se présentent toutefois ; une intégrale peut être à apparence uniforme sans être uniforme; une transformation peut être biuniforme sans être birationnelle. Ces difficultés ne sont pas résolues, mais c'était déjà un mérite de les signaler avec précision.

En résumé, chacun des cinq Chapitres de ce Mémoire contient une découverte importante qui réalise, comme le demandait l'Académie, un progrès notable dans nos connaissances sur les fonctions algébriques de deux variables. Sans doute, si le plan de l'édifice futur est nettement conçu et nettement exposé, l'édifice lui-même est loin d'être entièrement construit; mais la Commission ne peut s'en étonner, car elle sait que c'est une œuvre de longue haleine qui exigera encore beaucoup d'efforts; aussi propose-t-elle de décerner le grand prix des Sciences mathématiques au Mémoire n° 1, portant pour épigraphe : *Juvat integros accedere fontes*.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

Conformément au Règlement, M. le Président procède à l'ouverture du pli cacheté accompagnant le Mémoire couronné et proclame le nom de M. Émile Picard.