COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 17 DÉCEMBRE 1888,

PRÉSIDENCE DE M. JANSSEN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie analytique de la chaleur.* Note de M. H. Poincaré.

« Dans une Note antérieure (*Comptes rendus*, t. CIV, p. 1754), j'ai étudié le problème du refroidissement d'un corps solide homogène et isotrope. J'ai montré qu'il existe une infinité de fonctions

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_n, \quad \ldots$$

qui satisfont, à l'intérieur du corps, à l'équation

$$\Delta U_n + k_n U_n = 0,$$

et à sa surface, à l'équation

$$\frac{dU_n}{dn} + h U_n = 0.$$

Le coefficient h est une constante positive qui dépend du pouvoir émissif du corps et qui est une donnée de la question. Les coefficients

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots$$

sont des constantes positives qu'il reste à déterminer.

» J'ai appliqué ensuite ce résultat à la détermination de la température d'un point quelconque du corps à un instant quelconque. Mais, dans cette application, il y a un théorème qui joue un rôle essentiel :

» Il faut commencer par établir que k_n croît indéfiniment quand son indice n augmente lui-même au delà de toute limite.

» Je n'ai donné de ce théorème, dans la Note que je cite, qu'une démonstration peu rigoureuse. Je me suis contenté de le démontrer complètement pour un polyèdre dont toutes les faces sont parallèles aux plans de coordonnées, et de faire observer ensuite que l'on peut toujours trouver un pareil polyèdre différant aussi peu que l'on veut d'un solide quelconque.

» Pour démontrer le théorème d'une façon plus satisfaisante, il faut trouver une limite inférieure de la quantité k_2. Nous nous restreindrons au cas d'un solide *convexe* et de $h = 0$. Soit alors V une fonction quelconque de x, y, z. Soient $d\tau$ et $d\tau'$ deux éléments de volume quelconque du corps; x, y, z et x', y', z' les coordonnées des centres de gravité M et M' de ces deux éléments; V et V' les valeurs de la fonction V aux points M et M'; *soit enfin* W *le volume total du corps*. On peut se proposer de choisir la fonction V de façon à rendre minimum le rapport

$$(1) \qquad \frac{2W\displaystyle\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]d\tau}{\displaystyle\int\int(V - V')^2\,d\tau\,d\tau'}.$$

Il est aisé de voir que ce minimum est alors égal à k_2.

» Posons alors

$$\begin{aligned} x &= \xi + \rho\cos\varphi\sin\theta, & x' &= \xi + \rho'\cos\varphi\sin\theta;\\ y &= \eta + \rho\sin\varphi\sin\theta, & y' &= \eta + \rho'\sin\varphi\sin\theta;\\ z &= \rho\cos\theta, & z' &= \rho'\cos\theta. \end{aligned}$$

L'expression (1) deviendra

$$(2) \qquad \frac{3W}{\pi}\,\frac{\displaystyle\int\left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2\sin\theta\cos\theta\,d\rho\,d\xi\,d\eta\,d\theta\,d\varphi}{\displaystyle\int(V - V')^2(\rho - \rho')^2\sin\theta\cos\theta\,d\rho\,d\rho'\,d\xi\,d\eta\,d\theta\,d\varphi},$$

où l'on a

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{dV}{dx}\cos\varphi\sin\theta + \frac{dV}{dy}\sin\varphi\sin\theta + \frac{dV}{dz}\cos\theta.$$

» Si l'on intègre d'abord par rapport à ρ et à ρ', voici comment on trouvera les limites d'intégration. Si, ξ, η, φ et θ restant constants, on fait varier ρ, le point x, y, z décrira une droite. Cette droite coupera la surface de notre solide convexe en deux points, et les valeurs correspondantes de ρ seront ρ_0 et ρ_1. Les limites d'intégration pour ρ et ρ' seront alors ρ_0 et ρ_1. On aura, d'ailleurs,

$$\rho_1 - \rho_0 < \lambda,$$

λ *étant la plus grande distance de deux points de la surface du corps.*

» Nous sommes ainsi conduits à chercher le minimum du rapport des deux intégrales

$$B = \int_{\rho_0}^{\rho_1}\left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 d\rho, \qquad A = \int_{\rho_0}^{\rho_1}\int_{\rho_0}^{\rho_1}(V - V')^2(\rho - \rho')^2\, d\rho\, d\rho'.$$

Ce minimum existe certainement; par de simples raisons d'homogénéité, on voit qu'il doit être de la forme

$$\frac{2k_0}{(\rho_1 - \rho_0)^5},$$

k_0 étant une constante numérique. La détermination effective de cette constante est possible, mais serait très pénible; elle dépend de l'intégration d'une équation différentielle et de la résolution d'une équation transcendante.

» On aura donc, pour une fonction V quelconque,

$$\frac{B}{A} > \frac{2k_0}{(\rho_1 - \rho_0)^5} > \frac{2k_0}{\lambda^5}.$$

» Il importe de remarquer que, dans le calcul des intégrales qui entrent dans l'expression (2), les limites d'intégration sont 0 et 2π pour φ, 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour θ. Les fonctions sous le signe $\int$ sont donc toujours positives.

» Donc l'expression (2), qui n'est qu'une transformation de l'expression (1), sera toujours plus grande que

$$\frac{6k_0 W}{\pi\lambda^5}.$$

» On a donc

$$k_2 > \frac{6k_0 W}{\pi\lambda^5}.$$

» Si nous considérons un solide quelconque, on peut le diriger en $n-1$ solides partiels convexes; on aura alors, en raisonnant comme nous l'avons fait dans la Note citée,

$$k_n > \frac{6k_0}{\pi}\frac{W}{\lambda^5},$$

$\frac{W}{\lambda^5}$ étant la valeur de cette fraction calculée pour celui des $n-1$ solides partiels pour lequel cette fraction est la plus petite. Or on peut choisir n assez grand et diriger la décomposition de telle sorte que $\frac{W}{\lambda^5}$ soit aussi grand que l'on veut.

» Donc k_n *croît indéfiniment avec* n.

» Le théorème est démontré par un solide quelconque et pour $h=0$; comme k_n est croissant avec h, il est vrai aussi pour h quelconque.

» Voici maintenant un moyen de trouver une limite *supérieure* de k_n.

» Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ n fonctions quelconques de x, y, z. Posons

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_n F_n,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des indéterminées. Posons encore

$$B = h\int F^2\,d\omega + \int\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]dt,$$
$$A = \int F^2\,dt,$$

A et B seront des formes quadratiques par rapport à ces n indéterminées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

» Formons la forme $B - \lambda A$, où λ est un coefficient quelconque; écrivons que le discriminant de cette forme est nul. Nous obtiendrons une équation algébrique de degré n en λ. Cette équation aura toutes ses racines réelles et positives.

» Soient

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n,$$

ces racines rangées par ordre de grandeur croissante. On aura

$$\lambda_1 > k_1, \qquad \lambda_2 > k_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_n > k_n.$$

» Voici enfin un autre moyen de trouver une limite supérieure de k_2, dans le cas de $h = 0$.

» Soient u, v, w trois fonctions quelconques de x, y, z que j'assujettis à une seule condition. On devra avoir à la surface du corps

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

α, β et γ étant les trois cosinus directeurs de la normale à la surface du corps. Il arrivera alors que le rapport

$$\frac{\int \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right)^2 dt}{\int (u^2 + v^2 + w^2)\, dt}$$

sera toujours plus grand que k_2. »

PHYSIOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *Des muscles de la vie animale à contraction brusque et à contraction lente, chez le lièvre;* par M. **L. Ranvier.**

« J'ai fait récemment, dans mon laboratoire de Thélys, une expérience que je désirais faire depuis plusieurs années. Cette expérience a pour but l'étude comparative, chez le lièvre vivant, des deux espèces de muscles de la vie animale, qui, chez le lapin, diffèrent par la couleur, la structure et les fonctions : les muscles blancs ou muscles à contraction énergique et brusque; les muscles rouges, muscles à contraction lente, muscles équilibrateurs.

» Parmi les Communications que j'ai déjà faites à l'Académie au sujet de ces deux espèces de muscles, je rappellerai seulement la dernière (1). Dans cette Communication, j'ai montré que, chez le lièvre, tous les muscles sont rouges; mais que, si l'on examine au microscope ceux des muscles de cet animal qui sont blancs chez le lapin, le grand adducteur par exemple, on leur trouve la structure des muscles blancs, tandis que si l'observation porte sur les muscles qui sont rouges chez le lapin, entre autres le demi-tendineux et le soléaire, on y reconnaît la constitution histologique des muscles rouges. A cette époque, je n'avais examiné les muscles du lièvre

(1) L. Ranvier, *Des muscles rouges et des muscles blancs chez les Rongeurs* (*Comptes rendus*, 3 janvier 1887).