

COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 4 JUIN 1888.

PRÉSIDENTE DE M. JANSSEN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation.*
Note de M. H. POINCARÉ.

« Dans une remarquable Thèse présentée il y a un an à la Faculté des Sciences de Paris, M. Hamy a obtenu le résultat suivant :

» Si une masse fluide animée d'un mouvement de rotation est composée de couches de densités différentes, il ne peut pas arriver que les surfaces de séparation de deux couches consécutives soient toutes des ellipsoïdes.

» Pour établir cette proposition, M. Hamy commence par démontrer, à titre de lemme, le théorème suivant :

» *Si toutes les surfaces de séparation étaient des ellipsoïdes, tous ces ellipsoïdes seraient homofocaux.*

» Ce lemme est susceptible d'une généralisation qui peut présenter quelque intérêt, moins peut-être en raison du résultat lui-même que de la méthode qui me l'a fait obtenir, et qui est tout à fait différente de celle de M. Hamy.

» Supposons un noyau solide, dont la densité intérieure ρ varie d'une manière tout à fait quelconque; imaginons que ce noyau soit recouvert de deux couches fluides superposées; la première intérieure, de densité ρ_1 , recouvrant entièrement le noyau solide, la seconde extérieure, de densité ρ_2 , recouvrant entièrement la première. Tout le système sera animé d'un mouvement de rotation commun. Je dis que, si les surfaces extérieures de ces deux couches fluides sont toutes deux des ellipsoïdes, ces ellipsoïdes seront homofocaux.

» Si j'ai supposé le noyau solide, ce n'est pas que le résultat ne soit encore vrai si ce noyau est fluide en totalité ou en partie. Mais, si le noyau était fluide, sa densité intérieure ne pourrait pas varier d'une façon quelconque et devrait satisfaire aux équations d'équilibre. Je n'ai donc supposé le noyau solide que pour donner au résultat toute sa généralité.

» Soient

x, y et z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque;

ω la vitesse de rotation;

r la distance du point (x, y, z) à l'axe de rotation.

» Soient E_2 l'ellipsoïde qui limite extérieurement la deuxième couche fluide et par conséquent tout le système et E_1 l'ellipsoïde qui sépare la première couche fluide de la seconde.

» Soient λ, μ, ν les coordonnées elliptiques d'un point de l'espace par rapport à l'ellipsoïde E_1 ; λ', μ', ν' les coordonnées elliptiques de ce même point par rapport à l'ellipsoïde E_2 .

» Le potentiel newtonien total du système se composera :

» 1° Du potentiel de l'ellipsoïde E_2 (supposé plein, homogène et de densité ρ_2) : nous l'appellerons V_2 ;

» 2° Du potentiel d'une couche comprise entre l'ellipsoïde E_1 et la surface du noyau solide avec la densité $\rho_1 - \rho_2$;

» 3° Du potentiel d'une matière attirante remplissant le noyau solide avec la densité variable $\rho - \rho_2$.

» Nous appellerons V_1 la somme des deux dernières parties, de sorte que le potentiel total sera égal à $V_1 + V_2$.

» On doit remarquer que la fonction V_1 , à l'intérieur de E_1 , n'est pas la

continuation analytique de la fonction V_1 à l'extérieur de E_1 ; de même V_2 est représenté par deux fonctions analytiques différentes à l'intérieur et à l'extérieur de E_2 .

» L'équation d'équilibre s'écrit

$$V_1 + V_2 + \frac{\omega^2 r^2}{2} = \text{const.},$$

et elle doit être satisfaite (avec deux valeurs différentes de la constante) à la surface de E_1 et à celle de E_2 .

» La fonction $\frac{\omega^2 r^2}{2}$ est un polynôme du second degré x, y, z ; la fonction V_2 est égale aussi à un polynôme du second degré en x, y, z à l'intérieur et à la surface de E_2 .

» Nous devons conclure que V_1 se réduit à un polynôme du second degré en x, y, z à la surface de E_1 et un autre polynôme du second degré en x, y, z à la surface de E_2 .

» En partant de l'ellipsoïde E_1 et des coordonnées elliptiques λ, μ, ν , on peut former une suite indéfinie de fonctions de Lamé

$$R_0, R_1, \dots, R_n;$$

R_n sera un polynôme en $\lambda, \sqrt{\lambda^2 - b^2}, \sqrt{\lambda^2 - c^2}$ (b^2 et c^2 conservant le sens habituel donné à ces notations dans la théorie des fonctions de Lamé). A R_n correspondront deux fonctions conjuguées M_n et N_n obtenues en remplaçant, dans R_n , λ par μ et par ν , et la fonction

$$S_n = R_n \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{R_n^2 \sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}}.$$

» Il y a une seule fonction de Lamé de degré 0 qui est $R_n = 1$: nous lui donnerons l'indice 0; il y en a trois de degré 1: nous leur donnerons les indices 1, 2, 3; il y en a cinq de degré 2: nous leur donnerons les indices 4, 5, 6, 7, 8.

» Avec l'ellipsoïde E_2 et les coordonnées elliptiques λ', μ', ν' , on formera de même les fonctions de Lamé R'_n, M'_n, N'_n, S'_n .

» De ce que V_1 est égal à la surface de E_1 à un polynôme du second degré en x, y, z , on conclut qu'on a à l'extérieur de E_1

$$V_1 = \sum_{n=0}^{n=8} A_n S_n M_n N_n,$$

les A_n étant des coefficients constants.

» De même, V_1 étant encore égal à un polynôme du second degré à la surface E_2 , on devra avoir à l'extérieur de E_2

$$V_1 = \sum_{n=0}^{n=8} A'_n S'_n M'_n N'_n,$$

les A' étant de nouveaux coefficients constants.

» On a donc l'identité

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{n=8} A_n S_n M_n N_n = \sum_{n=0}^{n=8} A'_n S'_n M'_n N'_n,$$

et c'est cette identité qui ne peut avoir lieu que si E_1 et E_2 sont homofocaux. A vrai dire, l'identité (1) n'est démontrée que pour les valeurs réelles de x , y et z , et quand le point (x, y, z) est extérieur à E_2 . Mais, quand deux fonctions analytiques sont identiques tout le long d'une ligne continue, elles restent identiques pour toutes les valeurs réelles et imaginaires des variables. L'identité (1) ne souffre donc aucune exception.

» Cela posé, observons que le premier membre de (1) n'est pas une fonction uniforme de x , y et z , mais qu'il admet une infinité de valeurs, lesquelles s'échangent entre elles quand le point (x, y, z) appartient à la développable circonscrite aux ellipsoïdes homofocaux à E_1 .

» De même, le second membre de (1) admettra une infinité de valeurs qui s'échangeront entre elles quand le point (x, y, z) appartiendra à la développable circonscrite aux ellipsoïdes homofocaux à E_2 .

» Mais, les deux membres de (1) devant être identiques, ces deux développables devront coïncider, ce qui prouve que E_1 et E_2 sont homofocaux.

G. Q. F. D.

» Une question se pose alors naturellement. Est-il possible d'imaginer à l'intérieur du noyau solide une distribution de la densité telle que les deux couches fluides prennent effectivement la forme de deux ellipsoïdes homofocaux? La réponse doit être affirmative.

» Le résultat obtenu dans cette Note peut être généralisé de la façon suivante. Si un noyau solide quelconque est recouvert de n couches fluides superposées, et que tout le système soit animé d'un mouvement de rotation commun, si la surface extérieure de la dernière couche fluide ainsi que les surfaces de séparation de deux couches fluides consécutives sont toutes des ellipsoïdes, tous ces ellipsoïdes sont homofocaux. »